圏論のノート

箱（@o_ccah）

2019 年 7 月 20 日

概要

圏論の基礎事項をまとめた．特に，米田の補題を有効に用いて，随伴の諸性質を見通しよく記述することに重点を置いた．

目次

記号と用語

- 本稿を通して，対象は a, b, c など，射は f, g, h など，圏は A, B, C など，関手は F, G, H など，自然変換は α, β, γ などで表すことが多い．
- 写像（特に関手による対象・射の対応）の適用 $f(x)$ を，括弧を省いて fx とも書く．この記号法は右結合とする．したがって，gfx は $g(f(x))$ を表す．

1　圏，関手，自然変換

1.1　圏

定義 1.1（圏） 圏 A とは,

- A の対象の集合 $\mathrm{ob}(A)$
- $a, b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して，A の a から b への**射**の集合 $\mathrm{Hom}_A(a, b)$ を対応させる写像
- $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して，a の**恒等射** $1_a \in \mathrm{Hom}_A(a, a)$ を対応させる写像
- $a, b, c \in \mathrm{ob}(A)$ に対して，射の**合成** $\mathrm{Hom}_A(a, b) \times \mathrm{Hom}_A(b, c) \to \mathrm{Hom}_A(a, c); (f, g) \mapsto g \circ f$ を対応させる写像

の組であって，2 条件

(CAT1) 任意の $a, b \in \mathrm{ob}(A)$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(a, b)$ に対して $f \circ 1_a = 1_b \circ f = f$ である．
(CAT2) 任意の $a, b, c, d \in \mathrm{ob}(A)$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(a, b)$，$g \in \mathrm{Hom}_A(b, c)$，$h \in \mathrm{Hom}_A(c, d)$ に対して，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ である．

を満たすものをいう．$\mathrm{ob}(A)$ を単に A とも書く．$a, b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して，$f \in \mathrm{Hom}_A(a, b)$ を $f \colon a \to b$ とも書く．

定義 1.2（同型） A を圏，$a, b \in \mathrm{ob}(A)$，$f \colon a \to b$ とする．$g \colon b \to a$ が $g \circ f = 1_a$ かつ $f \circ g = 1_b$ を満たすとき，g を f の**逆射**といい，$g = f^{-1}$ と書く．逆射をもつ射を**同型射**あるいは単に**同型**という．対象 a から b への同型射が存在するとき，a と b は**同型**であるといい，$a \cong b$ と書く．

f の逆射は，存在すれば一意である．また，合成可能な射 f, g がともに同型射ならば $g \circ f$ も同型射で $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であり，f が同型射ならば f^{-1} も同型射で $(f^{-1})^{-1} = f$ である．したがって，圏 A における同型は，$\mathrm{ob}(A)$ 上の同値関係である．

定義 1.3（反対圏） A を圏とする．A の**反対圏** A^{op} を，次のように定める．

- $\mathrm{ob}(A^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(A)$ とする．
- $a, b \in \mathrm{ob}(A^{\mathrm{op}})$ に対して，$\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(a, b) = \mathrm{Hom}_A(b, a)$ とする．
- $a \in \mathrm{ob}(A^{\mathrm{op}})$ に対して，A^{op} における a の恒等射を A における a の恒等射で定める．
- A^{op} の射 $f \colon a \to b$ と $g \colon b \to c$ との合成 $g \circ_{A^{\mathrm{op}}} f \colon a \to c$ を，$g \circ_{A^{\mathrm{op}}} f = f \circ_A g$ と定める．ここで，$\circ_A$ は A における射の合成を表す．

明らかに，$(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = A$ である．

定義 1.4（積圏） A, B を圏とする．A と B の積圏 $A \times B$ を，次のように定める．

- $\mathrm{ob}(A \times B) = \mathrm{ob}(A) \times \mathrm{ob}(B)$ とする．
- $(a,b), (a',b') \in \mathrm{ob}(A \times B)$ に対して，$\mathrm{Hom}_{A\times B}((a,b),(a',b')) = \mathrm{Hom}_A(a,a') \times \mathrm{Hom}_B(b,b')$ とする．
- $(a,b) \in \mathrm{ob}(A \times B)$ に対して，$1_{(a,b)} = (1_a, 1_b)$ とする．
- $A\times B$ の射 $(f,g)\colon (a,b) \to (a',b')$ と $(f',g')\colon (a',b') \to (a'',b'')$ との合成を，$(f',g')\circ(f,g) = (f'\circ f, g'\circ g)$ と定める．

1.2 簡単な圏論的概念

定義 1.5（終対象・始対象） A を圏とする．

(1) A の**始対象**とは，$a \in \mathrm{ob}(A)$ であって，任意の $b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して a から b への射が一意に存在するものをいう．
(2) A の**終対象**とは，$a \in \mathrm{ob}(A)$ であって，任意の $b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して b から a への射が一意に存在するものをいう．

$a \in \mathrm{ob}(A)$ について，a が A の始対象・終対象であることは，それぞれ a が A^{op} の終対象・始対象であることと同値である．

命題 1.6 A を圏とする．

(1) a, a' がともに A の始対象ならば，a から a' への射 $f\colon a \to a'$ が一意に存在し，さらにこの f は同型射である．
(2) a, a' がともに A の終対象ならば，a' から a への射 $f\colon a' \to a$ が一意に存在し，さらにこの f は同型射である．

証明 どちらも同様だから，(1) のみ示す．a が始対象であることより $f\colon a \to a'$ が一意に存在し，a' が始対象であることより $g\colon a' \to a$ が一意に存在する．$g \circ f$ と 1_a はともに a から a への射だから，a が始対象であることより $g \circ f = 1_a$ である．同様に，$f \circ g = 1_b$ である．よって，f は同型射である． □

定義 1.7（モノ射・エピ射） A を圏，$f\colon a \to b$ を A の射とする．

(1) 任意の $c \in \mathrm{ob}(A)$ と A の射 $h, h'\colon b \to c$ に対して $h \circ f = h' \circ f$ ならば $h = h'$ であるとき，f を**エピ射**という．
(2) 任意の $c \in \mathrm{ob}(A)$ と A の射 $h, h'\colon c \to a$ に対して $f \circ h = f \circ h'$ ならば $h = h'$ であるとき，f を**モノ射**という．

また，

(3) A の射 $g\colon b \to a$ であって $f \circ g = 1_b$ となるものが存在するとき，g を**分裂エピ射**という．
(4) A の射 $g\colon b \to a$ であって $g \circ f = 1_a$ となるものが存在するとき，f を**分裂モノ射**という．

f が A のエピ射・モノ射・分裂エピ射・分裂モノ射であることは，それぞれ，f が A^{op} のモノ射・エピ射・分裂モノ射・分裂エピ射であることと同値である．

命題 1.8　A を圏，$f\colon a \to b$ を A の射とする．

(1) f が分裂エピ射ならば，f はエピ射である．
(2) f が分裂モノ射ならば，f はモノ射である．

証明　どちらも同様だから，(1) のみ示す．f が分裂エピ射であるとする．すると，A の射 $g\colon b \to a$ であって $f \circ g = 1_b$ となるものがとれる．A の射 $h, h'\colon a \to c$ が $h \circ f = h' \circ f$ を満たすとすると，$h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' = h'$ である．よって，f はエピ射である．□

命題 1.9　A を圏，$f\colon a \to b$ を A の射とする．次の 4 条件は同値である．

(a) f は同型射である．
(b) f は分裂エピかつモノである．
(c) f はエピかつ分裂モノである．
(d) f は分裂エピかつ分裂モノである．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (d)，(d) $\Longrightarrow$ (b)，(d) $\Longrightarrow$ (c) は明らかだから，あとは (b) $\Longrightarrow$ (a) と (c) $\Longrightarrow$ (a) を示せばよい．どちらも同様だから，前者を示す．f が分裂エピかつモノであるとする．f が分裂エピであることより，$g\colon b \to a$ であって $f \circ g = 1_b$ となるものがとれる．このとき $f \circ g \circ f = f = f \circ 1_a$ だから，f がモノであることより $g \circ f = 1_a$ である．よって，f は g を逆射にもつ同型射である．□

1.3　関手

定義 1.10（関手）　A, B を圏とする．A から B への関手 F とは，

- 写像 $\mathrm{ob}(A) \to \mathrm{ob}(B); a \mapsto Fa$
- $a, b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して，写像 $\mathrm{Hom}_A(a,b) \mapsto \mathrm{Hom}_B(Fa, Fb); f \mapsto Ff$ を対応させる写像

の組であって，2 条件

(FUN1) 任意の $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して，$F1_a = 1_{Fa}$ である．
(FUN2) 任意の $a, b, c \in \mathrm{ob}(A)$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(a,b)$，$g \in \mathrm{Hom}_A(b,c)$ に対して，$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ である．

を満たすものをいう．F が A から B への関手であることを，$F\colon A \to B$ と書く．

圏 A から B への関手を，A から B への**共変関手**ともいう．これに対して，A^{op} から B への関手を，A から B への**反変関手**という．

関手が恒等射と合成を保つことから，関手が同型を保つこともわかる．すなわち，A, B を圏，$F\colon A \to B$ を関手とするとき，$f\colon a \to b$ が A の同型射ならば $Ff\colon Fa \to Fb$ も同型射であり，したがって $a \cong b$ ならば $Fa \cong Fb$ である．

定義 1.11（恒等関手）　A を圏とする．A から A への関手であって，対象の対応・射の対応がすべて恒等写像

であるようなものを，A の**恒等関手**といい，1_A と書く．

定義 1.12（関手の合成） A, B, C を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to C$ を関手とする．F と G との**合成** $G \circ F\colon A \to C$ を，対象の対応・射の対応を F による対応と G による対応との合成とすることで定める．

定義 1.13（圏同型） A, B を圏，$F\colon A \to B$ を関手とする．関手 $G\colon B \to A$ が $G \circ F = 1_A$ かつ $F \circ G = 1_B$ を満たすとき，G を F の**逆関手**といい，$G = F^{-1}$ と書く．逆関手をもつ関手を**圏同型関手**あるいは単に**圏同型**という．圏 A から B への圏同型関手が存在するとき，A と B は**圏同型**であるといい，$A \cong B$ と書く．

F の逆関手は，存在すれば一意である．また，合成可能な関手 F, G がともに圏同型関手ならば $G \circ F$ も圏同型関手で $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ であり，F が圏同型関手ならば F^{-1} も圏同型関手で $(F^{-1})^{-1} = F$ である．

定義 1.14（反対関手） A, B を圏，$F\colon A \to B$ を関手とする．F による A から B への対象・射の対応により，A^{op} から B^{op} への関手が定まる．これを F の**反対関手**といい，F^{op} と書く．

反対関手をとる操作は，恒等関手と関手の合成を保つ．すなわち，圏 A について $(1_A)^{\mathrm{op}} = 1_{A^{\mathrm{op}}}$ であり，また圏 A, B, C の間の関手 $F\colon A \to B$，$G\colon B \to C$ について $(G \circ F)^{\mathrm{op}} = G^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}}$ である．したがって，関手 F が圏同型ならば，F^{op} も圏同型であり，$(F^{\mathrm{op}})^{-1}(F^{-1})^{\mathrm{op}}$ が成り立つ．

定義 1.15（忠実・充満・本質的全射） A, B を圏，$F\colon A \to B$ を関手とする．

(1) F が**忠実**であるとは，任意の $a, b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して $F\colon \mathrm{Hom}_A(a, b) \to \mathrm{Hom}_B(Fa, Fb)$ が単射であることをいう．
(2) F が**充満**であるとは，任意の $a, b \in \mathrm{ob}(A)$ に対して $F\colon \mathrm{Hom}_A(a, b) \to \mathrm{Hom}_B(Fa, Fb)$ が全射であることをいう．
(3) F が**忠実充満**であるとは，F が忠実かつ充満であることをいう．
(4) F が**本質的全射**であるとは，任意の $b \in \mathrm{ob}(B)$ に対してある $a \in \mathrm{ob}(A)$ が存在し，$Fa \cong b$ となることをいう．

命題 1.16 A, B を圏，$F\colon A \to B$ を忠実充満関手とする．

(1) A の射 $f\colon a \to b$ について，Ff が同型射ならば，f も同型射である．
(2) A の対象 a, b について，$a \cong b$ と $Fa \cong Fb$ は同値である．

証明 (1) Ff が同型射であるとすると，逆射 $(Ff)^{-1}$ が考えられる．F の充満性より，$g\colon b \to a$ であって $Fg = (Ff)^{-1}$ となるものがとれる．このとき $F(g \circ f) = Fg \circ Ff = 1_{Fa}$，$F(f \circ g) = Fg \circ Ff = 1_{Fb}$ だから，F の忠実性より $g \circ f = 1_a$，$f \circ g = 1_b$ を得る．

(2) $a \cong b$ ならば $Fa \cong Fb$ であることは，一般の関手に対して成り立つ．逆を示す．$Fa \cong Fb$ とすると，同型射 $h\colon Fa \to Fb$ がとれる．F の充満性より，$f\colon a \to b$ であって $Ff = h$ となるものがとれる．(1) より f は同型射であり，したがって $a \cong b$ である． □

1.4 自然変換

定義 1.17（自然変換） A, B を圏，$F, G\colon A \to B$ を関手とする．F から G への**自然変換**とは，$a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して $\alpha_a\colon Fa \to Ga$ を対応させる族 $\alpha = \{\alpha_a\}_{a\in\mathrm{ob}(A)}$ であって，自然性条件

(NAT) A の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して，$Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ である．

を満たすものをいう．α が F から G への自然変換であることを，$\alpha\colon F \Rightarrow G$ と書く．

定義 1.18（恒等自然変換） A, B を圏，$F\colon A \to B$ を関手とする．F から F への自然変換であって，各 $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して $1_{Fa}\colon Fa \to Fa$ を与えるようなものを，F の**恒等自然変換**といい，1_F と書く．

定義 1.19（垂直合成） A, B を圏，$F, G, H\colon A \to B$ を関手とする．自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ と $\beta\colon G \Rightarrow H$ に対して，$\beta \circ \alpha$ を

$$(\beta \circ \alpha)_a = \beta_a \circ \alpha_a \qquad (a \in A)$$

と定めると，これは F から H への自然変換となる．これを，α と β の**垂直合成**あるいは単に**合成**という．

定義 1.20（水平合成） A, B, C を圏，$F, F'\colon A \to B$，$G, G'\colon B \to C$ を関手とする．自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow F'$ と $\beta\colon G \Rightarrow G'$ に対して，$\beta * \alpha$ を

$$(\beta * \alpha)_a = G'\alpha_a \circ \beta_{Fa} = \beta_{F'a} \circ G\alpha_a \qquad (a \in A)$$

と定めると（右側の等号は β の自然性による），これは $G \circ F$ から $G' \circ F'$ への自然変換となる．これを，α と β の**水平合成**という．[*1]

定義 1.21（自然同型） A, B を圏，$F, G\colon A \to B$ を関手，$\alpha\colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．自然変換 $\beta\colon G \Rightarrow F$ が $\beta \circ \alpha = 1_F$ かつ $\alpha \circ \beta = 1_G$ を満たすとき，β を α の**逆自然変換**といい，$\beta = \alpha^{-1}$ と書く．逆自然変換をもつ自然変換を**自然同型**という．関手 F から G への自然同型が存在するとき，F と G は**自然同型**であるといい，$F \cong G$ と書く．

$\alpha = \{\alpha_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in\mathrm{ob}(A)}$ が自然同型であるための必要十分条件は，すべての $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して $\alpha_a\colon Fa \to Ga$ が同型射であることであり，このとき α の逆自然変換は $\alpha^{-1} = \{\alpha_a^{-1}\colon Ga \to Fb\}_{a\in\mathrm{ob}(A)}$ で与えられる．また，垂直合成可能な自然変換 α, β がともに自然同型ならば $\beta\circ\alpha$ も自然同型で $(\beta\circ\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\circ\beta^{-1}$ であり，α が圏同型関手ならば α^{-1} も圏同型関手で $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ である．したがって，圏 A から B への関手の間の自然同型は，A から B への関手全体のなす集合上の同値関係である．

命題 1.22 (1) A, B, C を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to C$ を関手とする．$1_G * 1_F = 1_{G\circ F}$ が成り立つ．

(2) A, B, C, D を圏，$F, F'\colon A \to B$，$G, G'\colon B \to C$，$H, H'\colon C \to D$ を関手とする．自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow F'$，$\beta\colon G \Rightarrow G'$，$\gamma\colon H \Rightarrow H'$ に対して，$\gamma * (\beta * \alpha) = (\gamma * \beta) * \alpha$ が成り立つ．

(3) A, B, C を圏，F, F', $F''\colon A \to B$，G, G', $G''\colon B \to C$ を関手とする．自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow F'$，$\alpha'\colon F' \Rightarrow F''$，$\beta\colon G \Rightarrow G'$，$\beta'\colon G' \Rightarrow G''$ に対して，$(\beta' * \alpha')\circ(\beta * \alpha) = (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)$ が成り立つ．

証明 (1) 明らかである．

[*1] 本稿では用いないが，$1_G * \alpha$，$\beta * 1_F$ はそれぞれ $G * \alpha$，$\beta * F$ と書かれることが多い．

(2)　α, β, γ の自然性より，任意の $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して次の図式中の小四角形はすべて可換となるのでよい：

$$\begin{tikzcd}
& HGFa \arrow[rr, "HG\alpha_a"] \arrow[dl, "H\beta_{Fa}"'] \arrow[dd, "\gamma_{G'Fa}" near end] & & HGF'a \arrow[dl, "H\beta_{F'a}"] \arrow[dd, "\gamma_{GF'a}"] \\
HG'Fa \arrow[rr, crossing over, "HG'\alpha_a" near start] \arrow[dd, "\gamma_{G'Fa}"] & & HG'F'a & \\
& H'GFa \arrow[rr, "H'G\alpha_a" near start] \arrow[dl, "H'\beta_{Fa}"] & & H'GF'a \arrow[dl, "H'\beta_{F'a}"] \\
H'G'Fa \arrow[rr, "H'G'\alpha_a"'] & & H'G'F'a \arrow[from=uu, crossing over, "\gamma_{G'F'a}" near start] &
\end{tikzcd}.$$

(3)　$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ の自然性より，任意の $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して次の図式中の小四角形はすべて可換となるのでよい：

$$\begin{tikzcd}
GFa \arrow[r, "G\alpha_a"] \arrow[d, "\beta_{Fa}"] & GF'a \arrow[r, "G\alpha'_a"] \arrow[d, "\beta_{F'a}"] & GF''a \arrow[d, "\beta_{F''a}"] \\
G'Fa \arrow[r, "G'\alpha_a"] \arrow[d, "\beta'_{Fa}"] & G'F'a \arrow[r, "G'\alpha'_a"] \arrow[d, "\beta'_{F'a}"] & G'F''a \arrow[d, "\beta'_{F''a}"] \\
G''Fa \arrow[r, "G''\alpha_a"] & G''F'a \arrow[r, "G''\alpha'_a"] & G''F''a
\end{tikzcd}.$$

□

系 1.23　A, B, C を圏，$F, F' \colon A \to B$，$G, G' \colon B \to C$ を関手とする．自然同型 $\alpha \colon F \Rightarrow F'$ と $\beta \colon G \Rightarrow G'$ に対して，$\beta * \alpha \colon G \circ F \Rightarrow G' \circ F'$ も自然同型であり，$(\beta * \alpha)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$ である．

証明　命題 1.22 (1), (3) より，$(\beta^{-1} * \alpha^{-1}) \circ (\beta * \alpha) = (\beta^{-1} \circ \beta) * (\alpha^{-1} \circ \alpha) = 1_G * 1_F = 1_{G \circ F}$，$(\beta * \alpha) \circ (\beta^{-1} * \alpha^{-1}) = (\beta \circ \beta^{-1}) * (\alpha \circ \alpha^{-1}) = 1_{G'} * 1_{F'} = 1_{G' \circ F'}$ を得る．□

定義 1.24（反対自然変換）　A, B を圏，$F, G \colon A \to B$ を関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．α による B の射の族 $\{\alpha_a \colon Fa \to Ga\}_{a \in \mathrm{ob}(A)}$ は，B^{op} の射の族 $\{\alpha_a \colon G^{\mathrm{op}}a \to F^{\mathrm{op}}a\}_{a \in \mathrm{ob}(A^{\mathrm{op}})}$ とみなすこともでき，これは G^{op} から F^{op} への自然変換を定める．これを α の**反対自然変換**といい，α^{op} と書く．

反対自然変換をとる操作は，恒等自然変換と自然変換の垂直合成を保つ．すなわち，関手 F について $(1_F)^{\mathrm{op}} = 1_{F^{\mathrm{op}}}$ であり，また関手 F, G, H の間の自然変換 $\alpha \colon F \Rightarrow G$，$\beta \colon G \Rightarrow H$ について $(\beta \circ \alpha)^{\mathrm{op}} = \alpha^{\mathrm{op}} \circ \beta^{\mathrm{op}}$ である．したがって，自然変換 α が自然同型ならば，α^{op} も自然同型であり，$(\alpha^{\mathrm{op}})^{-1} = (\alpha^{-1})^{\mathrm{op}}$ が成り立つ．さらに，反対自然変換をとる操作は，次の意味で自然変換の水平合成と整合的である：圏 A, B, C，関手 $F, F' \colon A \to B$，$G, G' \colon B \to C$，自然変換 $\alpha \colon F \Rightarrow F'$，$\beta \colon G \Rightarrow G'$ に対して，$(\beta * \alpha)^{\mathrm{op}} = \beta^{\mathrm{op}} * \alpha^{\mathrm{op}}$ が成り立つ．

1.5　圏同値

定義 1.25（圏同値）　A, B を圏，$F \colon A \to B$ を関手とする．関手 $G \colon B \to A$ が $G \circ F \cong 1_A$ かつ $F \circ G \cong 1_B$（自然同型）を満たすとき，G を F の**準逆関手**という．準逆関手をもつ関手を，**圏同値関手**あるいは単に**圏同値**という．圏 A から B への圏同値関手が存在するとき，A と B は**圏同値**であるといい，$A \simeq B$ と書く．

明らかに，圏同型関手は圏同値関手である．

命題 1.26　A, B を圏，$F: A \to B$ を関手とする．関手 $G, G': B \to A$ がともに F の準逆関手ならば，$G \cong G'$（自然同型）である．

証明　G, G' がともに F の準逆関手とすると，$G = 1_A \circ G \cong G' \circ F \circ G \cong G' \circ 1_B = G'$ である（系 1.23 を用いた）． □

命題 1.27　A, B を圏，$F: A \to B$ を関手とする．次の 2 条件は同値である．

(1) F は圏同値関手である．
(2) F は忠実充満かつ本質的全射である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　F が G を準逆にもつ圏同値関手であるとする．自然同型 $\alpha: G \circ F \cong 1_A$，$\beta: F \circ G \cong 1_B$ をとる．

任意の $b \in \mathrm{ob}(B)$ に対して $\beta_b: FGb \cong b$ だから，F は本質的全射である．

F の忠実充満性を示す．$a, a' \in \mathrm{ob}(A)$ を固定する．$f: a \to a'$ に対して，関手 F により $Ff: Fa \to Fa'$ が得られ，さらに関手 G によって $GFf: Fa \to Fa'$ が得られる．ここで，α の自然性より $\alpha_{a'} \circ GFf = f \circ \alpha_a$，したがって $GFf = \alpha_{a'^{-1}} \circ f \circ \alpha_a$ である．$\alpha_a, \alpha_{a'}$ は同型射だから対応 $f \mapsto \alpha_{a'}^{-1} \circ f \circ \alpha_a = GFf$ は全単射であり，したがって対応 $f \mapsto Ff$ は単射である．同様に，対応 $g \mapsto FGg$ は全単射であり，したがって対応 $f \mapsto Ff$ は全射である．よって，F は忠実充満である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　F が忠実充満かつ本質的全射であるとする．関手 $G: B \to A$ を，次のように定める．

- F の本質的全射性より，各 $b \in \mathrm{ob}(B)$ に対して，$a \in \mathrm{ob}(A)$ であって $Fa = b$ となるものものが存在する．このような対応を 1 つとり，G による対象の対応とする．
- F の忠実充満性より，B の射 $g: b \to b'$ に対して，A の射 f であって $Ff = g$ となるものが一意に存在する．この対応を，G による射の対応とする．

F が関手であることを確かめる．まず，$b \in \mathrm{ob}(B)$ に対して，$F1_{Gb} = 1_{FGb} = 1_b$ より $G1_b = 1_{Gb}$ である．すなわち，G は恒等射を保つ．次に，B の射 $g: b \to b'$ と $g': b' \to b''$ に対して，$F(Gg' \circ Gg) = FGg' \circ FGg = g' \circ g$ より $G(g' \circ g) = Gg' \circ Gg$ である．すなわち，G は合成を保つ．これで確かめられた．

G が F の準逆関手であることを示す．まず，G の定義より，$F \circ G = 1_B$ である．次に，$G \circ F = 1_A$ を示す．$F \circ G = 1_B$ より，$a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して $FGFa = Fa$ である．F の忠実充満性より，F によって 1_{Fa} にうつされる射 $\alpha_a: GFa \to a$ が一意に存在し，さらにこれは同型射である（命題 1.16）．こうして得られる射の族 $\alpha = \{\alpha_a\}_{a \in \mathrm{ob}(A)}$ は，GF から 1_A への自然同型である．実際，A の射 $f: a \to a'$ に対して，$F(GFf \circ \alpha_a) = FGFf \circ F\alpha_a = Ff = F\alpha_{a'} \circ Ff = F(\alpha_{a'} \circ f)$ だから，F の忠実性より $GFf \circ \alpha_a = \alpha_{a'} \circ f$ である．よって，G は F の準逆関手であり，したがって F は圏同値である． □

1.6 関手圏

定義 1.28（関手圏）　A, B を圏とする．A から B への関手を対象，関手の間の自然変換を射，恒等自然変換を恒等射，自然変換の垂直合成を射の合成として，圏が定まる．この圏を，A から B への関手のなす**関手圏**といい，B^A と書く．

関手圏における同型射は，自然同型に他ならない．

定義 1.29（後合成関手・前合成関手） A, B, X を圏，$F\colon A \to B$ を関手とする．

(1) F が誘導する**後合成関手** $F_*\colon A^X \to B^X$ を，次のように定める．
- A^X の対象 S に対して，B^X の対象 $F \circ S$ を対応させる．
- A^X の射 $\sigma\colon S \Rightarrow T$ に対して，B^X の射 $1_F * \sigma\colon F \circ S \Rightarrow F \circ T$ を対応させる．

(2) F が誘導する**前合成関手** $F^*\colon X^B \to X^A$ を，次のように定める．
- X^B の対象 S に対して，X^A の対象 $S \circ F$ を対応させる．
- X^B の射 $\sigma\colon S \Rightarrow T$ に対して，X^A の射 $\sigma * 1_F\colon S \circ F \Rightarrow T \circ F$ を対応させる．

後・前合成関手を誘導する操作は，恒等関手と関手の合成を保つ．すなわち，圏 X を固定すると，圏 A について $(1_A)_* = 1_{A^X}$，$(1_A)^* = 1_{X^A}$ であり，また圏 A, B, C の間の関手 $F\colon A \to B$，$G\colon B \to C$ について $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$，$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ である．したがって，関手 F が圏同型ならば，F_* および F^* も圏同型であり，$(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$ および $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$ が成り立つ．

定義 1.30（後合成自然変換・前合成自然変換） A, B, X を圏，$F, G\colon A \to B$ を関手，$\alpha\colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．

(1) α が誘導する後合成自然変換 $\alpha_*\colon F_* \Rightarrow G_*$ を，

$$\alpha_{*,S} = \alpha * 1_S\colon F \circ S \Rightarrow G \circ S \qquad (S \in A^X)$$

と定める．

(2) α が誘導する前合成自然変換 $\alpha^*\colon F^* \Rightarrow G^*$ を，

$$\alpha^*_S = 1_S * \alpha\colon S \circ F \Rightarrow S \circ G \qquad (S \in X^B)$$

と定める．

$\alpha_* = \{\alpha * 1_S\}_{S \in A^X}$ および $\alpha^* = \{1_S * \alpha\}_{S \in X^B}$ の自然性は，後・前合成関手の定義と命題 1.22 を用いて確かめられる．

後・前合成自然変換を誘導する操作は，恒等自然変換と自然変換の垂直合成を保つ．すなわち，圏 X を固定すると，関手 $F\colon A \to B$ について $(1_F)_* = 1_{F_*}$，$(1_F)^* = 1_{F^*}$ であり，また関手 $F, G, H\colon A \to B$ の間の自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$，$\beta\colon G \Rightarrow H$ について $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$，$(\beta \circ \alpha)^* = \beta^* \circ \alpha^*$ である．後自然変換を誘導する操作は B^A から $(B^X)^{(A^X)}$ への関手であり，前自然変換を誘導する操作は B^A から $(X^A)^{(X^B)}$ への関手である，ともいえる．したがって，自然変換 α が自然同型ならば，α_* および α^* も自然同型であり，$(\alpha_*)^{-1} = (\alpha^{-1})_*$ および $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$ が成り立つ．

命題 1.31 A, B, X を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とし，F と G は互いに他を準逆にもつとする．

(1) $F_*\colon A^X \to B^X$ と $G_*\colon B^X \to A^X$ は互いに他の準逆である．

(2) $F^*\colon X^B \to X^A$ と $G^*\colon X^A \to X^B$ は互いに他の準逆である．

証明 自然同型 $\alpha\colon G \circ F \cong 1_A$ と $\beta\colon F \circ G \cong 1_B$ から，自然同型 $\alpha_*\colon G_* \circ F_* \cong 1_{A^X}$ と $\beta_*\colon F_* \circ G_* \cong 1_{B^X}$，$\alpha^*\colon F^* \circ G^* \cong 1_{X^A}$ と $\beta^*\colon G^* \circ F^* \cong 1_{X^B}$ が誘導されるのでよい． □

さらに，後・前自然変換を誘導する操作は，次の意味で自然変換の水平合成と整合的である．

命題 1.32 A, B, C, X を圏，$F, F' \colon A \to B$，$G, G' \colon B \to C$ を関手，$\alpha \colon F \Rightarrow F'$，$\beta \colon G \Rightarrow G'$ を自然変換とする．

(1) $(G \circ F)_*$ から $(G' \circ F')_*$ への自然変換の等式 $(\beta * \alpha)_* = \beta_* * \alpha_*$ が成り立つ．
(2) $(G \circ F)^*$ から $(G' \circ F')^*$ への自然変換の等式 $(\beta * \alpha)^* = \alpha^* * \beta^*$ が成り立つ．

証明 (1) $S \in \mathrm{ob}(A^X)$ に対して

$$\begin{aligned}(\beta_* * \alpha_*)_S &= \beta_{*,F'_*S} \circ G_*\alpha_{*,S} \\ &= (\beta * 1_{F'} * S) \circ (1_G * \alpha * 1_S) \\ &= \beta * \alpha * 1_S \\ &= (\beta * \alpha)_{*,S}\end{aligned}$$

だから（命題 1.22 (3) を用いた），$(\beta * \alpha)_* = \beta_* * \alpha_*$ が成り立つ．

(2) $S \in \mathrm{ob}(X^C)$ に対して

$$\begin{aligned}(\alpha^* * \beta^*)_S &= F'^*\beta^*_S \circ \alpha^*_{G^*S} \\ &= (1_S * \beta * 1_{F'}) \circ (1_S * 1_G * \alpha) \\ &= 1_S * \beta * \alpha \\ &= (\beta * \alpha)^*_S\end{aligned}$$

だから（命題 1.22 (3) を用いた），$(\beta * \alpha)^* = \alpha^* * \beta^*$ が成り立つ． □

1.7 “圏”，“関手”，“自然変換”

すべての集合の全体は集合をなさないから，「すべての集合のなす圏 **SET**」を，先に正式に定義した意味での圏として定義することはできない．ところが，これを疑似的な圏とみなし，圏に関する用語を流用することはできる．たとえば，

- 圏 A から **SET** への“関手” F とは，対象 $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して（小さいとは限らない）集合 Fa を対応させる写像と，A の射 $f \colon a \to b$ に対して写像 $Ff \colon Fa \to Fb$ を対応させる写像の族との組であって，恒等射および合成との整合性を満たすもののことである．[*2]
- 圏 A から **SET** への“関手” F から G への“自然変換” α とは，対象 $a \in \mathrm{ob}(A)$ に対して写像 $\alpha_a \colon Fa \to Ga$ を対応させる族であって，自然性条件を満たすもののことである．
- 圏 A に対して，“関手圏” $\mathbf{SET}^A$ を考えることができる．これも疑似的な圏である．上と同様に，圏 B から $\mathbf{SET}^A$ への“関手”や，それらの間の“自然変換”を考えることができる．

以下，このような「用語の濫用」は，“圏”，“関手”，“自然変換”のように，二重引用符で囲むことによって示す．

定義 1.33（Hom 関手） A を圏，$a \in \mathrm{ob}(A)$ とする．

[*2] この場合，“関手”の「定義域」である A は正式な圏だから，大きさの問題は発生しない．一方で，**SET** を「定義域」とする“関手”を考えようとすれば，大きさの問題は避けては通れない．本稿では，大きさの問題が発生するような状況は考えない．

(1) “関手” $\mathrm{Hom}_A(a,-)\colon A \to \mathbf{SET}$ を，次のように定める．
- A の対象 u に対して，集合 $\mathrm{Hom}_A(a,u)$ を対応させる．
- A の射 $p\colon u \to v$ に対して，写像 $p\circ -\colon \mathrm{Hom}_A(a,u) \to \mathrm{Hom}_A(a,v);\ h \mapsto p\circ h$ を対応させる．この写像 $p\circ -$ を，p_* や $\mathrm{Hom}_A(a,p)$ とも書く．

(2) “関手” $\mathrm{Hom}_A(-,a)\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$ を，次のように定める．
- A の対象 u に対して，集合 $\mathrm{Hom}_A(u,a)$ を対応させる．
- A の射 $p\colon u \to v$ に対して，写像 $-\circ p\colon \mathrm{Hom}_A(v,a) \to \mathrm{Hom}_A(u,a);\ h \mapsto h\circ p$ を対応させる．この写像 $-\circ p$ を，p^* や $\mathrm{Hom}_A(p,a)$ とも書く．

これらの“関手”を総称して，**Hom 関手**という．

Hom 関手 $\mathrm{Hom}_A(a,-)$ と $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(-,a)$ は等しい．

定義 1.34（米田埋め込み） A を圏とする．

(1) “関手” $y_A\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}^A$ を，次のように定める．
- A の対象 a に対して，“関手” $\mathrm{Hom}_A(a,-)$ を対応させる．
- A の射 $f\colon a \to b$ に対して，“自然変換” $-\circ f\colon \mathrm{Hom}_A(b,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(a,-)$ を対応させる．ここで，この“自然変換”は，各 $u \in A$ に対して写像 $\mathrm{Hom}_A(b,u) \to \mathrm{Hom}_A(a,u);\ h \mapsto h\circ f$ を与える．この“自然変換” $-\circ f$ を，f^* や $\mathrm{Hom}_A(f,-)$ とも書く．

(2) “関手” $y^A\colon A \to \mathbf{SET}^{A^{\mathrm{op}}}$ を，次のように定める．
- A の対象 a に対して，“関手” $\mathrm{Hom}_A(-,a)$ を対応させる．
- A の射 $f\colon a \to b$ に対して，“自然変換” $f\circ -\colon \mathrm{Hom}_A(-,a) \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(-,b)$ を対応させる．ここで，この“自然変換”は，各 $u \in A$ に対して 写像 $\mathrm{Hom}_A(u,a) \to \mathrm{Hom}_A(u,b);\ h \mapsto f\circ h$ を与える．この“自然変換” $f\circ -$ を，f_* や $\mathrm{Hom}_A(-,f)$ とも書く．

これらの“関手”を総称して，**米田埋め込み**という．

$y_{A^{\mathrm{op}}} = y^A$ である．系 2.2 で，米田埋め込みが忠実充満であることを示す．

2 米田の補題，“関手”の表現

2.1 米田の補題

定理 2.1（米田の補題） A を圏とする．“関手” $F\colon A \to \mathbf{SET}$ と $a \in A$ に対して，写像

$$\Phi_{F,a}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F) \to Fa,$$
$$\Psi_{F,a}\colon Fa \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F)$$

を次のように定める．

- $\Phi_{F,a}$ は，“自然変換” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \Rightarrow F$ に対して，$\alpha_a(1_a)$ を対応させる．
- $\Psi_{F,a}$ は，$x \in Fa$ に対して，次のように定まる“自然変換” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \Rightarrow F$ を対応させる：

$$\alpha_c\colon \mathrm{Hom}_A(a,c) \to Fc;\quad f \mapsto Ff(x) \qquad (c \in A).$$

すると，

(1) $\Phi_{F,a}$ と $\Psi_{F,a}$ は互いに他の逆写像である．

(2) $\Phi_{F,a}$ と $\Psi_{F,a}$ は，$F \in \mathbf{SET}^A$ と $a \in A$ に関して自然である．すなわち，$\mathbf{SET}^A$ の任意の射 $\sigma\colon F \Rightarrow G$ と任意の $a \in A$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F) \arrow[r, "\Phi_{F,a}"] \arrow[d, "\sigma\circ-"'] & Fa \arrow[d, "\sigma_a"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),G) \arrow[r, "\Phi_{G,a}"'] & Ga \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F) \arrow[d, "\sigma\circ-"'] & Fa \arrow[l, "\Psi_{F,a}"'] \arrow[d, "\sigma_a"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),G) & Ga \arrow[l, "\Psi_{G,a}"] \end{tikzcd}$$

は可換であり，任意の $F \in \mathbf{SET}^A$ と A の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F) \arrow[r, "\Phi_{F,a}"] \arrow[d, "-\circ\mathrm{Hom}_A(f,-)"'] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(b,-),F) \arrow[r, "\Phi_{F,b}"'] & Fb \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F) \arrow[d, "-\circ\mathrm{Hom}_A(f,-)"'] & Fa \arrow[l, "\Psi_{F,a}"'] \arrow[d, "Ff"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(b,-),F) & Fb \arrow[l, "\Psi_{F,b}"] \end{tikzcd}$$

は可換である．

証明　(1)　$x \in Fa$ に対して

$$\Phi_{F,a}(\Psi_{F,a}(x)) = \Psi_{F,a}(x)_a(1_a) = F1_a(x) = x$$

だから，$\Phi_{F,a} \circ \Psi_{F,a}$ は Fa の恒等写像である．

$\Psi_{F,a} \circ \Phi_{F,a}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F)$ の恒等写像であることを示す．$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F)$ に対して，$\Psi_{F,a}(\Phi_{F,a}(\alpha))$ の c-成分は

$$\Psi_{F,a}(\Phi_{F,a}(\alpha))_c\colon \mathrm{Hom}_A(a,c) \to Fc; \qquad f \mapsto Ff(\Phi_{F,a}(\alpha)) = Ff(\alpha_a(1_a))$$

で与えられる．ここで，$\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \Rightarrow F$ の自然性より

$$Ff(\alpha_a(1_a)) = \alpha_c(\mathrm{Hom}_A(a,f)(1_a)) = \alpha_c(f)$$

だから，$Ff(\alpha_a(1_a)) = \alpha_c(f)$ である．よって，$\Psi_{F,a}(\Phi_{F,a}(\alpha))$ と α の各成分は等しいから，$\Psi_{F,a}(\Phi_{F,a}(\alpha)) = \alpha$ である．

(2)　任意の $F \in \mathbf{SET}^A$ と $a \in A$ に対して $\Psi_{F,a}$ は $\Phi_{F,a}$ の逆写像だから，$\Phi_{F,a}$ の自然性のみを示せば十分である．

第一の図式の可換性を示す．$\sigma\colon F \Rightarrow G$ を $\mathbf{SET}^A$ の射，$a \in A$ とする．任意の $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F)$ に対して，

$$\sigma_a(\Phi_{F,a}(\alpha)) = \sigma_a(\alpha_a(1_a)) = (\sigma \circ \alpha)_a(1_a) = \Phi_{G,a}(\sigma \circ \alpha).$$

したがって，第一の図式は可換である．

第二の図式の可換性を示す．$F \in \mathbf{SET}^A$，$f\colon a \to b$ を A の射とする．任意の $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-),F)$ に対して，α の自然性より，

$$\begin{aligned} &Ff(\Phi_{F,a}(\alpha)) = Ff(\alpha_a(1_a)) = \alpha_b(\mathrm{Hom}_A(a,f)(1_a)) = \alpha_b(f) \\ &= \alpha_b(\mathrm{Hom}_A(f,-)_b(1_b)) = (\alpha \circ \mathrm{Hom}_A(f,-))_b(1_b) = \Phi_{F,b}(\alpha \circ \mathrm{Hom}_A(f,-)). \end{aligned}$$

したがって，第二の図式は可換である．　□

米田の補題（定理 2.1）で A を A^{op} に置き換えると，“関手”$F\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$ と $a \in A^{\mathrm{op}}$ に関して自然な，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^{A^{\mathrm{op}}}}(\mathrm{Hom}_A(-,a), F)$ と Fa との間の全単射が得られることがわかる．

系 2.2 A を圏とする．米田埋め込み $y_A\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}^A;\ a \mapsto \mathrm{Hom}_A(a,-)$ は“忠実充満”である．すなわち，任意の $a, b \in A$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_A(b,a) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-), \mathrm{Hom}_A(b,-)); \quad f \mapsto \mathrm{Hom}_A(f,-)$$

は全単射である．

証明 米田の補題（定理 2.1 (1)）で $F = \mathrm{Hom}_A(b,-)$ と置けば，結論を得る． □

双対的に，米田埋め込み $y^A\colon A \to \mathbf{SET}^{A^{\mathrm{op}}};\ a \mapsto \mathrm{Hom}_A(-,a)$ も“忠実充満”である．

系 2.3 A を圏とする．A の射 $f\colon a \to b$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) f は同型射である．
(b) 任意の $c \in A$ に対して，$f \circ -\colon \mathrm{Hom}_A(c,a) \to \mathrm{Hom}_A(c,b)$ は全単射である．
(c) 任意の $c \in A$ に対して，$- \circ f\colon \mathrm{Hom}_A(a,c) \to \mathrm{Hom}_A(b,c)$ は全単射である．

証明 米田埋め込みの“忠実充満”性と（系 2.2），忠実充満関手が同型を映すこと（命題 1.16 (1)）の結果である[*3]． □

2.2 コンマ圏

次節以降で用いるため，コンマ圏を定義しておく．

定義 2.4（コンマ圏） A, B, C を圏，$K\colon A \to C$，$L\colon B \to C$ を関手とする．**コンマ圏** $K \downarrow L$ を，次のように定める．

- $K \downarrow L$ の対象は，$a \in A$，$b \in B$ と $h\colon Ka \to Lb$ の組 (a,b,h) とする．
- $K \downarrow L$ の対象 (a,b,h) から (a',b',h') への射は，$f\colon a \to a'$ と $g\colon b \to b'$ との組 (f,g) であって $h' \circ Ff = Gg \circ h$ を満たすものとする．
- $K \downarrow L$ の対象 (a,b,h) の恒等射は，$1_{(a,b,h)} = (1_a, 1_b)$ と定める．
- $K \downarrow L$ の射 $(f,g)\colon (a,b,h) \to (a',b',h')$ と $(f',g')\colon (a',b',h') \to (a'',b'',h'')$ との合成は，$(f',g') \circ (f,g) = (f' \circ f, g' \circ g)$ と定める．

$A = \mathbf{1}$（ただ 1 つの対象と恒等射のみからなる圏）かつ K が $\mathbf{1}$ の唯一の対象を $c \in C$ に対応させる関手であるとき，$F \downarrow G$ を $c \downarrow G$ とも書く．$B = \mathbf{1}$ である場合も同様とする．

C が“圏”で $K\colon A \to C$ と $L\colon B \to C$ が“関手”であっても，コンマ圏 $K \downarrow L$ を考えることができ，これは正式な圏となることに注意する．

[*3] 米田埋め込みは正式な関手ではなく，“忠実充満”であるというのも用語の濫用にすぎないから，厳密には，命題 1.16 をただちに適用することはできない．しかし，命題 1.16 の証明中の議論をたどることにより，問題なく結論が得られる．

2.3 米田の補題が導く圏同型

A を圏，$F\colon A \to \mathbf{SET}$ を“関手”とし，“関手”$y_A\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}^A$ と $F\colon \mathbf{1} \to \mathbf{SET}^A$ から定まるコンマ圏 $y_A \downarrow F$ と，“関手”$\{*\}\colon \mathbf{1} \to \mathbf{SET}$ と $F\colon A \to \mathbf{SET}$ から定まるコンマ圏 $\{*\} \downarrow F$ を考える[*4]．$\{*\} \downarrow F$ の対象は「$a \in A$ と $\{*\}$ から Fa への写像との組」だが，これは「$a \in A$ と Fa の元との組」とみなせることに注意する．

定理 2.5 A を圏，$F\colon A \to \mathbf{SET}$ を“関手”とする．また，$a \in A$ に対して，

$$\Phi_{F,a}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-), F) \to Fa,$$
$$\Psi_{F,a}\colon Fa \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{SET}^A}(\mathrm{Hom}_A(a,-), F)$$

を定理 2.1 のとおりに定める．関手 $\widetilde{\Phi}_F\colon (y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}} \to \{*\} \downarrow F$ を

- $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の対象 (a,α)（$a \in A$，$\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \Rightarrow F$）に対して，$\{*\} \downarrow F$ の対象 $(a, \Phi_{F,a}(\alpha))$ を対応させる．
- $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の射 $f\colon (a,\alpha) \to (b,\beta)$（$A$ の射 $f\colon a \to b$ であって $\alpha \circ \mathrm{Hom}_A(f,-) = \beta$ を満たすもの）に対して，$\{*\} \downarrow F$ の射 $f\colon (a, \Phi_{F,a}(\alpha)) \to (b, \Phi_{F,b}(\beta))$ を対応させる．

と定め，関手 $\widetilde{\Psi}_F\colon \{*\} \downarrow F \to (y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ を

- $\{*\} \downarrow F$ の対象 (a,x)（$a \in A$，$x \in Fa$）に対して，$(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の対象 $(a, \Psi_{F,a}(x))$ を対応させる．
- $\{*\} \downarrow F$ の射 $f\colon (a,x) \to (b,y)$（A の射 $f\colon a \to b$ であって $Ff(x) = y$ を満たすもの）に対して，$(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の射 $f\colon (a, \Psi_{F,a}(x)) \to (b, \Psi_{F,b}(y))$ を対応させる．

と定める．すると，$\widetilde{\Phi}_F$ と $\widetilde{\Psi}_F$ とは互いに他の逆であり，圏同型 $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}} \cong \{*\} \downarrow F$ を与える．

証明 $\widetilde{\Phi}_F$ が $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ から $\{*\} \downarrow F$ への関手を定めることを示す．示すべきことは，A の射 $f\colon a \to b$ について，f が $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の射 $f\colon (a,\alpha) \to (b,\beta)$ であるならば，f は $\{*\} \downarrow F$ の射 $f\colon (a, \Phi_{F,a}(\alpha)) \to (b, \Phi_{F,b}(\beta))$ でもあることである．すなわち，

$$\alpha \circ \mathrm{Hom}_A(f,-) = \beta \quad \text{ならば} \quad Ff(\Phi_{F,a}(\alpha)) = \Phi_{F,b}(\beta)$$

である．これは，定理 2.1 (2) で示した $\Phi_{F,-}$ の自然性そのものである．

$\widetilde{\Psi}_F$ が $\{*\} \downarrow F$ から $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ への関手を定めることを示す．示すべきことは，A の射 $f\colon a \to b$ について，f が $\{*\} \downarrow F$ の射 $f\colon (a,x) \to (b,y)$ であるならば，f は $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の射 $f\colon (a, \Psi_{F,a}(x)) \to (b, \Psi_{F,b}(y))$ でもあることである．すなわち，

$$Ff(x) = y \quad \text{ならば} \quad \Psi_{F,a}(x) \circ \mathrm{Hom}_A(f,-) = \Psi_{F,b}(y)$$

である．これは，定理 2.1 (2) で示した $\Psi_{F,-}$ の自然性そのものである．

$\widetilde{\Phi}_F$ と $\widetilde{\Psi}_F$ とが互いに他の逆であることは，任意の $a \in A$ に対して $\Phi_{F,a}$ と $\Psi_{F,a}$ とが互いに他の逆写像であるという米田の補題の主張（定理 2.1 (1)）からただちに従う． □

双対的に，“関手”$F\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$ に対して，圏同型 $y^A \downarrow F \cong (\{*\} \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ が成り立つ．

[*4] 前者と後者で F の扱いが異なることに注意せよ．

2.4 “関手”の表現

定義 2.6（表現） A を圏とする．“関手” $F\colon A \to \mathbf{SET}$ の**表現**とは，$a \in A$ と“自然同型” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \cong F$ との組 (a,α) をいう．F が表現をもつとき，F は**表現可能**であるという．

“関手” $F\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$ の表現とは，$a \in A^{\mathrm{op}}$ と“自然同型” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(a,-) \cong F$ との組のことだが，これは $a \in A$ と“自然同型” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(-,a) \cong F$ との組といっても同じである．

定理 2.7 A を圏，$F\colon A \to \mathbf{SET}$ を“関手”とする．$a \in A$ と“自然変換” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \Rightarrow F$ との組に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) (a,α) は F の表現である．
(b) (a,α) は $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の始対象である．
(c) $(a,\alpha_a(1_a))$ は $\{*\} \downarrow F$ の始対象である．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (c) (a,α) が F の表現であるとは，任意の $b \in A$ に対して写像 $\alpha_b\colon \mathrm{Hom}_A(a,b) \to Fb$ が全単射であるということである．一方で，$(a,\alpha_a(1_a))$ が $\{*\} \downarrow F$ の始対象であるとは，任意の $b \in A$ と $y \in Fb$ に対して，A の射 $f\colon a \to b$ であって $Ff(\alpha(1_a)) = y$ を満たすものが一意に存在するということである．すなわち，任意の $b \in A$ に対して写像 $\mathrm{Hom}_A(a,b) \to Fb;\ f \mapsto Ff(\alpha(1_a))$ が全単射であるということである．ところで，米田の補題（定理 2.1 (1)）より，$b \in A$ に対して

$$\alpha_b(f) = Ff(\alpha(1_a))$$

が成り立つ．よって，これらの 2 条件は同値である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) 定理 2.5 が与える圏同型 $(y_A \downarrow F)^{\mathrm{op}} \cong \{*\} \downarrow F$ から従う． □

双対的に，A を圏，$F\colon A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$ を“関手”とするとき，$a \in A$ と“自然変換” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(-,a) \Rightarrow F$ との組に対して，(a,α) が F の表現であること，(a,α) が $y^A \downarrow F$ の終対象であること，$(a,\alpha_a(1_a))$ が $(\{*\} \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ の終対象であることは，すべて同値である．

系 2.8 A, B を圏，$b \in B$，$K\colon A \to B$ を関手とする．$a \in A$ と“自然変換” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_B(b,K-)$ との組に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) (a,α) は $\mathrm{Hom}_B(b,K-)$ の表現である．
(b) (a,α) は $(y_A \downarrow \mathrm{Hom}_B(b,K-))^{\mathrm{op}}$ の始対象である．
(c) $(a,\alpha_a(1_a))$ は $\{*\} \downarrow \mathrm{Hom}_B(b,K-)$ の始対象である．
(d) $(a,\alpha_a(1_a))$ は $b \downarrow K$ の始対象である．

証明 (a), (b), (c) の同値性は，定理 2.7 による．自然な圏同型 $\{*\} \downarrow \mathrm{Hom}_B(b,K-) \cong b \downarrow K$ から，(c) と (d) の同値性がわかる． □

双対的に，A, B を圏，$b \in B$，$K\colon A \to B$ を関手とするとき，$a \in A$ と“自然変換” $\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(-,a) \Rightarrow \mathrm{Hom}_B(K-,b)$ との組に対して，(a,α) が $\mathrm{Hom}_B(K-,b)$ の表現であること，(a,α) が $y^A \downarrow \mathrm{Hom}_B(K-,b)$ の終対象であること，$(a,\alpha_a(1_a))$ が $(\{*\} \downarrow \mathrm{Hom}_B(K-,b))^{\mathrm{op}}$ の終対象であること，$(a,\alpha_a(1_a))$ が $K \downarrow b$ の終対象であることは，すべて同値である．

3　余極限と極限

3.1　余極限と極限

定義 3.1（対角関手） I, A を圏とする．対角関手 $\varDelta_{I,A}\colon A \to A^I$ を，次のように定める．

- A の対象 a に対して，A^I の対象 $\varDelta_{I,A}a$ を，I の任意の対象に a を対応させ，I の任意の射に 1_a を対応させる関手として定める．
- A の射 $f\colon a \to b$ に対して，A^I の射 $\varDelta_{I,A}f\colon \varDelta_{I,A}a \Rightarrow \varDelta_{I,A}b$ を，I の任意の対象に対して f を与える自然変換として定める．

混同のおそれがない場合，$\varDelta_{I,A}$ を単に $\varDelta_A$ や $\varDelta$ とも書く．

I, A を圏とする．関手 $T\colon I \to A$ を，I を添字圏とする A 上の図式ともいう．図式 $I \to A; i \mapsto a_i$ を，射の対応は省略して $\{a_i\}_{i \in I}$ と書くこともある．

I, A を圏，$T\colon I \to A$ を図式とし，関手 $T\colon \mathbf{1} \to A^I$ と $\varDelta\colon A \to A^I$ から定まるコンマ圏 $T \downarrow \varDelta$，あるいは $\varDelta \downarrow T$ を考える．

定義 3.2（余極限・極限） I, A を圏，$T\colon I \to A$ を図式とする．

(1) コンマ圏 $T \downarrow \varDelta$ の始対象を，T の余極限という．
(2) コンマ圏 $\varDelta \downarrow T$ の終対象を，T の極限という．

始対象・終対象の一意性（命題 1.6）より，余極限・極限は，存在すれば同型を除いて一意である．

命題 3.3 I, A を圏，$T\colon I \to A$ を図式とする．

(1) $a \in A$ と“自然変換”$\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(a, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{A^I}(T, \varDelta-)$ との組に対して，次の 4 条件は同値である．
  (a) (a, α) は $\mathrm{Hom}_{A^I}(T, \varDelta-)$ の表現である．
  (b) (a, α) は $(y_A \downarrow \mathrm{Hom}_{A^I}(T, \varDelta-))^{\mathrm{op}}$ の始対象である．
  (c) $(a, \alpha_a(1_a))$ は $\{*\} \downarrow \mathrm{Hom}_{A^I}(T, \varDelta-)$ の始対象である．
  (d) $(a, \alpha_a(1_a))$ は T の余極限である．
(2) $a \in A$ と“自然変換”$\alpha\colon \mathrm{Hom}_A(-, a) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{A^I}(\varDelta-, T)$ との組に対して，次の 4 条件は同値である．
  (a) (a, α) は $\mathrm{Hom}_{A^I}(\varDelta-, T)$ の表現である．
  (b) (a, α) は $y^A \downarrow \mathrm{Hom}_{A^I}(\varDelta-, T)$ の終対象である．
  (c) $(a, \alpha_a(1_a))$ は $(\{*\} \downarrow \mathrm{Hom}_{A^I}(\varDelta-, T))^{\mathrm{op}}$ の終対象である．
  (d) $(a, \alpha_a(1_a))$ は T の極限である．

証明 系 2.8（とその双対）の特別な場合である． □

3.2　余極限・極限の保存

A, B, I を圏，$F\colon A \to B$ を関手，$T\colon I \to A$ を図式とする．関手 $F_*\colon T \downarrow \varDelta_A \to F \circ T \downarrow \varDelta_B$ が次のように定まる．

- $T\downarrow\varDelta_A$ の対象 (a,α) に対して，$F\circ T\downarrow\varDelta_B$ の対象 $(Fa,1_F*\alpha)$ を対応させる．
- $T\downarrow\varDelta_A$ の射 $f\colon(a,\alpha)\to(b,\beta)$ に対して，$F\circ T\downarrow\varDelta_B$ の射 $Ff\colon(Fa,1_F*\alpha)\to(Fb,1_F*\beta)$ を対応させる．

同様に，関手 $F_*\colon\varDelta_A\downarrow T\to\varDelta_B\downarrow F\circ T$ が次のように定まる．

- $\varDelta_A\downarrow T$ の対象 (a,α) に対して，$\varDelta_B\downarrow F\circ T$ の対象 $(Fa,1_F*\alpha)$ を対応させる．
- $\varDelta_A\downarrow T$ の射 $f\colon(a,\alpha)\to(b,\beta)$ に対して，$\varDelta_B\downarrow F\circ T$ の射 $Ff\colon(Fa,1_F*\alpha)\to(Fb,1_F*\beta)$ を対応させる．

定義 3.4（余極限・極限の保存） A,B,I を圏，$F\colon A\to B$ を関手，$T\colon I\to A$ を図式とする．

(1) 関手 $F_*\colon T\downarrow\varDelta_A\to F\circ T\downarrow\varDelta_B$ が T の余極限を $F\circ T$ の余極限にうつすとき（すなわち，始対象を保つとき），F は **T の余極限を保つ**という．
(2) 関手 $F_*\colon\varDelta_A\downarrow T\to\varDelta_B\downarrow F\circ T$ が T の極限を $F\circ T$ の極限にうつすとき（すなわち，終対象を保つとき），F は **T の極限を保つ**という．

関手 $F\colon A\to B$ が，任意の圏 I と図式 $T\colon I\to A$ に対して T の余極限・極限を保つとき，それぞれ単に F は**余極限・極限を保つ**という．

4 随伴

4.1 とある一対一対応

A,B を圏，$F\colon A\to B$, $G\colon B\to A$ を関手とすると，$A^{\mathrm{op}}\times B$ から **SET** への "関手" $\mathrm{Hom}_B(F-,-)$, $\mathrm{Hom}_A(-,G-)$ が考えられることに注意する．

定理 4.1 A,B を圏，$F\colon A\to B$，$G\colon B\to A$ を関手とする．5 個の集合

(A) $\mathrm{Hom}_B(F-,-)$ から $\mathrm{Hom}_A(-,G-)$ への "自然同型" の全体
(B) 自然変換 $\eta\colon 1_A\Rightarrow G\circ F$ であって，任意の $a\in A$，$b\in B$ に対して写像 $G-\circ\eta_a\colon\mathrm{Hom}_B(Fa,b)\to\mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ が全単射であるものの全体[*5]
(C) 自然変換 $\epsilon\colon F\circ G\Rightarrow 1_B$ であって，任意の $a\in A$，$b\in B$ に対して写像 $\epsilon_b\circ F-\colon\mathrm{Hom}_A(a,Gb)\to\mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ が全単射であるものの全体[*6]
(D) 自然変換 $\eta\colon 1_A\Rightarrow G\circ F$，$\epsilon\colon F\circ G\Rightarrow 1_B$ の組であって，$(\epsilon*F)\circ(F*\eta)=1_F$，$(G*\epsilon)\circ(\eta*G)=1_G$（三角恒等式という）を満たすものの全体

を考える．

(1) (A) の元 ϕ に対して，$\eta_a=\phi_{a,Fa}(1_{Fa})\colon a\to GFa$（$a\in A$）と定めると，$\eta=\{\eta_a\}_{a\in A}$ は (B) の元である．また，(B) の元 η に対して，$\phi_{a,b}=G-\circ\eta_a\colon\mathrm{Hom}_B(Fa,b)\to\mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ と定めると，$\phi=\{\phi_{a,b}\}_{(a,b)\in A^{\mathrm{op}}\times B}$ は (A) の元である．さらに，これらの対応は互いに他の逆を与える．
(2) (A) の元 ϕ に対して，$\epsilon_b=\phi^{-1}_{Gb,b}(1_{Gb})\colon FGb\to b$（$b\in B$）と定めると，$\epsilon=\{\epsilon_b\}_{b\in B}$ は (C) の元である．また，(C) の元 ϵ に対して，$\psi_{a,b}=\epsilon_b\circ F-\colon\mathrm{Hom}_A(a,Gb)\to\mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ と定めると，

[*5] $\mathrm{Hom}_B(Fa,b)\to\mathrm{Hom}_A(a,Gb);\ g\mapsto Gg\circ\eta_a$ という写像を $G-\circ\eta_a$ と書いている．以下同様．
[*6] $\mathrm{Hom}_A(a,Gb)\to\mathrm{Hom}_B(Fa,b);\ f\mapsto\epsilon_b\circ Ff$ という写像を $\epsilon_b\circ F-$ と書いている．以下同様．

$\phi = \{\psi^{-1}_{a,b}\}_{(a,b)\in A^{\mathrm{op}}\times B}$ は (A) の元である．さらに，これらの対応は互いに他の逆を与える．

(3) (A) の元 ϕ に対して，$\eta_a = \phi_{a,Fa}(1_{Fa})\colon a \to GFa$（$a \in A$），$\epsilon_b = \phi^{-1}_{Gb,b}(1_{Gb})\colon FGb \to b$（$b \in B$）と定めると，$\eta = \{\eta_a\}_{a\in A}$ と $\epsilon = \{\epsilon_b\}_{b\in B}$ との組 (η,ϵ) は (D) の元である．さらに，この対応は (A) から (D) への全単射である．

(4) (D) の元 (η,ϵ) に対して，η は (B) の元である．さらに，この対応は (D) から (B) への全単射である．

(5) (D) の元 (η,ϵ) に対して，ϵ は (C) の元である．さらに，この対応は (D) から (C) への全単射である．

証明　(1)　(A) の元 $\phi = \{\phi_{a,b}\}_{(a,b)\in A^{\mathrm{op}}\times B}$ が与えられたとする．$a \in A$ を固定すると，$\phi_{a,-} = \{\phi_{a,b}\}_{b\in B}$ は $\mathrm{Hom}_B(Fa,-)$ から $\mathrm{Hom}_A(a,G-)$ への“自然同型”である．米田の補題（定理 2.1 (1)）によれば，$\mathrm{Hom}_B(Fa,-)$ から $\mathrm{Hom}_A(a,G-)$ への“自然変換”と $\mathrm{Hom}_B(a,GFa)$ の元とは一対一に対応するのだった．$\phi_{a,-}\colon \mathrm{Hom}_B(Fa,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(a,G-)$ に対応する $\mathrm{Hom}_B(a,GFa)$ の元は，$\phi_{a,Fa}(1_{Fa})$ である．これが，(A) の元 ϕ に対して $\{\phi_{a,Fa}(1_{Fa})\}_{a\in A}$ を与える対応である．

逆に，$a \in A$ に対して $\eta_a \in \mathrm{Hom}_B(a,GFa)$ が与えられたとして，それがいつ上のように (A) の元と対応するかを考える．米田の補題（定理 2.1 (1)）によって $\eta_a \in \mathrm{Hom}_B(a,GFa)$ と対応する“自然変換” $\phi_a\colon \mathrm{Hom}_B(Fa,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(a,G-)$ は，

$$\phi_{a,b}(g) = \mathrm{Hom}_A(a,Gg)(\eta_a) = Gg \circ \eta_a \qquad (b \in B,\ g \in \mathrm{Hom}_A(Fa,b))$$

で与えられる．最初に与えられた $\{\eta_a\}_{a\in A}$ が (A) の元と対応することは，$\phi = \{\phi_{a,b}\}_{(a,b)\in A^{\mathrm{op}}\times B}$ が“自然同型”であること，すなわち，

(i) $\{\phi_{a,b}\}_{(a,b)\in A^{\mathrm{op}}\times B}$ は $a \in A^{\mathrm{op}}$ に関して自然であり，かつ
(ii) 任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して $\phi_{a,b}$ は全単射である

ことに他ならない．

条件 (ii) は，任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して写像 $\epsilon_b \circ F-\colon \mathrm{Hom}_A(a,Gb) \to \mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ が全単射であることを意味する．一方で，条件 (i) は，任意の $b \in B$ と A の射 $h\colon a' \to a$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_B(Fa,b) \arrow[r, "G-\circ\eta_a"] \arrow[d, "-\circ Fh"'] & \mathrm{Hom}_A(a,Gb) \arrow[d, "-\circ h"] \\
\mathrm{Hom}_B(Fa',b) \arrow[r, "G-\circ\eta_{a'}"'] & \mathrm{Hom}_A(a',Gb)
\end{tikzcd}$$

が可換であるということである．上の図式の可換性は，任意の $g \in \mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ に対して

$$Gg \circ \eta_a \circ h = Gg \circ GFh \circ \eta_{a'}$$

が成り立つということを意味する．任意の $b \in B$，$h\colon a' \to a$ に対して上式が成り立つとすると，特に $b = Fa$，$g = 1_{Fa}$ と置くことで，任意の $h\colon a' \to a$ に対して $\eta_a \circ h = GFh \circ \eta_{a'}$ が成り立つこと，すなわち $\{\eta_a\}_{a\in A}$ が自然性条件を満たすことがわかる．逆に，$\{\eta_a\}_{a\in A}$ が自然性条件を満たすならば，(i) は成り立つ．

以上より，$a \in A$ に対して $\eta_a \in \mathrm{Hom}_B(a,GFa)$ が与えられたとき，それが (A) の元と対応するための条件は，$\eta = \{\eta_a\}_{a\in A}$ が (B) の元であることである．よって，(A) の元 ϕ に対して $\{\phi_{a,Fa}(1_{Fa})\}_{a\in A}$ を与える対応は，(A) から (B) への全単射である．その逆写像は，上の議論ですでに示されているように，(B) の元 η に対して $\phi = \{\phi_{a,b}\}_{(a,b)\in A^{\mathrm{op}}\times B}$，$\phi_{a,b} = G- \circ \eta_a\colon \mathrm{Hom}_B(Fa,b) \to \mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ を与える対応である．

(2)　(1) の双対命題である．

(3)　(B) の元 η と (C) の元 ϵ との組 (η,ϵ) を考える．η は (1) によって (A) の元と対応し，ϵ は (2) によって (A) の元と対応する．これら 2 つの (A) の元が一致するための条件は，任意の $a \in A$ と $b \in B$ に対して $G{-} \circ \eta_a \colon \mathrm{Hom}_B(Fa,b) \to \mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ と $\epsilon_b \circ F{-} \colon \mathrm{Hom}_A(a,Gb) \to \mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ とが互いに他の逆写像となることである．$G{-} \circ \eta_a$ と $\epsilon_b \circ F{-}$ とが互いに他の逆写像となるとは，任意の $g \in \mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ に対して $\epsilon_b \circ FGg \circ F\eta_a = g$ であり，かつ任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ に対して $G\epsilon_b \circ GFf \circ \eta_a = f$ であることである．さらに，η と ϵ の自然性に注意すると，これは結局

(i) 任意の $g \in \mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ に対して $g \circ \epsilon_{Fa} \circ F\eta_a = g$ であり，かつ
(ii) 任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ に対して $G\epsilon_b \circ \eta_{Gb} \circ f = f$ である

ということに他ならない．

任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して上の 2 条件が成立するための条件を考えよう．(i) が常に成立するとすると，特に $b = Fa$，$g = 1_{Fa}$ と置くことで，任意の $a \in A$ に対して $\epsilon_{Fa} \circ F\eta_a = 1_{Fa}$，すなわち $(\epsilon * F) \circ (F * \eta) = 1_F$ がわかる．逆に，$(\epsilon * F) \circ (F * \eta) = 1_F$ ならば，(i) は常に成立する．よって，(i) が常に成立するための条件は，$(\epsilon * F) \circ (F * \eta) = 1_F$ である．同様に，(ii) が常に成立するための条件は，$(G * \epsilon) \circ (\eta * G) = 1_G$ である．

以上の議論と (1), (2) より，(3) に述べられた対応は，(A) の元と「(B) の元 η と (C) の元 ϵ との組 (η,ϵ) であって，三角恒等式を満たすもの」との一対一対応を与える．ところで，自然変換 $\eta \colon 1_A \Rightarrow G \circ F$ と $\epsilon \colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ が三角恒等式を満たすならば（すなわち，(η,ϵ) が (D) の元ならば），上の議論より $G{-} \circ \eta_a$ と $\epsilon_b \circ F{-}$ とは互いに他の逆写像となるから，ともに全単射となる．したがって，このとき η, ϵ はそれぞれ自動的に (B), (C) の元となる．よって，結局，(3) に述べられた対応は，(A) の元と (D) の元との間の一対一対応を与えることがわかった．

(4), (5)　(1), (2), (3) から従う．□

定理 4.2　A, B を圏，$F \colon A \to B$，$G \colon B \to A$ を関手とする．

(1) 自然変換 $\eta \colon 1_A \Rightarrow G \circ F$ について，次の 2 条件は同値である．
  (a) 任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して，$G{-} \circ \eta_a \colon \mathrm{Hom}_B(Fa,b) \to \mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ は全単射である．
  (b) 任意の $a \in A$ に対して，(Fa,η_a) は $a \downarrow G$ の始対象である．
(2) 自然変換 $\epsilon \colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ について，次の 2 条件は同値である．
  (a) 任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して，$\epsilon_b \circ F{-} \colon \mathrm{Hom}_A(a,Gb) \to \mathrm{Hom}_B(Fa,b)$ は全単射である．
  (b) 任意の $b \in B$ に対して，(Gb,ϵ_b) は $F \downarrow b$ の終対象である．

証明　(1) のみ示す．$a \in A$ を固定する．任意の $b \in B$ に対して $G{-} \circ \eta_a \colon \mathrm{Hom}_B(Fa,b) \to \mathrm{Hom}_A(a,Gb)$ が全単射であるとは，“自然変換” $G{-} \circ \eta_a \colon \mathrm{Hom}_B(Fa,{-}) \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(a,G{-})$ が “自然同型” であるということであり，これはすなわち $(Fa, G{-} \circ \eta_a)$ が “関手” $\mathrm{Hom}_A(a,G{-})$ の表現であるということである．系 2.8 より，これは，$(Fa, G1_{Fa} \circ \eta_a) = (Fa,\eta_a)$ が $a \downarrow G$ の始対象であることと同値である．これで示された．□

4.2　随伴，単位と余単位

定義 4.3（随伴）　A, B を圏とする．関手 $F \colon A \to B$，$G \colon B \to A$ と $A^{\mathrm{op}} \times B$ から $\mathbf{SET}$ への “関手” の間の “自然同型” $\phi \colon \mathrm{Hom}_B(F{-},{-}) \cong \mathrm{Hom}_A({-},G{-})$ との組 $(F,G;\phi)$ を，随伴という．このとき，(F,G) は ϕ によって随伴をなすという．また，このような “自然同型” ϕ が存在するとき，(F,G) は随伴対である，F は G の左

随伴である，G は F の右随伴であるという[*7].

定義 4.4（単位・余単位） A, B を圏, $F\colon A \to B$, $G\colon B \to A$ を関手とし, F と G は“自然同型”$\phi\colon \mathrm{Hom}_B(F-,-) \cong \mathrm{Hom}_A(-,G-)$ によって随伴をなすとする．

(1) 自然変換 $\eta\colon 1_A \Rightarrow G \circ F$，$\eta_a = \phi_{a,Fa}(1_{Fa})\colon a \to GFa$ を，随伴 $(F, G; \phi)$ の単位という．

(2) 自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_B$，$\epsilon_b = \phi^{-1}_{Gb,b}(1_{Gb})\colon FGb \to b$ を，随伴 $(F, G; \phi)$ の余単位という．

系 4.5（三角恒等式） A, B を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とする．自然変換 $\eta\colon 1_A \Rightarrow G \circ F$, $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ について，次の 2 条件は同値である．

(a) “自然同型” $\phi\colon \mathrm{Hom}_B(F-,-) \cong \mathrm{Hom}_A(-,G-)$ であって，随伴 $(F, G; \phi)$ の単位・余単位がそれぞれ η, ϵ に一致するものが存在する．

(b) 三角恒等式

$$
\begin{aligned}
(\epsilon * F) \circ (F * \eta) &= 1_F, \\
(G * \epsilon) \circ (\eta * G) &= 1_G
\end{aligned}
$$

を満たす．

さらに，これらの条件が満たされるとき，(a) の条件を満たす ϕ は一意であり，

$$
\begin{aligned}
\phi_{a,b}\colon \mathrm{Hom}_B(Fa, b) \to \mathrm{Hom}_A(a, Gb); &\quad g \mapsto Gg \circ \eta_a, \\
\phi^{-1}_{a,b}\colon \mathrm{Hom}_A(a, Gb) \to \mathrm{Hom}_B(Fa, b); &\quad f \mapsto \epsilon_b \circ Ff
\end{aligned}
$$

で与えられる． □

系 4.6 A, B を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とする．

(1) 自然変換 $\eta\colon 1_A \Rightarrow G \circ F$ について，次の 3 条件は同値である．
   (a) “自然同型” $\phi\colon \mathrm{Hom}_B(F-,-) \cong \mathrm{Hom}_A(-,G-)$ であって，随伴 $(F, G; \phi)$ の単位が η に一致するものが存在する．
   (b) 任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して，対応 $G- \circ \eta_a\colon \mathrm{Hom}_B(Fa, b) \to \mathrm{Hom}_A(a, Gb)$ は全単射である．
   (c) 任意の $a \in A$ に対して，(Fa, η_a) は $a \downarrow G$ の始対象である．

   さらに，これらの条件が満たされるとき，(a) の条件を満たす ϕ は一意であり，

$$
\phi_{a,b}\colon \mathrm{Hom}_B(Fa, b) \to \mathrm{Hom}_A(a, Gb); \quad g \mapsto Gg \circ \eta_a
$$

   で与えられる．

(2) 自然変換 $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ について，次の 3 条件は同値である．
   (a) “自然同型” $\phi\colon \mathrm{Hom}_B(F-,-) \cong \mathrm{Hom}_A(-,G-)$ であって，随伴 $(F, G; \phi)$ の余単位が ϵ に一致するものが存在する．
   (b) 任意の $a \in A$，$b \in B$ に対して，対応 $\epsilon_b \circ F-\colon \mathrm{Hom}_A(a, Gb) \to \mathrm{Hom}_B(Fa, b)$ は全単射である．
   (c) 任意の $b \in B$ に対して，(Gb, ϵ_b) は $F \downarrow b$ の終対象である．

[*7] 本稿では用いないが，(F, G) が随伴対であることを $F \dashv G$ と表すことが多い．

さらに，これらの条件が満たされるとき，(a) の条件を満たす ϕ は一意であり，

$$\phi_{a,b}^{-1}\colon \mathrm{Hom}_A(a,Gb) \to \mathrm{Hom}_B(Fa,b);\quad f \mapsto \epsilon_b \circ Ff$$

で与えられる． □

以上より，関手 $F\colon A \to B$ と $G\colon B \to A$ との間の随伴は，“自然同型” $\phi\colon \mathrm{Hom}_B(F-,-) \cong \mathrm{Hom}_A(-,G-)$ の他，単位 $\eta\colon 1_A \Rightarrow G \circ F$ と余単位 $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ との組や，あるは単位のみ，余単位のみによっても記述でき，それらはすべて等価である．そこで，以下では，「(F,G) は ϕ によって随伴をなす」というのと同様に，「(F,G) は η を単位として随伴をなす」，「(F,G) は ϵ を余単位として随伴をなす」などともいう．

A, B を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とする．(F,G) は “自然同型” $\phi\colon \mathrm{Hom}_B(F-,-) \cong \mathrm{Hom}_A(-,G-)$ によって随伴をなすとし，その単位を $\eta\colon 1_A \Rightarrow G \circ F$，余単位を $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ とする．F と G の反対関手 $F^{\mathrm{op}}\colon A^{\mathrm{op}} \to B^{\mathrm{op}}$ と $G^{\mathrm{op}}\colon A^{\mathrm{op}} \to B^{\mathrm{op}}$ を考える．すると，$(G^{\mathrm{op}},F^{\mathrm{op}})$ は “自然同型” $\phi^{-1}\colon \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(G^{\mathrm{op}}-,-) \cong \mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(-,F^{\mathrm{op}}-)$ によって随伴をなし，その単位は $\epsilon^{\mathrm{op}}\colon 1_{B^{\mathrm{op}}} \Rightarrow F^{\mathrm{op}} \circ G^{\mathrm{op}}$，余単位は $\eta^{\mathrm{op}}\colon G^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}} \Rightarrow 1_{A^{\mathrm{op}}}$ で与えられる．

定理 4.7 A, B を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とし，(F,G) は η を単位，ϵ を余単位として随伴をなすとする．

(1) 後合成関手 $G_*\colon B^A \to A^A$ を考える．(F,η) は $1_A \downarrow G_*$ の始対象である．
(2) 後合成関手 $F_*\colon A^B \to B^B$ を考える．(G,ϵ) は $F_* \downarrow 1_B$ の終対象である．

証明 (1) のみ示す．$(F',\eta') \in 1_A \downarrow G_*$（関手 $F'\colon A \to B$，自然変換 $\eta'\colon 1_A \Rightarrow G \circ F'$）を任意にとる．各 $a \in A$ に対して，(Fa,η_a) は $a \downarrow G$ の始対象だから（系 4.6 (1)），$\theta_a\colon Fa \to F'a$ であって $\eta'_a = G\theta_a \circ \eta_a$ を満たすものが一意に存在する．これにより定まる $\theta = \{\theta_a\}_{a \in A}$ は，F から F' への自然変換である．これを示そう．A の射 $f\colon a \to a'$ を任意にとる．η, η' の自然性および $\theta_a, \theta_{a'}$ の定め方より，次の図式中の小四角形および小三角形はすべて可換である：

$$\begin{tikzcd}
GFa \arrow[rrr, "GFf"] \arrow[ddd, "G\theta_a"'] & & & GFa' \arrow[ddd, "G\theta_{a'}"] \\
 & & & \\
 & a \arrow[uul, "\eta_a"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\eta_{a'}"] & a' \arrow[uur, "\eta_{a'}"] \arrow[dr, "\eta'_{a'}"'] & \\
GF'a \arrow[rrr, "GF'f"'] & & & GF'a'
\end{tikzcd}.$$

これより $G(F'f \circ \theta_a) \circ \theta_a = \theta'_{a'} \circ f = G(\theta_{a'} \circ Ff) \circ \theta_a$ であり，したがって，普遍性が誘導する射の一意性と合わせて $F'f \circ \theta_a = \theta_{a'} \circ Ff$ を得る．よって，$\theta = \{\theta_a\}_{a \in A}$ は自然性条件を満たす．さて，その定め方より，$\theta\colon F \Rightarrow F'$ は $\eta' = G_*\theta \circ \eta$ を満たす唯一の自然変換である．以上より，(F,η) は $1_A \downarrow G_*$ の始対象である． □

系 4.8（随伴の一意性） A, B を圏とする．

(1) $F, F'\colon A \to B$ がともに $G\colon B \to A$ の左随伴ならば，$F \cong F'$ である．
(2) $G, G'\colon B \to A$ がともに $F\colon A \to B$ の右随伴ならば，$G \cong G'$ である． □

証明 (1) のみ示す．$F, F'\colon A \to B$ がともに $G\colon B \to A$ の左随伴であるとし，対応する単位 η, η' をとる．すると，定理 4.7 (1) より $(F,\eta), (F',\eta')$ はともに $1_A \downarrow G_*$ の始対象だから，始対象の一意性（命題 1.6 (1)）より

$(F,\eta) \cong (F',\eta')$，特に $F \cong F'$ である． □

次の意味で，左随伴関手は，右随伴関手と単位（になるべき射の族）から復元できる（右随伴関手についても同様）．

命題 4.9　A, B を圏とする．

(1) $G\colon B \to A$ を関手とする．また，各 $a \in A$ に対して，$a \downarrow G$ の始対象 (b_a, η_a)（$b_a \in B$，$\eta_a\colon a \to Gb_a$）が与えられているとする．これに対して，関手 $F\colon A \to B$ であって，対象の対応が $a \mapsto b_a$ であり，$\eta = \{\eta_a\}_{a \in A}$ が 1_A から $G \circ F$ への自然変換であるようなものが一意に存在する．さらに，このとき (F, G) は η を単位として随伴をなす．

(2) $F\colon A \to B$ を関手とする．また，各 $b \in B$ に対して，$F \downarrow b$ の終対象 (a_b, ϵ_b)（$a_b \in A$，$\epsilon_b\colon Fa_b \to b$）が与えられているとする．これに対して，関手 $G\colon B \to A$ であって，対象の対応が $b \mapsto a_b$ であり，$\epsilon = \{\epsilon_b\}_{b \in B}$ が $F \circ G$ から 1_B への自然変換であるようなものが一意に存在する．さらに，このとき (F, G) は ϵ を余単位として随伴をなす．

証明　(1) のみ示す．A の射 $f\colon a \to a'$ を任意にとる．(b_a, η_a) は $a \downarrow G$ の始対象だから，$g_f\colon b_a \to b_{a'}$ であって $Gg_a \circ \eta_a = \eta_{a'} \circ f$ を満たすものが一意に存在する．そこで，A の対象 a に対して B の対象 b_a を，A の射 f に対して B の射 g_f を与える対応 F を考えると，普遍性が誘導する射の一意性より，F が A から B への関手であることがわかる．F による射の対応の定義より，$\eta = \{\eta_a\}_{a \in A}$ は 1_A から $G \circ F$ への自然変換である．逆に，η が自然性条件件を満たすためには，F による射の対応は上のとおり定めるしかない．これは，F の一意性を示している．さらに，任意の $a \in A$ に対して $(Fa, \eta_a) = (b_a, \eta_a)$ は $a \downarrow G$ の始対象だったから，系 4.6 (1) より，(F, G) は η を単位として随伴をなす． □

4.3　随伴と忠実性・充満性

命題 4.10　A, B を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とし，F と G は $\eta\colon 1_A \Rightarrow G \circ F$ を単位，$\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ を余単位として随伴をなすとする．

(1) F が忠実であるための必要十分条件は，任意の $a \in A$ に対して η_a がモノ射であることである．
(2) F が充満であるための必要十分条件は，任意の $a \in A$ に対して η_a が分裂エピ射であることである．
(3) F が忠実充満であるための必要十分条件は，η が自然同型であることである．

双対的に，

(1′) G が忠実であるための必要十分条件は，任意の $b \in B$ に対して ϵ_b がエピ射であることである．
(2′) G が充満であるための必要十分条件は，任意の $b \in B$ に対して ϵ_b が分裂モノ射であることである．
(3′) G が忠実充満であるための必要十分条件は，ϵ が自然同型であることである．

証明　前半のみ示す．

(1)　必要性を示す．F が忠実であるとして，各 η_a がモノ射であることを示したい．$a, c \in A$，$f, f'\colon c \to a$ であり，$\eta_a \circ f = \eta_a \circ f'$ が成り立っているとする．F でうつして $F\eta_a \circ Ff = F\eta_a \circ Ff'$ を得るが，三角恒等式（系 4.5）より $F\eta_a$ は（分裂）モノ射なので，$Ff = Ff'$ である．F は忠実だったから，$f = f'$ である．

よって，η_a はモノ射である．

十分性を示す．各 η_a がモノ射であるとして，F が忠実であることを示したい．$a, c \in A$，$f, f' \colon c \to a$ であり，$Ff = Ff'$ が成り立っているとする．η の自然性より，$\eta_a \circ f = GFf \circ \eta_c = GFf' \circ \eta_c = \eta_a \circ f'$ を得る．η_a はモノ射だったから，$f = f'$ である．よって，F は忠実である．

(2)　必要性を示す．F が充満であるとして，各 η_a が分裂エピ射であることを示したい．$a \in A$ を任意にとる．F の充満性を用いて，$f \colon GFa \to a$ を $Ff = \epsilon_{Fa}$ なるようにとる．η の自然性より $\eta_a \circ f = GFf \circ \eta_{GFa} = G\epsilon_{Fa} \circ \eta_{GFa}$ を得るが，三角恒等式（系 4.5）より，この最右辺は 1_{GFa} に等しい．よって，η_a は分裂エピ射である．

十分性を示す．各 η_a が分裂エピ射であるとして，F が充満であることを示したい．$a, c \in A$，$g \colon Fc \to Fa$ を任意にとる．η_a は分裂エピ射だから，$f \colon GFa \to a$ を $\eta_a \circ f = 1_{GFa}$ なるようにとれる．このとき，$h = f \circ Gg \circ \eta_c \colon c \to a$ と置くと，$Fh = g$ であることを示そう．まず，$\eta_a \circ f = 1_{GFa}$ より $F\eta_a \circ Ff = 1_{FGFa}$ である一方，三角恒等式（系 4.5）より $\epsilon_{Fa} \circ F\eta_a = 1_{Fa}$ だから，

$$Ff = \epsilon_{Fa} \circ F\eta_a \circ Ff = \epsilon_{Fa}$$

である．これと ϵ の自然性，三角恒等式（系 4.5）より，

$$\begin{aligned} Fh &= Ff \circ FGg \circ F\eta_c \\ &= \epsilon_{Fa} \circ FGg \circ F\eta_c \\ &= g \circ \epsilon_{Fc} \circ F\eta_c \\ &= g \end{aligned}$$

を得る．よって，F は充満である．

(3)　同型射であることとモノかつ分裂エピであることとは同値だから（命題 1.9），(3) は (1), (2) から従う．

□

4.4　随伴と圏同値

命題 4.11　A, B を圏，$F \colon A \to B$，$G \colon B \to A$ を関手とし，$\eta \colon 1_A \cong G \circ F$，$\epsilon \colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ を自然同型（したがって，F と G は互いに他を準逆にもつ圏同値関手）とする．

(1) 自然変換 $\epsilon' \colon F \circ G \Rightarrow 1_B$ であって，(F, G) が η を単位，ϵ' を余単位として随伴をなすようなものが一意に存在する．さらに，この ϵ' は自然同型である．
(2) 自然変換 $\eta' \colon 1_A \Rightarrow G \circ F$ であって，(F, G) が η' を単位，ϵ を余単位として随伴をなすようなものが一意に存在する．さらに，この η' は自然同型である．

証明　(1) のみ示す．$a \in A$，$b \in B$ を任意にとる．G は圏同値関手，したがって忠実充満だから（命題 1.27），G による射の対応 $\mathrm{Hom}_B(Fa, b) \to \mathrm{Hom}_A(GFa, Gb)$ は全単射である．また，η は自然同型だから，$\eta_a \colon a \to GFa$ は同型射であり，したがって $- \circ \eta_a \colon \mathrm{Hom}_A(GFa, Gb) \to \mathrm{Hom}_A(a, Gb)$ は全単射である．これらより，$G{-} \circ \eta_a \colon \mathrm{Hom}_B(Fa, b) \to \mathrm{Hom}_A(a, Gb)$ は全単射である．よって，系 4.6 (1) より，(F, G) は η を単位として随伴をなす．対応する余単位 ϵ' は一意である．さらに，G は忠実充満だから，命題 4.10 (3′) より，ϵ' は自然同型である．

□

系 4.12　A, B を圏とする．$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ が互いに他を準逆にもつ圏同値関手ならば，(F, G) と (G, F) はともに随伴対である． □

4.5　随伴と余極限・極限

定理 4.13　A, B を圏，$F\colon A \to B$，$G\colon B \to A$ を関手とし，(F, G) は随伴対をなすとする．

(1) 左随伴関手 F は，余極限を保つ．

(2) 右随伴関手 G は，極限を保つ．

証明　(1) のみ示す．一般に，随伴が与える自然同型によって $g \in \mathrm{Hom}_B(Fa, b)$ と対応する A の射を，$\widetilde{g} \in \mathrm{Hom}_A(a, Gb)$ と書くことにする．

I を圏，$T\colon I \to A$ を A 上の図式とし，(a, α) を T の余極限，すなわち $T \downarrow \Delta_A$ の始対象とする．$(Fa, 1_F * \alpha)$ が $F \circ T$ の余極限，すなわち $F \circ T \downarrow \Delta_B$ の始対象であることを示したい．

$(b, \beta) \in F \circ T \downarrow \Delta_B$ を任意にとる．圏 $F \circ T \downarrow \Delta_B$ における $(Fa, 1_F * \alpha)$ から (b, β) への射とは，圏 B における射 $g\colon Fa \to b$ であって，$\Delta_B g \circ (1_F * \alpha) = \beta$，すなわち任意の $i \in I$ に対して $g \circ F\alpha_i = \beta_i$ を満たすものに他ならない．ところで，随伴によって $g\colon Fa \to b$ に対応する射 $\widetilde{g}\colon a \to Gb$，$\beta_i\colon FTi \to b$ に対応する射 $\widetilde{\beta_i}\colon Ti \to Gb$ を考えると，随伴の自然性より，

$$g \circ F\alpha_i = \beta_i \iff \widetilde{g} \circ \alpha_i = \widetilde{\beta_i}$$

である．さらに，$\widetilde{\beta} = \{\widetilde{\beta_i}\}_{i \in I}$ と置くと，随伴の自然性より，$\widetilde{\beta}$ は T から $\Delta_A Gb$ への自然変換となる．これを用いると，「任意の $i \in I$ に対して $\widetilde{g} \circ \alpha_i = \widetilde{\beta_i}$ が成り立つ」ことは，$\Delta_A \widetilde{g} \circ \alpha = \widetilde{\beta}$ と表せる．これは，$\widetilde{a}\colon a \to Gb$ が圏 $T \downarrow \Delta_A$ における (a, α) から $(Gb, \widetilde{\beta})$ の射であるということに他ならない．以上より，圏 $F \circ T \downarrow \Delta_B$ における $(Fa, 1_F * \alpha)$ から (b, β) への射は，圏 $T \downarrow \Delta_A$ における (a, α) から $(Gb, \widetilde{\beta})$ への射と一対一に対応する．

(a, α) は $T \downarrow \Delta_A$ の始対象だったから，圏 $T \downarrow \Delta_A$ における (a, α) から $(Gb, \widetilde{\beta})$ への射はただ 1 つ存在する．よって，上の対応より，圏 $F \circ T \downarrow \Delta_B$ における $(Fa, 1_F * \alpha)$ から (b, β) への射もただ 1 つである．よって，$(Fa, 1_F * \alpha)$ は $F \circ T \downarrow \Delta_B$ の始対象である． □

系 4.14　圏同値関手は，極限・余極限を保つ．

証明　系 4.12 と定理 4.13 から従う． □

参考文献

[1] E. Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016.

[2] alg_d，壱大整域「圏論」．特に「極限」と「随伴関手」．(2019 年 5 月 26 日アクセス)
http://alg-d.com/math/kan_extension/