コンパクト Lie 群

箱

2025 年 8 月 10 日

概要

コンパクト Lie 群について解説する．コンパクト Lie 代数や，コンパクト連結 Lie 群の極大トーラスについて述べたあと，コンパクト連結 Lie 群に対する最高ウェイト理論を述べる．

目次

記号と用語

- Lie 代数に関する記号と用語は,「Lie 代数」 [4] および「分裂簡約 Lie 代数」 [6] による.
- ルート系に関する記号と用語は,「ルート系」 [5] による.
- 位相群 G の主連結成分(単位元を含む連結成分)を, G_0 と書く.
- Lie 群 G の Lie 代数を, $\mathrm{Lie}(G)$ と書く. Lie 群の準同型 $\varPhi\colon G \to H$ が誘導する Lie 代数の準同型を, $\mathrm{Lie}(\varPhi)\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ と書く.

1 分裂半単純 Lie 代数に関する準備

1.1 Chevalley 系

定義 1.1(Chevalley 系) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とする. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する **Chevalley 系**(Chevalley system)とは, $\mathfrak{g}$ の元の族 $(X_\alpha)_{\alpha \in \varDelta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ であって, 次の条件を満たすものをいう.

(C1) 各 $\alpha \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ である.
(C2) 各 $\alpha \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, $(H_\alpha, X_\alpha, -X_{-\alpha})$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である. ここで, H_α は α の双対ルートを表す.
(C3) 線型写像 $\psi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を

$$\psi(h) = -h \qquad (h \in \mathfrak{h}), \qquad \psi(X_\alpha) = X_{-\alpha} \qquad (\alpha \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$$

によって定めると, ψ は $\mathfrak{g}$ の自己同型である(このとき, より強く, ϕ は $\mathfrak{g}$ 上の対合となる).

このとき, (C3) によって定まる ψ を, **Chevalley 系** $(X_\alpha)_{\alpha \in \varDelta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ **が定める対合**という.

命題 1.2 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とし, $\mathfrak{h}^*$ 上の $\mathbf{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する [5, 系 1.8 (1)]. $\mathfrak{g}$ の元の族 $(X_\alpha)_{\alpha \in \varDelta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ が条件 (C1) を満たすとする. α, $\beta \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ であって $\alpha + \beta \neq 0$ を満たすものに対して, $\alpha + \beta \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ならば

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} \qquad (N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{K}^\times)$$

と置き($[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ であること [6, 命題 3.16] より $N_{\alpha,\beta} \neq 0$ である), $\alpha + \beta \notin \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ならば $N_{\alpha,\beta} = 0$ と定める.

(1) 任意の α, $\beta \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\alpha + \beta \neq 0$ に対して, $N_{\beta,\alpha} = -N_{\alpha,\beta}$ が成り立つ.
(2) 任意の α, β, $\gamma \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ に対して,

$$\frac{N_{\alpha,\beta}}{\langle \gamma, \gamma \rangle} = \frac{N_{\beta,\gamma}}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{N_{\gamma,\alpha}}{\langle \beta, \beta \rangle}$$

が成り立つ.
(3) α, β, γ, $\delta \in \varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ を満たし, このうちどの二つの和も 0 ではないとする. このとき,

$$\frac{N_{\alpha,\beta} N_{\gamma,\delta}}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} + \frac{N_{\beta,\gamma} N_{\alpha,\delta}}{\langle \beta + \gamma, \beta + \gamma \rangle} + \frac{N_{\gamma,\alpha} N_{\beta,\delta}}{\langle \gamma + \alpha, \gamma + \alpha \rangle} = 0$$

が成り立つ.

証明 (1) Lie 代数の演算の交代性から明らかである．

(2) Jacobi の恒等式より，

$$\begin{aligned}0 &= [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [[X_\beta, X_\gamma], X_\alpha] + [[X_\gamma, X_\alpha], X_\beta] \\ &= N_{\alpha,\beta}[X_{-\gamma}, X_\gamma] + N_{\beta,\gamma}[X_{-\alpha}, X_\alpha] + N_{\gamma,\alpha}[X_{-\beta}, X_\beta] \\ &= N_{\alpha,\beta}H_\gamma + N_{\beta,\gamma}H_\alpha + N_{\gamma,\alpha}H_\beta\end{aligned}$$

である．$\mathbf{W}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ が定める同型 $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$ によって H_α は $2\alpha/\langle \alpha,\alpha \rangle$ に対応し [5, 系 1.8 (2)]，β と γ についても同様だから，上式より

$$0 = \frac{N_{\alpha,\beta}}{\langle \gamma,\gamma \rangle}\gamma + \frac{N_{\beta,\gamma}}{\langle \alpha,\alpha \rangle}\alpha + \frac{N_{\gamma,\alpha}}{\langle \beta,\beta \rangle}\beta$$

である．$\gamma = -\alpha - \beta$ であり，α と β は線型独立だから，上式から主張の等式を得る．

(3) Jacobi の恒等式より

$$\begin{aligned}0 &= [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [[X_\beta, X_\gamma], X_\alpha] + [[X_\gamma, X_\alpha], X_\beta] \\ &= N_{\alpha,\beta}[X_{\alpha+\beta}, X_\gamma] + N_{\beta,\gamma}[X_{\beta+\gamma}, X_\alpha] + N_{\gamma,\alpha}[X_{\gamma+\alpha}, X_\beta] \\ &= (N_{\alpha,\beta}N_{\alpha+\beta,\gamma} + N_{\beta,\gamma}N_{\beta+\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\alpha}N_{\gamma+\alpha,\beta})X_{\alpha+\beta+\gamma}\end{aligned}$$

だから，

$$N_{\alpha,\beta}N_{\alpha+\beta,\gamma} + N_{\beta,\gamma}N_{\beta+\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\alpha}N_{\gamma+\alpha,\beta} = 0 \tag{$*$}$$

である．また，(2) より

$$N_{\alpha+\beta,\gamma} = N_{-\gamma-\delta,\gamma} = \frac{\langle \delta,\delta \rangle}{\langle \gamma+\delta, \gamma+\delta \rangle}N_{\gamma,\delta} = \frac{\langle \delta,\delta \rangle}{\langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle}N_{\gamma,\delta}$$

であり，$N_{\beta+\gamma,\alpha}$ と $N_{\gamma+\alpha,\beta}$ も同様に表せる．これらを ($*$) に代入すれば，主張の等式を得る． □

補題 1.3 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の元の族 $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ が条件 (C1) を満たすとして，対応して定まる係数（命題 1.2）を $N_{\alpha,\beta}$ と書く．このとき，任意の α, β, $\alpha+\beta \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = (q+1)^2$$

が成り立つ．ここで，p と q は，$\{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ を満たす 0 以上の整数である [6, 系 3.15]．

証明 $\mathfrak{h}^*$ 上の $\mathbf{W}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定する [5, 系 1.8 (1)]．以下では，$\operatorname{ad}(X_{-\alpha})\operatorname{ad}(X_\alpha)X_\beta$ を 2 通りの方法で計算する．まず，定義より

$$\operatorname{ad}(X_{-\alpha})\operatorname{ad}(X_\alpha)X_\beta = N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}X_\beta$$

であり，命題 1.2 (1), (2) より

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \frac{\langle \beta,\beta \rangle}{\langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle}N_{-\beta,-\alpha} = -\frac{\langle \beta,\beta \rangle}{\langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle}N_{-\alpha,-\beta}$$

だから，

$$\operatorname{ad}(X_{-\alpha})\operatorname{ad}(X_\alpha)X_\beta = -\frac{\langle \beta,\beta \rangle}{\langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle}N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}X_\beta \tag{$*$}$$

である．次に，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, -X_{-\alpha})$ と随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とみなす．すると，$\bigoplus_{j=-q}^{p} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ は $\mathfrak{g}$ の $p+q+1$ 次元既約部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群であり，各 $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ はそのウェイト $-(p-q)+2j$ のウェイト空間である [6, 命題 3.16 の証明]．したがって，有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の構造より，

$$\operatorname{ad}(X_{-\alpha})\operatorname{ad}(X_\alpha)X_\beta = -p(q+1)X_\beta \tag{$**$}$$

である．($*$) と ($**$) を比較して，$\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle/\langle\beta,\beta\rangle = (q+1)/p$ を用いれば [5, 系 1.31]，

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = \frac{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}p(q+1) = (q+1)^2$$

を得る． □

定理 1.4（Chevalley 系の存在） 標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，それに対する Chevalley 系が存在する．

証明 ルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底 Π を一つ固定して，各正ルート α（その双対ルートを H_α と書く）に対して，$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $(H_\alpha, X_\alpha, -X_{-\alpha})$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるようにとる [6, 定理 3.10]．すると，$(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ は条件 (C1) と (C2) を満たす．以下，各 X_α をスカラー倍だけ調整することで，Chevalley 系を構成する．

同型定理 [6, 定理 3.28] より，$\psi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ であって

$$\psi(h) = -h \qquad (h\in\mathfrak{h}), \qquad \psi(X_\alpha) = X_{-\alpha} \qquad (\alpha \in B)$$

を満たすものが（一意に）存在する．$\psi|_{\mathfrak{h}} = -\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ より各 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して $\psi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ だから，

$$\psi(X_\alpha) = c(\alpha)X_{-\alpha} \qquad (c(\alpha)\in\mathbb{K}^\times)$$

と置ける．任意の $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，

$$\begin{aligned}&[\psi(X_\alpha),\psi(X_{-\alpha})] = [c(\alpha)X_{-\alpha}, c(-\alpha)X_\alpha] = c(\alpha)c(-\alpha)H_\alpha,\\ &\psi([X_\alpha,X_{-\alpha}]) = -\psi(H_\alpha) = H_\alpha\end{aligned}$$

であり，これらは等しいから，$c(\alpha)c(-\alpha)=1$ である．そこで，各 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して $t_\alpha\in\mathbb{K}^\times$ をとって，任意の $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して

$$t_\alpha^2 = c(\alpha) \quad \text{かつ} \quad t_\alpha t_{-\alpha} = 1$$

を満たすようにできる（係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であることを用いた）．これを用いて $X'_\alpha = t_\alpha^{-1}X_\alpha$ と置くと，$(H_\alpha, X'_\alpha, -X'_{-\alpha})$ も $\mathfrak{sl}_2$-三対であり，

$$\psi(X'_\alpha) = t_\alpha^{-1}\psi(X_\alpha) = t_\alpha^{-1}c(\alpha)X_{-\alpha} = t_\alpha^{-1}c(\alpha)t_{-\alpha}X'_{-\alpha} = X'_{-\alpha}$$

が成り立つ．よって，$(X'_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ は Chevalley 系である． □

命題 1.5 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とする．$(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対する Chevalley 系とし，対応して定まる係数（命題 1.2）を $N_{\alpha,\beta}$ と書く．このとき，任意の α, β, $\alpha+\beta\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，

$$N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} = \pm(q+1)$$

が成り立つ．ここで，p と q は，$\{j\in\mathbb{Z} \mid \beta+j\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\} = [-q,p]\cap\mathbb{Z}$ を満たす 0 以上の整数である [6, 系 3.15]．

証明　条件 (C3) より $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ であり，補題 1.3 より $N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = (q+1)^2$ だから，$N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} = \pm(q+1)$ が成り立つ．　□

系 1.6　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とする．$(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対する Chevalley 系とし，対応して定まる係数（命題 1.2）を $N_{\alpha,\beta}$ と書く．Φ をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の自己同型とすると，任意の α, $\beta \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$，$\alpha+\beta \neq 0$ に対して，$N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)} = \pm N_{\alpha,\beta}$ が成り立つ．

証明　$\alpha+\beta \notin \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$（したがって，$\Phi(\alpha)+\Phi(\beta) \notin \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$）ならば $N_{\alpha,\beta} = N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)} = 0$ であり，そうでなければ命題 1.5 より $N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)} = \pm N_{\alpha,\beta}$ である．　□

1.2　分裂半単純 Lie 代数の自己同型

命題 1.7　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とする．$(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対する Chevalley 系とし，対応して定まる係数（命題 1.2）を $N_{\alpha,\beta}$ と書く．$\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\Phi = (\phi|_{\mathfrak{h}})^{*-1}$ はルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の自己同型であり，任意の $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\phi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\Phi(\alpha)}$ が成り立つ．

(2) (1) より，各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，
$$\phi(X_\alpha) = c(\alpha)X_{\Phi(\alpha)} \qquad (c(\alpha) \in \mathbb{K}^\times)$$
と表せる．この係数 $c(\alpha)$ について，
$$\begin{aligned} c(-\alpha) &= c(\alpha)^{-1} && (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})), \\ c(\alpha+\beta) &= \frac{N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)}}{N_{\alpha,\beta}}c(\alpha)c(\beta) = \pm c(\alpha)c(\beta) && (\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})) \end{aligned}$$
が成り立つ．ここで，$N_{\alpha,\beta}$ は，Chevalley 系 $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}$ に対応して定まる係数（命題 1.2）である．

(3) α, β, $\alpha+\beta \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ であり，$(\Phi(\alpha),\Phi(\beta))$ が (α,β) または $(-\alpha,-\beta)$ ならば，$c(\alpha+\beta) = c(\alpha)c(\beta)$ が成り立つ．特に，$\phi|_{\mathfrak{h}}$ が $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ または $-\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ ならば，c は $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\,\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ から $\mathbb{K}^\times$ への群準同型に一意に拡張される．

証明　(1)　$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ とすると，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して
$$\begin{aligned} [h,\phi(X_\alpha)] &= \phi([\phi^{-1}(h),X_\alpha]) \\ &= \alpha(\phi^{-1}(h))\phi(X_\alpha) \\ &= \Phi(\alpha)(h)\phi(X_\alpha) \end{aligned}$$
だから，$\phi(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \mathfrak{g}_{\Phi(\alpha)}$ である．ルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ と合わせれば，各 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\phi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\Phi(\alpha)}$ であることがわかる．また，これより $\Phi(\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})) = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ だから，Φ はルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の自己同型である．

(2)　$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とすると，
$$\begin{aligned} &[\phi(X_\alpha),\phi(X_{-\alpha})] = c(\alpha)c(-\alpha)[X_{\Phi(\alpha)},X_{-\Phi(\alpha)}] = -c(\alpha)c(-\alpha)H_{\Phi(\alpha)}, \\ &\phi([X_\alpha,X_{-\alpha}]) = -\phi(H_\alpha) = -H_{\Phi(\alpha)} \end{aligned}$$

であり，これらは等しいから，

$$c(\alpha)c(-\alpha) = 1$$

が成り立つ．

α, β, $\alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とすると，

$$\begin{aligned}
&[\phi(X_\alpha), \phi(X_\beta)] = c(\alpha)c(\beta)[X_{\Phi(\alpha)}, X_{\Phi(\beta)}] = N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)}c(\alpha)c(\beta)X_{\Phi(\alpha+\beta)}, \\
&\phi([X_\alpha, X_\beta]) = N_{\alpha,\beta}\phi(X_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha,\beta}c(\alpha+\beta)X_{\Phi(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

であり，これらは等しいから，

$$c(\alpha+\beta) = \frac{N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)}}{N_{\alpha,\beta}}c(\alpha)c(\beta) = \pm c(\alpha)c(\beta)$$

が成り立つ（系 1.6）．

(3)　α, β, $\alpha+\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ であり，$(\Phi(\alpha), \Phi(\beta))$ が (α, β) または $(-\alpha, -\beta)$ であるとすると，$N_{\Phi(\alpha),\Phi(\beta)} = N_{\pm\alpha,\pm\beta} = N_{\alpha,\beta}$ だから（定理 1.4），(2) より $c(\alpha+\beta) = c(\alpha)c(\beta)$ が成り立つ．

後半の主張は，前半の主張とルート系の一般論 [5, 系 2.14] から従う．□

2　コンパクト Lie 代数

2.1　コンパクト Lie 代数

定義 2.1（コンパクト Lie 代数）　有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**コンパクト**（compact）であるとは，あるコンパクト Lie 群 G の Lie 代数に同型であることをいう．

命題 2.2　有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ はコンパクトである．
(b) $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ はコンパクトである．
(c) $\mathfrak{g}$ 上の不変な内積（すなわち，$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle -, - \rangle$ であって，任意の x, y, $z \in \mathfrak{g}$ に対して $\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle$ を満たすもの）が存在する．
(d) $\mathfrak{g}$ は簡約であり，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の任意の元は半単純でその複素固有値はすべて純虚数である．
(e) $\mathfrak{g}$ は簡約であり，その Killing 形式 $B_\mathfrak{g} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ は負値である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{g}$ がコンパクト Lie 群 G の Lie 代数であるとする．このとき，$\mathrm{Ad}(G) \subseteq GL(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつ $GL(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 群だから，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G)_0$ である．G はコンパクトだから $\mathrm{Ad}(G)$ もコンパクトであり，したがって，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ もコンパクトである．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ がコンパクトであるとすると，$\mathfrak{g}$ 上には $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-不変な内積が存在し，これは $\mathfrak{g}$ 上の不変な内積である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$\mathfrak{g}$ 上に不変な内積が存在するとして，それを一つ固定して $\mathfrak{g}$ を内積空間とみなす．すると，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{ad}(x)$ は歪自己随伴だから，半単純かつその複素固有値はすべて純虚数である．また，$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対してその直交補空間 $\mathfrak{a}^\perp$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルとなるから，$\mathfrak{g}$ は簡約である．

(d) $\Longrightarrow$ (e)　条件 (d) が成り立つとする．任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，仮定より $B_\mathfrak{g}(x, x) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(x)^2 \leq 0$ だから，$B_\mathfrak{g}$ は負値である．よって，条件 (e) が成り立つ．

(e) $\Longrightarrow$ (a)　条件 (e) が成り立つとする．$\mathfrak{g}$ は簡約だから，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ に直和分解される [4, 定理 6.10]．$\mathfrak{z}$ は適当なトーラス T の Lie 代数に同型である．一方で，$\mathfrak{g}'$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ の Lie 代数に同型であり，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ は $GL(\mathfrak{g}')$ の閉部分群であって Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}'} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}'}$ を不変にする．半単純性に関する Cartan の判定法 [4, 定理 6.10] と仮定より $B_{\mathfrak{g}'}$ は非退化負値だから，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ はコンパクトである．よって，$\mathfrak{g}$ はコンパクト Lie 群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}') \times T$ の Lie 代数に同型である．□

系 2.3　有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ はコンパクトである．
(b) $\mathfrak{g}$ は簡約であり，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ はコンパクトである．

証明　コンパクト Lie 代数は簡約だから（命題 2.2），はじめから $\mathfrak{g}$ は簡約であるとしてよい．このとき，$\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に（Lie 代数として）直和分解される [4, 定理 6.10]．任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$x = x' + z$（$x' \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，$z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$）と表すと，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上では $\mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}(x')$ に等しく，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ 上では 0 である．よって，主張は，命題 2.2 の (a) $\Longleftrightarrow$ (d) から従う．□

系 2.4　有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ はコンパクトかつ半単純である．
(b) Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ は非退化負値である．

証明　半単純性に関する Cartan の判定法 [4, 定理 6.10] と命題 2.2 から従う．□

系 2.5　コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，その Cartan 部分代数と極大可換部分空間とは同じものである．特に，$\mathfrak{g}$ のすべての Cartan 部分代数の合併は，$\mathfrak{g}$ 全体に等しい．

証明　一般に，標数 0 の可換体上の簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ が Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ において極大可換であり，かつ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が半単純であることである [6, 定理 1.35]．よって，前半の主張は，コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が簡約であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元が半単純であること（命題 2.2）から従う．

任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対してそれを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間が存在するから，後半の主張は，前半の主張から従う．□

系 2.6　$\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数とし，$\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とする．このとき，任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して，$\alpha(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}$ が成り立つ．

証明　任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{C})})$ と $h \in \mathfrak{t}$ に対して，$\alpha(h)$ は $\mathrm{ad}(h)$ の複素固有値だから，命題 2.2 より $\alpha(h)$ は純虚数である．□

Δ を有限次元複素線型空間 V 上のルート系とすると，$\mathrm{span}_{\mathbb{R}} \Delta$ と $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} \Delta^{\vee}$ はそれぞれ V と V^* の実形である [5, 命題 1.7]．これらをそれぞれ，**ルート系 Δ が定める V と V^* の実形**という．ルート系が定める V と V^* の実形は，互いに他と対応するものである[*1]．

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ をその複素分裂半単純 Lie 代数とすると，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ と $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形は，それ

[*1] 複素線型空間 V の実形 $V_{\mathbb{R}}$ に対して，$\{\phi \in V^* \mid \phi(V_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathbb{R}\}$ は V^* の実形であり，これを $V_{\mathbb{R}}$ **に対応する** V^* **の実形**という．$V_{\mathbb{R}}$ に対応する V^* の実形は，実線型空間 $V_{\mathbb{R}}$ の双対空間と同一視できる．

それぞれ $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ と $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha \mid \alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}$ である．

系 2.7　$\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 代数，$\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とし，ルート系が定める $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く．このとき，$\mathfrak{t}=i\mathfrak{h}_0$ が成り立つ．

証明　系 2.6 より，$\mathfrak{t}\subseteq i\mathfrak{h}_0$ である．$\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{h}_0$ はともに $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ の実形だから，$\mathfrak{t}=i\mathfrak{h}_0$ が成り立つ．　□

2.2　コンパクト Lie 代数の Cartan 部分代数の共役性

補題 2.8　$\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数とし，$\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とする．このとき，ある $h\in\mathfrak{t}$ が存在して，$\mathfrak{t}=\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h)$ が成り立つ．

証明　系 2.6 より，各ルート $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})},\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して，$i\alpha|_{\mathfrak{t}}$ は $\mathfrak{t}$ 上の 0 でない実線型形式である．ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})},\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ は有限だから，$h\in\mathfrak{t}$ を任意の $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})},\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して $\alpha(h)\neq 0$ を満たすようにとれる．h のとり方より $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h)=\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ だから，$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h)=\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h)\cap\mathfrak{g}=\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}\cap\mathfrak{g}=\mathfrak{t}$ となる．　□

定理 2.9（コンパクト Lie 代数の Cartan 部分代数の存在と共役性）　コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の下の共役を除いて一意な Cartan 部分代数をもつ．

証明　存在　系 2.5 から従う．

共役性　$\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}'$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とする．補題 2.8 より，$\mathfrak{t}=\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h)$（$h\in\mathfrak{t}$），$\mathfrak{t}'=\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h')$（$h'\in\mathfrak{t}'$）と表せる．$\mathfrak{g}$ 上の不変な内積 $\langle -,-\rangle$ を一つ固定する（命題 2.2）．$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ はコンパクトだから（命題 2.2），$\langle\phi(h),h'\rangle$ を最大にする $\phi\in\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ がとれる．このとき，任意の $x\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}0&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\langle e^{t\,\mathrm{ad}(x)}\phi(h),h'\rangle\\&=\langle[x,\phi(h)],h'\rangle\\&=\langle x,[\phi(h),h']\rangle\end{aligned}$$

だから，$[\phi(h),h']=0$ である．すなわち，$\phi(h)\in\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h')=\mathfrak{t}'$ である．$\mathfrak{t}'$ は可換だから

$$\mathfrak{t}'\subseteq\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\phi(h))=\phi(\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h))=\phi(\mathfrak{t})$$

となるが，$\phi(\mathfrak{t})$ と $\mathfrak{t}'$ はともに $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数だから，$\mathfrak{t}'=\phi(\mathfrak{t})$ が成り立つ．よって，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の下の共役を除いて一意である．　□

注意 2.10　Lie 群 G がコンパクトな Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をもつとする．このとき，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})=\mathrm{Ad}(G)_0$ だから，定理 2.9 より特に，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は，$\mathrm{Ad}(G)$ の下の共役を除いて一意である．

2.3　Chevalley 系に伴うコンパクト実形

補題 2.11　$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を複素分裂半単純 Lie 代数とし，ルート系が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く．

(1) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Killing 形式の制限 $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}|_{\mathfrak{h}_0\times\mathfrak{h}_0}$ は，非退化正値対称双線型形式である．

さらに，$\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ とし（その双対ルートを H_α と書く），$X_\alpha\in(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha$ と $Y_\alpha\in(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\alpha}$ を $(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるようにとる [6, 定理 3.10]．このとき，次が成り立つ．

(2) $B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\alpha) = 0$.

(3) $B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, Y_\alpha) > 0$.

証明　(1)　$h \in \mathfrak{h}_0 \setminus \{0\}$ とすると，任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に対して $\alpha(h) \in \mathbb{R}$ であり，すべての $\alpha(h)$ が 0 となることはない．ルート空間分解 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})} (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$ が成立し，各ルート空間 $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$ は 1 次元であり [6, 定理 3.10 (2)]，$\mathrm{ad}(h)$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$ に $\alpha(h)$ 倍で作用するから，

$$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(h, h) = (\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(h))^2 = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})} \alpha(h)^2 > 0$$

である．よって，$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0}$ は非退化正値対称双線型形式である．

(2)　分裂半単純 Lie 代数に関する一般論 [6, 命題 3.6] から従う．

(3)　Killing 形式の不変性と (1) より，

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, Y_\alpha) &= \frac{1}{2} B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}([H_\alpha, X_\alpha], Y_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(H_\alpha, [X_\alpha, Y_\alpha]) \\ &= \frac{1}{2} B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\alpha) \\ &> 0 \end{aligned}$$

である．□

命題 2.12　$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ を複素分裂半単純 Lie 代数とし，ルート系が定める $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く．$(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ を $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に対する Chevalley 系とし，これが定める対合を ψ と書く．

(1) $\mathfrak{g} = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{H_\alpha, X_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})\}$ と置くと，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ の実形である．

(2) (1) の実形 $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像を $\sigma_0 \colon \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ と書く．このとき，$\psi\sigma_0 = \sigma_0\psi$ であり，$\psi\sigma_0$ の固定点全体のなす空間は

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{R}i(X_\alpha - X_{-\alpha})$$

であり，$(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ のコンパクト実形である（すなわち，$(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ の実形であり，$\mathfrak{u}$ はコンパクトである）．

証明　(1)　Chevalley 系に対応して定まる係数はすべて整数だから（命題 1.5），$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の実部分 Lie 代数である．また，$\mathfrak{g} = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})\} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{R}X_\alpha$ だが，$\mathrm{span}_\mathbb{R}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})\}$ はルート系が定める $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ の実形 $\mathfrak{h}_0$ にほかならず，各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に対して $\mathbb{R}X_\alpha$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha = \mathbb{C}X_\alpha$ の実形である．よって，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ の実形である．

(2)　$\psi\sigma_0$ と $\sigma_0\psi$ はともに $\mathfrak{g}$ の共役自己同型であり，容易に確かめられるように実形 $\mathfrak{g}$ 上で一致するから，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上でも一致する．また，これより $(\psi\sigma_0)^2 = \psi\sigma_0\sigma_0\psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ だから，$\psi\sigma_0 = \sigma_0\psi$ は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の共役対合であり，その固定点全体のなす空間は $\mathfrak{g}$ の実形である．$\psi\sigma_0$ の固定点全体のなす空間が与えられた $\mathfrak{u}$ に等しいことは，容易に確かめられる．$\mathfrak{u}$ は $i\mathfrak{h}_0$ を含み，$i\mathfrak{h}_0$ は $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ の実形だから，$(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ の実形である．

$\mathfrak{u}$ がコンパクトであることを示す．そのためには，Killing 形式 $B_\mathfrak{u} = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}}$ が非退化負値であることをいえばよい（系 2.4）．ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ の基底を一つ固定して，それに関する正ルート全体のなす集合を

Δ_+ と書くと，直和分解

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathbb{R}i(X_\alpha - X_{-\alpha})$$

が成立し，次のことがいえる．

- $B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{h}_0$ 上で非退化正値だから（補題 2.11 (1)），$i\mathfrak{h}_0$ 上で非退化負値である．
- 各正ルート $\alpha \in \Delta_+$ に対して，$i\mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ と $X_\alpha + X_{-\alpha}$, $i(X_\alpha - X_{-\alpha}) \subseteq (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha \oplus (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_{-\alpha}$ は $B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ に関して直交する [6, 命題 3.6 (2)]．
- 異なる二つの正ルート $\alpha, \beta \in \Delta_+$ に対して，$X_\alpha + X_{-\alpha}$, $i(X_\alpha - X_{-\alpha}) \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha \oplus (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_{-\alpha}$ と $X_\beta + X_{-\beta}$, $i(X_\beta - X_{-\beta}) \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\beta \oplus (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_{-\beta}$ は $B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ に関して直交する [6, 命題 3.6 (2)]．
- 各 $\alpha \in \Delta_+$ に対して，$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\alpha) = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_{-\alpha}, X_{-\alpha}) = 0$ かつ $B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0$ だから（補題 2.11 (2), (3)），

  $$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha + X_{-\alpha}, X_\alpha + X_{-\alpha}) = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(i(X_\alpha - X_{-\alpha}), i(X_\alpha + X_{-\alpha})) = 2B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0,$$
  $$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha + X_{-\alpha}, i(X_\alpha - X_{-\alpha})) = 0$$

  である．

以上より，Killing 形式 $B_\mathfrak{u} = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$ は非退化負値である． □

定義 2.13（Chevalley 系に伴うコンパクト実形）　命題 2.12 の状況で，$(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$（あるいは $\mathfrak{u}$）を，**Chevalley 系** $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ **に伴うコンパクト実形**という．

2.4　コンパクト実形の存在と共役性

補題 2.14　$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を複素半単純 Lie 代数，$\mathfrak{u}$ をそのコンパクト実形とし，$\mathfrak{u}$ に関する複素共役写像を $\tau\colon \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ と書く．このとき，任意の $x \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(x, \tau(x)) < 0$ が成り立つ．

証明　Killing 形式 $B_\mathfrak{u} = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$ は非退化負値だから（系 2.4），任意の $x = u + iv \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \setminus \{0\}$（$u$, $v \in \mathfrak{u}$）に対して，

$$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(x, \tau(x)) = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(u + iv, u - iv) = B_\mathfrak{u}(u, u) + B_\mathfrak{u}(v, v) < 0$$

である． □

$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ を複素分裂半単純 Lie 代数とする．c を加法群 $\operatorname{span}_\mathbb{Z} \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への群準同型とすると，各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \cup \{0\}$ に対して $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$ 上に $c(\alpha)$ 倍で作用するとして定まる線型写像 $f(c)\colon \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ は，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の自己同型である．c, $c' \in \operatorname{Hom}(\operatorname{span}_\mathbb{Z} \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}), \mathbb{C}^\times)$ に対して $f(cc') = f(c)f(c')$ だから，f は $\operatorname{Hom}(\operatorname{span}_\mathbb{Z} \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}), \mathbb{C}^\times)$ から $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ への群準同型である．さらに，$\operatorname{Hom}(\operatorname{span}_\mathbb{Z} \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}), \mathbb{C}^\times)$ は各点収束位相によって連結位相群をなし，この位相に関して f は連続だから，f の像は $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_0 = \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ に含まれる．したがって，群準同型

$$f\colon \operatorname{Hom}(\operatorname{span}_\mathbb{Z} \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}), \mathbb{C}^\times) \to \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$$

が定まる．次の定理では，この記号 f を用いる．

定理 2.15（コンパクト実形の存在と共役性 I） 複素分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ は，$f(\mathrm{Hom}(\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{R}_{>0}))$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもつ．

証明 ルート系が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く．$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対する Chevalley 系 $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ を一つ固定し（定理 1.4），これに伴うコンパクト実形を $(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ と置き，$\mathfrak{u}$ に関する複素共役写像を $\tau \colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く．命題 2.12 より，τ は,

$$\tau(H_\alpha) = -H_\alpha, \qquad \tau(X_\alpha) = X_{-\alpha} \qquad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))$$

によって定まる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の共役対合である．

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の任意のコンパクト実形 $(\mathfrak{u}', i\mathfrak{h}_0)$ を考え（系 2.7 より，Cartan 部分代数は必ず $i\mathfrak{h}_0$ である），$\mathfrak{u}'$ に関する複素共役写像を $\tau' \colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く．τ と τ' はともに $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の共役対合で $\tau|_{i\mathfrak{h}_0} = \tau|_{i\mathfrak{h}_0} = \mathrm{id}_{i\mathfrak{h}_0}$ を満たすから，$\tau\tau'$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の自己同型で $(\tau\tau')|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ を満たす．したがって，命題 1.7 より，ある $c \in \mathrm{Hom}(\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^\times)$ が存在して,

$$\tau\tau'(X_\alpha) = c(\alpha) X_\alpha \qquad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})),$$

すなわち

$$\tau'(X_\alpha) = \overline{c(\alpha)} X_{-\alpha} \qquad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))$$

となる．各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して，補題 2.11 (3) と補題 2.14 より

$$B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0 \quad \text{かつ} \quad \overline{c(\alpha)} B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_\alpha, \tau'(X_\alpha)) < 0$$

だから，$c(\alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ である．よって，$c \in \mathrm{Hom}(\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{R}_{>0})$ である．

前段の c に対して，$t \in \mathrm{Hom}(\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{R}_{>0})$ を $t^2 = c$ となるようにとる．すると，各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して

$$\begin{aligned} f(t)\tau' f(t)^{-1}(H_\alpha) &= -H_\alpha, \\ f(t)\tau' f(t)^{-1}(X_\alpha) &= t(-\alpha)c(\alpha)t(\alpha)^{-1} X_{-\alpha} = X_{-\alpha} \end{aligned}$$

だから，$f(t)\tau' f(t)^{-1} = \tau$ である．よって,

$$\begin{aligned} f(t)(\mathfrak{u}') &= \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \tau f(t)^{-1}(x) = f(t)^{-1}(x)\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \tau(x) = x\} \\ &= \mathfrak{u} \end{aligned}$$

である． □

系 2.16 複素分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の任意のコンパクト実形は，ある Chevalley 系に伴うものである．

証明 命題 2.12 と定理 2.15 から従う． □

定理 2.17（コンパクト実形の存在と共役性 II） 複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもつ．

証明 存在 Chevalley 系の存在（定理 1.4）と命題 2.12 から従う．

共役性 $\mathfrak{u}$ と $\mathfrak{u}'$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形とし，それぞれの Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}'$ をとる．すると，$\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と $\mathfrak{t}'_{(\mathbb{C})}$ はともに $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数だから，これらは $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の作用によって移り合う（Cartan 部分代数の

共役性 [6, 定理 1.28 (2)]). したがって，はじめから $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}=\mathfrak{t}'_{(\mathbb{C})}$ としてよいが，このとき，主張は定理 2.15 から従う． □

系 2.18 複素簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもつ．

証明 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は簡約だから，複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ と複素可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ に直和分解される [4, 定理 6.10]．$\mathfrak{u}'$ が $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形で $\mathfrak{z}$ が $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ の実形ならば $\mathfrak{u}'\oplus\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形であり，逆に $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形はこの形のもので尽くされる．定理 2.15 より $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}})$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもち，$\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ の実形はすべて $\mathrm{Aut}(\mathfrak{z}_{\mathbb{C}})=GL(\mathfrak{z}_{\mathbb{C}})$ の下で共役だから，主張が成り立つ． □

注意 2.19 系 2.18 の証明の状況で，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ への作用は自明である．したがって，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が半単純でない限り，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形は，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の下の共役を除いても一意ではない．

系 2.20

(1) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が同型であるための必要十分条件は，それらの複素化 $(\mathfrak{g}_1)_{(\mathbb{C})}$ と $(\mathfrak{g}_2)_{(\mathbb{C})}$ が同型であることである．

(2) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は，その複素化 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ が半単純であることである．

(3) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が単純であるための必要十分条件は，その複素化 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ が単純であることである．

証明 (1) 必要性は明らかであり，十分性はコンパクト実形の共役性（系 2.18）から従う．

(2) 半単純 Lie 代数に関する一般論 [4, 命題 6.26 (1)] である．

(3) 十分性は，単純 Lie 代数に関する一般論 [4, 命題 6.27 (1)] である．必要性を示す．$\mathfrak{g}$ が単純であるとする．すると，(2) より $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ は半単純だから，複素単純 Lie 代数の直和に $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}=(\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}}\oplus\cdots\oplus(\mathfrak{g}_n)_{\mathbb{C}}$ と分解される．コンパクト実形の存在（定理 2.17）より，各 $(\mathfrak{g}_i)_{\mathbb{C}}$ はコンパクト実形 $\mathfrak{g}_i$ をもつ．それらの直和 $\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n$ は $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ のコンパクト実形となるから，コンパクト実形の共役性（定理 2.17）より，$\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n$ である．ところが，$\mathfrak{g}$ は単純だから，$n=1$ でなければならない．よって，$\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ は単純である． □

系 2.20 より，コンパクト Lie 代数の同型類と複素簡約 Lie 代数の同型類とは，複素化・コンパクト実形をとる操作によって一対一に対応し，その中で，コンパクト半単純 Lie 代数の同型類と複素半単純 Lie 代数の同型類，コンパクト単純 Lie 代数の同型類と複素単純 Lie 代数の同型類とが，それぞれ一対一に対応する．したがって，A_l 型（$l\geq 1$），B_l 型（$l\geq 1$），C_l 型（$l\geq 1$），D_l 型（$l\geq 2$），E_6 型，E_7 型，E_8 型，F_4 型，G_2 型のコンパクト半単純 Lie 代数が，それぞれ同型を除いて一意に存在する．D_2 以外の各型のコンパクト半単純 Lie 代数は，単純である．

2.5 古典型コンパクト単純 Lie 代数

本小節では，古典型コンパクト（半）単純 Lie 代数とその Cartan 部分代数を，具体的に構成する．

A_l（$l\geq 1$）型のコンパクト単純 Lie 代数

実 Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$（$n\in\mathbb{N}$）を，

$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\mid X+X^*=0\},$$
$$\mathfrak{su}(n)=\mathfrak{u}(n)\cap\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$$

と定める．$\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ はそれぞれ，$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の実形であり，コンパクト連結 Lie 群

$$\begin{aligned} U(n) &= \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid g^*g = I_n\}, \\ SU(n) &= U(n) \cap SL(n,\mathbb{C}) \end{aligned}$$

の Lie 代数である．よって，$\mathfrak{su}(l+1)$（$l \geq 1$）は，A_l 型のコンパクト単純 Lie 代数である．

$\mathfrak{u}(l+1)$ と $\mathfrak{su}(l+1)$ のそれぞれの Cartan 部分代数として，

$$\begin{aligned} &\{i \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_{l+1}) \mid t_1,\, \ldots,\, t_{l+1} \in \mathbb{R}\}, \\ &\{i \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_{l+1}) \mid t_1,\, \ldots,\, t_{l+1} \in \mathbb{R},\, t_1 + \cdots + t_{l+1} = 0\} \end{aligned}$$

がとれる．

B_l（$l \geq 1$）型と D_l（$l \geq 2$）型のコンパクト（半）単純 Lie 代数

実 Lie 代数 $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$（$n \in \mathbb{N}$）を，単に $\mathfrak{o}(n)$ と書く．すなわち，

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X + X^{\mathrm{T}} = 0\}$$

である．$\mathfrak{o}(n)$ は，$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ の実形であり，コンパクト連結 Lie 群

$$SO(n) = \{g \in SL(n) \mid g^{\mathrm{T}}g = I_n\}$$

の Lie 代数である．よって，$\mathfrak{o}(2l+1)$（$l \geq 1$）は B_l 型のコンパクト単純 Lie 代数であり，$\mathfrak{o}(2l)$（$l \geq 2$）は D_l 型のコンパクト半単純 Lie 代数（$l \geq 3$ ならば，コンパクト単純 Lie 代数）である．

$\mathfrak{o}(2l+1)$ の Cartan 部分代数として，

$$\left\{ \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & t_l \\ -t_l & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \,\middle|\, t_1,\, \ldots,\, t_l \in \mathbb{R} \right\}$$

がとれる．$\mathfrak{o}(2l)$ の Cartan 部分代数として，

$$\left\{ \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & t_l \\ -t_l & 0 \end{pmatrix} \right) \,\middle|\, t_1,\, \ldots,\, t_l \in \mathbb{R} \right\}$$

がとれる．

C_l（$l \geq 1$）型のコンパクト単純 Lie 代数

実 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(n)$（$n \in \mathbb{N}$）を，

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) \mid X + X^* = 0\}$$

と定める．実 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$ から $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$ への単射準同型 $A + Bj \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{smallmatrix}\right)$ によって，$\mathfrak{sp}(n)$ は

$$\mathfrak{sp}(n)' = \left\{ \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathfrak{u}(n),\, B \in \operatorname{Sym}(n,\mathbb{C}) \right\}$$

に移される．$\mathfrak{sp}(n)'$ は $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ の実形であり，$\mathfrak{sp}(n)$ はコンパクト連結 Lie 群

$$Sp(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{H}) \mid g^*g = I_n\}$$

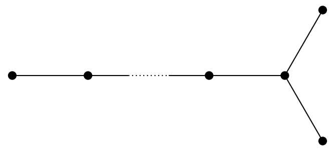
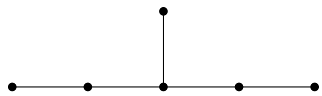
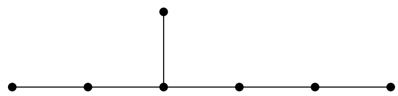
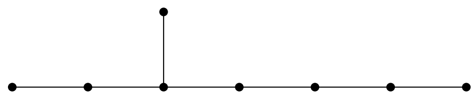
の Lie 代数である．よって，$\mathfrak{sp}(l) \cong \mathfrak{sp}(l)'$（$l \geq 1$）は，$\mathrm{C}_l$ 型のコンパクト単純 Lie 代数である．

$\mathfrak{sp}(l)$ の Cartan 部分代数として，

$$\{i \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_l) \mid t_1,\, \ldots,\, t_l \in \mathbb{R}\}$$

がとれる．

表 1　コンパクト単純 Lie 代数の分類

型	複素単純 Lie 代数	コンパクト単純 Lie 代数	Dynkin 図形
A_l $(l \geq 1)$	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(l+1)$	
B_l $(l \geq 1)$	$\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{o}(2l+1)$	
C_l $(l \geq 1)$	$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(l)$	
D_l $(l \geq 2)$	$\mathfrak{o}(2l, \mathbb{C})$	$\mathfrak{o}(2l)$	
E_6	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$	$\mathfrak{e}_6$	
E_7	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$	$\mathfrak{e}_7$	
E_8	$\mathfrak{e}_8(\mathbb{C})$	$\mathfrak{e}_8$	
F_4	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})$	$\mathfrak{f}_4$	
G_2	$\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$	$\mathfrak{g}_2$	

2.6　コンパクト単純 Lie 代数の分類

本小節では，E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型の（同型を除いて一意に存在する）コンパクト単純 Lie 代数を，それぞれ $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$ と書く．

定理 2.21（コンパクト単純 Lie 代数の分類）　次に挙げる実 Lie 代数は，いずれもコンパクトかつ単純である．任意のコンパクト単純 Lie 代数は，これらのいずれかに同型である．（表 1 も参照のこと．）

- $\mathfrak{su}(n)$ $(n \geq 2)$
- $\mathfrak{o}(n)$ $(n = 3$ または $\geq 5)$
- $\mathfrak{sp}(n)$ $(n \geq 1)$
- $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$

証明　系 2.20 (1), (3) より，コンパクト単純 Lie 代数の同型類と複素単純 Lie 代数の同型類とは，複素化を通して一対一に対応する．よって，主張は，複素単純 Lie 代数の分類 [6, 系 3.32] と前小節で述べた古典型コンパクト単純 Lie 代数の構成から従う．　□

注意 2.22（古典型コンパクト（半）単純 Lie 代数の偶然同型）　古典型複素（半）単純 Lie 代数の偶然同型 [6, 注意 3.33] と系 2.20 から，古典型コンパクト（半）単純 Lie 代数の偶然同型が従う（表 2）．分類定理（定

表 2　古典型コンパクト Lie 代数の偶然同型

型	複素（半）単純 Lie 代数	コンパクト（半）単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$\mathrm{A}_1 \cong \mathrm{B}_1 \cong \mathrm{C}_1$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{sp}(1)$	$\bullet$
$\mathrm{B}_2 \cong \mathrm{C}_2$	$\mathfrak{o}(5, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$	$\mathfrak{o}(5) \cong \mathfrak{sp}(2)$	$\bullet \Rightarrow \bullet$
$\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1 \cong \mathrm{D}_2$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(4)$	$\bullet \quad \bullet$
$\mathrm{A}_3 \cong \mathrm{D}_3$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(6, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{o}(6)$	$\bullet - \bullet - \bullet$

理 2.21）に挙げたコンパクト単純 Lie 代数の間の同型は，同表（「$\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1 \cong \mathrm{D}_2$」の行を除く）に挙げたもので尽くされている．

3　極大トーラス

3.1　連結可換 Lie 群

定義 3.1（トーラス）　コンパクト連結可換 Lie 群を，**トーラス**（torus）という．

命題 3.2　T を連結可換 Lie 群とし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．

(1) $(\mathfrak{t}, \exp_T)$ は T の普遍被覆 Lie 群であり，この被覆準同型の核 $\mathrm{Ker}\exp_T$ は $\mathfrak{t}$ の離散部分群である．
(2) T がトーラスであるとする．このとき，$\mathrm{Ker}\exp_T$ は $\mathfrak{t}$ 上の格子である．

証明　(1)　指数写像 $\exp_T$ は，点 $0 \in \mathfrak{t}$ において局所微分同相であり，T が可換であることより準同型である．したがって，$\exp_T$ は Lie 群の被覆準同型であり，その核 $\mathrm{Ker}\exp_T$ は $\mathfrak{t}$ の離散部分群である．さらに，$\mathfrak{t}$ は単連結であり T は連結だから，$(\mathfrak{t}, \exp_T)$ は T の普遍被覆 Lie 群である．

(2)　(1) より $\mathrm{Ker}\exp_T$ は $\mathfrak{t}$ の離散部分群であり，$\mathfrak{t}/(\mathrm{Ker}\exp_T) \cong T$ はコンパクトだから，$\mathrm{Ker}\exp_T$ は $\mathfrak{t}$ 上の格子である．　□

3.2　コンパクト連結 Lie 群の極大トーラス

定義 3.3（極大トーラス）　Lie 群 G の部分 Lie 群であってトーラスであるものを，G の**トーラス**（torus）という．G のトーラスの中で包含関係に関して極大なものを，G の**極大トーラス**（maximal torus）という．

命題 3.4　G をコンパクト Lie 群，T をその連結部分 Lie 群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．次の条件は同値である．

(a) T は G の極大トーラスである．
(b) $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間である．
(c) $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　G の連結可換部分 Lie 群と $\mathfrak{g}$ の可換部分空間とは，Lie 代数をとる操作によって一対一に対応し，この対応は包含関係を保つ．また，T が G の連結可換部分 Lie 群ならばその閉包 $\overline{T}$ もそうだから

（Cartan の定理を用いた），T の連結可換部分 Lie 群の中で包含関係に関して極大ならば $\overline{T}=T$ であり，したがって，T は G の極大トーラスである．よって，条件 (a) と (b) は同値である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　系 2.5 ですでに示した． $\square$

系 3.5（極大トーラスの存在と共役性） コンパクト Lie 群 G は，共役を除いて一意な極大トーラスをもつ．

証明 コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ は，$\mathrm{Ad}(G)$ の下の共役を除いて一意な Cartan 部分代数をもつ（定理 2.9，注意 2.10）．このことと命題 3.4 より，G は，共役を除いて一意な極大トーラスをもつ． $\square$

補題 3.6 G をコンパクト Lie 群とし，$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ と置く．このとき，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ の任意の元は，半単純である．

証明 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ はコンパクトだから，$\mathfrak{g}$ 上の $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$-不変な内積がとれる．$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ の任意の元は，この内積に関する直交変換だから，半単純である． $\square$

補題 3.7 G をコンパクト Lie 群とする．写像 $\phi\colon G\times G\to G$ を，$\phi(g,t)=gtg^{-1}$ によって定める．このとき，任意の点 $t\in G$ に対して，$\phi(G\times t\mathbf{Z}_G(t)_0)$ は t の近傍である．

証明 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ と置く．ϕ の点 (e,t) における微分 $d\phi_{(e,t)}\colon \mathfrak{g}\times t\mathfrak{g}\to t\mathfrak{g}$ は

$$
\begin{aligned}
d\phi_{(e,t)}(x,0) &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} e^{rx}te^{-rx} = \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} te^{r\,\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})x}e^{-rx} = t(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})x-x),\\
d\phi_{(e,t)}(0,ty) &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} te^{ty} = ty
\end{aligned}
$$

で与えられるから，

$$
d\phi_{(e,t)}(\mathfrak{g}\times t\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t)) = t((\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{g})+\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t))
$$

である．ここで，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})$ は半単純だから（補題 3.6），$\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ は $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(t^{-1})$ の固有空間に直和分解される．$(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{g})$ の複素化は 1 以外の固有値の固有空間の直和に等しく，$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t)$ の複素化は固有値 1 の固有空間に等しいから，これらの和は $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 全体となる．したがって，$(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{g})+\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t)=\mathfrak{g}$ である．よって，$d\phi_{(e,t)}(\mathfrak{g}\times t\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t))=t\mathfrak{g}$ だから，$\phi(G\times t\mathbf{Z}_G(t)_0)$ は t の近傍である． $\square$

定理 3.8 G をコンパクト連結 Lie 群とし，T をその極大トーラスとする．このとき，G の任意の元は，T のある元に共役である．

証明 写像 $\phi\colon G\times G\to G$ を，$\phi(g,t)=gtg^{-1}$ によって定める．G と T はコンパクトだから，$\phi(G\times T)$ はコンパクトであり，したがって，G において閉である．あとは，$\phi(G\times T)$ が G において開であることを示せば，$\phi(G\times T)=G$ であることがわかる．$\phi(G\times T)$ は G の共役による作用に関して安定だから，$\phi(G\times T)$ が G において開であることを示すためには，$\phi(G\times T)$ が任意の点 $t\in T$ の近傍であることを示せば十分である．このことを，G の次元に関する帰納法で示す．$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ と置く．

まず，$t\in\mathbf{Z}(G)$ である場合を考える．任意の $x\in\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のある極大可換部分空間 $\mathfrak{t}'$ に含まれ，これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を T' と書くと，$e^x\in T'$ である．T' は G の極大トーラスだから（命題 3.4），ある $g\in G$ が存在して $ge^xg^{-1}\in gT'g^{-1}=T$ となる（系 3.5）．この g について，$t\in\mathbf{Z}(G)$ より $te^x=g^{-1}tge^xg^{-1}g=\phi(g^{-1},tge^xg^{-1})\in\phi(G\times T)$ が成り立つ．よって，$t\exp(\mathfrak{g})\subseteq\phi(G\times T)$ だから，$\phi(G\times T)$ は t の近傍である．

次に，$t\notin\mathbf{Z}(G)$ である場合を考える．$\mathbf{Z}_G(t)$ の主連結成分 $\mathbf{Z}_G(t)_0$ は，コンパクト連結 Lie 群である．$T\subseteq\mathbf{Z}_G(t)$ であり，T は連結だから，$T\subseteq\mathbf{Z}_G(t)_0$ である．T は G の極大トーラスだから，$\mathbf{Z}_G(t)_0$ の極大

トーラスでもある．また，$t \notin \mathbf{Z}(G)$ より $\mathrm{Lie}(\mathbf{Z}_G(t)_0) = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t) \subsetneq \mathfrak{g}$ だから，$\dim \mathbf{Z}_G(t)_0 < \dim G$ である．したがって，帰納法の仮定より

$$\mathbf{Z}_G(t)_0 = \phi(\mathbf{Z}_G(t)_0 \times T) \subseteq \phi(G \times T)$$

だから，

$$\phi(G \times \mathbf{Z}_G(t)_0) = \phi(G \times T)$$

を得る．一方で，補題 3.7 より，$\phi(G \times \mathbf{Z}_G(t)_0) = \phi(G \times t\mathbf{Z}_G(t)_0)$（$t \in T \subseteq \mathbf{Z}_G(t)_0$ であることを用いた）は t の近傍である．よって，$\phi(G \times T)$ は t の近傍である．これで，帰納法が完成した． □

系 3.9　コンパクト連結 Lie 群 G のすべての極大トーラスの交叉は，中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい．

証明　定理 3.8 より G はその極大トーラス全体の合併に等しいから，$z \in G$ が G のすべての極大トーラスに含まれるとすると，$z \in \mathbf{Z}(G)$ である．一方で，T を G の極大トーラスとすると，定理 3.8 より，任意の $z \in \mathbf{Z}(G)$ に対してある $g \in G$ が存在して $z = gzg^{-1} \in T$ となる．よって，G のすべての極大トーラスの交叉は，中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい． □

系 3.10　コンパクト連結 Lie 群 G の指数写像は，全射である．

証明　定理 3.8 より，G はその極大トーラス全体の合併に等しい．トーラスの指数写像は全射だから（命題 3.2 (1)），主張が成り立つ． □

定理 3.11　G をコンパクト連結 Lie 群とし，S をその連結部分 Lie 群とする．このとき，中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は，G の極大トーラスであって S を含むもの全体の合併に等しい．

証明　任意の $g \in \mathbf{Z}_G(S)$ に対して，G の極大トーラスであって g と S を含むものが存在することを示せばよい．$\mathbf{Z}_G(g)$ の主連結成分 $\mathbf{Z}_G(g)_0$ は，コンパクト連結 Lie 群である．$S \subseteq \mathbf{Z}_G(g)$ であり，S は連結だから，$S \subseteq \mathbf{Z}_G(g)_0$ である．また，定理 3.8 より G の極大トーラスであって g を含むものが存在するから，$g \in \mathbf{Z}_G(g)_0$ である．$\mathbf{Z}_G(g)_0$ の極大トーラス T であって S を含むものをとると，系 3.9 より $g \in \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_G(g)_0) \subseteq T$ である．g を含むトーラスは必ず $\mathbf{Z}_G(g)_0$ に含まれるから，T は G の極大トーラスでもある．これで，主張が示された． □

系 3.12　G をコンパクト連結 Lie 群とする．

(1) G の連結部分 Lie 群 S に対して，中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は連結である．
(2) G の極大トーラス T に対して，中心化子 $\mathbf{Z}_G(T)$ は T に等しい．

証明　定理 3.11 から従う． □

系 3.13　G をコンパクト連結 Lie 群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と置く．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合とし，$\mathfrak{a}$ の任意の二つの元は可換であるとする．このとき，$\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a})$ は連結である．

証明　仮定より，$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 代数である．これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を A と置くと，$\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(A)$ だから，主張は系 3.12 (1) から従う． □

3.3 積分可能なベクトル

G と H を Lie 群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ と置く．Lie 群の準同型 $\varPhi\colon G \to H$ と Lie 代数の準同型 $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が $\mathrm{Lie}(\varPhi) = \phi$ を満たすとき，$\varPhi$ は ϕ の**持ち上げ**（lift）であるという．

定義 3.14（積分可能なベクトル） T を連結可換 Lie 群とし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ が T に関して**積分可能**（integrable）であるとは，T の 1 次元連続表現 $\chi\colon T \to \mathbb{C}^\times$ であって $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げであるものが存在することをいう．T に関して積分可能なベクトル全体のなす集合を，$\varLambda(T)$ と書く．

補題 3.15 V と V' を有限次元複素線型空間とし，$\langle -,- \rangle\colon V' \times V \to \mathbb{C}$ を非退化双線型形式とする．$\varGamma$ を V のある実形の離散部分群とし，

$$\varGamma^\vee = \{v' \in V' \mid \langle v', \varGamma \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

と置く．このとき，

$$\varGamma = \{v \in V \mid \langle \varGamma^\vee, v \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ．

証明 仮定より，V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ と $r \in \{0, \dots, n\}$ を，$\varGamma = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{e_1, \dots, e_r\}$ を満たすようにとれる．非退化双線型形式 $\langle -,- \rangle$ に関する $(e_1, \dots, e_n)$ の双対基底を，$(e'_1, \dots, e'_n)$ と書く．すると，

$$\begin{aligned}\varGamma^\vee &= \{v' \in V' \mid i \in \{1, \dots, r\} \text{ に対して } \langle v', e_i \rangle \in \mathbb{Z}\}\\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{e'_1, \dots, e'_r\} + \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e'_{r+1}, \dots, e'_n\}\end{aligned}$$

だから，示すべき等式の右辺を $\varGamma^{\vee\vee}$ と置くと，

$$\begin{aligned}\varGamma^{\vee\vee} &= \{v \in V \mid i \in \{1, \dots, r\} \text{ に対して } \langle e'_i, v \rangle \in \mathbb{Z},\ i \in \{r+1, \dots, n\} \text{ に対して } \langle e'_i, v \rangle = 0\}\\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{e_1, \dots, e_r\}\\ &= \varGamma\end{aligned}$$

が成り立つ． □

命題 3.16 T を連結可換 Lie 群とし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ と $h \in \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に対して，$\langle \lambda, h \rangle = (2\pi i)^{-1}\lambda(h)$ と書く．このとき，

$$\begin{aligned}\varLambda(T) &= \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \langle \lambda, \mathrm{Ker}\exp_T \rangle \subseteq \mathbb{Z}\},\\ \mathrm{Ker}\exp_T &= \{h \in \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \mid \langle \varLambda(T), h \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，$\varLambda(T)$ は，加法に関して $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ の部分群をなす．

証明 $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ とする．T の 1 次元連続表現 $\chi\colon T \to \mathbb{C}^\times$ が $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げであるための必要十分条件は，図式

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{t} \arrow[r, "\lambda|_{\mathfrak{t}}"] \arrow[d, "\exp_T"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ T \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{C}^\times \end{tikzcd}$$

が可換であることである．指数写像 $\exp_T$ は Lie 群の全射被覆準同型だから（命題 3.2 (1)），このような χ が存在するための必要十分条件は，$\lambda(\mathrm{Ker}\exp_T) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$ であることである．すなわち，前者の等式が成り立つ．特に，$\Lambda(T)$ は，加法に関して $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ の部分群をなす．

後者の等式は，$\mathrm{Ker}\exp_T$ が $\mathfrak{t}$ の離散部分群であること（命題 3.2 (1)）と補題 3.15 を踏まえれば，前者の等式から従う． □

系 3.17　T をトーラスとし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(G)$ と置く．このとき，$\Lambda(T)$ は，$(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ の実形 $\{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ 上の格子である．

証明　$\mathrm{Ker}\exp_T$ が $\mathfrak{t}$ 上の格子であること（命題 3.2 (2)）と命題 3.16 から従う． □

補題 3.18　$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ を複素分裂簡約 Lie 代数とする．$\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ と $h \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ に対して，$\langle \lambda, h\rangle = (2\pi i)^{-1}\lambda(h)$ と書く．

(1) $Q = \mathrm{span}_\mathbb{Z}\,\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ と書き，$h \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ であって任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に対して $\alpha(h) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ を満たすもの全体のなす加法群を $Q^\vee$ と書く．このとき，

$$Q^\vee = \{\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^* \mid \langle \lambda, Q\rangle \subseteq \mathbb{Z}\},$$
$$Q = \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{C} \mid \langle Q^\vee, h\rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ．

(2) ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に関する整ベクトル全体のなす加法群を P と書き，$P^\vee = \mathrm{span}_\mathbb{Z}\{2\pi i H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})\}$ と書く（H_α は，α の双対ルートを表す）．このとき，

$$P^\vee = \{\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^* \mid \langle \lambda, P\rangle \subseteq \mathbb{Z}\},$$
$$P = \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{C} \mid \langle P^\vee, h\rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ．

証明　(1)　前者の等式は，$Q^\vee$ の定義から明らかである．後者の等式は，Q が $\mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ のある実形の離散部分群であることと補題 3.15 を踏まえれば，前者の等式から従う．

(2)　後者の等式は，整ベクトルの定義から明らかである．前者の等式は，$P^\vee$ が $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ のある実形の離散部分群であることと補題 3.15 を踏まえれば，後者の等式から従う． □

次の命題で用いるため，コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群の Cartan 部分群を定義しておく．これについては，3.5 節で改めて触れる．

定義 3.19（コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群の Cartan 部分群）　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と置く．G の **Cartan 部分群**（Cartan subgroup）とは，G の連結部分 Lie 群であってその Lie 代数が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるものをいう．

命題 3.4 より，コンパクト連結 Lie 群の Cartan 部分群とは，極大トーラスのことにほかならない．

命題 3.20　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．

(1) $Q = \mathrm{span}_\mathbb{Z}\,\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と書き，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に関する整ベクトル全体のなす加法群を P と

書く．このとき，

$$Q \subseteq \Lambda(T) \subseteq P$$

が成り立つ．

(2) $h \in \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ であって任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して $\alpha(h) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ を満たすもの全体のなす加法群を $Q^\vee$ と書き，$P^\vee = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{2\pi i H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})\}$ と書く（H_α は，α の双対ルートを表す）．このとき，

$$P^\vee \subseteq \operatorname{Ker} \exp_T \subseteq Q^\vee$$

が成り立つ．

証明　G の随伴表現の T への制限 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}|_T$ の微分表現は，$\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ の随伴表現の $\mathfrak{t}$ への制限 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}|_{\mathfrak{t}}$ であり，$h \in \mathfrak{t}$ は各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha$ に $\alpha(h)$ 倍写像として作用する．したがって，$\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}|_T$ は各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha$ 上の 1 次元部分表現を定め，これが $\alpha|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げとなる．よって，$\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}) \subseteq \Lambda(T)$ であり，$Q = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}) \subseteq \Lambda(T)$ が成り立つ．このことと補題 3.18 (1)，命題 3.16 より，$\operatorname{Ker} \exp_T \subseteq Q^\vee$ も成り立つ．

補題 3.39 より，各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$（その双対ルートを H_α と書く）に対して，Lie 代数の単射準同型 $\phi_\alpha \colon \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{g}$ であって

$$\phi_\alpha\left(i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = iH_\alpha$$

を満たすものがとれる．さらに，$SU(2)$ は $\mathfrak{su}(2)$ を Lie 代数にもつ単連結 Lie 群だから，ϕ_α は Lie 群の準同型 $\varPhi_\alpha \colon SU(2) \to G$ に持ち上がる．したがって，

$$\exp(2\pi i H_\alpha) = \exp\left(\phi_\alpha\left(2\pi i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\right) = \varPhi_\alpha\left(\exp\left(2\pi i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\right) = \varPhi_\alpha\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 1$$

であり，$2\pi i H_\alpha \in \operatorname{Ker} \exp_T$ を得る．よって，$P^\vee \subseteq \operatorname{Ker} \exp_T$ が成り立つ．このことと補題 3.18 (2)，命題 3.16 より，$\Lambda(T) \subseteq P$ も成り立つ．□

補題 3.21　連結位相群 G の離散正規部分群 $\varGamma$ は，中心 $\mathbf{Z}(G)$ に含まれる．

証明　$x \in \varGamma$ を任意にとる．G から $\varGamma$ への連続写像 $g \mapsto gxg^{-1}$ は，G が連結で $\varGamma$ が離散であることより定値であり，単位元 e を x に移すから，常に値 x をとる．すなわち，$x \in \mathbf{Z}(G)$ である．□

命題 3.22　G をコンパクト連結 Lie 群，$(\widetilde{G}, p)$ をその連結な m 重被覆 Lie 群（$m \in \mathbb{N}_{>0}$）とし，$\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G) = \operatorname{Lie}(\widetilde{G})$ と置く．T と $\widetilde{T}$ をそれぞれ G と $\widetilde{G}$ の極大トーラスとし，これらは共通の Lie 代数 $\mathfrak{t}$ をもつとする．

(1) $p(\widetilde{T}) = T$ であり，$(\widetilde{T}, p|_{\widetilde{T}})$ は T の連結な m 重被覆 Lie 群である．
(2) $\Lambda(T) \subseteq \Lambda(\widetilde{T})$ かつ $(\Lambda(\widetilde{T}) : \Lambda(T)) = m$ が成り立つ．

証明　(1)　$p(\widetilde{T})$ は $\operatorname{Lie}(p)(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群だから，T に等しい．Lie 群の準同型 $p|_{\widetilde{T}} \colon \widetilde{T} \to T$ の微分は $\operatorname{id}_{\mathfrak{t}}$ だから，$p|_{\widetilde{T}}$ は Lie 群の被覆準同型である．さらに，補題 3.21 と系 3.9 より $\operatorname{Ker} p \subseteq \mathbf{Z}(\widetilde{G}) \subseteq \widetilde{T}$ だから，$(\widetilde{T}, p|_{\widetilde{T}})$ の被覆次数は $(\widetilde{G}, p)$ の被覆次数と等しく m である．

(2)　T と $\widetilde{T}$ の指数写像は $\exp_T = p|_{\widetilde{T}} \circ \exp_{\widetilde{T}}$ を満たすから，$\operatorname{Ker} \exp_{\widetilde{T}} \subseteq \operatorname{Ker} \exp_T$ かつ $(\operatorname{Ker} \exp_T : \operatorname{Ker} \exp_{\widetilde{T}}) = \#(\operatorname{Ker} \widetilde{T}) = m$ である．よって，命題 3.16 と格子に関する一般論より，$\Lambda(T) \subseteq \Lambda(\widetilde{T})$ かつ $(\Lambda(\widetilde{T}) : \Lambda(T)) = m$ が成り立つ．□

3.4 Weyl の定理

補題 3.23 G を局所コンパクト連結 Hausdorff 群，$\varGamma$ をその離散部分群とし，$G/\varGamma$ はコンパクトであるとする．このとき，$\varGamma$ は有限生成である．

証明 $G/\varGamma$ がコンパクトであることより，コンパクト集合 $C \subseteq G$ であって $G = C\varGamma$ を満たすものがとれる．必要ならば C を大きくとりなおして，$G = C^\circ\varGamma$（C° は，C の内部を表す）であり，かつ $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ であるとしてよい．C^2 はコンパクト集合であり $(C^\circ g)_{g\in\varGamma}$ はその開被覆だから，有限部分集合 $F \subseteq \varGamma$ であって $C^2 \subseteq C^\circ F \subseteq CF$ を満たすものが存在する．このことから帰納的に，任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $C^n \subseteq CF$ であることがわかる．$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ だったから，$G = CF$ を得る．したがって，任意の $g \in \varGamma$ は $g = g_1g_2$（$g_1 \in C$，$g_2 \in F$）と書けるが，このとき $g_1 = gg_2^{-1} \in \varGamma$ だから，$g_1 \in C \cap \varGamma$ である．よって，$\varGamma$ は群として有限部分集合 $(C \cap \varGamma) \cup F$ によって生成される． □

定理 3.24（Weyl の定理） 連結 Lie 群 G がコンパクトかつ半単純な Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をもつならば，G はコンパクトである．

証明 必要ならば普遍被覆 Lie 群を考えることで，一般性を失わず，G は単連結であると仮定する．$\mathfrak{g}$ がコンパクトであることより，$\mathfrak{g}$ と同型な Lie 代数をもつコンパクト連結 Lie 群 G' が存在し，G' は G のある離散正規部分群 $\varGamma$ による商 $G/\varGamma$ と同型である．G がコンパクトであることを示すためには，$\varGamma$ が有限であることを示せばよい．

$\varGamma$ は，有限生成であり（補題 3.23），中心 $\mathbf{Z}(G)$ に含まれる（補題 3.21）から可換である．したがって，有限生成可換群の構造定理より，もし $\varGamma$ が無限ならば，任意の $m \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して指数 m の部分群 $\varGamma_1 \subseteq \varGamma$ が存在する．等化準同型を $p\colon G/\varGamma_1 \to G/\varGamma$ と書くと，$(G/\varGamma_1, p)$ は $G/\varGamma$ の m 重被覆 Lie 群である．$G/\varGamma$ はコンパクトだから，$G/\varGamma_1$ もコンパクトである．ここで，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ を一つ固定し，これを Lie 代数にもつ $G/\varGamma_1$ と $G/\varGamma$ の極大トーラスをそれぞれ $\widetilde{T}$ と T と書く．また，$Q = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\,\varDelta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と書き，ルート系 $\varDelta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に関する整ベクトル全体のなす加法群を P と書く．すると，

$$Q \subseteq \varLambda(T) \subseteq \varLambda(\widetilde{T}) \subseteq P$$

かつ $(\varLambda(\widetilde{T}) : \varLambda(T)) = m$ である（命題 3.20 (1)，命題 3.22）．一方で，$\mathfrak{g}$ が半単純であることより，Q と P はともに実線型空間 $\{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ 上の格子だから，$(P : Q) < \infty$ である．これは，$m \in \mathbb{N}_{>0}$ を任意にとれることに矛盾する．よって，背理法より，$\varGamma$ は有限である． □

系 3.25 G をコンパクト連結 Lie 群とし，$(\widetilde{G}, p)$ をその普遍被覆 Lie 群とする．このとき，次の条件は同値である．

(a) G は半単純である．
(b) 中心 $\mathbf{Z}(G)$ は有限である．
(c) $\widetilde{G}$ はコンパクトである．
(d) 基本群 $\pi_1(G)$ は有限である．

証明 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と置く．$\mathfrak{g}$ は，コンパクト半単純 Lie 代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に（Lie 代数として）直和分解される（系 2.3）．

(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　G が半単純であるための必要十分条件は，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$ であることである．$\mathbf{Z}(G)$ はコンパクト Lie 群 G の閉部分群であって $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつから，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$ は，$\mathbf{Z}(G)$ が有限であることと同値である．

(a) $\Longleftrightarrow$ (c)　$\widetilde{G}'$ を $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ を Lie 代数にもつ単連結 Lie 群とすると，$\widetilde{G}\cong\widetilde{G}'\times\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ である（ここで，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を，加法によって Lie 群とみなしている）．Weyl の定理（定理 3.24）より $\widetilde{G}'$ はコンパクトだから，$\widetilde{G}$ がコンパクトであるための必要十分条件は，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})=0$，すなわち G が半単純であることである．

(c) $\Longleftrightarrow$ (d)　$\widetilde{G}$ がコンパクトであることは，$\operatorname{Ker} p$ が有限であることと同値である．基本群 $\pi_1(G)$ は $\operatorname{Ker} p$ に同型だから，主張が成り立つ．□

3.5　コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群の Cartan 部分群

命題 3.26　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし，$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ と置く．$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ と置き，これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く．

(1) G' はコンパクトである．
(2) $G'\times\mathbf{Z}(G)_0$ から G への写像 $(g',z)\mapsto g'z$ は，Lie 群の全射被覆準同型である．

証明　(1)　$\mathfrak{g}'$ はコンパクトかつ半単純だから（系 2.3），主張は Weyl の定理（定理 3.24）から従う．

(2)　$G'\times\mathbf{Z}(G)_0$ から G への写像 $(g',z)\mapsto g'z$ を，ϕ と書く．G' の任意の元と $\mathbf{Z}(G)_0$ の任意の元は可換だから，ϕ は Lie 群の準同型である．さらに，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ より $\mathrm{Lie}(\phi)\colon\mathfrak{g}'\times\mathbf{Z}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}$ は線型同型であり，G は連結だから，ϕ は Lie 群の全射被覆準同型である．□

命題 3.27　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし，$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ と置く．$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ と置き，これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く（命題 3.26 (1) より，G' はコンパクトである）．このとき，G' の極大トーラス T' に対して，$T'\mathbf{Z}(G)_0$ は G の Cartan 部分群であり，G の任意の Cartan 部分群は，G' の一意な極大トーラス T' を用いてこのように表せる．

証明　$\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}'$ に対して，$\mathfrak{t}'\oplus\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であり，$\mathfrak{g}$ の任意の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ は，$\mathfrak{g}'$ の一意な Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}'$ を用いてこのように表せる．さらに，$\mathfrak{t}'$ を Lie 代数にもつ G' の極大トーラスを T' と書くと，$\mathfrak{t}'\oplus\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつ G の Cartan 部分群は $T'\mathbf{Z}(G)_0$ である．以上より，主張が成り立つ．□

定義 3.19 で述べたように，コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群 G の Cartan 部分群とは，G の連結部分 Lie 群であってその Lie 代数が $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ の Cartan 部分代数であるものをいう．命題 3.26 と命題 3.27 を用いて，3.2 節で述べたコンパクト連結 Lie 群の極大トーラスに対する結果を，コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群の Cartan 部分群にまで拡張できる．

定理 3.28　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t}=\mathrm{Lie}(T)$ と置く．このとき，G の任意の元は，T のある元に共役である．

証明　$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ と置き，これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く．G' はコンパクトであり（命題 3.26 (1)），G' の極大トーラス T' が存在して $T=T'\mathbf{Z}(G)_0$ が成り立つ（命題 3.27）．$G=G'\mathbf{Z}(G)_0$ であり（命題 3.26 (2)），G' の任意の元は T' のある元に共役だから（定理 3.8），G の任意の元は T のある元に

共役である． □

系 3.29 コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群 G のすべての Cartan 部分群の交叉は，中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい．

証明 定理 3.28 より G はその Cartan 部分群全体の合併に等しいから，$z \in G$ が G のすべての Cartan 部分群に含まれるとすると，$z \in \mathbf{Z}(G)$ である．一方で，T を G の極大トーラスとすると，定理 3.28 より，任意の $z \in \mathbf{Z}(G)$ に対してある $g \in G$ が存在して $z = gzg^{-1} \in T$ となる．よって，G のすべての Cartan 部分群の交叉は，中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい． □

系 3.30 コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群 G の指数写像は，全射である．

証明 定理 3.8 より，G はその Cartan 部分群全体の合併に等しい．連結可換 Lie 群の指数写像は全射だから（命題 3.2 (1)），主張が成り立つ． □

定理 3.31 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし，S をその連結可換部分 Lie 群とする．このとき，中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は，G の Cartan 部分群であって S を含むもの全体の合併に等しい．

証明 任意の $g \in \mathbf{Z}_G(S)$ に対して，G の Cartan 部分群であって g と S を含むものが存在することを示せばよい．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{s} = \mathrm{Lie}(S)$ と置く．$\mathfrak{s} + \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群は $S\mathbf{Z}(G)_0$ であり，これは $\mathbf{Z}_G(S\mathbf{Z}(G)_0) = \mathbf{Z}_G(S)$ を満たす．そこで，必要ならば $S\mathbf{Z}(G)_0$ を改めて S と置くことで，一般性を失わず，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{s}$ であると仮定する．

$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と置き，これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く．命題 3.26 より，$g = g'z$（$g' \in G'$，$z \in \mathbf{Z}(G)_0$）と書ける．$\mathfrak{s}' = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}'$ と置くと，$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ だから，$S = S'\mathbf{Z}(G)_0$ である．$\mathfrak{s}'$ を Lie 代数にもつ G' の連結部分 Lie 群を S' と書くと，定理 3.11 より，G' の極大トーラス T' であって g' と S' を含むものが存在する．$T = T'\mathbf{Z}(G)_0$ は G の Cartan 部分群であり（命題 3.27），$g = g'z$ と $S = S'\mathbf{Z}(G)_0$ を含む．これで，主張が示された． □

系 3.32 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とする．

(1) G の連結部分 Lie 群 S に対して，中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は連結である．
(2) G の Cartan 部分群 T に対して，中心化子 $\mathbf{Z}_G(T)$ は T に等しい．

証明 定理 3.31 から従う． □

系 3.33 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と置く．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合とし，$\mathfrak{a}$ の任意の二つの元は可換であるとする．このとき，$\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a})$ は連結である．

証明 仮定より，$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 代数である．これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を A と置くと，$\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(A)$ だから，主張は系 3.32 (1) から従う． □

3.6 基本群と中心

G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$(\mathfrak{t}, \exp_T)$ は T の普遍被覆 Lie 群だから（命題 3.2 (1)），基本群 $\pi_1(T)$ は $\mathrm{Ker}\exp_T$ に自然に同型である [3, 命題 7.11]．

この同型と，T から G への包含準同型が誘導する $\pi_1(T)$ から $\pi_1(G)$ への準同型を合成することで，準同型 $f_{G,T}\colon \operatorname{Ker}\exp_T \to \pi_1(G)$ が得られる．次の定理では，この記号を用いる．

定理 3.34 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$P^\vee = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{2\pi i H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})\}$ と書く（H_α は，α の双対ルートを表す）．このとき，群準同型の列

$$1 \longrightarrow P^\vee \longrightarrow \operatorname{Ker}\exp_T \xrightarrow{f_{G,T}} \pi_1(G) \longrightarrow 1$$

は完全である．ここで，$P^\vee$ から $\operatorname{Ker}\exp_T$ への矢印は，包含準同型を表す（命題 3.20 (2) より $P^\vee \subseteq \operatorname{Ker}\exp_T$ であることに注意する）．

証明 ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に関する整ベクトル全体のなす加法群を，P と書く．

まず，G が単連結である場合を考える．このとき，$\pi_1(G) = 1$ だから，示すべき主張は，$P^\vee = \operatorname{Ker}\exp_T$ である．$P^\vee \subseteq \operatorname{Ker}\exp_T$ は命題 3.20 (2) ですでに示したから，逆向きの包含を示せばよい．ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底 Π を一つ固定し，$\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に関する整ベクトル全体のなす加法群を P と書き，$(\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}), \Pi)$ に関する優整ベクトル全体のなす集合を P_{++} と書く．すると，分裂簡約 Lie 代数に対する最高ウェイト理論 [6, 定理 4.30] より，任意の $\lambda \in P_{++}$ に対して，有限次元既約 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V であって $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と Π に関して最高ウェイト λ をもつものが存在する．いま G は単連結だから，これは G の連続表現 (π, V) に持ち上がる．$h \in \mathfrak{t}$ はウェイト λ のウェイト空間 V_λ に $\lambda(h)$ 倍写像として作用するから，$\pi|_T$ は V_λ 上の 1 次元部分表現を定め，これが $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げとなる．したがって，$P_{++} \subseteq \Lambda(T)$ であり，$P = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}} P_{++} \subseteq \Lambda(T)$ を得る．このことと補題 3.18 (2)，命題 3.16 より，$\operatorname{Ker}\exp_T \subseteq P^\vee$ が成り立つ．これで，主張が示された．

次に，一般の場合を考える．$(\widetilde{G}, p)$ を G の普遍被覆 Lie 群とし，$\widetilde{T}$ を $\widetilde{G}$ の連結部分 Lie 群であって $\mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつものとする．$\widetilde{T}$ は，$\widetilde{G}$ の Cartan 部分群である．G の被覆 Lie 群 $(\widetilde{G}, p)$ と T の被覆 Lie 群 $(\widetilde{T}, p|_{\widetilde{T}})$ のそれぞれから定まる完全列 [3, 命題 7.11] とその間の準同型，および自然な同型 $\pi_1(T) \cong \operatorname{Ker}\exp_T$ と $\pi_1(\widetilde{T}) \cong \operatorname{Ker}\exp_{\widetilde{T}}$ から定まる，次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\exp_{\widetilde{T}} & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\exp_T & \longrightarrow & \operatorname{Ker} p|_{\widetilde{T}} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{\widetilde{G},\widetilde{T}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{G,T}} & & \big\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \pi_1(\widetilde{G}) & \longrightarrow & \pi_1(G) & \longrightarrow & \operatorname{Ker} p & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

前段の結果より $\operatorname{Ker} f_{\widetilde{G},\widetilde{T}} = P^\vee$ かつ $\operatorname{Coker} f_{\widetilde{G},\widetilde{T}} = 1$ であり，$\operatorname{Ker} p \subseteq \mathbf{Z}(\widetilde{G}) \subseteq \widetilde{T}$（補題 3.21，系 3.29）より $\operatorname{Ker} p|_{\widetilde{T}} = \operatorname{Ker} p$ である．したがって，上記の可換図式に蛇の補題を適用すれば，完全列

$$1 \longrightarrow P^\vee \longrightarrow \operatorname{Ker} f_{G,T} \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_{G,T} \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$$

を得る．よって，$\operatorname{Ker} f_{G,T} = P^\vee$ かつ $\operatorname{Coker} f_{G,T} = 1$ であり，主張が成り立つ． □

定理 3.35 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$h \in \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ であって任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して $\alpha(h) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ を満たすもの全体のなす加法群を $Q^\vee$ と書く．このとき，$\exp_T(Q^\vee \cap \mathfrak{t}) = \mathbf{Z}(G)$ であり，群準同型の列

$$1 \longrightarrow \operatorname{Ker}\exp_T \longrightarrow Q^\vee \cap \mathfrak{t} \xrightarrow{\exp_T} \mathbf{Z}(G) \longrightarrow 1$$

は完全である．ここで，$\operatorname{Ker}\exp_T$ から $Q^\vee \cap \mathfrak{t}$ への矢印は，包含準同型を表す（命題 3.20 (2) より $\operatorname{Ker}\exp_T \subseteq Q^\vee \cap \mathfrak{t}$ であることに注意する）．

証明 指数写像 $\exp_T \colon \mathfrak{t} \to T$ は全射であり，系 3.29 より $\mathbf{Z}(G) \subseteq T$ である．また，$h \in \mathfrak{t}$ に対して，

$$\begin{aligned} e^h \in \mathbf{Z}(G) &\iff G \text{ から自身への写像 } g \mapsto e^h g e^{-h} \text{ が恒等写像} \\ &\iff \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(e^h) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}} \\ &\iff \text{任意の } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}) \text{ に対して } e^{\alpha(h)} = 1 \\ &\iff h \in Q^\vee \cap \mathfrak{t} \end{aligned}$$

である．ここで，第 3 の同値性は，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(e^h) = e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h)}$ が各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha$ に $e^{\alpha(h)}$ 倍写像として作用することから従う．以上より，主張が成り立つ． □

3.7 Weyl 群

定義 3.36（Weyl 群） G をコンパクト連結 Lie 群とし，T をその極大トーラスとする．(G, T) の **Weyl 群**（Weyl group）を，

$$\mathbf{W}(G, T) = \mathbf{N}_G(T)/\mathbf{Z}_G(T) = \mathbf{N}_G(T)/T$$

と定める（第 2 の等号は，系 3.12 より成り立つ）．

$\mathbf{N}_G(T)$ は G の閉部分群だからコンパクトであり，その Lie 代数は $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ だから，Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T) = \mathbf{N}_G(T)/T$ は有限である．

$gT \in \mathbf{W}(G, T)$（$g \in \mathbf{N}_G(T)$）に対して Lie 群 T の自己同型 $t \mapsto gtg^{-1}$ が代表元 g のとり方によらずに定まり，これによって，Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T)$ の Lie 群 T への作用が定まる．さらに，この作用の微分とその反傾表現を考えることにより，Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T)$ の $\mathfrak{t}$ や $\mathfrak{t}^*$ 上の連続表現が定まる．

位相群 G の G への共役による作用に関する軌道空間を，G の**共役類空間**という．次の命題では，G の共役類空間を，$G^\sharp$ と書く．

命題 3.37 G をコンパクト連結 Lie 群とし，T をその極大トーラスとする．Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T)$ の T への作用に関する軌道空間 $\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ と，G の共役類空間 $G^\sharp$ を考える．このとき，T から G への包含写像は，$\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ から $G^\sharp$ への同相写像を誘導する．

証明 二つの点 t, $t' \in T$ が $\mathbf{W}(G, T)$ の作用で移り合うならば，ある $g \in \mathbf{N}_G(T)$ が存在して $gtg^{-1} = t'$ となるから，G において共役である．したがって，T から G への包含写像は，連続写像 $\iota \colon \mathbf{W}(G, T) \backslash T \to G^\sharp$ を誘導する．G の任意の元は T のある元に共役だから（定理 3.8），ι は全射である．ι の単射性を示す．そのためには，$t \in T$ と $g \in G$ が $gtg^{-1} \in T$ を満たすとして，ある $g_1 \in \mathbf{N}_G(T)$ が存在して $g_1 t g_1^{-1} = gtg^{-1}$ となることを示せばよい．$\mathbf{Z}_G(gtg^{-1})$ の主連結成分 $\mathbf{Z}_G(gtg^{-1})_0$ はコンパクト連結 Lie 群であり，T と gTg^{-1} をともに含む．T と gTg^{-1} は，G の極大トーラスだから，$\mathbf{Z}_G(gtg^{-1})_0$ の極大トーラスでもある．したがって，極大トーラスの共役性（系 3.5）より，ある $z \in \mathbf{Z}_G(gtg^{-1})_0$ が存在して $zgTg^{-1}z^{-1} = T$ を満たす．よって，$g_1 = zg$ と置けば，$g_1 \in \mathbf{N}_G(T)$ かつ $g_1 t g_1^{-1} = zgtg^{-1}z^{-1} = gtg^{-1}$ となる．

$\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ と $G^\sharp$ はともに，コンパクト Hausdorff 群のコンパクト Hausdorff 空間への（したがって，固有な）連続作用に関する軌道空間だから，コンパクト Hausdorff 空間である．前段で示したように，ι は $\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ から $G^\sharp$ への連続全単射だから，同相である． □

補題 3.38 W を群とし，W' をその部分群とする．W-集合 X であって，W の X への作用が自由であり，W' の X への作用が推移的であるものが存在するとする．このとき，$W' = W$ である．

証明　$w \in W$ を任意にとり，1 点 $x \in X$ を固定する．W' の X への作用が推移的であることより，ある $w' \in W'$ が存在して $w \cdot x = w' \cdot x$ を満たす．W の X への作用は自由だから，$w = w' \in W'$ を得る．よって，$W' = W$ である．　□

補題 3.39　$\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数とし，$\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とする．このとき，各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$（その双対ルートを H_α と書く）に対して，次の条件を満たす x_α, y_α, $z_\alpha \in \mathfrak{g}$ が存在する．

(i) x_α, $y_\alpha \in ((\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha \oplus (\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$ かつ $z_\alpha = (i/2)H_\alpha \in \mathfrak{t}$ である．
(ii) x_α, y_α, z_α は線型独立である．
(iii) $[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha$，$[y_\alpha, z_\alpha] = x_\alpha$，$[z_\alpha, x_\alpha] = y_\alpha$ である．

さらに，x_α, y_α, z_α がこれらの条件を満たすとき，Lie 代数の単射準同型 $\phi_\alpha \colon \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{g}$ であって

$$\phi\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = x_\alpha, \qquad \phi\left(\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = y_\alpha, \qquad \phi\left(\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = z_\alpha$$

を満たすものが，一意に存在する．

証明　一般性を失わず，$\mathfrak{g}$ が半単純であると仮定する．系 2.16 より，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ は $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ のある Chevalley 系 $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})}$ に伴うコンパクト実形である．そこで，

$$x_\alpha = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}), \qquad y_\alpha = \frac{i}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha}), \qquad z_\alpha = \frac{i}{2}H_\alpha$$

と置くと，x_α, $y_\alpha \in \mathfrak{g}$ かつ $z_\alpha \in \mathfrak{t}$ であり，これらは線型独立であり，

$$\begin{aligned}
[x_\alpha, y_\alpha] &= \frac{i}{4}[X_\alpha + X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}] = \frac{i}{2}H_\alpha = z_\alpha, \\
[y_\alpha, z_\alpha] &= -\frac{1}{4}[X_\alpha - X_{-\alpha}, H_\alpha] = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}) = x_\alpha, \\
[z_\alpha, x_\alpha] &= \frac{i}{4}[H_\alpha, X_\alpha + X_{-\alpha}] = \frac{i}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha}) = y_\alpha
\end{aligned}$$

を満たす．一方で，$\mathfrak{su}(2)$ の基底

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

も同じ交換関係を満たす．よって，主張の条件を満たす Lie 代数の単射準同型が一意に存在する．　□

補題 3.40　G をコンパクト連結 Lie 群，T をその極大トーラスとし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．このとき，任意の $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して，ある $g \in \mathbf{N}_G(T)$ が存在して，$w = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{*-1}$ を満たす．

証明　任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して，ルート鏡映 s_α がある $g_\alpha \in \mathbf{N}_G(T)$ を用いて $s_\alpha = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g_\alpha)^{*-1}$ と表せることを示せばよい．x_α, y_α, z_α を補題 3.39 のようにとり，$t \in \mathbb{R}$ とする．任意の $h \in \operatorname{Ker} \alpha$ に対して，$\mathrm{ad}(x_\alpha)h = 0$ より

$$\mathrm{Ad}(e^{tx_\alpha})h = e^{t\,\mathrm{ad}(x_\alpha)}(h) = h$$

である．また，$\mathrm{ad}(x_\alpha)z_\alpha = -y_\alpha$ と $\mathrm{ad}(x_\alpha)^2 z_\alpha = -\mathrm{ad}(x_\alpha)y_\alpha = -z_\alpha$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(e^{tx_\alpha})z_\alpha &= e^{t\,\mathrm{ad}(x_\alpha)}(z_\alpha)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathrm{ad}(x_\alpha)^k z_\alpha\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}z_\alpha - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}y_\alpha\\ &= (\cos t)z_\alpha - (\sin t)y_\alpha\end{aligned}$$

である．$\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} = \mathbb{C}z_\alpha \oplus \mathrm{Ker}\,\alpha$ だから，上式より，$\mathrm{Ad}(e^{tx_\alpha})$ は $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ を安定にし，したがって，$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \cap \mathfrak{g}$ も安定にする．これより，$e^{tx_\alpha} \in \mathbf{N}_G(T)$ である．さらに，$t = \pi$ のときは，

$$\mathrm{Ad}(e^{\pi x_\alpha})h = h \qquad (h \in \mathrm{Ker}\,\alpha), \qquad \mathrm{Ad}(e^{\pi x_\alpha})z_\alpha = -z_\alpha$$

となるから，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(e^{\pi x_\alpha}) = s_\alpha^{*-1}$ が成り立つ．よって，$g_\alpha = e^{\pi x_\alpha}$ と置けばよい． □

補題 3.41 G をコンパクト連結 Lie 群，T をその極大トーラスとし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする．このとき，$g \in \mathbf{N}_G(T)$ が $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{*-1}(\mathit{\Pi}) = \mathit{\Pi}$ を満たすならば，$g \in T$ である．

証明 $\mathit{\Pi}$ に関する正ルート全体のなす集合を $\mathit{\Delta}_+$ と書き，$\rho = (1/2)\sum_{\alpha\in\mathit{\Delta}_+}\alpha$ と置く．$i\rho|_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}^*$ である（系 2.6）．$\mathfrak{t}^*$ 上の $\mathbf{W}(G,T)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定し（$\mathbf{W}(G,T)$ は有限群だから，このような内積が存在する），この内積が定める線型同型 $\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^*$ によって $i\rho|_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}^*$ に対応する元を $h \in \mathfrak{t}$ と書く．$\mathfrak{t}^*$ 上の内積 $\langle -,- \rangle$ を複素化して得られる $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ 上の非退化対称双線型形式を同じ記号で表すと，補題 3.40 より，$\langle -,- \rangle$ は $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$-不変である．したがって，ルート系に関する一般論 [5, 系 1.8 (2), 系 2.8] より，任意のルート $\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して

$$\alpha(h) = \langle \alpha, i\rho \rangle \neq 0 \tag{$*$}$$

が成り立つ．

$g \in \mathbf{N}_G(T)$ が $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{*-1}(\mathit{\Pi}) = \mathit{\Pi}$ を満たすとする．すると，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(g)^{*-1}(i\rho|_{\mathfrak{t}}) = i\rho|_{\mathfrak{t}}$ であり，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(g)^{*-1}$ は $\mathfrak{t}^*$ 上の内積 $\langle -,- \rangle$ を不変にするから，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(h) = h$ である．すなわち，$g \in \mathbf{Z}_G(h)$ である．$\mathbf{Z}_G(h)$ は連結であり（系 3.13），その Lie 代数は

$$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h) = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}$$

だから（($*$) より $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h) = \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ であることを用いた），$\mathbf{Z}_G(h) = T$ である．よって，$g \in T$ である． □

定理 3.42 G をコンパクト連結 Lie 群，T をその極大トーラスとし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\mathbf{W}(G,T)$ から $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ への写像 $gT \mapsto \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{*-1}$ は，$\mathbf{W}(G,T)$ から $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ への群同型を与える．

証明 $g \in \mathbf{N}_G(T)$ に対して，$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(g) = \mathrm{id}_{\mathfrak{t}}$ であるための必要十分条件は，T から自身への写像 $t \mapsto gtg^{-1}$ が恒等写像であること，すなわち，$g \in \mathbf{Z}_G(T)$ であることである．したがって，$\phi(gT) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{*-1}$ によって定まる写像 $\phi\colon \mathbf{W}(G,T) \to GL((\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*)$ は，単射群準同型である．あとは，$\phi(\mathbf{W}(G,T)) = \mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ を示せばよい．

補題 3.40 より，$\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}) \subseteq \phi(\mathbf{W}(G,T))$ である．また，Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ はルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底全体のなす集合に推移的に作用し [5, 定理 2.10 (1)]，$\mathbf{W}(G,T)$ は同じ集合に自由に作用する（補題 3.41）．よって，補題 3.38 より，$\phi(\mathbf{W}(G,T)) = \mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ である． □

4　コンパクト Lie 群の表現

4.1　ウェイト

G を Lie 群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と置く．(π, V) を G の有限次元複素線型空間上の連続表現とすると，その微分 $\mathrm{Lie}(\pi)$ は，V に $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群の構造を定める．

定義 4.1（ウェイト）　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．(π, V) を G の有限次元複素線型空間上の連続表現とする．$\mathrm{Lie}(\pi)$ が定める $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関するウェイト，ウェイトベクトル，ウェイト空間を，それぞれ, π の T に関する**ウェイト**（weight），**ウェイトベクトル**（weight vector），**ウェイト空間**（weight space）という．ウェイトの**重複度**（multiplicity）についても，同様に定める．

命題 4.2　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．(π, V) を G の有限次元複素線型空間上の連続表現とする．このとき，π の T に関する任意のウェイトは，T に関して積分可能である．

証明　π の T に関するウェイト $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ を任意にとり，対応するウェイトベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ を一つ固定する．このとき，任意の $h \in \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に対して $\mathrm{Lie}(\pi)(h)v = \lambda(h)v$ だから，$\pi|_T$ は $\mathbb{C}v$ 上の 1 次元部分表現を定め，これが $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げとなる．よって，λ は T に関して積分可能である．　□

4.2　最高ウェイト表現

定義 4.3（極大ベクトル）　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする．(π, V) を G の有限次元複素線型空間上の連続表現とする．$\mathrm{Lie}(\pi)$ が定める $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と $\mathit{\Pi}$ に関する極大ベクトルと極大生成ベクトルを，それぞれ，π の T と $\mathit{\Pi}$ に関する**極大ベクトル**（maximal vector），**極大生成ベクトル**（maximal generating vector）という．

定義 4.4（最高ウェイト表現）　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする．(π, V) を G の有限次元複素線型空間上の連続表現とする．π が T と $\mathit{\Pi}$ に関するウェイト $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ の極大生成ベクトルをもつとき，π は T と $\mathit{\Pi}$ に関する**最高ウェイト λ の最高ウェイト表現**（highest weight representation of highest weight λ）であるという．

4.3　最高ウェイト理論

定義 3.14 で述べたとおり，T を連結可換 Lie 群とするとき，T に関して積分可能なベクトル全体のなす加法群を，$\mathit{\Lambda}(T)$ と書く．

定理 4.5（最高ウェイト理論）　G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群，T をその Cartan 部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く．$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする．$(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}), \mathit{\Pi})$ に関する優整

ベクトル全体のなす集合を，P_{++} と書く．

(1) G の有限次元複素線型空間上の既約連続表現は最高ウェイト表現であり，その最高ウェイトは $P_{++} \cap \Lambda(T)$ に属する．

(2) 任意の $\lambda \in P_{++} \cap \Lambda(T)$ に対して，G の有限次元複素線型空間上の既約連続表現であって最高ウェイト λ をもつものが，表現の同値を除いて一意に存在する．

証明 (1) (π, V) を G の有限次元複素線型空間上の既約連続表現とする．分裂簡約 Lie 代数に対する最高ウェイト理論 [6, 定理 4.30, 注意 4.31 (1)] より，$\mathrm{Lie}(\pi)$ が定める有限次元既約 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V は最高ウェイト加群であり，その最高ウェイト λ は P_{++} に属する．さらに，命題 4.2 より，$\lambda \in \Lambda(T)$ である．よって，π は最高ウェイト表現であり，その最高ウェイト λ は $P_{++} \cap \Lambda(T)$ に属する．

(2) $(\widetilde{G}, p)$ を G の普遍被覆 Lie 群とし，$\widetilde{T}$ を $\widetilde{G}$ の連結部分 Lie 群であって $\mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつものとする．$\widetilde{T}$ は，$\widetilde{G}$ の Cartan 部分群である．

$\lambda \in P_{++} \cap \Lambda(T)$ とする．分裂簡約 Lie 代数に対する最高ウェイト理論 [6, 定理 4.30] より，有限次元既約 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V であって最高ウェイト λ をもつものが，同型を除いて一意に存在する．$\widetilde{G}$ は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数にもつ単連結 Lie 群だから，$\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V は連続表現 $\widetilde{\pi}\colon G \to GL(V)$ に一意に持ち上がり，これは既約である．あとは，$\widetilde{\pi}$ が G の連続表現を誘導すること，すなわち $\operatorname{Ker} p \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{\pi}$ であることを示せばよい．

$\lambda \in \Lambda(T)$ だから，$\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の T への持ち上げ $\chi_\lambda\colon T \to \mathbb{C}^\times$ が存在する．$\chi_\lambda \circ p$ は $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の $\widetilde{T}$ への持ち上げである．したがって，$\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$-加群 V のウェイト λ のウェイト空間を V_λ と書くと，任意の $t \in \widetilde{T}$ に対して

$$\widetilde{\pi}(t)|_{V_\lambda} = \chi_\lambda(p(t))\mathrm{id}_{V_\lambda}$$

である．一方で，$\mathbf{Z}(\widetilde{G}) \subseteq \widetilde{T}$ であり（系 3.29），Schur の補題より，任意の $z \in \mathbf{Z}(\widetilde{G})$ に対して $\widetilde{\pi}(z)$ は V 上のスカラー倍写像である．したがって，上式と合わせて，任意の $z \in \mathbf{Z}(\widetilde{G})$ に対して

$$\widetilde{\pi}(z) = \chi_\lambda(p(z))\mathrm{id}_V$$

であることがわかる．上式と $\operatorname{Ker} p \subseteq \mathbf{Z}(\widetilde{G})$ より（補題 3.21），任意の $z \in \operatorname{Ker} p$ に対して，$\widetilde{\pi}(z) = \chi_\lambda(p(z))\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$ である．よって，$\operatorname{Ker} p \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{\pi}$ が成り立つ． □

参考文献

全体を通して，Bourbaki [1] と Knapp [2, Chapters IV–V] を参考にした．

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9*, Springer, 2007.

[2] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, 2002.

[3] 箱，「被覆空間」，2023 年 11 月 24 日版．
https://o-ccah.github.io/docs/covering-space.html

[4] 箱，「Lie 代数」，2025 年 5 月 24 日版．
https://o-ccah.github.io/docs/lie-algebra.html

[5] 箱，「ルート系」，2025 年 8 月 7 日版．
https://o-ccah.github.io/docs/root-system.html

[6] 箱，「分裂簡約 Lie 代数」，2025 年 8 月 10 日版．
https://o-ccah.github.io/docs/split-reductive-lie-algebra.html