被覆空間

箱

2023 年 11 月 24 日

概要

被覆空間について解説する．性質の良い位相空間の上では，被覆空間が基本亜群が作用する集合と一対一に対応し，さらに基本群が作用する集合とも一対一に対応することを示す．

目次

1 被覆空間 2
1.1 位相空間上の空間 2
1.2 ファイバー束と被覆空間 3
1.3 点付き空間の場合 4
1.4 群作用と被覆空間 4

2 亜群 7
2.1 亜群 7
2.2 亜群の作用 8
2.3 亜群が作用する集合と群が作用する集合との対応 8

3 基本亜群と基本群 10
3.1 ホモトピー 10
3.2 道と道ホモトピー 11
3.3 道の連結，逆 12
3.4 基本亜群と基本群 13
3.5 単連結空間 15

4 基本亜群の被覆空間への作用 15
4.1 持ち上げ 15
4.2 被覆空間のホモトピー拡張性質 16
4.3 基本亜群の被覆空間への作用 17
4.4 基本亜群の被覆空間への作用に関する同変写像 19
4.5 持ち上げの存在判定法 20
4.6 普遍被覆空間 21

5 被覆変換群 22

5.1 正規被覆空間 22
5.2 被覆変換群と底空間の基本群の関連 23

6 被覆空間の分類 24
6.1 展覧空間 24
6.2 被覆空間と基本亜群が作用する集合との対応 25
6.3 被覆空間と基本群が作用する集合との対応 27
6.4 基本群の部分群による弧状連結な被覆空間の分類 29

7 位相群の基本群と被覆空間 30
7.1 Hopf 空間 30
7.2 被覆位相群 31

記号と用語

- 自然数，実数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ と書く．0 は自然数に含める．また，$\mathbb{I} = [0,1]$ と書く．
- 集合 X とその元 x_0 との組 (X, x_0) を，点付き集合という．位相空間に対する点付き空間，G-集合（G は群）に対する点付き G-集合も同様に定める．(X, x_0), (Y, y_0) を点付き集合とするとき，写像 $f\colon X \to Y$ であって $f(x_0) = y_0$ を満たすものを，(X, x_0) から (Y, y_0) への点付き写像という．このとき，$f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ と書く．X, Y が付加構造をもつとき，f が種々の性質をもつのにしたがって，点付き連続写像，点付き同相写像，点付き G-同変写像などという．また，（2 つの点付き空間が）点付き同相である，（2 つの点付き G-集合が）点付き G-同型である，などともいう．
- 集合 X, Y に対して，$X \times Y$ から X, Y への標準射影を，それぞれ pr_X, pr_Y と書く．
- 群 G の反対群を，G^{op} と書く．

1 被覆空間

1.1 位相空間上の空間

定義 1.1（位相空間上の空間） B を位相空間とする．位相空間 E と連続写像 $p\colon E \to B$ との組 (E, p) を，B 上の空間（space over B）という．B 上の空間 (E, p) に対して，B をその**底空間**（base space），E をその**全空間**（total space），p をその**射影**（projection）という．点 $b \in B$ に対して $p^{-1}(\{b\})$ を (E, p) の b 上の**ファイバー**（fi，ber）といい，E_b と書く．

(E, p), (E', p') を位相空間 B 上の空間とするとき，写像 $f\colon E \to E'$ であって $p = p' \circ f$ を満たすものを，(E, p) から (E', p') への **B 上の写像**という．B 上の連続写像，B 上の同相写像などといういい方もする．(E, p) から (E', p') への B 上の同相写像が存在するとき，(E, p) と (E', p') は **B 上同相**であるという．点 $b \in B$ に対して，B 上の写像 $f\colon E \to E'$ を制限して得られるファイバー E_b から E'_b への写像を，f_b と書く．

例 1.2（自明な B 上の空間） B, F を位相空間とすると，$(B \times F, \mathrm{pr}_B)$ は B 上の空間である．これを，F をファイバーとする**自明な B 上の空間**（trivial space over B）という．

B 上の空間 (E, p) は，ある自明な B 上の空間と B 上同相であるとき，**自明化可能**（trivializable）である

という．このとき，B 上の同相写像 $\phi\colon E \to B \times F$（$F$ は位相空間）を，(E,p) の**自明化写像**（trivialization map）という．

定義 1.3（底空間の制限） (E,p) を位相空間 B 上の空間とする．B の部分空間 B' に対して，$E|_{B'} = p^{-1}(B')$ と書き，p を制限して得られる $E|_{B'}$ から B' への写像を $p_{B'}$ と書く．B' 上の空間 $(E|_{B'}, p_{B'})$ を，(E,p) の底空間の B' への**制限**（restriction）という．

以下，特に断らない限り，B 上の空間 (E,p) と B の部分空間 B' に対して，$E|_{B'}$ は $p_{B'}$ を射影として B' 上の空間とみなす．

1.2 ファイバー束と被覆空間

定義 1.4（自明化開集合，自明化開被覆） (E,p) を位相空間 B 上の空間とする．

(1) B の開集合 U であって，$(E|_U, p_U)$ が U 上の自明な空間であるものを，(E,p) に対する B の**自明化開集合**（trivializing open set）という．(E,p) に対する自明化開集合であって点 $b \in B$ を含むものを，(E,p) に対する b の**自明化開近傍**（trivializing open neighbourhood）という．

(2) (E,p) に対する B の自明化開集合のみからなる B の開被覆を，(E,p) に対する B の**自明化開被覆**（trivializing open cover）という．

定義 1.5（ファイバー束） 位相空間 B 上の空間 (E,p) であって，これに対する B の自明化開被覆が存在するものを，B 上の**ファイバー束**（fiber bundle）という．

定義 1.6（被覆空間） 位相空間 B 上のファイバー束 (E,p) であって，各ファイバー E_b（$b \in B$）が離散であるものを，B 上の**被覆空間**（covering space）という．

命題 1.7 (E,p) を位相空間 B 上のファイバー束とする．任意の位相空間 F に対して，ファイバー E_b が F に同相であるような点 $b \in B$ 全体の集合は，B において開かつ閉である．

証明 ファイバー E_b が位相空間 F に同相であるような点 $b \in B$ 全体の集合を X と置く．$b \in B$ とし，(E,p) に対する b の自明化開近傍 U をとると，U の点上のファイバーはすべて E_b に同相である．したがって，$b \in X$ ならば $U \subseteq X$ であり，$b \notin X$ ならば $U \cap X = \emptyset$ である．よって，X と $B \setminus X$ はともに B において開である． □

系 1.8 位相空間 B 上のファイバー束 (E,p) について，射影の像 $p(E)$ は，B において開かつ閉である．

証明 命題 1.7 で $F = \emptyset$ とすればよい． □

系 1.9 連結空間 B 上のファイバー束 (E,p) について，そのすべてのファイバーは同相である．

証明 B は空でないから，1 点 $b_0 \in B$ を固定できる．ファイバー E_b が E_{b_0} に同相であるような点 $b \in B$ 全体の集合を B' と置くと，$b_0 \in B'$ より B' は空でなく，命題 1.7 より B' は B において開かつ閉である．よって，B の連結性より $B' = B$ である． □

命題 1.10 (E,p), (E',p') を位相空間 B 上の被覆空間とする．B 上の連続写像 $f\colon E \to E'$ は，開写像である．

証明　(E,p), (E',p') の両方に対する B の自明化開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ をとる．各 $i\in I$ に対して f の制限 $f_{U_i}\colon E|_{U_i}\to E'|_{U_i}$ は U_i 上の連続写像であり，またすべての $i\in I$ に対して f_{U_i} が開写像ならば f も開写像である．したがって，(E,p), (E',p') が自明な被覆空間である場合に主張を示せばよい．

$(E,p)=(B\times F,\mathrm{pr}_B)$，$(E',p')=(B\times F',\mathrm{pr}_B)$（$F$, F' は離散空間）とする．点 $(b,x)\in B\times F$ を任意にとり，$f(b,x)=(b,x')$（$x'\in F$）と置く．(b,x) の任意の近傍 U に対して $f(U)$ が (b,x') の近傍であることを示したい．$U=V\times\{x\}$（V は b の近傍）という形であるとしてよい．さらに，f は連続であり F' は離散だから，$V\times\{x\}$ 上で f の F'-成分は一定であるとしてよい．このとき $f(V\times\{x\})=V\times\{x'\}$ であり，これは (b,x') の近傍である．これで，主張が示された．□

1.3　点付き空間の場合

定義 1.11（点付き空間上の点付き空間）　(B,b_0) を点付き空間とする．点付き空間 (E,x_0) と点付き連続写像 $p\colon(E,x_0)\to(B,b_0)$ との組 $((E,x_0),p)$ を，(B,b_0) **上の点付き空間**（pointed space over (B,b_0)）という．

定義 1.12（点付きファイバー束）　点付き空間 (B,b_0) 上の点付き空間 $((E,x_0),p)$ であって，(E,p) が B 上のファイバー束であるものを，(B,b_0) 上の**点付きファイバー束**（pointed fiber bundle）という．

定義 1.13（点付き被覆空間）　点付き空間 (B,b_0) 上の点付き空間 $((E,x_0),p)$ であって，(E,p) が B 上の被覆空間であるものを，(B,b_0) 上の**点付き被覆空間**（pointed covering space）という．

1.4　群作用と被覆空間

本小節では，群が位相空間に作用しており，それがよい性質を満たしていれば，そこから被覆空間が構成できることを見る．

定義 1.14（被覆的な作用）　群 $\mathit{\Gamma}$ の位相空間 X への作用が**被覆的**[*1] であるとは，任意の点 $x\in X$ に対して，その近傍 U であって，$(g\cdot U)_{g\in\mathit{\Gamma}}$ のどの異なる 2 元も交わらないものが存在することをいう．

命題 1.15　群 $\mathit{\Gamma}$ が位相空間 X に自由に作用しているとし，軌道空間への等化写像を $p\colon X\to\mathit{\Gamma}\backslash X$ と書く．次の 2 条件は同値である．

(a) (X,p) は $\mathit{\Gamma}\backslash X$ 上の被覆空間である．
(b) $\mathit{\Gamma}$ の X への作用は被覆的である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　(X,p) が $\mathit{\Gamma}\backslash X$ 上の被覆空間であるとする．点 $x\in X$ を任意にとる．これに対して，$p(x)$ の自明化開近傍 V と自明化写像 $\phi\colon p^{-1}(V)\to V\times F$（$F$ は離散空間）をとり，$U=\phi^{-1}(V\times\{\mathrm{pr}_F(\phi(x))\})$ と置く．この U は，x の開近傍である．また，$g\in\mathit{\Gamma}$ について $g\cdot U\cap U\neq\emptyset$ であるとすると，$g\cdot y=z$ を満たす点 y, $z\in X$ が存在するが，これらの点について $p(y)=p(g\cdot y)=p(z)$ だから，V の定義と合わせて $y=\phi^{-1}(p(y),\mathrm{pr}_F(\phi(x)))=\phi^{-1}(p(z),\mathrm{pr}_F(\phi(x)))=z$ を得る．$\mathit{\Gamma}$ の X への作用は自由だから，これより，g は単位元である．したがって，$(g\cdot U)_{g\in\mathit{\Gamma}}$ のどの異なる 2 元も交わらない．よって，$\mathit{\Gamma}$ の X への作用は被

*1 「固有不連続」ということもあるが，この語は，定義 1.18 (2) の意味で使われることもあり，紛らわしい．本稿では，Hatcher [3, p. 72] がこのような作用を “covering space action” と呼んでいるのに合わせて，「被覆的」ということにした．

覆的である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　Γ の X への作用が被覆的であるとする．点 $b \in \Gamma\backslash X$ を任意にとる．これに対して，点 $x \in p^{-1}(\{b\})$ を一つ固定し，その開近傍 U であって $(g \cdot U)_{g\in\Gamma}$ のどの異なる 2 元も交わらないものをとり，$V = p(U)$ と置く．p は開写像だから，V は b の開近傍であり，p は U から V への同相を与える．また，U のとり方より，$p^{-1}(V)$ はどの二つも交わらない開集合 $g \cdot U$（$g \in \Gamma$）全体の合併である．以上より，Γ を離散群とみなすと，写像

$$\psi\colon V \times \Gamma \to p^{-1}(V), \quad (b', g) \mapsto g \cdot p|_U^{-1}(b')$$

は同相である．よって，(X, p) は $\Gamma\backslash X$ 上の被覆空間である．　□

注意 1.16　群 Γ が連結空間 X に効果的に作用しており，軌道空間への等化写像を $p\colon X \to \Gamma\backslash X$ と書くと，(X, p) は $\Gamma\backslash X$ 上の被覆空間となっているとする．このとき，$g \in \Gamma$ の作用が点 $x \in X$ を固定するとすると，後に示す持ち上げの一意性（系 4.3）により，g の作用が恒等写像であることがわかるから，作用が効果的であることより，g は単位元でなければならない．すなわち，Γ の X への作用は自由である．よって，「群 Γ が位相空間 X に自由に作用している」という仮定を「群 Γ が連結空間 X に効果的に作用している」と読み替えても，命題 1.15 は成立する．

例 1.17　G を Hausdorff 位相群，Γ をその離散部分群とし，等化準同型を $p\colon G \to \Gamma\backslash G$ と書く．群演算による Γ の G への左作用が被覆的である（したがって，命題 1.15 より，$(\Gamma\backslash G, p)$ は $\Gamma\backslash G$ 上の被覆空間である）ことを示そう．

Γ が離散であることより，単位元 $e \in G$ の近傍 U であって，$\Gamma \cap U = \{e\}$ を満たすものがとれる．この V について，$x \in G$ と $g \in \Gamma$ が $xV \cap gxV \neq \emptyset$ を満たすとする．すると，$y \in xV \cap gxV$ がとれ，$g = (yx^{-1}g^{-1})^{-1}(yx^{-1}) \in V^{-1}V \subseteq U$ となるから，U のとり方より $g = e$ を得る．したがって，$(gxV)_{g\in\Gamma}$ のどの異なる 2 元も交わらない．よって，群演算による Γ の G への左作用は被覆的である．

なお，与えられた状況で，Γ が G において自動的に閉となることが，次のように示せる．単位元 $e \in G$ の近傍 U, V を，前段と同様に定める．$x \in G$ に対して，g_1, $g_2 \in \Gamma \cap xV$ とすると，$g_1^{-1}g_2 \in \Gamma$ かつ $g_1^{-1}g_2 = (x^{-1}g_1)^{-1}(x^{-1}g_2) \in V^{-1}V \subseteq U$ だから，$g_1 = g_2$ である．すなわち，xV は Γ の元をたかだか一つしか含まない．したがって，$x \notin \Gamma$ ならば，$xV \setminus \Gamma$ は x の近傍となる．よって，Γ は G において閉である．

被覆空間に関連して，次の性質もしばしば扱われるので，ここで説明しておく．

定義 1.18（固有，固有不連続な作用）　X を位相空間とする．

(1) 位相群 G の X への連続作用が**固有**（proper）であるとは，連続写像 $\Theta\colon G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ が固有である（すなわち，コンパクト集合の逆像がコンパクトとなる）ことをいう．

(2) 群 Γ の X への作用が**固有不連続**（properly discontinuous）であるとは，Γ を離散群とみなしたとき，この作用が固有であることをいう．

命題 1.19　X を Hausdorff 空間とする．

(1) 位相群 G の X への連続作用が固有であるための必要十分条件は，任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対して，$G_K = \{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ がコンパクトであることである．

(2) 群 Γ の X への作用が固有不連続であるための必要十分条件は，任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対して，$\Gamma_K = \{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ が有限であることである．

証明　(1)　連続写像 $(g,x)\mapsto(g\cdot x,x)$ を $\varTheta\colon G\times X\to X\times X$ と書く．X は Hausdorff だから，$X\times X$ のコンパクト集合は閉であり，したがって，その $\varTheta$ による逆像は $G\times X$ において閉である．また，$X\times X$ の任意のコンパクト集合は，あるコンパクト集合 $K\subseteq X$ に対する $K\times K$ に含まれる．したがって，$\varTheta$ が固有であることは，任意のコンパクト集合 $K\subseteq X$ に対して $\varTheta^{-1}(K\times K)$ がコンパクトであることと同値である．$\varTheta^{-1}(K\times K)$ がコンパクトならば，$\mathrm{pr}_G(\varTheta^{-1}(X\times X))=G_K$ もコンパクトである．一方で，$\varTheta^{-1}(K\times K)$ は $G_K\times K$ の閉集合だから，G_K がコンパクトならば，$\varTheta^{-1}(K\times K)$ もコンパクトである．これで，主張が示された．

(2)　(1) の特別な場合である．　□

補題 1.20　群 G の位相空間 X への作用について，次の 3 条件は同値である．

(a) 軌道空間 $G\backslash X$ は Hausdorff である．
(b) 対角集合 $\varDelta(G\backslash X)=\{(b,b)\mid b\in G\backslash X\}$ は $G\backslash X\times G\backslash X$ において閉である．
(c) 写像 $\varTheta\colon G\times X\to X\times X$, $(g,x)\mapsto(g\cdot x,x)$ の像 $\varTheta(G\times X)$ は $X\times X$ において閉である．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　位相空間の一般論である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　等化写像 $p\colon X\to G\backslash X$ は開写像だから，$p\times p\colon X\times X\to G\backslash X\times G\backslash X$ も開写像であり，特に，$G\backslash X\times G\backslash X$ を自然に $X\times X$ の商空間とみなせる．よって，$\varDelta(G\backslash X)$ が $G\backslash X\times G\backslash X$ において閉であることは，$(p\times p)^{-1}(\varDelta(G\backslash X))=\varTheta(G\times X)$ が $X\times X$ において閉であることと同値である．　□

群作用が固有不連続であることと，被覆的であることとの関係を述べる．そのために，補題を準備する．

補題 1.21　位相空間 X から局所コンパクト Hausdorff 空間 Y への連続写像 $f\colon X\to Y$ は，固有ならば閉写像である．

証明　f が固有であるとして，X の閉集合 A を任意にとる．Y の任意のコンパクト集合 K に対して，f が固有であることより $f^{-1}(K)$ はコンパクトだから，その閉集合である $A\cap f^{-1}(K)$ もコンパクトであり，その連続像である $f(A\cap f^{-1}(K))=f(A)\cap K$（この等式は，集合演算により容易に確かめられる）もコンパクトである．したがって，Y の任意のコンパクト集合 K に対して，$f(A)\cap K$ は K において閉である．Y は局所コンパクト Hausdorff だから，これは，$f(A)$ が Y において閉であることを意味する．よって，f は閉写像である．　□

補題 1.22　位相群 G が局所コンパクト Hausdorff 空間 X に固有かつ連続に作用するとき，軌道空間 $G\backslash X$ は局所コンパクト Hausdorff である．

証明　X の各点はコンパクト近傍をもつから，その軌道空間である $G\backslash X$ も同様である．また，連続写像 $\varTheta\colon G\times X\to X\times X$ は固有であり，X は局所コンパクト Hausdorff だから，補題 1.21 より $\varTheta(G\times X)$ は $X\times X$ において閉である．補題 1.20 より，これは，$G\backslash X$ が Hausdorff であることを意味する．　□

命題 1.23　群 $\varGamma$ の位相空間 X への作用に関する次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，X が局所コンパクト Hausdorff ならば，これらの 2 条件は同値である．

(a) $\varGamma$ の X への作用は被覆的であり，軌道空間 $\varGamma\backslash X$ は Hausdorff である．
(b) $\varGamma$ の X への作用は自由かつ固有不連続である．

証明　軌道空間への等化写像を $p\colon X \to \Gamma\backslash X$ と書く．また, Γ を離散群とみなし, 連続写像 $(g,x) \mapsto (g\cdot x, x)$ を $\Theta\colon \Gamma \times X \to X \times X$ と書く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　Γ の X への作用が被覆的であり，軌道空間 $\Gamma\backslash X$ が Hausdorff であるとする．Γ の X への作用が自由であることは明らかである．この作用が固有不連続であることを示す．命題 1.19 (2) より，任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対して，$\Gamma_K = \{g \in G \mid g\cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ が有限であることをいえばよい．各 $g \in \Gamma_K$ に対して，$g \cdot x_g = y_g$ を満たす点 x_g, $y_g \in K$ をとる．Γ_K が有限でないと仮定すると，$((y_g, x_g))_{g\in\Gamma_K}$ はコンパクト集合 $K \times K$ に含まれる無限個の点の族だから，集積点 $(\overline{y}, \overline{x}) \in K \times K$ が存在する．各 (y_g, x_g) は $\Theta(\Gamma \times X)$ に属し，$\Gamma\backslash X$ が Hausdorff であることより $\Theta(\Gamma \times X)$ は $X \times X$ において閉だから（補題 1.20)，$(\overline{y}, \overline{x})$ も $\Theta(\Gamma \times X)$ に属する．すなわち，$\overline{g} \cdot \overline{x} = \overline{y}$ を満たす $\overline{g} \in \Gamma$ が存在する．さて，Γ の X への作用は被覆的だから，$\overline{x}$ の近傍 U であって，$(g \cdot U)_{g\in\Gamma}$ のどの異なる 2 元も交わらないものが存在する．$(\overline{y}, \overline{x})$ は $((y_g, x_g))_{g\in\Gamma_K}$ の集積点だから，無限個の $g \in \Gamma_K$ に対して，$x_g \in U$ かつ $y_g \in \overline{g} \cdot U$ となる．ところが，$g \cdot x_g = y_g$ だから，U のとり方より，このような g はすべて $\overline{g}$ に等しくなければならない．これは矛盾である．よって，背理法より，Γ_K は有限である．これで，Γ の X への作用が固有不連続であることが示された．

(b) $\Longrightarrow$ (a)（X が局所コンパクト Hausdorff である場合）　Γ の X への作用が自由かつ固有不連続であるとする．補題 1.22 より，軌道空間 $\Gamma\backslash X$ は Hausdorff である．Γ の X への作用が被覆的であることを示す．点 $x \in X$ を任意にとり, そのコンパクト近傍 U を一つ固定する．命題 1.19 (2) より, $\Gamma_U = \{g \in \Gamma \mid g\cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ は有限である．作用が自由であることより有限個の点 $g \cdot x$（$g \in \Gamma_U$）はすべて異なり，X は Hausdorff だから，x の近傍 $V \subseteq U$ であって，$(g \cdot V)_{g\in\Gamma_U}$ のどの異なる 2 元も交わらないものが存在する．この V について，$(g \cdot V)_{g\in\Gamma}$ のどの異なる 2 元も交わらない．よって，Γ の X への作用は被覆的である．　□

系 1.24　群 Γ が局所コンパクト Hausdorff 空間 X に自由かつ固有不連続に作用しているならば，$\Gamma\backslash X$ は Hausdorff であり，軌道空間への等化写像を $p\colon X \to \Gamma\backslash X$ と書くとき，(X, p) は $\Gamma\backslash X$ 上の被覆空間である．

証明　命題 1.23 と命題 1.15 から従う．　□

注意 1.25　群 Γ の局所コンパクト Hausdorff 空間 X への作用が被覆的であっても，それが固有不連続であるとは限らない．たとえば，$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ への作用を

$$n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^{-n} y) \qquad (n \in \mathbb{Z},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

と定めると，これは被覆的だが固有不連続ではない（命題 1.23 より，対応する軌道空間 $\mathbb{Z}\backslash(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ は Hausdorff でない)．

2　亜群

2.1　亜群

小圏 $\mathscr{C}$ に対して，その対象全体の集合を $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と書き，その射全体の集合を $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ と書く．

定義 2.1（亜群）　すべての射が同型射であるような小圏を，**亜群**（groupoid）という．

亜群の対象 b の恒等射を ϵ_b と書く．

定義 2.2（連結亜群）　亜郡 $\mathscr{G}$ が**連結**（connected）であるとは，$\mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ が空でなく，任意の b, $b' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$

に対して b から b' への射が存在することをいう．

2.2 亜群の作用

定義 2.3（亜群の作用） $\mathscr{G}$ を亜群とする．E を集合，$p\colon E \to \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ を写像とし，$b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ に対して $E_b = p^{-1}(\{b\})$ と書き，

$$D = \{(\alpha, x) \in \mathrm{Arr}(\mathscr{G}) \times E \mid \mathrm{Dom}\,\alpha = p(x)\}$$

と置く．次の 3 条件を満たす写像 $\theta\colon D \to E$ を，亜群 $\mathscr{G}$ の (E, p)（あるいは単に E）への**作用**（action）という．

(i) 任意の $(\alpha, x) \in D$ に対して，$\mathrm{Cod}\,\alpha = p(\theta(\alpha, x))$ である．
(ii) 任意の対象 $b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ と $x \in E_b$ に対して，$\theta(\epsilon_b, x) = x$ である．
(iii) $\mathscr{G}$ の任意の射 $\alpha\colon b \to b'$，$\beta\colon b' \to b''$ と $x \in E_b$ に対して，$\theta(\beta\alpha, x) = \theta(\beta, \theta(\alpha, x))$ である．

$\mathscr{G}$ の (E, p) への作用が定まっているとき，(E, p)（あるいは単に E）を **$\mathscr{G}$-集合**（$\mathscr{G}$-set）という．(E, p) を $\mathscr{G}$-集合とするとき，$b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ に対して $E_b = p^{-1}(\{b\})$ を (E, p) の b 上の**ファイバー**（fiber）という．しばしば，作用を表す記号 θ を明示せず，$\theta(\alpha, x)$ の代わりに $\alpha \cdot x$ と書く．

定義 2.3 の条件 (i) の下で，条件 (ii), (iii) は，対象の対応 $b \mapsto E_b$ と射の対応 $\alpha \mapsto \theta(\alpha, -)$ が $\mathscr{G}$ から集合の圏 $\mathbf{Set}$ への関手をなすということにほかならない．

定義 2.4（亜群の作用に関する同変写像） $\mathscr{G}$ を亜群とし，(E, p), (E', p') を $\mathscr{G}$-集合とする．写像 $f\colon E \to E'$ が **$\mathscr{G}$-同変**（$\mathscr{G}$-equivariant）であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(i) $p = p' \circ f$ である．
(ii) $\mathscr{G}$ の任意の射 $\alpha\colon b \to b'$ と $x \in E_b$ に対して，$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ である．

f が全単射で f, f^{-1} がともに $\mathscr{G}$-同変であるとき，f は **$\mathscr{G}$-同型**（$\mathscr{G}$-isomorphism）であるという．

定義 2.4 の条件 (i) の下で，条件 (ii) は，f のファイバーへの制限の族 $(f_b\colon E_b \to E'_b)_{b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})}$ が $\mathscr{G}$-集合 (E, p) と (E', p') のそれぞれに対応する関手の間の自然変換であるということにほかならない．

2.3 亜群が作用する集合と群が作用する集合との対応

本小節では，G を群とするとき，G-集合を対象とし，G-同変写像を射とする圏を，G-$\mathbf{Set}$ と書く．また，$\mathscr{G}$ を亜群とするとき，$\mathscr{G}$-集合を対象とし，$\mathscr{G}$-同変写像を射とする圏を，$\mathscr{G}$-$\mathbf{Set}$ と書く．

$\mathscr{G}$ を亜群とし，$b_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ を固定して $G = \mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(b_0)$ と置く．

(E, p) が $\mathscr{G}$-集合ならば，E_{b_0} は $\mathscr{G}$ の作用の制限によって G-集合をなす．(E', p') も $\mathscr{G}$-集合で $f\colon E \to E'$ が $\mathscr{G}$-同変写像ならば，f のファイバーへの制限 $f_{b_0}\colon E_{b_0} \to E'_{b_0}$ は G-同変写像である．容易に確かめられるように，この対応は恒等射と合成を保ち，関手

$$\mathbf{F}_{b_0}\colon \mathscr{G}\text{-}\mathbf{Set} \to G\text{-}\mathbf{Set}$$

をなす．

次に，逆方向の関手を構成する．G-集合 X に対して，$\mathscr{G}$-集合 $(P \times^G X, p_X)$ を次のように定める．

- b_0 を始域とする $\mathscr{G}$ の射全体の集合を P と置き，写像 $p\colon P \to \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ を $p(\beta) = \mathrm{Cod}\,\beta$ と定める．$\mathscr{G}$ の (P, p) への作用が
$$\alpha \cdot \beta = \alpha\beta \qquad (\alpha \in \mathrm{Arr}(\mathscr{G}),\, \beta \in P,\, \mathrm{Dom}\,\alpha = \mathrm{Cod}\,\beta = p(\beta))$$
によって定まる（すなわち，(P, p) は関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(b_0, -)\colon \mathscr{G} \to \mathbf{Set}$ に対応する $\mathscr{G}$-集合である）．さらに，G の P への右作用が
$$\beta \cdot \gamma = \beta\gamma \qquad (\beta \in P,\, \gamma \in G)$$
によって定まる．
- G の $P \times X$ への右作用 $(\beta, x) \cdot \gamma = (\beta \cdot \gamma, \gamma^{-1} \cdot x)$ の軌道空間を $P \times^G X = (P \times X)/G$ とし，$P \times X$ から $\mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ への写像 $(\beta, x) \mapsto p(\beta) = \mathrm{Cod}\,\beta$ が誘導する写像として $p_X\colon P \times^G X \to \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ を定める．
- $\mathscr{G}$ の (P, p) への作用が誘導する $\mathscr{G}$ の $(P \times^G X, p_X)$ への作用を考える．すなわち，
$$\alpha \cdot [(\beta, x)] = [(\alpha\beta, x)] \qquad (\alpha \in \mathrm{Arr}(\mathscr{G}),\, \beta \in P,\, x \in X,\, \mathrm{Dom}\,\alpha = \mathrm{Cod}\,\beta = p_X([(\beta, x)]))$$
と定める．

G-集合の間の G-同変写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$\mathscr{G}$-同変写像 $\mathrm{id}_P \times^G f\colon P \times^G X \to P \times^G Y$ を
$$(\mathrm{id}_P \times^G f)([(\beta, x)]) = [(\beta, f(x))] \qquad (\beta \in P,\, x \in X)$$
と定める（これは確かに $(P \times^G X, p_X)$ から $(P \times^G Y, p_Y)$ への $\mathscr{G}$-同変写像である）．容易に確かめられるように，この対応は恒等射と合成を保ち，関手
$$\mathbf{E}_{b_0}\colon G\text{-}\mathbf{Set} \to \mathscr{G}\text{-}\mathbf{Set}$$
をなす．

定理 2.5（亜群が作用する集合と群が作用する集合との対応） $\mathscr{G}$ を亜群とし，$b_0 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ を固定して $G = \mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(b_0)$ と置く．

(1) G-集合 X に対して，写像
$$\begin{aligned} \phi_X &\colon (P \times^G X)_{b_0} \to X, \quad [(\alpha, x)] \mapsto \alpha \cdot x, \\ \phi'_X &\colon X \to (P \times^G X)_{b_0}, \quad x \mapsto [(\mathrm{id}_{b_0}, x)] \end{aligned}$$
は矛盾なく定まり，これらは互いに他の逆を与える G-同型である．さらに，G-集合 X, Y の間の G-同変写像 $f\colon X \to Y$ に対して，図式
$$\begin{tikzcd} (P \times^G X)_{b_0} \arrow[r, "(\mathrm{id}_P \times^G f)_{b_0}"] \arrow[d, "\phi_X"'] & (P \times^G Y)_{b_0} \arrow[d, "\phi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$
は可換である．

(2) $\mathscr{G}$ が連結であるとして，各 $b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ に対して $\mathscr{G}$ の射 $\alpha_b\colon b_0 \to b$ を 1 つずつ固定する．このとき，$\mathscr{G}$-集合 (E, p) に対して，写像

$$\begin{aligned} \psi_{(E,p)}&\colon P \times^G E_{b_0} \to E, \quad [(\alpha, x)] \mapsto \alpha \cdot x, \\ \psi'_{(E,p)}&\colon E \to P \times^G E_{b_0}, \quad x \mapsto [(\alpha_{p(x)}, \alpha_{p(x)}^{-1} \cdot x)] \end{aligned}$$

は矛盾なく定まり（$\psi'_{(E,p)}$ は $(\alpha_b)_{b \in B}$ のとり方によらない），これらは互いに他の逆を与える $\mathscr{G}$-同型である．さらに，$\mathscr{G}$-集合 (E, p), (E', p') の間の $\mathscr{G}$-同変写像 $f\colon E \to E'$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} P \times^G E_{b_0} \arrow[r, "\mathrm{id}_P \times^G f_{b_0}"] \arrow[d, "\psi_{(E,p)}"'] & P \times^G E'_{b_0} \arrow[d, "\psi_{(E',p')}"] \\ E \arrow[r, "f"'] & E' \end{tikzcd}$$

は可換である．

証明 容易に確かめられる． □

よって，$\mathscr{G}$ が連結亜群ならば，定理 2.5 (1), (2) の同型はそれぞれ自然同型 $\mathbf{F}_{b_0} \circ \mathbf{E}_{b_0} \cong \mathrm{Id}_{G\text{-}\mathbf{Set}}$，$\mathbf{E}_{b_0} \circ \mathbf{F}_{b_0} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{G}\text{-}\mathbf{Set}}$ を与え，$\mathbf{F}_{b_0}$ と $\mathbf{E}_{b_0}$ は互いに他の準逆を与える圏同値関手であり，圏同値 $\mathscr{G}$-$\mathbf{Set} \simeq G$-$\mathbf{Set}$ が成立する．

3 基本亜群と基本群

3.1 ホモトピー

定義 3.1（ホモトピー） X, Y を位相空間とし，f, $g\colon X \to Y$ を連続写像とする．連続写像 $\sigma\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ であって $\sigma(-, 0) = f$ かつ $\sigma(-, 1) = g$ を満たすものを，f から g への**ホモトピー**（homotopy）という．f から g へのホモトピーが存在するとき，f と g は**ホモトピック**（homotopic）であるといい，$f \simeq g$ と書く．

容易に確かめられるように，この関係 $\simeq$ は，X から Y への連続写像全体のなす集合上の同値関係である．この同値関係に関する連続写像 f の同値類を，f の**ホモトピー類**（homotopy class）といい，$[f]$ と書く．

注意 3.2（相対ホモトピー） X, Y を位相空間とする．A を X の部分集合とするとき，X から Y への連続写像の間のホモトピー $\sigma\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ であって，任意の点 $x \in A$ に対して $\sigma(x, -)$ が定値であるものを，A **に関する相対ホモトピー**（homotopy relative to A）という．連続写像 f から g への A に関する相対ホモトピーが存在するとき，f と g は A **に関して相対ホモトピック**（homotopic relative to A）であるという．本稿では用いないが，これを，$f \simeq_A g$ や $f \simeq g \ \ \mathrm{rel}\, A$ と書くこともある．A が 1 点集合のときは，**点付きホモトピー**，**点付きホモトピック**といういい方もする．

命題 3.3 X, Y, Z を位相空間とし，f, $f'\colon X \to Y$，g, $g'\colon Y \to Z$ を連続写像とする．$f \simeq f'$ かつ $g \simeq g'$ ならば，$g \circ f \simeq g' \circ f'$ である．

証明 $\sigma\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ が f から f' へのホモトピーならば $g \circ \sigma$ は $g \circ f$ から $g \circ f'$ へのホモトピーだから，$f \simeq f'$ ならば $g \circ f \simeq g \circ f'$ である．また，$\tau\colon Y \times \mathbb{I} \to Z$ が g から g' へのホモトピーならば $\tau \circ (f' \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}})$ は $g \circ f'$ から $g' \circ f'$ へのホモトピーだから，$g \simeq g'$ ならば $g \circ f' \simeq g' \circ f'$ である．よって，$f \simeq f'$ かつ $g \simeq g'$ ならば $g \circ f \simeq g' \circ f'$ である． □

定義 3.4（ホモトピー同値） X, Y を位相空間とする．連続写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to X$ が $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ を満たすとき，f と g は互いに他の**ホモトピー逆**（homotopy inverse）であるという．ホモトピー逆をもつ連続写像を，**ホモトピー同値写像**（homotopy equivalence）という．X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき，X と Y は**ホモトピー同値**（homotopy equivalent）であるという．

命題 3.3 より，位相空間を対象とし，連続写像のホモトピー同値類を射とする圏 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ が自然に定まる．連続写像 f がホモトピー同値写像であるとは，$[f]$ が $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ の同型射であるということにほかならない．

3.2 道と道ホモトピー

定義 3.5（道） X を位相空間とし，$x, y \in X$ とする．連続写像 $l\colon \mathbb{I} \to X$ であって $l(0) = x$ かつ $l(1) = y$ を満たすものを，x から y への X 上の**道**（path）といい，その全体を $\Omega(X; x, y)$ と書く．このとき，x を l の**始点**（initial point），y を l の**終点**（terminal point）という．始点と終点が同じ点 x であるような道を，x を**基点**（base point）とする**閉道**（loop）といい，その全体を $\Omega(X, x)$ と書く．

位相空間 X とその点 x に対して，常に点 x を値にとる X 上の道を，e_x と書く．

定義 3.6（道ホモトピー） X を位相空間，$x, y \in X$ とし，l, m を x から y への道とする．l から m への $\{0, 1\}$ に関する相対ホモトピーを，l から m への（X 上の）**道ホモトピー**（path homotopy）という．l から m への道ホモトピーが存在するとき，l と m は（X 上）**道ホモトピック**（path homotopic）であるといい，$l \simeq m$ と書く．

容易に確かめられるように，この関係 $\simeq$ は，$\Omega(X; x, y)$ 上の同値関係である．この同値関係に関する道 l の同値類を，l の**道ホモトピー類**（path homotopy class）といい，$[l]$ と書く．

位相空間 X とその点 x に対して，常に点 x を値にとる X 上の道 e_x の道ホモトピー類を，ϵ_x と書く．

注意 3.7 一般に，始点と終点を共有する位相空間 X 上の道 l と m について，それらが $\mathbb{I}$ から X への連続写像としてホモトピックであることと，道ホモトピックであることとは同値ではない．これら 2 つの関係をともに記号 $\simeq$ で表し，これらの関係に関する同値類をともに記号 $[-]$ で表すが，道に対しては常に「道ホモトピック」の意味でこれらの記号を用いる．

命題 3.8 X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．始点と終点を共有する X 上の道 l, m について，$l \simeq m$ ならば $f \circ l \simeq f \circ m$ である．

証明 $\sigma\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ が l から m への道ホモトピーならば，$f \circ \sigma$ は $f \circ l$ から $f \circ m$ への道ホモトピーである． □

命題 3.9 X, Y を位相空間とし，$x_0, x_1 \in X$，$y_0, y_1 \in Y$ とする．$f, g\colon X \to Y$ は連続写像であり，ともに x_0 を y_0 に，x_1 を y_1 に移し，これらは $\{x_0, x_1\}$ に関して相対ホモトピックであるとする．このとき，x_0 から x_1 への道 l に対して，$f \circ l \simeq g \circ l$ である．

証明 $\sigma\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ が f から g への $\{x_0, x_1\}$ に関する相対ホモトピーならば，$\sigma \circ l$ は $f \circ l$ から $g \circ l$ への道ホモトピーである． □

次小節以降で必要になるので，次の命題を示しておく．

命題 3.10 X を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$（$n \in \mathbb{N}$）の凸集合とする．始点と終点を共有する X 上の二つの道は，道ホモトピックである．

証明 始点と終点を共有する X 上の道 l, m に対して，$\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ から X への連続写像 $(t,s) \mapsto (1-s)l(t) + sm(t)$ は l から m への道ホモトピーだから，$l \simeq m$ である． □

3.3 道の連結，逆

定義 3.11（道の連結，逆） X を位相空間，$x, y, z \in X$ とし，l を x から y への道，m を y から z への道とする．

(1) l と m の連結（connection）$m * l$ を，

$$(m * l)(t) = \begin{cases} l(2t) & (0 \le t \le 1/2) \\ m(2t-1) & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}$$

と定める．これは，x から z への道である．

(2) l の逆（inverse）l^- を，

$$l^-(t) = l(1-t)$$

と定める．これは，y から x への道である．

明らかに，$(l^-)^- = l$ かつ $(m * l)^- = l^- * m^-$ である．

命題 3.12 X を位相空間，$x, y \in X$ とし，l, l' を x から y への道，m, m' を y から z への道とする．

(1) $l \simeq l'$ かつ $m \simeq m'$ ならば，$m * l \simeq m' * l'$ である．
(2) $l \simeq l'$ ならば，$l^- \simeq (l')^-$ である．

証明 (1) $\sigma\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ が l から l' への道ホモトピーであり $\tau\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ が m から m' への道ホモトピーならば，$\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ から X への写像

$$(t,s) \mapsto \begin{cases} \sigma(2t, s) & (0 \le t \le 1/2) \\ \tau(2t-1, s) & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}$$

は $m * l$ から $m' * l'$ への道ホモトピーである．よって，$l \simeq l'$ かつ $m \simeq m'$ ならば $m * l \simeq m' * l'$ である．

(2) $\sigma\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ が l から l' への道ホモトピーならば，$\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ から X への写像

$$(t,s) \mapsto \sigma(1-t, s)$$

は l^- から $(l')^-$ への道ホモトピーである．よって，$l \simeq l'$ ならば $l^- \simeq (l')^-$ である． □

命題 3.13 X を位相空間，$x, y, z, w \in X$ とし，l を x から y への道，m を y から z への道，n を z から w への道とする．

(1) $n * (m * l) \simeq (n * m) * l$.
(2) $l * e_x \simeq e_y * l \simeq l$.
(3) $l^- * l \simeq e_x$，$l * l^- \simeq e_y$.

証明 (1) $\mathbb{I}$ 上の 0 から 1 への道 ϕ, ψ を

$$\phi(t) = t, \qquad \psi(t) = \begin{cases} t/2 & (0 \leq t \leq 1/2) \\ t - 1/4 & (1/2 \leq t \leq 3/4) \\ 2t - 1 & (3/4 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定めると，命題 3.10 より ϕ と ψ は道ホモトピックだから，命題 3.8 より $n * (m * l) = (n * (m * l)) \circ \phi$ と $(n * m) * l = (n * (m * l)) \circ \psi$ は道ホモトピックである．

(2) $\mathbb{I}$ 上の 0 から 1 への道 ϕ, ψ, χ を

$$\phi(t) = t, \qquad \psi(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 1/2) \\ 2t - 1 & (1/2 \leq t \leq 1), \end{cases} \qquad \chi(t) = \begin{cases} 2t & (0 \leq t \leq 1/2) \\ 1 & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定めると，命題 3.10 より ϕ, ψ, χ はすべて道ホモトピックだから，命題 3.8 より $l = l \circ \phi$，$l * e_x = l \circ \psi$，$e_y * l = l \circ \chi$ はすべて道ホモトピックである．

(3) 0 を基点とする $\mathbb{I}$ 上の閉道 ϕ, ψ を

$$\phi(t) = 0, \qquad \psi(t) = \begin{cases} 2t & (0 \leq t \leq 1/2) \\ 1 - 2t & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定めると，命題 3.10 より ϕ と ψ は道ホモトピックだから，命題 3.8 より $e_x = l \circ \phi$ と $l^- * l = l \circ \psi$ は道ホモトピックである．また，いま示した $e_x \simeq l^- * l$ において x, y, l をそれぞれ y, x, l^- で置き換えれば，$e_y \simeq l * l^-$ を得る． □

命題 3.14 X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．x_0, x_1, $x_2 \in X$ とし，l を x_0 から x_1 への道，m を x_1 から x_2 への道とする．

(1) $f \circ e_x = e_{f(x)}$.
(2) $f \circ (m * l) = (f \circ m) * (f \circ l)$.
(3) $f \circ l^- = (f \circ l)^-$.

証明 明らかである． □

3.4 基本亜群と基本群

X を位相空間とする．点 x, $y \in X$ に対して，x から y への道全体の集合 $\Omega(X; x, y)$ を「道ホモトピックである」という同値関係 $\simeq$ で割って得られる商集合 $\Omega(X; x, y)/{\simeq}$ を考える．命題 3.12 より，道ホモトピー類 $\alpha = [l] \in \Omega(X; x, y)/{\simeq}$ と $\beta = [m] \in \Omega(X; y, z)/{\simeq}$（$x$, y, $z \in X$）に対して，

$$\beta\alpha = [m * l] \in \Omega(X; x, z)/{\simeq}$$

および

$$\alpha^{-1} = [l^-] \in \Omega(X; y, x)/{\simeq}$$

が代表元 l, m のとり方によらずに定まる．さらに，命題 3.13 より，道ホモトピー類 $\alpha \in \Omega(X; x, y)/{\simeq}$，$\beta \in \Omega(X; y, z)/{\simeq}$，$\gamma \in \Omega(X; z, w)/{\simeq}$（$x$, y, z, $w \in X$）に対して

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha, \qquad \alpha\epsilon_x = \epsilon_y\alpha = \alpha, \qquad \alpha^{-1}\alpha = \epsilon_x, \qquad \alpha\alpha^{-1} = \epsilon_y$$

である．よって，X の点を対象とし，$\mathit{\Omega}(X;x,y)/\simeq$ の元を x から y への射とし，$x \in X$ に対して ϵ_x を x の恒等射とし，上記の演算 $(\alpha,\beta) \mapsto \beta\alpha$ を射の合成とすることで，亜群が定まる．上記の演算 $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ は，この亜群における逆射を与える．

定義 3.15（基本亜群） 上記の亜群を，位相空間 X の**基本亜群**（fundamental groupoid）といい，$\mathit{\Pi}(X)$ と書く．点 $x,\, y \in X$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathit{\Pi}(X)}(x,y) = \mathit{\Omega}(X;x,y)/\simeq$ を $\mathit{\Pi}(X;x,y)$ と書く．

明らかに，基本亜群 $\mathit{\Pi}(X)$ が連結であるための必要十分条件は，X が弧状連結であることである．

定義 3.16（基本群） (X,x_0) を点付き空間とする．基本亜群 $\mathit{\Pi}(X)$ における x_0 の自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\mathit{\Pi}(X)}(x_0)$ を，(X,x_0) の**基本群**（fundamental group）といい，$\pi_1(X,x_0)$ と書く．

注意 3.17 X が弧状連結ならば，$\mathit{\Pi}(X)$ の対象はすべて同型であり，したがって，$\pi_1(X,x_0)$ は基点 x_0 のとり方によらず群として同型である（ただし，異なる基点に対する基本群の間に自然に群同型写像が定まるわけではない）．そこで，X が弧状連結であり，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ の群としての同型類にのみ興味がある場合には，$\pi_1(X,x_0)$ を単に $\pi_1(X)$ とも書く．

次に，$f\colon X \to Y$ を位相空間の間の連続写像とする．命題 3.8 より，道ホモトピー類 $\alpha = [l] \in \mathit{\Pi}(X;x,y)$（$x,\, y \in X$）に対して，

$$\mathit{\Pi}(f)(\alpha) = [f \circ l] \in \mathit{\Pi}(Y; f(x), f(y))$$

が代表元 l のとり方によらずに定まる．さらに，命題 3.14 より，道ホモトピー類 $\alpha \in \mathit{\Pi}(X;x,y)$，$\beta \in \mathit{\Pi}(X;y,z)$（$x,\, y,\, z \in X$）に対して，

$$\mathit{\Pi}(f)(\epsilon_x) = \epsilon_{f(x)}, \qquad \mathit{\Pi}(f)(\beta\alpha) = \mathit{\Pi}(f)(\beta)\mathit{\Pi}(f)(\alpha)$$

である．よって，対象の対応を $f\colon X \to Y$ とし，射の対応を上記の写像 $\mathit{\Pi}(f)\colon \mathit{\Pi}(X;x,y) \to \mathit{\Pi}(Y;f(x),f(y))$ とすることで，$\mathit{\Pi}(X)$ から $\mathit{\Pi}(Y)$ への関手が定まる．

定義 3.18（連続写像が誘導する基本亜群の間の関手） $X,\, Y$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．上記の $\mathit{\Pi}(X)$ から $\mathit{\Pi}(Y)$ への関手を，f **が誘導する基本亜群の間の関手**といい，$\mathit{\Pi}(f)$ あるいは単に f_* と書く．

定義 3.19（連続写像が誘導する基本群の間の群準同型） $(X,x_0),\, (Y,y_0)$ を点付き空間とし，$f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ を点付き連続写像とする．群準同型 $\mathit{\Pi}(f)\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ を，f **が誘導する基本群の間の群準同型**といい，$\pi_1(f,x_0)$ あるいは単に f_* と書く．

$\mathit{\Pi}$ は位相空間の圏 **Top** から亜群の圏 **Grpoid** への関手となり，したがって，π_1 は点付き空間の圏 $\mathbf{Top}^*$ から群の圏 **Grp** への関手となる．

命題 3.20 $X,\, Y$ を位相空間とし，$f,\, g\colon X \to Y$ を連続写像とする．$\sigma\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ が f から g へのホモトピーならば，各点 $x \in X$ に対して $[\sigma_x] = [\sigma(x,-)] \in \mathit{\Pi}(Y;f(x),g(x))$ を与える族 $([\sigma_x])_{x \in X}$ は，関手 $\mathit{\Pi}(f)$ から $\mathit{\Pi}(g)$ への自然同型である．

証明 σ が f から g へのホモトピーであるとする．任意の道ホモトピー類 $\alpha = [l] \in \mathit{\Pi}(X;x,y)$（$x,\, y \in X$）に対して

$$[\sigma_y]\mathit{\Pi}(f)(\alpha) = \mathit{\Pi}(g)(\alpha)[\sigma_x],$$

すなわち

$$\sigma_y * (f \circ l) \simeq (g \circ l) * \sigma_x$$

を示せばよい．$\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 上の道 ϕ_0, ϕ_1, ψ_0, ψ_1 を

$$\phi_0(t) = (t, 0), \qquad \phi_1(t) = (t, 1), \qquad \psi_0(t) = (0, t), \qquad \psi_1(t) = (1, t)$$

と定めると，$\psi_1 * \phi_0$ と $\phi_1 * \psi_0$ は $(0,0)$ から $(1,1)$ への道であり，これらは道ホモトピックである（命題 3.10）．よって，命題 3.14 と命題 3.8 より

$$\begin{aligned}
\sigma_y * (f \circ l) &= (\sigma \circ (l \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ \psi_1) * (\sigma \circ (l \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ \phi_0) \\
&= \sigma \circ (l \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ (\psi_1 * \phi_0) \\
&\simeq \sigma \circ (l \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ (\phi_1 * \psi_0) \\
&= (\sigma \circ (l \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ \phi_1) * (\sigma \circ (l \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ \psi_0) \\
&= (g \circ l) * \sigma_x
\end{aligned}$$

である． □

系 3.21 X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．f がホモトピー同値写像ならば，$\mathit{\Pi}(f)\colon \mathit{\Pi}(X) \to \mathit{\Pi}(Y)$ は圏同値であり，任意の点 $x_0 \in X$ に対して，$\pi_1(f, x_0)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ は群同型である．

証明 f がホモトピー同値写像であるとして，そのホモトピー逆 $g\colon Y \to X$ をとる．命題 3.20 より，$\mathit{\Pi}(g) \circ \mathit{\Pi}(f)$ は恒等関手 $\mathrm{Id}_{\mathit{\Pi}(X)}$ に自然同型であり，$\mathit{\Pi}(f) \circ \mathit{\Pi}(g)$ は恒等関手 $\mathrm{Id}_{\mathit{\Pi}(Y)}$ に自然同型である．よって，$\mathit{\Pi}(f)$ は $\mathit{\Pi}(g)$ を準逆にもつ圏同値である．さらに，圏同値は忠実充満だから，任意の点 $x_0 \in X$ に対して $\pi_1(f, x_0)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ は全単射であり，したがって群同型である． □

3.5 単連結空間

定義 3.22（単連結空間） 位相空間 X は，弧状連結であり，その基本群 $\pi_1(X)$ が自明であるとき，**単連結**（simply connected）であるという．

例 3.23 命題 3.10 より，$\mathbb{R}^n$（$n \in \mathbb{N}$）の空でない凸集合は単連結である．

4 基本亜群の被覆空間への作用

4.1 持ち上げ

定義 4.1（持ち上げ） (E, p) を位相空間 B 上の空間とし，A を位相空間，$f\colon A \to B$ を連続写像とする．

(1) 連続写像 $\widetilde{f}\colon A \to E$ であって $p \circ \widetilde{f} = f$ を満たすものを，f の (E, p)（あるいは単に E）への**持ち上げ**（lift）という．

(2) (B, b_0) が点付き空間, $((E, x_0), p)$ が (B, b_0) 上の点付き空間, (A, a_0) が点付き空間であり, $f\colon (A, a_0) \to (B, b_0)$ が点付き連続写像であるとする．このとき，点付き連続写像 $\widetilde{f}\colon (A, a_0) \to (E, x_0)$ であって $p \circ \widetilde{f} = f$ を満たすものを，f の $((E, x_0), p)$（あるいは単に (E, x_0)）への**点付き持ち上げ**（pointed lift）という．

命題 4.2 (E,p) を位相空間 B 上の被覆空間とし，A を位相空間，$f\colon A\to B$ を連続写像とする．連続写像 $\widetilde{f}, \widetilde{f}'\colon A\to E$ がともに f の持ち上げならば，$A_0=\{x\in A\mid \widetilde{f}(x)=\widetilde{f}'(x)\}$ は A において開かつ閉である．

証明 $\widetilde{f}, \widetilde{f}'\colon A\to E$ がともに f の持ち上げであるとする．(E,p) に対する B の自明化開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ をとると，$(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ は A の開被覆だから，A_0 が A において開かつ閉であることを示すためには，各 $i\in I$ に対して $A_0\cap f^{-1}(U_i)$ が $f^{-1}(U_i)$ において開かつ閉であることを示せばよい．したがって，(E,p) が自明な被覆空間である場合に主張を示せばよい．

$(E,p)=(B\times F,\mathrm{pr}_B)$（$F$ は離散空間）とする．このとき，連続写像 $\phi,\phi'\colon A\to F$ が存在して $\widetilde{f}=(f,\phi)$, $\widetilde{f}'=(f,\phi')$ と書けて，

$$A_0=\{x\in A\mid \phi(x)=\phi'(x)\}$$

となる．F は離散だから，A_0 は A において開かつ閉である． □

系 4.3（持ち上げの一意性） $((E,x_0),p)$ を点付き空間 (B,b_0) 上の点付き被覆空間とし，(A,a_0) を点付き連結空間とする．点付き連続写像 $f\colon (A,a_0)\to(B,b_0)$ に対して，その (E,x_0) への点付き持ち上げは，たかだか一意である．

証明 $\widetilde{f}, \widetilde{f}'\colon (A,a_0)\to(E,x_0)$ がともに f の点付き持ち上げならば，命題 4.2 より $A_0=\{x\in A\mid \widetilde{f}(x)=\widetilde{f}'(x)\}$ は A において開かつ閉であり，また $a_0\in A_0$ より A_0 は空でない．よって，A の連結性より $A_0=A$，すなわち $\widetilde{f}=\widetilde{f}'$ である． □

4.2 被覆空間のホモトピー拡張性質

補題 4.4 (E,p) を位相空間 B 上の自明化可能な空間とし, A を位相空間とする．$F\colon A\times\mathbb{I}\to B$ と $\widetilde{f}\colon A\to E$ を連続写像とし，$\widetilde{f}$ は $F(-,0)$ の持ち上げであるとする．このとき，F の持ち上げ $\widetilde{F}\colon A\times\mathbb{I}\to E$ であって，$\widetilde{F}(-,0)=\widetilde{f}$ を満たすものが存在する．

証明 (E,p) は位相空間 F をファイバーとする自明な B 上の空間 $(B\times F,\mathrm{pr}_B)$ であるとしてよい．連続写像 $\widetilde{F}\colon A\times\mathbb{I}\to B\times F$ を

$$\widetilde{F}(a,t)=(F(a,t),\mathrm{pr}_F(\widetilde{f}(a)))\qquad((a,t)\in A\times\mathbb{I})$$

と定めれば，$\widetilde{F}$ は F の持ち上げであって $\widetilde{F}(-,0)=\widetilde{f}$ を満たす． □

定理 4.5（被覆空間のホモトピー拡張性質） (E,p) を位相空間 B 上の被覆空間とし，A を位相空間とする．$F\colon A\times\mathbb{I}\to B$ と $\widetilde{f}\colon A\to E$ を連続写像とし，$\widetilde{f}$ は $F(-,0)$ の持ち上げであるとする．このとき，F の持ち上げ $\widetilde{F}\colon A\times\mathbb{I}\to E$ であって $\widetilde{F}(-,0)=\widetilde{f}$ を満たすものが一意に存在する．

証明 F の持ち上げ $\widetilde{F}\colon A\times\mathbb{I}\to E$ が $\widetilde{F}(-,0)=\widetilde{f}$ を満たすとすると，任意の点 $a\in A$ に対して，$\widetilde{F}(a,-)$ は $F(a,-)$ の持ち上げであって $\widetilde{F}(a,0)=\widetilde{f}(a)$ を満たす．よって，持ち上げの一意性（系 4.3）より，条件を満たす $\widetilde{F}$ はたかだか一意である．

まず，任意の点 $a\in A$ に対してその開近傍 U_a が存在して，$F|_{U_a\times\mathbb{I}}$ の持ち上げ $\widetilde{F}_a\colon U_a\times\mathbb{I}\to E$ であって $\widetilde{F}_a(-,0)=\widetilde{f}|_{U_a}$ を満たすものが存在することを示す．Lebesgue の被覆補題より，正の整数 n と (E,p) に対する B の自明化開集合 $V_{a,0}$, …, $V_{a,n-1}$ が存在して，各 i に対して $F(\{a\}\times[i/n,(i+1)/n])\subseteq V_{a,i}$ となる．さらに，Tube Lemma より，a の開近傍 U_a が存在して，各 i に対して $F(U_a\times[i/n,(i+1)/n])\subseteq V_{a,i}$ とな

る．以下，$0 \le i < n$ に関して再帰的に，$F|_{U_a \times [i/n,(i+1)/n]}$ の持ち上げ $\widetilde{F}_{a,i}\colon U_a \times [i/n,(i+1)/n] \to E$ であって

$$\widetilde{F}_{a,0}(-,0) = \widetilde{f}, \qquad \widetilde{F}_{a,i}\left(-,\frac{i}{n}\right) = \widetilde{F}_{a,i-1}\left(-,\frac{i}{n}\right) \qquad (1 \le i < n) \tag{$*$}$$

を満たすものを構成する．$0 \le i < n$ とし，$\widetilde{F}_{a,i-1}$ までは構成できたとする．すると，$\widetilde{F}_{a,i-1}(-,i/n)\colon U_a \to E$（$i = 0$ の場合は $\widetilde{f}$．以下同様）は $F(-,i/n)\colon U_a \to B$ の持ち上げであり，$F(U_a \times [i/n,(i+1)/n])$ は (E,p) に対する自明化開集合 $V_{a,i}$ に含まれる．したがって，補題 4.4 より，$F|_{U_a \times [i/n,(i+1)/n]}$ の持ち上げ $\widetilde{F}_{a,i}\colon U_a \times [i/n,(i+1)/n] \to E$ であって $\widetilde{F}_{a,i}(-,i/n) = \widetilde{F}_{a,i-1}(-,i/n)$ を満たすものが存在する．これで，再帰が完成した．($*$) より，$\widetilde{F}_{a,0}, \ldots, \widetilde{F}_{a,n-1}$ は貼り合って連続写像 $\widetilde{F}_a\colon U_a \times \mathbb{I} \to E$ を定め，これは条件を満たす．

次に，F の持ち上げ $\widetilde{F}\colon A \times \mathbb{I} \to E$ であって $\widetilde{F}(-,0) = \widetilde{f}$ を満たすものが存在することを示す．2 点 a, $a' \in A$ を任意にとる．前段で存在を示した $\widetilde{F}_a$ と $\widetilde{F}_{a'}$ について，これらの $(U_a \cap U_{a'}) \times \mathbb{I}$ への制限は，ともに $F|_{(U_a \cap U_{a'}) \times \mathbb{I}}$ の持ち上げであって $(U_a \cap U_{a'}) \times \{0\}$ 上では $\widetilde{f}$ に等しい．したがって，すでに示した一意性より，$\widetilde{F}_a$ と $\widetilde{F}_{a'}$ は定義域の交叉 $(U_a \cap U_{a'}) \times \mathbb{I}$ 上で一致する．よって，$(\widetilde{F}_a)_{a \in A}$ は貼り合って連続写像 $\widetilde{F}\colon A \times \mathbb{I} \to E$ を定め，これは条件を満たす．これで，主張が示された． □

注意 4.6　位相空間 B とその上の被覆空間 (E,p) に対して，定理 4.5 は，次のように書き直せる．

> 位相空間 A と連続写像 $F\colon A \times \mathbb{I} \to B$ と $\widetilde{f}\colon A \to E$ について，図式
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \times \mathbb{I} \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$
>
> が可換ならば（ただし，写像 $\iota_0\colon A \to A \times \mathbb{I}$ を $\iota_0(x) = (x,0)$ で定める），連続写像 $\widetilde{F}\colon A \times \mathbb{I} \to E$ であって図式
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \times \mathbb{I} \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "\widetilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$
>
> を可換にするものが一意に存在する．

よって，空間対 (X,X') がある位相空間 A に対する空間対 $(A \times \mathbb{I}, A \times \{0\})$ と同相ならば[*2]，上記の主張において「$\iota_0\colon A \to A \times \mathbb{I}$」を「包含写像 $X' \to X$」で置き換えたものも成立する．

4.3　基本亜群の被覆空間への作用

補題 4.7　$J = (\mathbb{I} \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times \mathbb{I})$ と置くと，空間対 $(\mathbb{I} \times \mathbb{I}, J)$ は，空間対 $(\mathbb{I} \times \mathbb{I}, \mathbb{I} \times \{0\})$ に同相である． □

定理 4.8　(E,p) を位相空間 B 上の被覆空間とする．

[*2] 位相空間 X とその部分空間 X' の組 (X,X') を，**空間対**（pair of spaces）という．空間対 (X,X') と (Y,Y') が**同相**であるとは，同相写像 $f\colon X \to Y$ であって $f(X') = Y'$ であるものが存在することをいう．

(1) 道ホモトピー類 $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$（$b,\ b' \in B$）と点 $x \in E_b$ に対して，点 $x' \in E_{b'}$ と道ホモトピー類 $\widetilde{\alpha} \in \mathit{\Pi}(E; x, x')$ であって $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ を満たすものが，一意に存在する．

(2) 道ホモトピー類 $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$（$b,\ b' \in B$）と点 $x \in E_b$ に対して，$\alpha \cdot x$ を (1) で定まる点 $x' \in E_{b'}$ と定義すると，写像 $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ は，基本亜群 $\mathit{\Pi}(B)$ の (E, p) への作用を与える．

証明 (1) $\alpha = [l]$ とすると，x を始点とする l の持ち上げ $\widetilde{l}$ が存在する（定理 4.5）．$x' = \widetilde{l}(1) \in E_{b'}$，$\widetilde{\alpha} = [\widetilde{l}] \in \mathit{\Pi}(E; x, x')$ と置けば，$p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ である．

条件を満たす組の一意性を示す．そのためには，$l,\ l' \in \mathit{\Omega}(B; b, b')$ が道ホモトピックであり，$\widetilde{l},\ \widetilde{l'}$ をそれぞれ x を始点とする $l,\ l'$ の持ち上げとして，$\widetilde{l}$ と $\widetilde{l'}$ の終点が一致し $\widetilde{l}$ と $\widetilde{l'}$ が道ホモトピックであることをいえばよい．l から l' への道ホモトピー $\sigma\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ をとる．$J = (\mathbb{I} \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times \mathbb{I})$ と置き，連続写像 $\widetilde{\sigma}_0\colon J \to E$ を

$$\widetilde{\sigma}_0(-, 0) = \widetilde{l}, \qquad \widetilde{\sigma}_0(-, 1) = \widetilde{l'}, \qquad \widetilde{\sigma}_0(0, -) = e_x$$

によって定めると，図式

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_0"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{I} \times \mathbb{I} \arrow[r, "\sigma"'] & B \end{tikzcd}$$

（$J \to \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ は包含写像）は可換である．よって，被覆空間のホモトピー拡張性質（定理 4.5）と注意 4.6 および補題 4.7 より，連続写像 $\widetilde{\sigma}\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to E$ であって図式

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_0"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{I} \times \mathbb{I} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[ur, "\widetilde{\sigma}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する．この $\widetilde{\sigma}$ は $\widetilde{\sigma}_0$ の拡張だから，

$$\widetilde{\sigma}(-, 0) = \widetilde{l}, \qquad \widetilde{\sigma}(-, 1) = \widetilde{l'}, \qquad \widetilde{\sigma}(0, -) = e_x$$

である．また，$p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$ と $\sigma(1, -) = e_{b'}$ より $\widetilde{\sigma}(1, -)$ は $\mathbb{I}$ から $E_{b'}$ への連続写像だが，$E_{b'}$ は離散だから，その値は一定である．よって，$\widetilde{l}(1) = \widetilde{l'}(1)$ であり，$\widetilde{\sigma}$ は $\widetilde{l}$ から $\widetilde{l'}$ への道ホモトピーである．

(2) まず，$b \in B$，$x \in E_b$ とすると，$\epsilon_x \in \mathit{\Pi}(E; x, x)$ は $p_*(\epsilon_x) = \epsilon_b$ を満たすから，$\epsilon_b \cdot x = x$ である．次に，$b,\ b',\ b'' \in B$，$\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$，$\beta \in \mathit{\Pi}(B; b', b'')$ とし，$x \in E_b$ とする．点 $x' \in E_{b'}$ と $\widetilde{\alpha} \in \mathit{\Pi}(E; x, x')$ を $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ となるようにとり，点 $x'' \in E_{b''}$ と $\widetilde{\beta} \in \mathit{\Pi}(E; x', x'')$ を $p_*(\widetilde{\beta}) = \beta$ となるようにとると，$\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha} \in \mathit{\Pi}(E; x, x'')$ は $p_*(\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}) = p_*(\widetilde{\beta})p_*(\widetilde{\alpha}) = \beta\alpha$ を満たすから，

$$\beta\alpha \cdot x = x'' = \beta \cdot x' = \beta \cdot (\alpha \cdot x)$$

である．よって，写像 $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ は，基本亜群 $\mathit{\Pi}(B)$ の (E, p) への作用を与える． □

定義 4.9（位相が定める基本亜群の作用） (E, p) を位相空間 B 上の被覆空間とする．定理 4.8 によって定まる基本亜群 $\mathit{\Pi}(B)$ の (E, p) への作用を，E **の位相が定める基本亜群の作用**という．

以下，位相空間 B 上の被覆空間 (E, p) は，常に E の位相が定める基本亜群の作用によって $\mathit{\Pi}(B)$-集合とみなす．また，各点 $b_0 \in B$ に対して，E_{b_0} を基本亜群の作用から定まる群作用によって $\pi_1(B, b_0)$-集合とみなす．

命題 4.10　(E, p) を位相空間 B 上の被覆空間とし，$b, b' \in B$，$x \in E_b$，$x' \in E_{b'}$ とする．

(1) 写像 $p_*\colon \mathit{\Pi}(E; x, x') \to \mathit{\Pi}(B; b, b')$ は単射であり，その像は，$\alpha \cdot x = x'$ を満たす $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$ の全体に等しい．

(2) ある $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$ が存在して $\alpha \cdot x = x'$ となるための必要十分条件は，x と x' が E の同じ弧状連結成分に属することである．

証明　(1)　基本亜群の被覆空間への作用の定義から明らかである．

(2)　(1) より，ある $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$ が存在して $\alpha \cdot x = x'$ となることは，$\mathit{\Pi}(E; x, x') \neq \emptyset$，すなわち x と x' が E の同じ弧状連結成分に属することと同値である．　□

系 4.11　$((E, x_0), p)$ を点付き空間 (B, b_0) 上の点付き被覆空間とする．

(1) 群準同型 $p_*\colon \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ は単射であり，その像は，$\pi_1(B, b_0)$-集合 E_{b_0} の点 x_0 の固定部分群に等しい．

(2) 2 点 x, $x' \in E_{b_0}$ が $\pi_1(B, b_0)$ の作用によって移り合うための必要十分条件は，x と x' が E の同じ弧状連結成分に属することである．

証明　命題 4.10 の特別な場合である．　□

命題 4.12　B を弧状連結空間とし，(E, p) を B 上の被覆空間とする．点 $b_0 \in B$ を固定する．

(1) E が弧状連結であるための必要十分条件は，$\pi_1(B, b_0)$ の E_{b_0} への作用が推移的であることである．

(2) E が単連結であるための必要十分条件は，$\pi_1(B, b_0)$ の E_{b_0} への作用が自由かつ推移的であることである．

証明　(1)　<u>必要性</u>　E が弧状連結であるとする．すると，$E \neq \emptyset$ と E のファイバーがすべて同相であること（系 1.9）より $E_{b_0} \neq \emptyset$ であり，E_{b_0} の任意の 2 点は $\pi_1(B, b_0)$ の作用によって移り合う（系 4.11 (2)）．よって，$\pi_1(B, b_0)$ の E_{b_0} への作用は推移的である．

<u>十分性</u>　$\pi_1(B, b_0)$ の E_{b_0} への作用が推移的であるとする．すると，$E_{b_0} \neq \emptyset$ だから 1 点 $x_0 \in E_{b_0}$ を固定できる．点 $x \in E$ を任意にとる．B は弧状連結だから $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; p(x), b_0)$ が存在し（このとき $\alpha \cdot x \in E_{b_0}$ である），さらに仮定より $\beta \in \pi_1(B, b_0)$ であって $\beta \cdot (\alpha \cdot x) = x_0$ となるものが存在する．したがって，x と x_0 は E の同じ弧状連結成分に属する（命題 4.10 (2)）．任意の点 $x \in E$ に対してこのことがいえるから，E は弧状連結である．

(2)　系 4.11 (1) より，基本群 $\pi_1(E, x_0)$（$x_0 \in E_{b_0}$）が自明であるための必要十分条件は，$\pi_1(B, b_0)$ の E_{b_0} への作用が自由であることである．このことと (1) から，主張を得る．　□

4.4　基本亜群の被覆空間への作用に関する同変写像

命題 4.13　(E, p), (E', p') を位相空間 B 上の被覆空間とし，$f\colon E \to E'$ を B 上の写像とする．次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，B が局所弧状連結ならば，これらの 2 条件は同値である．

(a) f は B 上の連続写像である．

(b) f は $\mathit{\Pi}(B)$-集合 (E, p) から (E', p') への $\mathit{\Pi}(B)$-同変写像である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 道ホモトピー類 $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$（$b$, $b' \in B$）ち点 $x \in E_b$ を任意にとり，点 $x' \in E_{b'}$ と $\widetilde{\alpha} \in \mathit{\Pi}(E; x, x')$ を $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ となるようにとる．f が連続ならば，$f_*(\widetilde{\alpha}) \in \mathit{\Pi}(E'; f(x), f(x'))$ が定まり，これは $p'_*(f_*(\widetilde{\alpha})) = p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ を満たすから，

$$\alpha \cdot f(x) = f(x') = f(\alpha \cdot x)$$

である．よって，f は $\mathit{\Pi}(B)$-同変である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)（B が局所弧状連結である場合） B は局所弧状連結だから，(E, p) と (E', p') の両方に対する B の自明化開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ であって各 U_i が弧状連結であるものがとれる．f が $\mathit{\Pi}(B)$-同変ならば，各 $i \in I$ に対して f の制限 $f_{U_i} \colon E|_{U_i} \to E'|_{U_i}$ は $\mathit{\Pi}(U_i)$-同変である．また，$(E|_{U_i})_{i \in I}$ は E の開被覆だから，f が連続であることと，すべての $i \in I$ に対して f_{U_i} が連続であることとは同値である．したがって，B が弧状連結かつ (E, p), (E', p') が自明な被覆空間である場合に主張を示せばよい．

$(E, p) = (B \times F, \mathrm{pr}_B)$，$(E', p') = (B \times F', \mathrm{pr}_B)$（$F$, F' は離散空間）とする．このとき，点 b, $b' \in B$ と $\alpha \in \mathit{\Pi}(B; b, b')$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (b, x) &= (b', x) \qquad (x \in F), \\ \alpha \cdot (b, x') &= (b', x') \qquad (x' \in F') \end{aligned}$$

だから，f が $\mathit{\Pi}(B)$-同変ならば，写像 $\phi \colon F \to F'$ が存在して $f = \mathrm{id}_B \times \phi$ と書ける．このとき，f は明らかに連続である．これで，主張が示された． □

4.5 持ち上げの存在判定法

定理 4.14（持ち上げの存在判定法） $((E, x_0), p)$ を点付き空間 (B, b_0) 上の点付き普遍被覆空間とし，(A, a_0) を弧状連結かつ局所弧状連結な点付き空間とする．点付き連続写像 $f \colon (A, a_0) \to (B, b_0)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) f の (E, x_0) への点付き持ち上げが存在する．
(b) $f_*(\pi_1(A, a_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, x_0))$ である．

さらに，これらの条件の下で，f の (E, x_0) への点付き持ち上げは一意である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\widetilde{f} \colon (A, a_0) \to (E, x_0)$ を f の点付き持ち上げとすると，

$$f_*(\pi_1(A, a_0)) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(A, a_0))) \subseteq p_*(\pi_1(E, x_0))$$

が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $f_*(\pi_1(A, a_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, x_0))$ であるとする．A は連結だから，持ち上げの一意性（系 4.3）より，f の (E, x_0) への点付き持ち上げはたかだか一意である．

以下，f の (E, x_0) への点付き持ち上げ $\widetilde{f} \colon (A, a_0) \to (E, x_0)$ を構成する．A は弧状連結だから，$a \in A$ に対して $\mathit{\Pi}(A; a_0, a)$ は空でない．さらに，α, $\beta \in \mathit{\Pi}(A; a_0, a)$ とすると

$$f_*(\beta)^{-1} f_*(\alpha) = f_*(\beta^{-1}\alpha) \in f_*(\pi_1(A, a_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, x_0))$$

だから，系 4.11 (1) より $f_*(\beta)^{-1} f_*(\alpha) \cdot x_0 = x_0$，すなわち $f_*(\alpha) \cdot x_0 = f_*(\beta) \cdot x_0$ である．よって，写像 $\widetilde{f} \colon A \to E$ を

$$\widetilde{f}(a) = f_*(\alpha) \cdot x_0 \qquad (a \in A,\ \alpha \in \mathit{\Pi}(A; a_0, a))$$

と定義できる．この写像は，明らかに $\widetilde{f}(a_0) = x_0$ および $p \circ \widetilde{f} = f$ を満たす．あとは，$\widetilde{f}$ の連続性を示せばよい．

点 $a_1 \in A$ を任意にとり，$\alpha \in \mathit{\Pi}(A; a_0, a_1)$ を 1 つ固定する．$f(a_1)$ を含む E に対する自明化開集合 U をとる．A は局所弧状連結だから，これに対して a_1 の弧状連結な開近傍 V を $f(V) \subseteq U$ となるようにとれる．任意の点 $a \in V$ に対して $\beta \in \mathit{\Pi}(V; a_1, a)$ がとれ，$\widetilde{f}(a)$ は

$$\widetilde{f}(a) = f_*(\beta\alpha) \cdot x_0 = f_*(\beta) \cdot (f_*(\alpha) \cdot x_0) = f_*(\beta) \cdot \widetilde{f}(a_1)$$

と表されるから，基本亜群の被覆空間への作用の定義より，$\widetilde{f}(a)$ は $\widetilde{f}(a_1)$ と同じ $E|_U$ の弧状連結成分に属する．よって，自明化写像 $\phi\colon E|_U \to U \times F$（$F$ は離散空間）をとり，$\phi(a_1)$ の F-成分を y_1 と置くと，任意の $a \in V$ に対して

$$\phi(\widetilde{f}(a)) = (f(a), y_1)$$

である．よって，$\widetilde{f}$ は a_1 の開近傍 V 上で連続である．任意の $a_1 \in A$ に対してこれがいえるから，$\widetilde{f}$ は連続である．これで，主張が示された． □

系 4.15 (B, b_0) を点付き空間，$((E, x_0), p)$ を (B, b_0) 上の点付き被覆空間とし，(A, a_0) を単連結かつ局所弧状連結な点付き空間とする．任意の点付き連続写像 $f\colon (A, a_0) \to (B, b_0)$ に対して，f の (E, x_0) への点付き持ち上げが一意に存在する．

証明 このとき基本群 $\pi_1(A, a_0)$ は自明だから，$f_*(\pi_1(A, a_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, x_0))$ は常に成り立つ．よって，定理 4.14 から主張が従う． □

系 4.16 B は位相空間，U は B の弧状連結かつ局所弧状連結な部分集合であり，任意の点 $b \in U$ に対して包含写像が誘導する群準同型 $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ の像は自明であるとする．このとき，B 上の任意の被覆空間 (E, p) に対して，$(E|_U, p_U)$ は（U 上の被覆空間として）自明化可能である．特に，B が単連結かつ局所弧状連結ならば，B 上の被覆空間はすべて自明化可能である．

証明 $E|_U$ の連続切断全体の集合 $\mathit{\Gamma}(E|_U) = \{s\colon U \to E|_U \mid s \text{ は連続写像，} p_U \circ s = \mathrm{id}_U\}$ に離散位相を入れると，写像

$$\phi\colon U \times \mathit{\Gamma}(E|_U) \to E|_U, \quad (b, s) \mapsto s(b)$$

が U 上の同相写像であることを示す．ϕ は U 上の連続写像であり，したがって開写像である（命題 1.10）．さらに，仮定と持ち上げの存在判定法（定理 4.14）より，任意の点 $x \in E|_U$ に対して $s \in \mathit{\Gamma}(E|_U)$ であって $s(p(x)) = x$ を満たすものが一意に存在するから，ϕ は全単射である．よって，ϕ は U 上の同相写像である． □

4.6 普遍被覆空間

定義 4.17（普遍被覆空間） B を弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とする[*3]．B 上の被覆空間 (E, p) であって E が単連結であるものを，B 上の**普遍被覆空間**（universal covering space）という．さらに，(B, b_0) が点付き空間であって $((E, x_0), p)$ が (B, b_0) 上の点付き被覆空間ならば，$((E, x_0), p)$ を (B, b_0) 上の**点付き普遍被覆空間**（pointed universal covering space）という．

[*3] B に弧状連結性と局所弧状連結性を課しているのは，命題 4.18 が成立するようにするためである．

命題 4.18　弧状連結かつ局所弧状連結な点付き空間 (B, b_0) 上の点付き普遍被覆空間は, 存在すれば $\mathbf{Cov}^*_{(B,b_0)}$ の始対象である．特に，(B, b_0) 上の点付き普遍被覆空間は，B 上の点付き同相を除いてたかだか一意である．

証明　$((E, x_0), p)$ を (B, b_0) 上の点付き普遍被覆空間とする．B は局所弧状連結だから，E も局所弧状連結である．示すべきことは，(B, b_0) 上の任意の点付き被覆空間 $((E', x'_0), p')$ に対して，B 上の点付き連続写像 $f\colon (E, x_0) \to (E', x'_0)$ が一意に存在することである．これは，系 4.15 の特別な場合である．　□

系 4.19　弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 B 上の普遍被覆空間は，B 上の同相を除いてたかだか一意である．

証明　(E, p) と (E', p') がともに B 上の普遍被覆空間であるとする．1 点 $b_0 \in B$ を固定する．E と E' は空でなく，それぞれファイバーはすべて同相だから（系 1.9），E_{b_0} と E'_{b_0} は空でない．そこで，点 $x_0 \in E_{b_0}$ と $x'_0 \in E'_{b_0}$ を固定すると，$((E, x_0), p)$ と $((E', x'_0), p')$ はともに (B, b_0) 上の点付き普遍被覆空間だから，命題 4.18 よりこれらは B 上点付き同相である．特に，(E, p) と (E', p') は B 上同相である．　□

5　被覆変換群

5.1　正規被覆空間

位相空間 B 上の空間 (E, p) に対して，E の B 上の自己同相写像全体のなす群を，$\mathrm{Aut}_B(E, p)$ と書く．(E, p) が B 上の被覆空間である場合には，E の B 上の自己同相写像を**被覆変換**（covering transformation）といい，$\mathrm{Aut}_B(E, p)$ を (E, p) の**被覆変換群**（convering transformation group）という．

定義 5.1（正規被覆空間）　連結空間 B 上の被覆空間 (E, p) が**正規**（normal）[*4] であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(i) E は連結である．
(ii) 任意の点 $b \in B$ に対して，被覆変換群 $\mathrm{Aut}_B(E, p)$ はファイバー E_b に推移的に作用する．

命題 5.2　(E, p) を連結空間 B 上の正規被覆空間とする．同じファイバーに属する 2 点 $x_0, x_1 \in E$ に対して，被覆変換 $\phi \in \mathrm{Aut}_B(E, p)$ であって x_0 を x_1 に移すものが，一意に存在する．

証明　存在は正規被覆空間の定義から，一意性は E の連結性と持ち上げの一意性（系 4.3）から従う．　□

命題 5.3　$((E, x_0), p)$ を点付き連結空間 (B, b_0) 上の被覆空間とする．B が弧状連結ならば，次の 2 条件 (a), (b) は同値である．さらに，B が弧状連結かつ局所弧状連結ならば，次の 3 条件は同値である．

(a) (E, p) は正規である．
(b) E は連結であり，被覆変換群 $\mathrm{Aut}_B(E, p)$ はファイバー E_{b_0} に推移的に作用する．
(c) E は連結であり，$p_*(\pi_1(E, x_0))$ は $\pi_1(B, b_0)$ の正規部分群である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

*4 「正規」の代わりに，「正則（regular）」や「Galois」ということもある．

(b) $\Longrightarrow$ (a)（B が弧状連結である場合） B は弧状連結だから，任意の点 $b \in B$ に対して，b_0 から b へのある道の道ホモトピー類 α がとれる．α の作用はファイバー E_{b_0} から E_b への全単射を定め，この全単射は被覆変換群 $\mathrm{Aut}_B(E,p)$ の作用に関して同変である（命題 4.13）．よって，$\mathrm{Aut}_B(E,p)$ が E_{b_0} に推移的に作用するならば，E_b にも推移的に作用する．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)（B が弧状連結かつ局所弧状連結である場合） $\alpha \in \pi_1(B,b_0)$ に対して，$\widetilde{\alpha} \in \mathit{\Pi}(E;x_0,\alpha \cdot x_0)$ であって $p_*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$ を満たすものをとると（定理 4.8），$\pi_1(E,\alpha \cdot x_0) = \widetilde{\alpha}\pi_1(E,x_0)\widetilde{\alpha}^{-1}$ であり，したがって，$p_*(\pi_1(E,\alpha \cdot x_0)) = \alpha p_*(\pi_1(E,x_0))\alpha^{-1}$ である．また，E は（連結かつ局所弧状連結であることより）弧状連結だから，α が $\pi_1(B,b_0)$ の元全体を動くとき，$\alpha \cdot x_0$ は E_{b_0} の点全体を動く（系 4.11 (2)）．以上より，x が E_{b_0} の点全体を動くとき，$p_*(\pi_1(E,x))$ は $p_*(\pi_1(E,x_0))$ に共役な $\pi_1(B,b_0)$ の部分群の全体を動く．

持ち上げの存在判定法（定理 4.14）より，点 x_0 を $x \in E_{b_0}$ に移す被覆変換が存在するための必要十分条件は，$p_*(\pi_1(E,x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E,x))$ であることである．前段の結果より，任意の点 $x \in E_{b_0}$ に対してこれが成り立つことは，$p_*(\pi_1(E,x_0))$ が $\pi_1(B,b_0)$ の正規部分群であることと同値である．これで，主張が示された． □

系 5.4 弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 B の基本群 $\pi_1(B)$ が可換ならば，B 上の任意の連結な被覆空間は正規である．

証明 基本群 $\pi_1(B)$ が可換ならば，そのすべての部分群は正規である．よって，主張は，命題 5.3 から従う． □

5.2 被覆変換群と底空間の基本群の関連

正規被覆空間の被覆変換群と底空間の基本群とは，次のように関連している．

定理 5.5 $((E,x_0),p)$ を弧状連結かつ局所弧状連結な点付き空間 (B,b_0) 上の正規被覆空間とする．各 $\alpha \in \pi_1(B,b_0)$ に対して，x_0 を $\alpha \cdot x_0$ に移す被覆変換 $\phi_{x_0,\alpha} \in \mathrm{Aut}_B(E,p)$（命題 5.2 より，これは一意に定まる）を対応させることで，写像 $\partial_{x_0} \colon \pi_1(B,b_0) \to \mathrm{Aut}_B(E,p)$ を定める．この写像 ∂_{x_0} は反対群準同型であり，群の短完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(E,x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,b_0) \xrightarrow{\partial_{x_0}} \mathrm{Aut}_B(E,p)^{\mathrm{op}} \longrightarrow 1$$

が成り立つ．特に，(E,p) が B 上の普遍被覆空間ならば，∂_{x_0} は基本群 $\pi_1(B,b_0)$ から被覆変換群 $\mathrm{Aut}_B(E,p)$ への反対群同型である．

証明 $\alpha,\ \beta \in \pi_1(B,b_0)$ とすると，ϕ_{α,x_0}, ϕ_{β,x_0} の定義と命題 4.13 より

$$\phi_{\alpha,x_0}(\phi_{\beta,x_0}(x_0)) = \phi_{\alpha,x_0}(\beta \cdot x_0) = \beta \cdot \phi_{\alpha,x_0}(x_0) = \beta\alpha \cdot x_0$$

だから，$\phi_{\alpha,x_0} \circ \phi_{\beta,x_0} = \phi_{\beta\alpha,x_0}$ である．よって，$\partial_{x_0} \colon \pi_1(B,b_0) \to \mathrm{Aut}_B(E,p)$ は反対群準同型である．

E は（連結かつ局所弧状連結であることより）弧状連結だから，α が $\pi_1(B,b_0)$ の元全体を動くとき，$\alpha \cdot x_0$ は E_{b_0} の点全体を動く．このことと (1) の一意性を合わせて，∂_{x_0} の全射性を得る．また，(1) の一意性と系 4.11 より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\partial_{x_0} &= \{\alpha \in \pi_1(B,b_0) \mid \alpha \cdot x_0 = x_0\} \\ &= p_*(\pi_1(E,x_0))\end{aligned}$$

である．よって，主張の短完全列が成り立つ． □

命題 1.15 で示したように，群が位相空間に被覆的に作用しているとき，もとの位相空間は軌道空間上の被覆空間となる．この被覆空間に，上記の結果を適用しよう．

命題 5.6　群 Γ が連結空間 X に被覆的に作用しているとし，軌道空間への等化写像を $p\colon X \to \Gamma\backslash X$ と書く．このとき，(X, p) は $\Gamma\backslash X$ 上の正規被覆空間であり，Γ の X への作用は，群同型 $\Gamma \cong \mathrm{Aut}_{\Gamma\backslash X}(X, p)$ を与える．

証明　$\Gamma\backslash X$ 上の被覆空間 (X, p) が正規であることは明らかである．また, 作用が定める Γ から $\mathrm{Aut}_{\Gamma\backslash X}(X, p)$ への群準同型は，作用が自由であることより単射で，持ち上げの一意性（系 4.3）より全射である． □

定理 5.7　群 Γ が弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 X に被覆的に作用しているとし，等化写像を $p\colon X \to \Gamma\backslash X$ と書く．点 $x_0 \in X$ を固定する．各 $\alpha \in \pi_1(\Gamma\backslash X, p(x_0))$ に対して, $g_{x_0,\alpha}\cdot x_0 = \alpha\cdot x_0$ を満たす $g_{x_0,\alpha} \in \Gamma$（命題 5.6 と命題 5.2 より，これは一意に定まる）を対応させることで，写像 $\partial_{x_0}\colon \pi_1(\Gamma\backslash X, p(x_0)) \to \Gamma$ を定める．この写像 ∂_{x_0} は反対群準同型であり，群の短完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\Gamma\backslash X, p(x_0)) \xrightarrow{\partial_{x_0}} \Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow 1$$

が成り立つ．特に，X が単連結ならば，∂_{x_0} は基本群 $\pi_1(\Gamma\backslash X, p(x_0))$ から Γ への反対群同型である．

証明　命題 5.6 と定理 5.5 から従う． □

6　被覆空間の分類

本節では，位相空間 B 上の被覆空間を対象とし，B 上の連続写像を射とする圏を，$\mathbf{Cov}_B$ と書く．点付き空間 (B, b_0) 上の点付き被覆空間を対象とし，B 上の点付き連続写像を射とする圏を，$\mathbf{Cov}^*_{(B,b_0)}$ と書く．また，2.3 節と同様に，群 G に対して，G-集合の圏を G-$\mathbf{Set}$ と書き，亜群 $\mathscr{G}$ に対して，$\mathscr{G}$-集合の圏を $\mathscr{G}$-$\mathbf{Set}$ と書く．

6.1　展覧空間

定義 6.1（許容開集合）　X を位相空間とする．X の局所弧状連結な開集合 $U \neq \emptyset$ であって[*5]，任意の 2 点 x, $y \in U$ に対して包含写像が誘導する写像 $\Pi(U; x, y) \to \Pi(X; x, y)$ の像が 1 元集合であるものを，X の**許容開集合**という．点 $x \in X$ を含む許容開集合を，x の**許容開近傍**という．[*6]

U が位相空間 X の許容開集合ならば，$U \neq \emptyset$ であり，任意の 2 点 x, $y \in U$ に対して $\Pi(U; x, y) \neq \emptyset$ だから，U は弧状連結である．

記法 6.2　本節の以下の部分では，位相空間 X とその許容開集合 U，点 x, $y \in U$ に対して，包含写像が誘導する写像 $\Pi(U; x, y) \to \Pi(X; x, y)$ の像の唯一の元を $\alpha^U_{y,x} \in \Pi(X; x, y)$ と書く．

[*5] 許容開集合の定義に局所弧状連結性を課しているのは，補題 6.6 (3) が成立するようにするためである．局所弧状連結性を課さなくても，命題 6.3，命題 6.5，補題 6.6 (1), (2) は成立し，展覧空間の定義（定義 6.4）に影響はない．

[*6] 「許容開集合」と「許容開近傍」は，本稿だけの用語である．

命題 6.3　X を位相空間，U を X の許容開集合とする．任意の点 x, y, $z \in U$ に対して

$$\alpha^U_{x,x} = \epsilon_x, \qquad \alpha^U_{z,y}\alpha^U_{y,x} = \alpha^U_{z,x}, \qquad (\alpha^U_{y,x})^{-1} = \alpha^U_{x,y}$$

である．さらに，$V \subseteq U$ も X の許容開集合であるとき，任意の点 x, $y \in V$ に対して

$$\alpha^V_{y,x} = \alpha^U_{y,x}$$

である．

証明　明らかである．□

定義 6.4（展覧空間）　許容開集合全体が開基をなすような位相空間を，**展覧空間**（espace délaçable）という[*7]．

明らかに，展覧空間は局所弧状連結である．

命題 6.5　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は展覧空間である．
(b) X は局所弧状連結であり，かつ，任意の点 $x \in X$ に対して，その開近傍 U であって，包含写像が誘導する群準同型 $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ の像が自明であるものが存在する[*8]．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が展覧空間であるとする．任意の点 $x \in X$ とその開近傍 U に対して，x の許容開近傍 $V \subseteq U$ がとれるが，V は弧状連結であり，包含写像が誘導する群準同型 $\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$ の像は自明である．よって，(b) が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．点 $x \in X$ とその開近傍 U を任意にとる．仮定より，x の開近傍 V であって包含写像が誘導する群準同型 $\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$ の像が自明であるものがとれ，さらに x の弧状連結な開近傍 $W \subseteq U \cap V$ がとれる．W は局所弧状連結であり，包含写像 $\iota\colon W \to X$ が誘導する群準同型 $\iota_*\colon \pi_1(W,x) \to \pi_1(X,x)$ の像は自明である．任意の 2 点 y, $z \in W$ に対して，$\iota_*(\mathit{\Pi}(W;y,z)) \subseteq \mathit{\Pi}(X;y,z)$ が 1 元集合であることを示す．W は弧状連結だから，$\beta \in \mathit{\Pi}(W;x,y)$ と $\gamma \in \mathit{\Pi}(W;x,z)$ がとれる．$\alpha \in \mathit{\Pi}(W;y,z)$ を任意にとる．すると，$\gamma^{-1}\alpha\beta \in \pi_1(W,x)$ だから $\iota_*(\gamma^{-1}\alpha\beta) = \epsilon_x$，すなわち $\iota_*(\alpha) = \iota_*(\gamma\beta^{-1})$ である．したがって，$\iota_*(\mathit{\Pi}(W;y,z))$ はただ 1 つの元 $\iota_*(\gamma\beta^{-1})$ からなる．よって，W は許容開集合である．以上より，X は展覧空間である．□

6.2　被覆空間と基本亜群が作用する集合との対応

補題 6.6　B を展覧空間，(E,p) を $\mathit{\Pi}(B)$-集合とし，U を B の許容開集合とする．

(1) $E|_U$ 上の関係

$$x \sim_U x' \iff \alpha^U_{p(x'),p(x)} \cdot x = x'$$

*7 フランス語の “espace délaçable” という用語は，Bourbaki [1, Ch. IV, §1.2, Def. 2] で用いられている．形容詞 délaçable は「〜の紐をほどく」という意味の動詞 délacer の派生語である．この条件が普遍被覆空間の存在と関連していることを踏まえて（系 6.13），円周の普遍被覆空間のイメージから付けられた名称だと思われる．Wikipedia [8] に “unloopable space” という英訳があるが，どのくらい普及しているのかはわからない．確定した和訳はないと思われるが，音の感じと普遍被覆空間のイメージから，本稿では「展覧空間」と訳してみた．

*8 条件 (b) の後半を満たす位相空間は，**半局所単連結**（semi-locally simply connected）であるという．

は，同値関係である．

(2) (1) の同値関係 $\sim_U$ による $E|_U$ の商集合を F_U と書くと，写像 $\phi_U\colon E|_U \to U \times F_U$, $x \mapsto (p(x), [x])$ は全単射である．

(3) さらに，(E, p) が B 上の被覆空間であり，$\mathit{\Pi}(B)$ の (E, p) への作用が E の位相が定めるものであるとする．このとき，F_U に離散位相を入れ $U \times F_U$ を U 上の自明な被覆空間とみなすと，(2) の写像 ϕ_U は U 上の同相写像である．

証明　(1)　命題 6.3 から従う．

(2)　点 $b \in U$ と同値類 $C \in F_U$ に対して，C の代表元 $x \in E|_U$ を 1 つ固定すると，$E_b \cap C$ はただ 1 つの元 $\alpha^U_{b,p(x)} \cdot x$ からなる．よって，ϕ_U は全単射である．

(3)　このとき，$x \sim_U x'$ であるための必要十分条件は，x と x' が $E|_U$ の同じ弧状連結成分に属することである（命題 4.10 (2)）．また，$E|_U$ は U 上の自明化可能な被覆空間である（系 4.16）．U は弧状連結だから，ϕ_U は U 上の同相写像である．　□

命題 6.7　B を展覧空間，(E, p) を $\mathit{\Pi}(B)$-集合とする．E 上の位相であって次の条件を満たすものが，一意に存在する．

> B の任意の許容開集合 U に対して，$E|_U$ は E の開集合であり，補題 6.6 の全単射 $\phi_U\colon E|_U \to U \times F_U$ は同相写像である．ここで，F_U は離散空間とみなしている．

さらに，この位相に関して，(E, p) は B 上の被覆空間となる．

証明　主張条件を満たす E 上の位相に関して (E, p) が B 上の被覆空間となることは明らかである．B の許容開集合 U に対して，$U \times F_U$ の位相を全単射 ϕ_U によって移して得られる $E|_U$ 上の位相を τ_U と書く．位相空間の一般論より，条件を満たす E 上の位相が一意に存在することを示すためには，次の 2 つを示せばよい．

(1) B の許容開集合 U, V に対して，$E|_{U\cap V}$ は位相 τ_U に関して開集合である．

(2) B の許容開集合 U, V に対して，τ_U と τ_V が誘導する $E|_{U\cap V}$ 上の相対位相は一致する．

以下，これらを示す．

(1)　$\phi_U(E|_{U\cap V}) = (U \cap V) \times F_U$ は $U \times F_U$ の開集合だから，$E|_{U\cap V}$ は位相 τ_U に関して開集合である．

(2)　X は展覧空間だから，X の許容開集合 $W \subseteq U \cap V$ の全体は $U \cap V$ を被覆し，したがって W に対する $E|_W$ の全体は $E|_{U\cap V}$ を被覆する．このような許容開集合 W を 1 つ固定する．任意の 2 点 x, $x' \in E|_W$ に対して

$$x \sim_W x' \iff \alpha^W_{p(x'),p(x)} \cdot x = x' \iff \alpha^U_{p(x'),p(x)} \cdot x = x' \iff x \sim_U x'$$

であり（命題 6.3），また補題 6.6 より任意の $x \in E|_U$ に対してある $x' \in E|_W$ が存在して $x \sim_U x'$ となるから，包含写像 $\widetilde{\iota}\colon E|_W \to E|_U$ は全単射 $f\colon F_W \to F_U$ を誘導する．これより図式

$$\begin{tikzcd} E|_W \arrow[r, "\widetilde{\iota}"] \arrow[d, "\phi_W"'] & E|_U \arrow[d, "\phi_U"] \\ W \times F_W \arrow[r, "\iota\times f"'] & U \times F_U \end{tikzcd} \qquad (\iota\colon W \to U \text{ は包含写像})$$

は可換であり，$\iota \times f$ は開埋め込みだから，$\widetilde{\iota}$ は位相 τ_W と τ_U に関して開埋め込みである．以上より，$S \subseteq E|_{U\cap V}$ が位相 τ_U に関して開集合であるための必要十分条件は，X の任意の許容開集合 $W \subseteq U \cap V$ に

対して $S\cap E|_W$ が位相 τ_W に関して開集合であることである．τ_V についても同じことがいえるから，τ_U と τ_V が誘導する $E|_{U\cap V}$ 上の相対位相は一致する． □

定義 6.8（基本亜群の作用が定める位相） B を展覧空間とし，(E,p) を $\Pi(B)$-集合とする．命題 6.7 によって定まる E 上の位相を，**基本亜群 $\Pi(B)$ の作用が定める位相**という．

定理 6.9（被覆空間と基本亜群が作用する集合との対応） B を展覧空間とし，E を集合，$p\colon E\to B$ を写像とする．定義 4.9 と定義 6.8 の対応は互いに他の逆であり，E 上の位相であって (E,p) を B 上の被覆空間にするものと，基本亜群 $\Pi(B)$ の (E,p) への作用との一対一対応を与える．

証明 まず，τ を E 上の位相であって (E,p) を B 上の被覆空間にするものとし，τ が定める基本亜群の作用を θ とし，θ が定める位相を τ' とする．τ' は命題 6.7 の条件によって特徴付けられる位相だが，補題 6.6 (3) より τ もこの条件をみたすから，$\tau'=\tau$ である．

次に，θ を基本亜群 $\Pi(B)$ の (E,p) への作用とし，θ が定める位相を τ とし，τ が定める基本亜群の作用を θ' とする．$\theta(\alpha)=\theta(\alpha,-)$，$\theta'(\alpha)=\theta'(\alpha,-)$ と書く．許容開集合 U と点 $b,\,b'\in U$ に対して，位相 τ は補題 6.6 の全単射 $\phi_U\colon E|_U\to U\times F_U$ が同相写像になるように定義されているから，

$$\theta'(\alpha^U_{b',b})=\theta(\alpha^U_{b',b}) \tag{$*$}$$

である．点 $b,\,b'\in B$ と $\alpha=[l]\in\Pi(B;b,b')$ を任意にとる．B が展覧空間であることと Lebesgue の被覆補題より，正の整数 n と許容開集合の列 $U_0,\,\dots,\,U_{n-1}$ を，各 i に対して $l([i/n,(i+1)/n])\subseteq U_i$ となるようにとれる．各 i に対して $b_i=l(i/n)$ と置くと

$$\alpha=\alpha^{U_{n-1}}_{b_n,b_{n-1}}\cdots\alpha^{U_0}_{b_1,b_0}$$

だから，($*$) より

$$\theta'(\alpha)=\theta'(\alpha^{U_{n-1}}_{b_n,b_{n-1}})\cdots\theta'(\alpha^{U_0}_{b_1,b_0})=\theta(\alpha^{U_{n-1}}_{b_n,b_{n-1}})\cdots\theta(\alpha^{U_0}_{b_1,b_0})=\theta(\alpha)$$

である．よって，$\theta'=\theta$ である． □

定理 6.9 と命題 4.13 より，圏同型 $\mathbf{Cov}_B\cong\Pi(B)\text{-}\mathbf{Set}$ が成立する．

6.3 被覆空間と基本群が作用する集合との対応

2.3 節で，$\mathscr{G}$ を亜群，$b_0\in\mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ として $G=\mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(b_0)$ と置くとき，関手 $\mathbf{F}_{b_0}\colon\mathscr{G}\text{-}\mathbf{Set}\to G\text{-}\mathbf{Set}$ と $\mathbf{E}_{b_0}\colon G\text{-}\mathbf{Set}\to\mathscr{G}\text{-}\mathbf{Set}$ を構成した．(B,b_0) を点付き展覧空間として $\mathscr{G}=\Pi(B)$，$G=\pi_1(B,b_0)$ とするとき，前小節で述べたように圏同型 $\mathbf{Cov}_B\cong\Pi(B)\text{-}\mathbf{Set}$ が成立するから，これらは関手

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{b_0}\colon\mathbf{Cov}_B\to G\text{-}\mathbf{Set}, &&\mathbf{F}_{b_0}((E,p))=E_{b_0}, &&\mathbf{F}_{b_0}(f)=f_{b_0},\\
&\mathbf{E}_{b_0}\colon G\text{-}\mathbf{Set}\to\mathbf{Cov}_B, &&\mathbf{E}_{b_0}(X)=P\times^{\pi_1(B,b_0)}X, &&\mathbf{E}_{b_0}(f)=\mathrm{id}_P\times^{\pi_1(B,b_0)}f
\end{aligned}$$

ともみなせる．ここで，P は b_0 を始点とする B 上の道の道ホモトピー類全体の集合である．

定理 6.10（被覆空間と基本群が作用する集合との対応） (B,b_0) を点付き展覧空間とする．

(1) $\pi_1(B,b_0)$-集合 X に対して，写像

$$\begin{aligned} \phi_X &\colon (P \times^{\pi_1(B,b_0)} X)_{b_0} \to X, \quad [(\alpha, x)] \mapsto \alpha \cdot x, \\ \phi'_X &\colon X \to (P \times^{\pi_1(B,b_0)} X)_{b_0}, \quad x \mapsto [(\mathrm{id}_{b_0}, x)] \end{aligned}$$

は矛盾なく定まり，これらは互いに他の逆を与える $\pi_1(B,b_0)$-同型である．さらに，$\pi_1(B,b_0)$-集合 X, Y の間の $\pi_1(B,b_0)$-同変写像 $f\colon X \to Y$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} (P \times^{\pi_1(B,b_0)} X)_{b_0} \arrow[r, "(\mathrm{id}_P \times^{\pi_1(B,b_0)} f)_{b_0}"] \arrow[d, "\phi_X"'] & (P \times^{\pi_1(B,b_0)} Y)_{b_0} \arrow[d, "\phi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

である．

(2) B が弧状連結であるとして，各点 $b \in B$ に対して道ホモトピー類 $\alpha_b \in \Pi(B; b_0, b)$ を 1 つずつ固定する．このとき，B 上の被覆空間 (E,p) に対して，写像

$$\begin{aligned} \psi_{(E,p)} &\colon P \times^{\pi_1(B,b_0)} E_{b_0} \to E, \quad [(\alpha, x)] \mapsto \alpha \cdot x, \\ \psi'_{(E,p)} &\colon E \to P \times^{\pi_1(B,b_0)} E_{b_0}, \quad x \mapsto [(\alpha_{p(x)}, \alpha_{p(x)}^{-1} \cdot x)] \end{aligned}$$

は矛盾なく定まり（$\psi'_{(E,p)}$ は $(\alpha_b)_{b\in B}$ のとり方によらない），これらは互いに他の逆を与える B 上の同相写像である．さらに，B 上の被覆空間 (E,p), (E',p') の間の B 上の連続写像 $f\colon E \to E'$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} P \times^{\pi_1(B,b_0)} E_{b_0} \arrow[r, "\mathrm{id}_P \times^{\pi_1(B,b_0)} f_{b_0}"] \arrow[d, "\psi_{(E,p)}"'] & P \times^{\pi_1(B,b_0)} E'_{b_0} \arrow[d, "\psi_{(E',p')}"] \\ E \arrow[r, "f"'] & E' \end{tikzcd}$$

は可換である．

証明　被覆空間と基本亜群が作用する集合との対応（定理 6.9）と命題 4.13，亜群が作用する集合と群が作用する集合との対応（定理 2.5）から従う． □

よって，B が弧状連結ならば，定理 2.5 (1), (2) の同型はそれぞれ自然同型 $\mathbf{F}_{b_0} \circ \mathbf{E}_{b_0} \cong \mathrm{Id}_{\pi_1(B,b_0)\text{-}\mathbf{Set}}$, $\mathbf{E}_{b_0} \circ \mathbf{F}_{b_0} \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Cov}_B}$ を与え，$\mathbf{F}_{b_0}$ と $\mathbf{E}_{b_0}$ は互いに他の準逆を与える圏同値関手であり，圏同値 $\mathbf{Cov}_B \simeq \pi_1(B,b_0)\text{-}\mathbf{Set}$ が成立する．

系 6.11（被覆空間の分類）　(B,b_0) を弧状連結な点付き展覧空間とする．

(1) 任意の $\pi_1(B,b_0)$-集合に対して，B 上の被覆空間 (E,p) であって E_{b_0} がそれに $\pi_1(B,b_0)$-同型であるものが，B 上の同相を除いて一意に存在する．

(2) (E,p), (E',p') を B 上の被覆空間とする．任意の $\pi_1(B,b_0)$-同変写像 $g\colon E_{b_0} \to E'_{b_0}$ に対して，B 上の連続写像 $f\colon E \to E'$ であって $f_{b_0} = g$ を満たすものが，一意に存在する．

証明　被覆空間と基本群が作用する集合との対応（定理 6.10）より関手 $\mathbf{F}_{b_0}$ は圏同値だから，主張は圏の一般論から従う． □

系 6.12（点付き被覆空間の分類） (B, b_0) を弧状連結な点付き展覧空間とする．

(1) 任意の点付き $\pi_1(B, b_0)$-集合に対して，(B, b_0) 上の点付き被覆空間 $((E, x_0), p)$ であって (E_{b_0}, x_0) がそれに点付き $\pi_1(B, b_0)$-同型であるものが，B 上の点付き同相を除いて一意に存在する．

(2) $((E, x_0), p)$, $((E', x'_0), p')$ を (B, b_0) 上の点付き被覆空間とする．任意の点付き $\pi_1(B, b_0)$-同変写像 $g\colon (E_{b_0}, x_0) \to (E'_{b_0}, x'_0)$ に対して，B 上の点付き連続写像 $f\colon (E, x_0) \to (E', x'_0)$ であって $f_{b_0} = g$ を満たすものが，一意に存在する．

証明 (2) と (1) の一意性は系 6.11 (2) から，(1) の存在は系 6.11 (1) から従う． □

系 6.13（普遍被覆空間の存在と一意性） 弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 B に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) B は展覧空間である．

(b) B 上の普遍被覆空間が存在する．

さらに，これらの条件の下で，B 上の普遍被覆空間は，B 上の同相を除いて一意である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) B が展覧空間であるとする．1 点 $b_0 \in B$ を固定して，被覆空間と基本群が作用する集合との対応（定理 6.10）によって自由かつ推移的な $\pi_1(B, b_0)$-集合（たとえば，$\pi_1(B, b_0)$ 自身に $\pi_1(B, b_0)$ を左からの群演算によって作用させればよい）に対応する B 上の被覆空間は，普遍被覆空間である（命題 4.12 (2)）．

(b) $\Longrightarrow$ (a) (E, p) が B 上の普遍被覆空間であるとする．B は局所弧状連結だから，(E, p) に対する弧状連結な自明化開集合 U の全体は B の開基をなすが，このような U が許容開集合であることを示す．B は局所弧状連結だから，U も局所弧状連結である．l, l' は U に含まれる道であり，始点と終点を共有するとする．$E|_U$ は自明化可能だから，l, l' それぞれの持ち上げ $\widetilde{l}, \widetilde{l'}$ を始点と終点を共有するようにとれる．E は単連結だから $\mathit{\Pi}(E)$ において $[\widetilde{l}] = [\widetilde{l'}]$ であり，したがって $\mathit{\Pi}(B)$ において $[l] = p_*([\widetilde{l}]) = p_*([\widetilde{l'}]) = [l']$ である．よって，U は許容開集合である．

最後の主張 系 4.19 ですでに示した． □

6.4 基本群の部分群による弧状連結な被覆空間の分類

群 G の部分群 H と H' が**共役**（conjugate）であるとは，ある $g \in G$ が存在して $gHg^{-1} = H'$ となることをいう．この関係は，G の部分群全体のなす集合上の同値関係である．この同値関係に関する同値類を，**共役類**（conjugacy class）という．

補題 6.14 G を群とし，(X, x_0), (Y, y_0) を推移的な点付き G-集合とする．

(1) X と Y が G-同型であるための必要十分条件は，X における x_0 の固定部分群と y_0 の固定部分群とが共役であることである．

(2) (X, x_0) と (Y, y_0) が点付き G-同型であるための必要十分条件は，x_0 の固定部分群と y_0 の固定部分群とが一致することである．

証明 (2) 必要性は明らかである．x_0 の固定部分群を H と置くと，写像 $gH \mapsto g \cdot x_0$ は点付き G-集合 $(G/H, eH)$ から (X, x_0) への点付き G-同型だから，十分性も成り立つ．

(1)　X と Y が G-同型であることは，ある点 $x \in X$ が存在して (X, x) と (Y, y_0) が点付き G-同型であることと同値である．X は推移的だから，これはまた，ある $g \in G$ が存在して $(X, g \cdot x_0)$ と (Y, y_0) が点付き G-同型であることと同値である．また，x_0 の固定部分群を H と置くと，$g \cdot x_0$ の固定部分群は gHg^{-1} である．よって，主張は (2) から従う．□

定理 6.15（基本群の部分群による弧状連結な被覆空間の分類）　(B, b_0) を弧状連結な点付き展覧空間とする．

(1) (E, p) を B 上の弧状連結な[*9] 被覆空間とする．$\pi_1(B, b_0)$ の部分群 $p_*(\pi_1(E, x_0))$ の共役類は，点 $x_0 \in E_{b_0}$ のとり方によらない．
(2) $\pi_1(B, b_0)$ の任意の部分群の共役類 C に対して，B 上の弧状連結な被覆空間 (E, p) であって $\pi_1(B, b_0)$ の部分群 $p_*(\pi_1(E, x_0))$（$x_0 \in E_{b_0}$）の共役類が C であるものが，B 上の同相を除いて一意に存在する．

定理 6.16（基本群の部分群による弧状連結な点付き被覆空間の分類）　(B, b_0) を弧状連結な点付き展覧空間とする．$\pi_1(B, b_0)$ の任意の部分群 H に対して，(B, b_0) 上の弧状連結な点付き被覆空間 $((E, x_0), p)$ であって $p_*(\pi_1(E, x_0)) = H$ を満たすものが，B 上の点付き同相を除いて一意に存在する．

定理 6.15 と定理 6.16 の証明　B 上の被覆空間 (E, p) が連結であるための必要十分条件は，$\pi_1(B, b_0)$-集合 E_{b_0} が推移的であることである（命題 4.12 (1)）．また，点 $x_0 \in E_{b_0}$ に対して，$p_*(\pi_1(E, x_0))$ は $\pi_1(B, b_0)$-集合 E_{b_0} の点 x_0 の固定部分群である（系 4.11 (1)）．よって，定理 6.15 は被覆空間の分類（系 6.11）と補題 6.14 (1) から，定理 6.16 は点付き被覆空間の分類（系 6.12）と補題 6.14 (2) から従う．□

7　位相群の基本群と被覆空間

7.1　Hopf 空間

定義 7.1（Hopf 空間）　点付き空間 (X, e) 上の **Hopf 構造**とは，点付き連続写像 $\mu \colon (X \times X, (e, e)) \to (X, e)$ であって，図式

$$\begin{tikzcd}
(X, e) \arrow[r, "{(-,e)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & (X \times X, (e, e)) \arrow[d, "\mu"] & (X, e) \arrow[l, "{(e,-)}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"] \\
& (X, e) &
\end{tikzcd}$$

を点付きホモトピー可換（注意 3.2 を参照のこと）にするものをいう．点付き空間とその上の Hopf 構造との組 $((X, e), \mu)$ を，**Hopf 空間**[*10] という．

例 7.2　G を位相群とし，その単位元を $e \in G$，演算を $\mu \colon G \times G \to G$ と書くと，$((G, e), \mu)$ は Hopf 空間である．

定理 7.3　$((X, e), \mu)$ を Hopf 空間とする．e を基点とする X 上の閉道 l, m に対して，e を基点とする X 上の四つの閉道 $m * l$, $l * m$, $\mu \circ (l, m)$, $\mu \circ (m, l)$ は道ホモトピックである．

[*9] いま B は展覧空間であり，特に局所弧状連結だから，B 上の被覆空間も局所弧状連結である．したがって，B 上の被覆空間が連結であることと弧状連結であることとは同値である．

[*10] 「Hopf 空間」の代わりに，「H 空間（H-space）」ということもある．

証明　$\mathbb{I}\times\mathbb{I}$ 上の $(0,0)$ から $(1,1)$ への道 ϕ, ψ, χ を

$$\phi(t)=\begin{cases}(2t,0) & (0\leq t\leq 1/2)\\ (1,2t-1) & (1/2\leq t\leq 1),\end{cases}\qquad \psi(t)=\begin{cases}(0,2t) & (0\leq t\leq 1/2)\\ (2t-1,1) & (1/2\leq t\leq 1),\end{cases}\qquad \chi(t)=(t,t)$$

と定め，連続写像 $F\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I}\to X$ を

$$F(s,t)=\mu(l(s),m(t))$$

と定める．Hopf 空間の定義と命題 3.9，命題 3.12 (1) より

$$F\circ\phi=\mu(e,m(-))*\mu(l(-),e)\simeq m*l,$$
$$F\circ\psi=\mu(e,l(-))*\mu(m(-),e)\simeq l*m$$

であり，また

$$F\circ\chi=\mu\circ(l,m)$$

である．$\mathbb{I}\times\mathbb{I}$ 上の道 ϕ, ψ, χ は道ホモトピックだから（命題 3.10），X 上の閉道 $m*l$, $l*m$, $\mu\circ(l,m)$ も道ホモトピックである（命題 3.8）．l と m を入れ替えれば，これらが $\mu\circ(m,l)$ とも道ホモトピックであることもわかる．　□

系 7.4　Hopf 空間 $((X,e),\mu)$ の基本群 $\pi_1(X,e)$ は可換である．特に，位相群 G の基本群 $\pi_1(G,e)$（$e\in G$ は単位元を表す）は可換である．　□

7.2　被覆位相群

定義 7.5（被覆位相群）　位相群 G 上の**被覆位相群**（covering topological group）とは，位相群 $\widetilde{G}$ と連続群準同型 $p\colon \widetilde{G}\to G$ の組 $(\widetilde{G},p)$ であって，G 上の被覆空間であるものをいう．

例 7.6　$\widetilde{G}$ を Hausdorff 位相群，$\mathit{\Gamma}$ をその離散正規部分群（例 1.17 で見たように，自動的に閉となる）とし，等化準同型を $p\colon \widetilde{G}\to\widetilde{G}/\mathit{\Gamma}$ と書くと，$(\widetilde{G}/\mathit{\Gamma},p)$ は $\widetilde{G}/\mathit{\Gamma}$ 上の被覆位相群となる（例 1.17）．

なお，逆に，$(\widetilde{G},p)$ を位相群 G 上の被覆位相群とし，p が全射である（系 1.8 より，G が連結ならば，この仮定は満たされる）とすると，$\operatorname{Ker}p$ は $\widetilde{G}$ の閉離散正規部分群であり，G は位相群として $\widetilde{G}/\operatorname{Ker}p$ と同一視できる．

定理 7.7　G を弧状連結かつ局所弧状連結な位相群とし，その単位元を $e\in G$，演算を $\mu\colon G\times G\to G$，逆元をとる操作を $\iota\colon G\to G$ と書く．$((\widetilde{G},\widetilde{e}),p)$ を (G,e) 上の弧状連結な点付き被覆空間とする．

(1) 点付き連続写像 $\widetilde{\mu}\colon (\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e}))\to(\widetilde{G},\widetilde{e})$ であって図式

$$\begin{array}{ccc}(\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e})) & \xrightarrow{\widetilde{\mu}} & (\widetilde{G},\widetilde{e})\\ {\scriptstyle p\times p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p}\\ (G\times G,(e,e)) & \xrightarrow{\mu} & (G,e)\end{array}$$

を可換にするものが，一意に存在する．

(2) 点付き連続写像 $\widetilde{\iota}\colon (\widetilde{G},\widetilde{e}) \to (\widetilde{G},\widetilde{e})$ であって図式

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{G},\widetilde{e}) \arrow[r, "\widetilde{\iota}"] \arrow[d, "p"'] & (\widetilde{G},\widetilde{e}) \arrow[d, "p"] \\
(G,e) \arrow[r, "\iota"] & (G,e)
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが，一意に存在する．

(3) (1) の $\widetilde{\mu}$ は，$\widetilde{G}$ の位相と整合する群構造を定める．この群構造に関して，単位元は $\widetilde{e}$，逆元をとる操作は $\widetilde{\iota}$ であり，射影 $p\colon \widetilde{G} \to G$ は群準同型となる（したがって，$(\widetilde{G},p)$ は G 上の被覆位相群となる）．

証明 G が局所弧状連結であることより，その上の被覆空間 $\widetilde{G}$ も局所弧状連結であることに注意する（以下の議論で，持ち上げの存在判定法（定理 4.14）を使うときに必要な条件である）．

(1) $(\widetilde{e},\widetilde{e})$ を基点とする $\widetilde{G}\times\widetilde{G}$ 上の閉道 l を任意にとる．l を成分ごとに分解して $l=(l_1,l_2)$ と書くと，l_1, l_2 はそれぞれ $\widetilde{G}$ 上の $\widetilde{e}$ を基点とする閉道であり，定理 7.3 と命題 3.14 より

$$\begin{aligned}
\mu\circ(p\times p)\circ l &= \mu\circ(p\circ l_1, p\circ l_2)\\
&\simeq (p\circ l_2)*(p\circ l_1)\\
&= p\circ(l_2 * l_1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$(\mu\circ(p\times p))_*(\pi_1(\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e})))\subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}))$ だから，持ち上げの存在判定法（定理 4.14）より，主張の条件を満たす $\widetilde{\mu}$ が一意に存在する．

(2) $\widetilde{e}$ を基点とする $\widetilde{G}$ 上の閉道 l を任意にとる．命題 3.14 より

$$(\iota\circ p\circ l)*(p\circ l)\simeq \mu\circ(\iota\circ p\circ l, p\circ l) = e_e$$

(e_e は，常に単位元 e に値をとる G 上の道を表す）だから，$(\iota\circ p)_*([l])p_*([l]) = \epsilon_x$ であり，したがって $(\iota\circ p)_*([l]) = p_*([l])^{-1} = p_*([l^-])$ である．よって，$(\iota\circ p)_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}))\subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}))$ だから，持ち上げの存在判定法（定理 4.14）より，主張の条件を満たす $\widetilde{\iota}$ が一意に存在する．

(3) $\widetilde{G}\times\widetilde{G}\times\widetilde{G}$ から $\widetilde{G}$ への連続写像 $(x,y,z)\mapsto\widetilde{\mu}(\widetilde{\mu}(x,y),z)$ と $(x,y,z)\mapsto\widetilde{\mu}(x,\widetilde{\mu}(y,z))$ は，ともに $(\widetilde{e},\widetilde{e},\widetilde{e})$ を $\widetilde{e}$ に移し，ともに $\widetilde{G}\times\widetilde{G}\times\widetilde{G}$ から G への連続写像 $(x,y,z)\mapsto\mu(\mu(p(x),p(y)),p(z)) = \mu(p(x),\mu(p(y),p(z)))$ の持ち上げである．$\widetilde{G}$ は連結だから，持ち上げの一意性（系 4.3）より，これら二つの写像は一致する．すなわち，演算 $\widetilde{\mu}$ は結合律を満たす．

$\widetilde{G}$ から $\widetilde{G}$ への連続写像 $\mathrm{id}_{\widetilde{G}}$, $\widetilde{\mu}(\widetilde{e},-)$, $\widetilde{\mu}(-,\widetilde{e})$ は，いずれも $\widetilde{e}$ を $\widetilde{e}$ に移し，いずれも連続写像 $p\colon\widetilde{G}\to G$ の持ち上げである．$\widetilde{G}$ は連結だから，持ち上げの一意性（系 4.3）より，これら三つの写像は一致する．すなわち，$\widetilde{e}$ は演算 $\widetilde{\mu}$ に関する単位元である．

$\widetilde{G}$ から $\widetilde{G}$ への連続写像 $x\mapsto\widetilde{e}$, $x\mapsto\widetilde{\mu}(\widetilde{\iota}(x),x)$, $x\mapsto\widetilde{\mu}(x,\widetilde{\iota}(x))$ は，いずれも $\widetilde{e}$ を $\widetilde{e}$ に移し，いずれも $\widetilde{G}$ から G への定値写像 e の持ち上げである．$\widetilde{G}$ は連結だから，持ち上げの一意性（系 4.3）より，これら三つの写像は一致する．すなわち，$\widetilde{\iota}$ は演算 $\widetilde{\mu}$ に関する逆元をとる操作を与える．

$\widetilde{\mu}$ は，$\widetilde{G}$ 上の群構造を定め，この群構造に関して，単位元は $\widetilde{e}$，逆元をとる操作は $\widetilde{\iota}$ である．$\widetilde{\mu}$ と $\widetilde{\iota}$ は連続だから，この群構造は $\widetilde{G}$ の位相と整合する．(1) の可換図式より，この群構造に関して，射影 $p\colon\widetilde{G}\to G$ は群準同型となる． □

注意 7.8 G を弧状連結かつ局所弧状連結な位相群とし，$(\widetilde{G},p)$ をその上の弧状連結な被覆空間とする．$\widetilde{G}$ の位相と整合する群構造であって $(\widetilde{G},p)$ を G 上の被覆位相群にするものは，次の意味で「同型を除いて一意」である．

定理 7.7 より，単位元 $e \in G$ 上のファイバーの 1 点 $\widetilde{e} \in \widetilde{G}_e$ を固定すると，$\widetilde{G}$ の位相と整合する群構造 $\widetilde{\mu}$ であって，$\widetilde{e}$ を単位元とし，$(\widetilde{G}, p)$ を G 上の被覆位相群にするものが一意に存在する．別の点 $\widetilde{e}' \in \widetilde{G}_e$ に対しても同じように群構造 $\widetilde{\mu}'$ が定まるが，これは $\widetilde{\mu}$ とは異なるものになる．しかし，$(\widetilde{G}, p)$ は G 上の正規被覆空間だから（系 5.4），$\widetilde{e}$ を $\widetilde{e}'$ に移す被覆変換 $\phi \in \mathrm{Aut}_G(\widetilde{G}, p)$ が存在する．$\widetilde{\mu}$ を ϕ によって移して得られる $\widetilde{G}$ 上の群構造 $\phi^{-1} \circ \widetilde{\mu} \circ (\phi \times \phi)$ は，$\widetilde{\mu}'$ を特徴付けるものと同じ条件を満たすから，$\widetilde{\mu}'$ に等しい．すなわち，ϕ は二つの群構造 $\widetilde{\mu}$ と $\widetilde{\mu}'$ の間の同型を与え，G 上の位相群の同型となる．

系 7.9　弧状連結な展覧空間である位相群 G に対して，その普遍被覆位相群（普遍被覆空間である被覆位相群）が，G 上の位相群の同型を除いて一意に存在する．

証明　普遍被覆空間の存在と一意性（系 6.13），定理 7.7，注意 7.8 から従う．　□

命題 7.10　$(\widetilde{G}, p)$ を連結位相群 G 上の連結な被覆位相群とすると，G が可換であることと $\widetilde{G}$ が可換であることとは同値である．

証明　G が連結であることより，p は全射だから（系 1.8），G は $\widetilde{G}$ のある商群に群として同型である．よって，$\widetilde{G}$ が可換ならば，G も可換である．

$\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ から $\widetilde{G}$ への連続写像 $(x, y) \mapsto xy$ と $(x, y) \mapsto yx$ は，ともに $(\widetilde{e}, \widetilde{e})$ を $\widetilde{e}$ に移す．さらに，G が可換ならば，これらはともに $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ から G への連続写像 $(x, y) \mapsto p(x)p(y) = p(y)p(x)$ の持ち上げである．$\widetilde{G}$ は連結だから，このとき，持ち上げの一意性（系 4.3）より，これら二つの写像は一致する．よって，G が可換ならば，$\widetilde{G}$ も可換である．　□

命題 7.11　$(\widetilde{G}, p)$ を位相群 G 上の被覆位相群とし，$G, \widetilde{G}$ の単位元をそれぞれ $e, \widetilde{e}$ と書く．写像 $\partial\colon \pi_1(G, e) \to \widetilde{G}_e$ を，基本群のファイバーへの作用（4.3 節）を用いて $\partial(\alpha) = \alpha \cdot \widetilde{e}$ と定める．この写像 ∂ は群準同型であり，群の完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\widetilde{G}, \widetilde{e}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(G, e) \xrightarrow{\partial} \widetilde{G}_e$$

が成り立つ．さらに，$\widetilde{G}$ が弧状連結ならば，群の短完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\widetilde{G}, \widetilde{e}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(G, e) \xrightarrow{\partial} \widetilde{G}_e \longrightarrow 1$$

が成り立つ．特に，G が弧状連結かつ局所弧状連結で，$(\widetilde{G}, p)$ が G 上の普遍被覆位相群ならば，∂ は基本群 $\pi_1(G, e)$ から $\widetilde{G}_e$ への群同型である．

証明　$\alpha, \beta \in \pi_1(G, e)$ を任意にとり，e を基点とする G 上の閉道 m を用いて $\beta = [m]$ と書く．$\widetilde{e}$ を始点とする m の持ち上げ $\widetilde{m}$ をとると，その終点は $\beta \cdot \widetilde{e} = \partial(\beta)$ である．$\widetilde{G}$ 上の道 $t \mapsto \widetilde{m}(t)\partial(\alpha)$ は，$\partial(\alpha)$ を始点，$\partial(\beta)\partial(\alpha)$ を終点とする m の持ち上げだから，

$$\partial(\beta\alpha) = \beta \cdot \partial(\alpha) = \partial(\beta)\partial(\alpha)$$

が成り立つ．よって，∂ は群準同型である．

完全列に関する主張は，系 4.11 から従う．　□

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie algébrique: Chapitres 1 à 4*, Springer, 2016.

[2] T. tom Dieck, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, 2008.
[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
[4] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd edition, Springer, 2011.
[5] T. Wedhorn, *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*, Springer, 2016.
[6] flag3,「基本群と被覆空間の Galois 理論」, 2021 年 11 月 11 日修正版.（2022 年 9 月 23 日アクセス）
https://flag3.github.io
[7] J.Koizumi,「被覆空間の Galois 理論」.（2022 年 9 月 23 日アクセス）
https://asuka-math.amebaownd.com/posts/6005018
[8] Wikipedia 'Semi-locally simply connected'.（2022 年 9 月 23 日アクセス）
https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-locally_simply_connected