C* 代数

箱

2025 年 6 月 28 日

概要

代数や Banach 代数に関する一般論を述べたあと，C* 代数を定義し，Gelfand–Naimark の定理や連続関数算など，C* 代数の基礎を解説する．

目次

1 代数 2
- 1.1 代数 . . . 2
- 1.2 イデアル . . . 3
- 1.3 代数の単位化 . . . 4
- 1.4 代数の元のスペクトル . . . 5

2 Banach 代数 6
- 2.1 ノルム代数と Banach 代数 . . . 6
- 2.2 単位的 Banach 代数における逆元 . . . 9
- 2.3 Banach 代数のイデアル . . . 10
- 2.4 Banach 代数の元のスペクトル . . . 12
- 2.5 スペクトル半径 . . . 14
- 2.6 Gelfand スペクトルと Gelfand 変換 . . . 16
- 2.7 Gelfand 変換の例 . . . 19

3 C* 代数 21
- 3.1 対合代数 . . . 21
- 3.2 対合ノルム代数と対合 Banach 代数 . . . 23
- 3.3 C* 代数 . . . 25
- 3.4 Gelfand–Naimark の定理 . . . 28
- 3.5 連続関数算 . . . 31
- 3.6 正元 . . . 34
- 3.7 例：$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の正元 . . . 39
- 3.8 近似単位元 . . . 40
- 3.9 商 C* 代数 . . . 43

4 正値線型形式と対合表現 45
4.1 正値線型形式 45
4.2 対合表現 51
4.3 正値線型形式と対合表現 54
4.4 純粋な正値線型形式 56
4.5 正値線型形式の拡張 59
4.6 推移性定理 61
4.7 純粋状態と極大正則左イデアルとの対応 63

付録 A 対合 Banach 代数の包絡 C* 代数 68
A.1 対合 Banach 代数の包絡 C* 代数 68
A.2 包絡 C* 代数上の正値線型形式 68

記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．また，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$，$\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0]$，$\mathbb{U} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ と書く．
- 本稿を通して，特に断らなければ，線型空間などの係数体は $\mathbb{C}$ とする．
- 線型空間 E 上の恒等作用素を，1_E と書く．
- ノルム空間 E のノルムを，$\|-\|_E$ あるいは単に $\|-\|$ と書く．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の内積を，$\langle -|-\rangle_{\mathcal{H}}$ あるいは単に $\langle -|-\rangle$ と書く．Hilbert 空間の内積は，左の引数に関して共役線型，右の引数に関して線型とする．
- ノルム空間 E における単位閉球を，$\mathrm{Ball}(E)$ と書く．
- Hilbert 空間に関する記号と用語は，「Hilbert 空間」 [13] による．

1 代数

本節では，本稿で必要になる範囲で，代数とそれに関連する概念について述べる．本節の内容は，係数体を一般の可換体としても，まったく同様に成り立つ．

1.1 代数

本稿において，**代数**（algebra）とは，線型空間 A に乗法と呼ばれる結合的な双線型写像 $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$ が定まっているものを指す．単位性と可換性は仮定せず，これらを課すときは，そのことを明示する．単位的代数 A の単位元を，1_A あるいは単に 1 と書き，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda 1_A$ を単に λ と書く．単位的代数 A の可逆元全体のなす乗法群を，$A^\times$ と書く．

代数 A の部分線型空間 B について，B が A の乗法に関して閉じていれば，B は A の乗法の制限によって代数をなす．このとき，B を A の**部分代数**（subalgebra）という．さらに，A が単位的で B が A の単位元を含むとき，B は単位的代数をなす．このとき，B を A の**部分単位的代数**（unital subalgebra）という．

S を代数 A の部分集合とすると，S を含む A の最小の部分代数が存在する．これを，**S が生成する A の部**

分代数という．さらに，A が単位的ならば，S を含む A の最小の部分単位的代数が存在する．これを，**S が生成する A の部分単位的代数**という．

B が代数 A の部分代数であって単位的でも，B が A の部分単位的代数であるとは限らない．たとえば，$\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ は成分ごとの乗法によって単位的代数をなし，$\mathbb{C}\times 0$ はその部分代数であって $(1,0)$ を単位元にもつが，$\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の単位元 $(1,1)$ は $\mathbb{C}\times 0$ には含まれない．

代数 A から B への**準同型**（homomorphism）とは，線型写像 $\phi\colon A\to B$ であって，任意の $x,y\in A$ に対して $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$ を満たすものをいう．全単射な準同型を，**同型**（isomorphism）という．代数 A から B への同型が存在するとき，A と B は**同型**（isomorphic）であるという．さらに，A と B が単位的であるとき，準同型・同型 $\phi\colon A\to B$ であって $\phi(1_A)=1_B$ を満たすものを，それぞれ，A から B への**単位的準同型・単位的同型**という．単位的代数 A から B への単位的同型が存在するとき，A と B は**単位的同型**であるという．

1.2　イデアル

代数 A の**左イデアル**（left ideal）**・右イデアル**（right ideal）とは，それぞれ，A の部分線型空間 I であって $AI\subseteq I$，$IA\subseteq I$ を満たすものをいう．左イデアルでも右イデアルでもあるものを，**両側イデアル**（two-sided ideal）という．A が可換ならば，A の左・右・両側イデアルはいずれも同じものを指すから，これらを区別せず，単にイデアルという．

A の左・右・両側イデアルのうち，A 全体ではないものを，それぞれ**真左・右・両側イデアル**（proper left/right/two-sided ideal）という．A の真左・右・両側イデアルの中で（包含関係に関して）極大なものを，それぞれ**極大左・右・両側イデアル**（maximal left/right/two-sided ideal）という．

代数 A の左・右・両側イデアルは，A の部分代数でもある．単位的代数 A の左・右・両側イデアルが単位元 1_A を含めば，それは A 全体となるから，真左・右・両側イデアルは部分単位的代数ではない．

A を代数，I を A の両側イデアルとすると，A の乗法は A/I 上の双線型写像を誘導し，これによって A/I は代数をなす．このとき，A/I を A の I による**商代数**（quotient subalgebra）という．A が単位的ならば，商代数 A/I も単位的である．

定義 1.1（正則イデアル）　A を代数とする．

(1) A の左イデアル I が**正則**（regular）であるとは，ある $u\in A$ が存在して，任意の $a\in A$ に対して $a-ua\in I$ となることをいう．
(2) A の右イデアル I が**正則**（regular）であるとは，ある $u\in A$ が存在して，任意の $a\in A$ に対して $a-au\in I$ となることをいう．
(3) A の両側イデアル I が**正則**（regular）であるとは，ある $u\in A$ が存在して，任意の $a\in A$ に対して $a-ua,\ a-au\in I$ となる（あるいは同値だが，商代数 A/I が単位的である）ことをいう．

注意 1.2　A を代数とする．

(1) A が単位的ならば，A のすべての左・右・両側イデアルは正則である．
(2) A の左・右・両側イデアル I,J について，明らかに，$I\subseteq J$ かつ I が正則ならば J も正則である．したがって，A の正則左・右・両側イデアル I について，I が真正則左・右・両側イデアルの中で極大であることと，真左・右・両側イデアルの中で極大であることとは同値である．そこで，これらの条件を満たす I を極大正則左・右・両側イデアルといっても，曖昧さは生じない．

命題 1.3　A を可換代数，I を A のイデアルとする．商代数 A/I が体であるための必要十分条件は，I が A の極大正則イデアルであることである．

証明　A/I が体であるためには，A/I が 0 でなく，かつ単位的でなければならないから，I が真正則イデアルであることが必要である．以下，これを仮定する．一般に，単位的可換環 $R \neq 0$ が体であるための必要十分条件は，それが 0 と R 以外のイデアルをもたないことである．A/I のイデアルと A のイデアルであって I を含むものとは一対一に対応するから，A/I が体であるための必要十分条件は，I が極大であることである．これで，主張が示された．□

注意 1.4　非可換代数の極大正則両側イデアルによる商代数は，体とは限らない．たとえば，$n \geq 2$ 次正方行列全体のなす単位的非可換代数 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ は，0 を極大両側イデアルをもつが（0 以外の真両側イデアルをもたないことが容易に確かめられる），$\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})/0 = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ は体ではない．

定理 1.5（極大正則イデアルの存在定理）　代数 A の任意の真正則左・右・両側イデアル I に対して，I を含む A の極大正則左・右・両側イデアルが存在する．

証明　どれも証明は同様だから，両側イデアルについて示す．I を A の真正則両側イデアルとし，$u \in A$ であって任意の $a \in A$ に対して $a - ua$, $a - au \in I$ を満たすものをとる．I を含む両側イデアル J について，$u \in J$ ならば，任意の $a \in A$ に対して

$$a = ua + (a - ua) \in J$$

となる．すなわち，J が真両側イデアルであることは，$u \notin J$ であることと同値である．このことからわかるように，I を含む A の真正則両側イデアル全体が包含関係に関してなす順序集合は，帰納的である．そこで，この順序集合に Zorn の補題を適用すれば，I を含む A の極大正則両側イデアルが得られる．□

1.3　代数の単位化

定義 1.6（代数の単位化）　A を代数とする．線型空間として $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ とし，(x, λ), $(y, \mu) \in \widetilde{A}$ に対して

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$$

と定めると，容易に確かめられるように，$\widetilde{A}$ は $(0, 1)$ を単位元とする単位的代数をなす．この単位的代数 $\widetilde{A}$ を，代数 A の**単位化**（unitization）という．

定義 1.6 の状況で，写像 $x \mapsto (x, 0)$ は A から $\widetilde{A}$ への単射準同型である．これによって，A を $\widetilde{A}$ の部分代数とみなし，$\widetilde{A}$ の元 (x, λ) を $x + \lambda$ とも書く．このようにみなすとき，A は $\widetilde{A}$ の余次元 1 の（したがって極大な）正則両側イデアルである．

A が単位元 e をもつ単位的代数であるとき，単位化 $\widetilde{A}$ において，$e = (e, 0)$ はもはや単位元ではない．いいかえれば，A は $\widetilde{A}$ の部分代数であって単位的だが，$\widetilde{A}$ の部分単位的代数ではない．

容易に確かめられるように，代数の単位化は，次の普遍性を満たす：A を代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化とすると，任意の単位的代数 B と準同型 $\phi\colon A \to B$ に対して，ϕ は単位的準同型 $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{A} \to B$ に一意に拡張される．

1.4　代数の元のスペクトル

定義 1.7（元のスペクトル）

(1) A を単位的代数とする．$x \in A$ の A における**スペクトル**（spectrum）を，

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - x \text{ は } A \text{ において可逆でない } \}$$

と定める．

(2) A を代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化とする．$x \in A$ の A における**スペクトル**（spectrum）を，

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x)$$

と定める．

単位的代数 A の元 x に対しては，2 種類のスペクトル $\mathrm{Sp}_A(x)$ と $\mathrm{Sp}'_A(x)$ が定義されることになるが，A が単位的であることがわかっている場合に「x のスペクトル」といえば，ふつう $\mathrm{Sp}_A(x)$ の方を指す．

命題 1.8　A を代数とし，$x \in A$ とする．

(1) $0 \in \mathrm{Sp}'_A(x)$ である．

(2) A が単位的ならば，$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \{0\}$ である．

証明　$\widetilde{A}$ を A の単位化とする．

(1)　任意の $x \in A$ に対して，$x = (x, 0) \in \widetilde{A}$ は $\widetilde{A}$ において可逆でないから，$0 \in \mathrm{Sp}'_A(x)$ である．

(2)　A が単位元 e をもつとする．$\lambda \in \mathbb{C}$ とする．$\lambda - x = (-x, \lambda) \in \widetilde{A}$ が可逆であるための条件は，ある $(y, \mu) \in \widetilde{A}$ が存在して $(-x, \lambda)(y, \mu) = (y, \mu)(-x, \lambda) = (0, 1)$，すなわち

$$\begin{cases} -xy - \mu x + \lambda y = -yx - \mu x + \lambda y = 0 \\ \lambda\mu = 1 \end{cases}$$

となることである．第二式より，$\lambda \neq 0$ かつ $\mu = \lambda^{-1}$ でなければならない．これを第一式に代入すると $-xy - \lambda^{-1}x + \lambda y = -yx - \lambda^{-1}x + \lambda y = 0$ となるが，これは

$$(\lambda e - x)(\lambda^{-1}e + y) = (\lambda^{-1}e + y)(\lambda e - x) = e$$

と書き換えられる．以上より，$\lambda - x = (-x, \lambda) \in \widetilde{A}$ が可逆であることは，$\lambda \neq 0$ かつ $\lambda e - x \in A$ が可逆であることと同値である．すなわち，$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \{0\}$ である．　□

命題 1.9　代数 A の 2 元 x, y に対して，$\mathrm{Sp}'_A(xy) = \mathrm{Sp}'_A(yx)$ である．

証明　命題 1.8 (1) より，A が単位的であるとして，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(xy) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}_A(yx)$$

を示せばよい．x を $\lambda^{-1}x$ に置き換えることにより $\lambda = 1$ の場合に帰着されるから，この場合を考える．$1 - xy$ が可逆ならば，$1 - yx$ は逆元 $1 + y(1 - xy)^{-1}x$ をもち，可逆となる．x と y を入れ替えれば，逆もわかる．これで，主張が示された．　□

命題 1.10　A, B を代数とし，$\phi\colon A \to B$ を準同型とする．このとき，$x \in A$ に対して

$$\mathrm{Sp}'_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(x)$$

である．さらに，A, B が単位的で ϕ が単位的準同型ならば，$x \in A$ に対して

$$\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$$

である．

証明　後半のみを示せば十分である．A, B が単位的で ϕ が単位的準同型であるとする．$\lambda \in \mathbb{C}$ について, $\lambda - x$ が A において可逆ならば，$\lambda - \phi(x) = \phi(\lambda - x)$ は B において可逆である．すなわち，$\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ である．□

系 1.11　A を代数とし，B をその部分代数とする．このとき，$x \in B$ に対して

$$\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}'_B(x)$$

である．さらに，A が単位的で B がその部分単位的代数ならば，$x \in B$ に対して

$$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$$

である．

証明　B から A への包含準同型に命題 1.10 を適用すればよい．□

2　Banach 代数

本節では，ノルム代数と Banach 代数の一般論を解説する．なお，本稿で扱われるのは専ら Banach 代数だから，一般のノルム代数に関する記述は無視して読み進めても差し支えない．本節の内容は，明示的に述べる例外を除いて，係数体を $\mathbb{R}$ としても，まったく同様に成り立つ．

2.1　ノルム代数と Banach 代数

定義 2.1（ノルム代数，Banach 代数）　代数 A 上のノルム $\|-\|$ が A **の代数の構造と整合する**とは，任意の x, $y \in A$ に対して

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

を満たすことをいう．代数 A にその代数の構造と整合するノルムが定まっているとき，A を**ノルム代数**（normed algebra）という．完備なノルム代数を，**Banach 代数**（Banach algebra）という．

単位的ノルム代数 A において，$\|1\| = \|1 \cdot 1\| \leq \|1\|^2$ だから，$A \neq 0$ ならば $\|1\| \geq 1$ である．単位的ノルム代数 $A \neq 0$ に対して $\|1\| = 1$ を仮定することもあるが，本稿では仮定しない（ただし，注意 2.3 も参照のこと）．

ノルム代数 A の部分代数 B は，A のノルムの制限によって対合ノルム代数をなす．このとき，B を A の**部分ノルム代数**という．A が Banach 代数ならば，A の閉部分対合代数 B は，A のノルムの制限によって

Banach 代数をなす．このとき，B を A の**部分 Banach 代数**という．さらに，A が単位的で B がその部分単位的代数でもあるとき，B を A の**部分単位的ノルム代数**，**部分単位的 Banach 代数**という．

ノルム代数において，加法，スカラー倍，乗法はいずれも連続である．したがって，部分ノルム代数の閉包はまた部分ノルム代数であり，左・右・両側イデアルの閉包はまた左・右・両側イデアルである．

例 2.2

(1) 局所コンパクト Hausdorff 空間 Ω に対して，Ω 上の無限遠で消える連続関数全体 $C_0(\Omega)$ は，一様ノルムに関して可換 Banach 代数をなす．Ω がコンパクト Hausdorff 空間ならば，$C_0(\Omega)$ は Ω 上の連続関数全体 $C(\Omega)$ に等しく，これは定数関数 1 を単位元にもつ．

(2) ノルム空間 E に対して，E 上の連続線型作用素全体 $\mathscr{L}(E)$ は，作用素ノルムに関して単位的ノルム代数をなす（一般に可換ではない）．E が Banach 空間ならば，$\mathscr{L}(E)$ は単位的 Banach 代数となる．特に，$E=\mathbb{C}^n$（通常のノルムにより Banach 空間とみなす）の場合として，n 次正方行列の全体 $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ は，単位的 Banach 代数をなす．

(3) G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の左 Haar 測度を一つ固定する．このとき，G 上の可積分関数（の同値類）全体 $L^1(G)$ は，畳み込みを積として，L^1 ノルムに関して Banach 代数をなす．G が可換ならば $L^1(G)$ は可換であり，G が離散ならば $L^1(G)$ は単位的である．

注意 2.3　代数 A に位相が定まっており，その位相によって A はノルム化可能な位相線型空間をなし，かつその位相に関して乗法 $(x,y)\mapsto xy$ は連続であるとする．このとき，A の位相と整合するノルム $\|\text{–}\|$ であって，A をノルム代数にするものが存在する．さらに，A が単位的でかつ 0 でなければ，そのノルムは $\|1\|=1$ を満たすようにとれる．このことを示そう．

A の位相と整合するノルム $\|\text{–}\|_0$ を一つ固定すると，乗法が連続であることより，定数 $C>0$ が存在して，任意の $x,\,y\in A$ に対して $\|xy\|_0\leq C\|x\|_0\|y\|_0$ となる．そこで，A 上のノルム $\|\text{–}\|$ を $\|\text{–}\|_0$ の C 倍と定めれば，これも A の位相と整合し，これによって A はノルム代数となる．

さらに，A が単位的でかつ 0 でないとする．$x\in A$ に対して，A 上の連続線型作用素 $y\mapsto xy$ を L_x と書く．すると，A から $\mathscr{L}(A)$ への写像 $x\mapsto L_x$ は単位的準同型であり，L_x の作用素ノルムは $\|x\|/\|1\|\leq\|L_x\|_{\mathscr{L}(A)}\leq\|x\|$ を満たす．そこで，A 上のノルムを $\|\text{–}\|'$ を

$$\|x\|'=\|L_x\|_{\mathscr{L}(A)}\qquad(x\in A)$$

と定めると，これはもとのノルム $\|\text{–}\|$ と同値である．さらに，$\mathscr{L}(A)$ は単位的ノルム代数で $\|1\|_{\mathscr{L}(A)}=1$ を満たすから，A にノルム $\|\text{–}\|'$ を与えたものも単位的ノルム代数で $\|1\|'=1$ を満たす．

注意 2.4（ノルム代数の単位化）　A をノルム代数とし，$\widetilde{A}$ を A の代数としての単位化とする．このとき，$\widetilde{A}$ の代数の構造と整合するノルム $\|\text{–}\|_{\widetilde{A}}$ であって，A のノルム $\|\text{–}\|_A$ の拡張であるものが存在する．たとえば，$x+\lambda\in\widetilde{A}$（$x\in A$，$\lambda\in\mathbb{C}$）に対して

$$\|x+\lambda\|_{\widetilde{A}}=\|x\|_A+|\lambda|$$

と定めると，これは $\widetilde{A}$ 上のノルムであり，A のノルム $\|\text{–}\|_A$ の拡張であり，任意の $x+\lambda,\,y+\mu\in\widetilde{A}$（$x$,

$y \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$）に対して

$$\begin{aligned}
\|(x+\lambda)(y+\mu)\|_{\widetilde{A}} &= \|xy + \mu x + \lambda y + \lambda\mu\|_{\widetilde{A}} \\
&= \|xy + \mu x + \lambda y\|_A + |\lambda\mu| \\
&\leq \|x\|_A\|y\|_A + |\mu|\|x\|_A + |\lambda|\|y\|_A + |\lambda||\mu| \\
&= (\|x\|_A + |\lambda|)(\|y\|_A + |\mu|) \\
&= \|(x,\lambda)\|_{\widetilde{A}}\|(y,\mu)\|_{\widetilde{A}}
\end{aligned}$$

を満たす．このようなノルム $\|{-}\|_{\widetilde{A}}$ を一つ固定するとき，$\widetilde{A}$ をノルム代数 A の単位化という．

ノルム代数 A の単位化 $\widetilde{A}$ は，位相線型空間として $A \times \mathbb{C}$ に同型だから，A が完備ならば，$\widetilde{A}$ も完備である．すなわち，Banach 代数の単位化は，単位的 Banach 代数である．

命題 2.5　A をノルム代数とし，A のノルム空間としての完備化を $\widehat{A}$ と書く．

(1) A の乗法は，$\widehat{A} \times \widehat{A}$ から $\widehat{A}$ への連続写像に一意に拡張され，これを乗法として $\widehat{A}$ は Banach 代数をなす．
(2) (1) の状況で，A が可換ならば $\widehat{A}$ も可換である．
(3) (1) の状況で，A が単位的ならば $\widehat{A}$ も単位的であり，両者の単位元は一致する．

証明　(1)　$A \times A$ は $\widehat{A} \times \widehat{A}$ において稠密だから，A の乗法の $\widehat{A} \times \widehat{A}$ 上への連続な拡張は，たかだか一意である．この連続な拡張の存在を示す．

A の乗法が $\widehat{A} \times \widehat{A}$ 上に連続に延長できることを示す．まず，$x \in A$ を固定し，写像 $L_x\colon A \to A$, $y \mapsto xy$ を考える．これは作用素ノルム $\|x\|$ 以下の連続線型作用素だから，作用素ノルム $\|x\|$ 以下の連続線型作用素 $\widehat{L_x}\colon \widehat{A} \to \widehat{A}$ に延長される．いま，任意の $x \in A$ と $y \in \widehat{A}$ に対して

$$\|\widehat{L_x}(y)\| \leq \|x\|\|y\| \tag{$*$}$$

が成り立っている．次に，$y \in \widehat{A}$ を固定し，写像 $R_y\colon A \to \widehat{A}$, $x \mapsto \widehat{L_x}(y)$ を考える．($*$) より R_y は作用素ノルム $\|y\|$ 以下の連続線型作用素だから，作用素ノルム $\|y\|$ 以下の連続線型作用素 $\widehat{R_y}\colon \widehat{A} \to \widehat{A}$ に延長される．いま，任意の $x, y \in \widehat{A}$ に対して

$$\|\widehat{R_y}(x)\| \leq \|x\|\|y\| \tag{$**$}$$

が成り立っている．$\widehat{A} \times \widehat{A}$ から $\widehat{A}$ への写像 $(x,y) \mapsto \widehat{R_y}(x)$ は A の乗法の拡張であり，($**$) より連続である．これで，A の乗法が $\widehat{A} \times \widehat{A}$ 上に連続に延長できることが示された．

x, $y \in \widehat{A}$ に対して，$m(x,y) = \widehat{R_y}(x)$ と置く．A の乗法は双線型かつ結合的だから，等式延長原理より，写像 $m\colon \widehat{A} \times \widehat{A} \to \widehat{A}$ も双線型かつ結合的である．さらに，($**$) より，任意の x, $y \in \widehat{A}$ に対して，$\|m(x,y)\| \leq \|x\|\|y\|$ である．よって，$\widehat{A}$ は m を乗法として Banach 代数をなす．

(2)　等式延長原理より，A が可換ならば $\widehat{A}$ も可換である．

(3)　等式延長原理より，A の単位元は $\widehat{A}$ の単位元にもなる．□

定義 2.6（ノルム代数の完備化）　命題 2.5 の状況で，Banach 代数 $\widehat{A}$ を，ノルム代数 A の**完備化**（completion）という．

2.2　単位的 Banach 代数における逆元

命題 2.7　A を単位的 Banach 代数とする．$x \in A$ が $\|x\| < 1$ を満たすならば，$1-x$ は可逆かつ $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能であり，

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$$

が成り立つ．さらに，このとき，

$$\|(1-x)^{-1}\| \le \|1\| + \frac{\|x\|}{1-\|x\|}, \qquad \|(1-x)^{-1} - 1\| \le \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

である[*1]．

証明　$x \in A$ が $\|x\| < 1$ を満たすとする．$n \ge 1$ に対して $\|x^n\| \le \|x\|^n$ だから，$\|x\| < 1$ より $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能である．また，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^{N-1}) = (1+x+\cdots+x^{N-1})(1-x) = 1-x^N$$

だから，$N \to \infty$ として

$$(1-x)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)(1-x) = 1$$

を得る．よって，$1-x$ は可逆であり，その逆元は $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ である．さらに，

$$\|(1-x)^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{n\ge 1} x^n\right\| \le \sum_{n\ge 1} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

であり，したがって

$$\|(1-x)^{-1}\| \le \|1\| + \|(1-x)^{-1} - 1\| \le \|1\| + \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

である．　□

系 2.8　A を単位的ノルム代数とする．

(1) $A^\times$ から自身への写像 $x \mapsto x^{-1}$ は連続である．
(2) A が単位的 Banach 代数ならば，$A^\times$ は A の開集合である．

証明　A の完備化 $\widehat{A}$ を考えると，$A^\times \subseteq (\widehat{A})^\times$ であり，$A^\times$ から自身への写像 $x \mapsto x^{-1}$ は，$(\widehat{A})^\times$ から自身への写像 $x \mapsto x^{-1}$ の制限である．そこで，以下では，A が単位的 Banach 代数であるとして，$A^\times$ が A の開集合であり，かつ $A^\times$ から自身への写像 $x \mapsto x^{-1}$ が連続であることを示す．

$x \in A^\times$ とする．$h \in A$ に対して，$x+h = x(1+x^{-1}h)$ である．$h \in A$ が十分 0 に近く $\|x^{-1}h\| < 1$ であるとき，命題 2.7 より $x+h \in A^\times$ である．よって，$A^\times$ は A の開集合である．また，h をこのようにとるとき，

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} = (1+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} = ((1+x^{-1}h)^{-1} - 1)x^{-1}$$

[*1] $\|1\| = 1$ ならば，第一の不等式は $\|(1-x)^{-1}\| \le 1/(1-\|x\|)$ と書き直せる．

だから，命題 2.7 より

$$\|(x+h)^{-1}-x^{-1}\| \leq \|((1+x^{-1}h)^{-1}-1)\|\|x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}h\|}{1-\|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\|$$

である．上式の最右辺は，$h \to 0$ のとき 0 に収束する．よって，$A^{\times}$ から自身への写像 $x \mapsto x^{-1}$ は連続である． □

系 2.9　A を単位的ノルム代数とし，$x \in A$ とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ は $\lambda - x$ が A において可逆であるような範囲を動くとする．この条件の下で λ が無限遠に近づくとき，$(\lambda - x)^{-1}$ は $0 \in A$ に収束する[*2]．

証明　A の完備化 $\widehat{A}$ を考えると，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda - x$ が A において可逆ならば $\widehat{A}$ においても可逆である．したがって，$\widehat{A}$ に対する主張を示せば，A に対する主張も示される．そこで，はじめから A は単位的 Banach 代数をであるとしてよい．以下，そのように仮定する．

$x \in A$ を任意にとる．$\lambda \in \mathbb{C}$ が無限遠点に十分近く $\|\lambda^{-1}x\| < 1$ であるとき，命題 2.7 より，$\lambda - x = \lambda(1-\lambda^{-1}x)$ は可逆であって

$$\|(\lambda-x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(1-\lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}\left(\|1\| + \frac{\|\lambda^{-1}x\|}{1-\|\lambda^{-1}x\|}\right)$$

が成り立つ．上式の最右辺は，$\lambda \to \infty$ のとき 0 に収束する．これで，主張が示された． □

2.3　Banach 代数のイデアル

命題 2.10　単位的 Banach 代数 A の真左・右・両側イデアル I は，$1 \in A$ を中心とする半径 1 の開球とは交わらない．

証明　命題 2.7 より $1 \in A$ を中心とする半径 1 の開球に属する元は可逆だから，それを含む左・右・両側イデアルは A 自身しかない． □

系 2.11　単位的 Banach 代数 A の極大左・右・両側イデアル M は，A において閉である．

証明　命題 2.10 より M は $1 \in A$ を中心とする半径 1 の開球とは交わらないから，その閉包 $\overline{M}$ も同様であり，特に $\overline{M}$ は A の真左・右・両側イデアルである．よって，M の極大性より，$\overline{M} = M$ である． □

系 2.11 を単位的とは限らない Banach 代数に一般化するために，次の補題を用意する．

補題 2.12　A を代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化とする．A の任意の極大左・右・両側正則イデアル M に対して，$\widetilde{A}$ の極大左・右・両側イデアル $\widetilde{M}$ であって，$M = \widetilde{M} \cap A$ を満たすものが存在する．[*3]

証明　どれも証明は同様だから，両側イデアルについて示す．M を A の極大正則両側イデアルとし，$u \in A$ であって任意の $a \in A$ に対して $a - ua$, $a - au \in I$ を満たすものをとる．$\widetilde{M} = M + K(u-1)$ と定めると，容易にわかるように，$\widetilde{M}$ は $\widetilde{A}$ の両側イデアルで $M = \widetilde{M} \cap A$ を満たす．

[*2] ある $R \geq 0$ が存在して $\mathrm{Sp}_A(x)$ が $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq R\}$ を含む場合，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ は無限遠には近づけないが，このとき主張は自明に成立するとみなす．

[*3] 補題 2.12 は，係数体を一般の可換体としても，まったく同様に成り立つ．

$\widetilde{M}$ が $\widetilde{A}$ の極大両側イデアルであることを示す．$\widetilde{M}+A=\widetilde{A}$ であることに注意する．$\widetilde{A}$ の真両側イデアル I が $\widetilde{M}$ を含むとする．$I\cap A$ は A の両側イデアルで $M=\widetilde{M}\cap A\subseteq I\cap A$ であり，もし $I\cap A=A$ であるとすると $\widetilde{A}=\widetilde{M}+A\subseteq I$ となり $I\subsetneq\widetilde{A}$ に反するから，M の極大性より $I\cap A=M$ である．$x\in I$ を任意にとる．$x\in\widetilde{A}=\widetilde{M}+A$ だから，$y\in\widetilde{M}$ と $z\in A$ が存在して $x=y+z$ と書ける．$x\in I$ と $y\in\widetilde{M}\subseteq I$ より $z=x-y\in I$ でもあるから $z\in I\cap A=M$ であり，したがって

$$x=y+z\in\widetilde{M}+M=\widetilde{M}$$

である．よって，$I=\widetilde{M}$ である．これで，$\widetilde{M}$ が $\widetilde{A}$ の極大両側イデアルであることが示された． □

命題 2.13　Banach 代数 A の極大正則左・右・両側イデアル M は，A において閉である．

証明　A の単位化 $\widetilde{A}$ をとる．補題 2.12 より，$\widetilde{A}$ の極大左・右・両側イデアル $\widetilde{M}$ であって，$M=\widetilde{M}\cap A$ を満たすものが存在する．系 2.11 より $\widetilde{M}$ は $\widetilde{A}$ において閉だから，M は A において閉である． □

ノルム代数・Banach 代数の閉イデアルによる商を考える．まず，ノルム空間・Banach 空間については，次の事実が知られている．

事実 2.14　E をノルム空間とし，M をその閉部分線型空間とする．$x+M\in E/M$（$x\in E$）に対して

$$\|x+M\|_{E/M}=\inf_{z\in M}\|x+z\|_E$$

と定めると，E/M は $\|{-}\|_{E/M}$ をノルムとしてノルム空間をなす．さらに，E が Banach 空間ならば，E/M も Banach 空間となる．

事実 2.14 の状況で，ノルム空間 E/M を，E の M による**商ノルム空間**という．E が Banach 空間ならば，商ノルム空間の代わりに**商 Banach 空間**という．

命題 2.15　A をノルム代数とし，I をその閉両側イデアルとする．商代数 A/I は，その商ノルム空間としてのノルムに関して，ノルム代数をなす．さらに，A が Banach 代数ならば，A/I も Banach 代数となる．

証明　任意の $x,y\in A$ に対して

$$\begin{aligned}
\|xy+I\|_{A/I}&=\inf_{z\in I}\|xy+z\|_A\\
&\le\inf_{z,w\in I}\|xy+xw+zy+zw\|_A\\
&\le\inf_{z,w\in I}\|x+z\|_A\|y+w\|_A\\
&=\|x+I\|_{A/I}\|y+I\|_{A/I}
\end{aligned}$$

だから，A/I はノルム代数をなす．さらに，A が Banach 代数ならば，A/I はノルム空間として完備だから，A/I は Banach 代数をなす． □

定義 2.16（商ノルム代数・商 Banach 代数）　命題 2.15 の状況で，ノルム代数 A/I を，A の I による**商ノルム代数**（quotient normed algebra）という．A が Banach 代数ならば，商ノルム代数の代わりに**商 Banach 代数**（quotient Banach algebra）という．

2.4 Banach 代数の元のスペクトル

1.4 節で代数の元のスペクトルを定義した．本小節では，主に Banach 代数の元のスペクトルについて調べる．

まず，簡単にわかる例を見ておく．

例 2.17

(1) Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とすると，$x \in C_0(\Omega)$ のスペクトルは，

$$\mathrm{Sp}'_{C_0(\Omega)}(x) = x(\Omega) \cup \{0\}$$

である．Ω がコンパクト Hausdorff 空間ならば，$x \in C(\Omega)$ のスペクトルは，

$$\mathrm{Sp}_{C(\Omega)}(x) = x(\Omega)$$

である．

(2) E をノルム空間とする．E が有限次元ならば，$x \in \mathscr{L}(E)$ のスペクトル $\mathrm{Sp}_{\mathscr{L}(E)}(x)$ は，x の固有値全体のなす集合である．E が無限次元ならば，一般には，x のスペクトルは x の固有値全体を真に含む集合となる．

Banach 代数の元のスペクトルについて調べる．

命題 2.18　A を Banach 代数とする．任意の $x \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}'_A(x)$ は，$0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれるコンパクト集合である．さらに，A が単位的ならば，$\mathrm{Sp}_A(x)$ も同じ性質を満たす．

証明　後半のみを示せば十分である．A を単位的 Banach 代数とする．$A^\times$ は A の開集合だから（系 2.8 (2)），$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - x \notin A^\times\}$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．また，$\lambda \in \mathbb{C}$，$|\lambda| > \|x\|$ とすると，$\|\lambda^{-1}x\| < 1$ だから，$\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ は可逆である（命題 2.7）．対偶をとれば，$\mathrm{Sp}_A(x)$ が $0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれることがわかる．□

次に，0 でない単位的ノルム代数の元のスペクトルが空でないことを示す．その証明には，次の二つの事実を用いる．

事実 2.19（Liouville の定理）　$\mathbb{C}$ 全体で定義された有界な正則関数は，定数関数に限る．

事実 2.20（Hahn–Banach の拡張定理）　E をノルム空間とし，F を E の部分線型空間とする．任意の $\psi \in F^*$ に対して，$\phi \in E^*$ であって，$\|\phi\| = \|\psi\|$ かつ $\phi|_F = \psi$ を満たすものが存在する．特に，$x \in E$ が任意の $\phi \in E^*$ に対して $\phi(x) = 0$ を満たすならば，$x = 0$ である．

定理 2.21　A を 0 でない単位的ノルム代数とする．任意の $x \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は空でない．[*4]

証明　$\mathrm{Sp}_A(x)$ が空であると仮定する．すると，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda - x$ は可逆だから，写像 $\mathbb{C} \to A$，$\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ が考えられる．複素ノルム空間 A 上の連続線型形式 ϕ ごとに，関数 $f_\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f_\phi(\lambda) = \phi((\lambda - x)^{-1})$$

[*4] 定理 2.21 は，係数体が $\mathbb{R}$ の場合には成り立たない．たとえば，2 次実正方行列全体 $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ は作用素ノルムに関して単位的 Banach 代数をなすが，その元 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のスペクトルは空である．

によって定める．すると，f_ϕ は正則関数である．実際，$\lambda_0, \lambda \in \mathbb{C}$，$\lambda \neq \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{\phi((\lambda - x)^{-1}) - \phi((\lambda_0 - x)^{-1})}{\lambda - \lambda_0} \\
&= \phi\left(\frac{(\lambda - x)^{-1} - (\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= \phi\left(\frac{(\lambda - x)^{-1}((\lambda_0 - x) - (\lambda - x))(\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= \phi(-(\lambda - x)^{-1}(\lambda_0 - x)^{-1})
\end{aligned}$$

だから，$\lambda \to \lambda_0$ として，逆元をとる写像の連続性（系 2.8 (1)）より

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \phi(-(\lambda_0 - x)^{-2})$$

を得る．また，系 2.9 より，f_ϕ は無限遠方において 0 に収束する．よって，f_ϕ は $\mathbb{C}$ 全体で定義された無限遠方において 0 に収束する正則関数だから，Liouville の定理（事実 2.19）より，$f_\phi = 0$ である．

以上より，$\lambda \in \mathbb{C}$ を一つ固定すると，A 上の任意の連続線型形式 ϕ に対して $\phi((\lambda - x)^{-1}) = 0$ だから，Hahn–Banach の拡張定理（事実 2.20）より $(\lambda - x)^{-1} = 0$ となる．ところが，これは $A \neq 0$ に矛盾する．よって，背理法より，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は空でない． □

系 2.22（Gelfand–Mazur の定理） （可換とは限らない）体をなす単位的ノルム代数 A は，単位的代数として $\mathbb{C}$ に同型である．[*5]

証明 $\mathbb{C}$ から A への単位的準同型 $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ が全単射であることを示せばよい．$A \neq 0$ だから，これは単射である．全射性を示す．$x \in A$ を任意にとる．定理 2.21 より，$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ がとれる．スペクトルの定義より，$\lambda - x$ は A において可逆でないが，いま A は体をなすから，そのためには $x = \lambda$ でなければならない．これで，全射性が示された． □

命題 2.23 A を単位的ノルム代数とし，B をその完備な部分単位的代数とする．

(1) $B^\times$ は，$B \cap A^\times$ において開かつ閉である．

(2) 任意の $x \in B$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$ かつ $\partial \mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \partial \mathrm{Sp}_A(x)$ である（∂ は $\mathbb{C}$ における境界を表す）．

(3) $\mathrm{Sp}_B(x)$ は，$\mathrm{Sp}_A(x)$ とそのいくつかの穴（$\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ の有界連結成分のことをいう）との合併である．

証明 (1) 系 2.8 (2) より $B^\times$ の B の開集合だから，$B \cap A^\times$ の開集合でもある．また，

$$B^\times = \{x \in B \cap A^\times \mid x^{-1} \in B\}$$

であり，B は完備性より A において閉であり，逆元をとる写像は連続だから（系 2.8 (1)），$B^\times$ は $B \cap A^\times$ の閉集合である．

(2) $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$ は系 1.11 ですでに示した．$\partial \mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \partial \mathrm{Sp}_A(x)$ を示す．$\lambda \in \partial \mathrm{Sp}_B(x)$ を任意にとる．まず，$\lambda \notin \mathrm{Sp}_B(x)^\circ$ だから，$\lambda \notin \mathrm{Sp}_A(x)^\circ$ である．次に，λ に収束する点列 $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_B(x)$

[*5] 係数体が $\mathbb{R}$ の場合の Gelfand–Mazur の定理（系 2.22）の類似として，次が成り立つ：(可換とは限らない) 体をなす単位的実ノルム代数 A は，単位的実代数として $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$（四元数体）のいずれかに同型である．証明は，「付値体のノート」[11, 定理 4.12] を参照のこと．

をとる．もし $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A(x)$ であるとすると，点列 $(\lambda_n - x)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B^\times$ が点 $\lambda - x \in B \cap A^\times$ に収束することになるから，(1) より $\lambda - x \in B^\times$，すなわち $\lambda \notin \mathrm{Sp}_B(x)$ である．これは矛盾である．よって，背理法より $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ である．これで，$\lambda \in \partial\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \setminus \mathrm{Sp}_A(x)^\circ$ が示された．

(3)　U を $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ の連結成分とする．$\mathrm{Sp}_B(x)$ は $\mathbb{C}$ のコンパクト集合だから，$\mathrm{Sp}_B(x) \cap U$ は U の閉集合である．また，$\partial\mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \partial\mathrm{Sp}_A(x)$ より $\partial\mathrm{Sp}_B(x) \cap U = \emptyset$ だから，$\mathrm{Sp}_B(x) \cap U$ は U の開集合である．したがって，$\mathrm{Sp}_B(x) \cap U$ は U において開かつ閉だが，U は連結だから，$\mathrm{Sp}_B(x) \cap U$ は $\emptyset$ または U のいずれかである．また，$\mathrm{Sp}_B(x)$ はコンパクトだから，$\mathrm{Sp}_B(x)$ が $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ の非有界連結成分を含むことはない．よって，$\mathrm{Sp}_B(x)$ は $\mathrm{Sp}_A(x)$ とそのいくつかの穴との合併である．□

2.5　スペクトル半径

定義 2.24（スペクトル半径）　A を代数とする．$x \in A$ の A における**スペクトル半径**（spectral radius）を，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}'_A(x)\}$$

と定める．

A が単位的代数ならば，$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \{0\}$ だから（命題 1.8 (2)），スペクトル半径は

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$$

とも書ける（ただし，$\mathrm{Sp}_A(x) = \emptyset$ のとき，右辺は 0 と約束する）．

命題 2.25　Banach 代数 A の元 x について，$\|x\|_{\mathrm{Sp}} \le \|x\|$ である．

証明　$\mathrm{Sp}_A(x)$ が中心 $0 \in \mathbb{C}$，半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれること（命題 2.18）のいいかえにすぎない．□

以下，単位的 Banach 代数の元のスペクトル半径を具体的に表示するスペクトル半径公式を示す．スペクトル半径公式は，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）を証明するためのステップの一つで用いられる．

A を単位的代数とするとき，$x \in A$ と 1 変数多項式 $f(T)$（T は不定元）に対して，$f(T)$ の T に形式的に x を代入して得られる元 $f(x) \in A$ を考えることができる．

補題 2.26　A を単位的代数とする．$x \in A$ と多項式 $f(T)$ に対して，$f(\mathrm{Sp}_A(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(f(x))$ である．[*6]

証明　$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ を任意にとる．多項式 $f(\lambda) - f(T)$ は λ を根にもつから，多項式 $g(T)$ が存在して $f(\lambda) - f(T) = (\lambda - T)g(T) = g(T)(\lambda - T)$ となる．ここで T に x を代入すると，$f(\lambda) - f(x) = (\lambda - x)g(x) = g(x)(\lambda - x)$ を得る．もし $f(\lambda) - f(x)$ が可逆だとすると $\lambda - x$ も可逆となってしまい $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ に反するから，$f(\lambda) - f(x)$ は可逆でない．すなわち，$f(\lambda) \in \mathrm{Sp}_A(f(x))$ である．よって，$f(\mathrm{Sp}_A(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(f(x))$ である．□

事実 2.27（Banach–Steinhaus の定理）　E をノルム空間とする．部分集合 $S \subseteq E$ に対して，次の条件は同値である．

(a) S はノルム有界である．

[*6] 補題 2.26 は，係数体を一般の可換体としても，まったく同様に成り立つ．

(b) S は弱有界である．すなわち，任意の $\phi \in E^*$ に対して，$\phi(S)$ は有界である．

事実 2.28　Ω を $\mathbb{C}$ の開集合とし，$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．$\lambda_0 \in \Omega$ を中心とする半径 $r > 0$ の開円板が Ω に含まれるとする．このとき，f の λ_0 を中心とする冪級数展開の収束半径は r 以上である．

定理 2.29（スペクトル半径公式）　Banach 代数 A の元 x に対して，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}$$

である．

証明　単位化をとることにより A が単位的である場合に帰着されるから，この場合を考える．まず，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

を示す．右側二つの不等式は明らかだから，いちばん左の不等式のみ示す．$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ とする．$n \geq 1$ を任意にとる．補題 2.26 より $\lambda^n \in \mathrm{Sp}_A(x^n)$ だから，命題 2.18 より $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|x^n\|$ であり，したがって $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$ である．これが任意の $n \geq 1$ に対して成り立つから，$|\lambda| \leq \inf_{n\geq 1} |x^n|^{1/n}$ である．よって，$\|x\|_{\mathrm{Sp}} \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}$ である．これで示された．

あとは，

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|_{\mathrm{Sp}}$$

を示せばよい．そのために，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$，$0 < |\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$（$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = 0$ のときは $1/\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \infty$ とみなす．以下同様）に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{|\lambda|} \tag{$*$}$$

をいう．($*$) をいうためには，

$$\{(\lambda x)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ が } A \text{ のノルムに関して有界である} \tag{$**$}$$

ことをいえばよい．実際，($**$) がいえたとすると，ある $C \geq 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|(\lambda x)^n\| \leq C$ であり，したがって $\|x^n\| \leq C/|\lambda|^n$ だから，

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{C^{1/n}}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}$$

となり，($*$) が示される．

($**$) を示す．Banach–Steinhaus の定理（事実 2.27）より，そのためには，

$$\text{任意の } \phi \in A^* \text{ に対して，} \{\phi(x)^n \lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C} \text{ が有界である} \tag{$***$}$$

ことをいえばよい．$\phi \in A^*$ を任意にとり，関数

$$f_\phi \colon \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| < \frac{1}{\|x\|_{\mathrm{Sp}}} \right\} \to \mathbb{C}, \quad f_\phi(\lambda) = \phi((1 - \lambda x)^{-1})$$

を考える（$\lambda \in \mathbb{C}$，$|\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$ とすると $\|\lambda x\|_{\mathrm{Sp}} < 1$ だから，$1 - \lambda x$ は可逆であることに注意する）．すると，

- f_ϕ は正則関数である．実際，$|\lambda_0|, |\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$，$\lambda \neq \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{f_\phi(\lambda)-f_\phi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} &= \frac{\phi((1-\lambda x)^{-1})-\phi((1-\lambda_0 x)^{-1})}{\lambda-\lambda_0}\\ &= \phi\left(\frac{(1-\lambda x)^{-1}-(1-\lambda_0 x)^{-1}}{\lambda-\lambda_0}\right)\\ &= \phi\left(\frac{(1-\lambda x)^{-1}((1-\lambda_0 x)-(1-\lambda x))(1-\lambda_0 x)^{-1}}{\lambda-\lambda_0}\right)\\ &= \phi\big((1-\lambda x)^{-1}x(1-\lambda_0 x)^{-1}\big)\end{aligned}$$

  だから，$\lambda \to \lambda_0$ として，逆元をとる写像の連続性（系 2.8 (1)）より

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{f_\phi(\lambda)-f_\phi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \phi\big((1-\lambda_0 x)^{-1}x(1-\lambda_0 x)^{-1}\big)$$

  を得る．
- $|\lambda| < 1/\|x\|$ に対しては，$(1-\lambda x)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda x)^n$ だから（命題 2.7），

$$f_\phi(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\phi(x^n)\lambda^n \tag{$****$}$$

  である．($****$) は f_ϕ の 0 を中心とする冪級数展開を与える．

よって，事実 2.28 より，($****$) の収束半径は $1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$ 以上である．特に，$|\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$ に対して $\{\phi(x)^n\lambda^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ は $\mathbb{C}$ において有界である．これで，($***$) が示された． □

2.6 Gelfand スペクトルと Gelfand 変換

定義 2.30（Gelfand スペクトル）　A を可換代数とする．

(1) A から $\mathbb{C}$ への準同型を，A 上の**指標**（character）といい，その全体の集合を $\Omega'(A)$ と書く．A が単位的ならば，A から $\mathbb{C}$ への単位的準同型を，A 上の**単位的指標**（unital character）という．

(2) A 上の 0 でない指標全体の集合を $\Omega(A)$ と書き，これを A の **Gelfand スペクトル**（Gelfand spectrum）という．Gelfand スペクトルは，A 上各点収束位相によって，位相空間とみなす．

A が単位的可換代数であるとき，ω を A 上の指標とすると，$\omega(1) = \omega(1^2) = \omega(1)^2$ だから $\omega(1)$ は 0 または 1 である．$\omega(1) = 0$ ならば，任意の $x \in A$ に対して $\omega(x) = \omega(1)\omega(x) = 0$ だから，$\omega = 0$ である．よって，単位的可換代数 A の Gelfand スペクトル $\Omega(A)$ は，A 上の単位的指標全体の集合にほかならない．

命題 2.31　A を可換 Banach 代数とする．0 でない指標 ω に $\operatorname{Ker}\omega$ を対応させる写像は，$\Omega(A)$ から A の極大正則イデアル全体のなす集合への全単射である．[*7]

証明　$\omega \in \Omega(A)$ は，A から $\mathbb{C}$ への全射準同型だから，同型 $A/\operatorname{Ker}\omega \cong \mathbb{C}$ を誘導する．したがって，$\operatorname{Ker}\omega$ は，A の余次元 1 の（したがって極大な）正則イデアルである．よって，$\Omega(A)$ から A の極大正則イデアル全体のなす集合への写像 $\omega \mapsto \operatorname{Ker}\omega$ が定まる．

[*7] 命題 2.31 は，係数体が $\mathbb{R}$ の場合には成り立たない．

写像 $\omega \mapsto \operatorname{Ker}\omega$ の単射性を示す．ω, $\omega' \in \Omega(A)$ が $\operatorname{Ker}\omega = \operatorname{Ker}\omega'$ を満たすとすると，これらは同型 $\mathbb{C} \cong A/\operatorname{Ker}\omega = A/\operatorname{Ker}\omega \cong \mathbb{C}$ を定める．ところが，$\mathbb{C}$ から自身への（代数の）同型は恒等写像しかないから，ω が誘導する同型 $A/\operatorname{Ker}\omega \cong \mathbb{C}$ と ω' が誘導する同型 $A/\operatorname{Ker}\omega' \cong \mathbb{C}$ とは等しい．よって，$\omega = \omega'$ である．これで，単射性が示された．

写像 $\omega \mapsto \operatorname{Ker}\omega$ の全射性を示す．M を A の極大正則イデアルとすると，M は A において閉だから（命題 2.13），商 Banach 代数 A/M が定義されるが，これは体である（命題 1.3）[*8]．したがって，Gelfand–Mazur の定理（系 2.22）より，単位的代数として $A/M \cong \mathbb{C}$ である．そこで，等化準同型 $A \to A/M$ と同型 $A/M \cong \mathbb{C}$ との合成を $\omega\colon A \to \mathbb{C}$ と置けば，$\omega \in \Omega(A)$ かつ $\operatorname{Ker}\omega = M$ である．これで，全射性が示された．　□

命題 2.32　可換 Banach 代数 A 上の指標 ω は，ノルム減少である．すなわち，任意の $x \in A$ に対して，$|\omega(x)| \le \|x\|$ である．

証明　任意の $x \in A$ に対して，

$$\omega(x) \in \operatorname{Sp}'_{\mathbb{C}}(\omega(x)) \subseteq \operatorname{Sp}'_A(x)$$

であり（命題 1.10），かつ $\operatorname{Sp}'_A(x)$ は中心 $0 \in \mathbb{C}$，半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれるから（命題 2.18），$|\omega(x)| \le \|x\|$ である．よって，ω はノルム減少である．　□

命題 2.32 より，$\Omega'(A)$ と $\Omega(A)$ は双対空間 A^* の単位閉球の部分集合であり，その位相は汎弱位相にほかならない．

事実 2.33（Banach–Alaoglu の定理）　E を Banach 空間とする．双対空間 E^* における（作用素ノルムに関する）閉球は，汎弱コンパクトである．

命題 2.34　可換 Banach 代数 A に対して，$\Omega'(A)$ はコンパクト Hausdorff であり，$\Omega(A)$ は局所コンパクト Hausdorff である．さらに，A が単位的ならば，$\Omega(A)$ はコンパクト Hausdorff である．

証明　A^* の単位閉球 B は汎弱コンパクトであり（Banach–Alaoglu の定理（事実 2.33）），

$$\Omega'(A) = \left\{ \omega \in B \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \lambda,\, \mu \in \mathbb{C},\ x,\, y \in A \text{ に対して } \omega(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega(x) + \mu\omega(y), \\ \omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \end{array} \right\}$$

（命題 2.32）はその汎弱閉集合だから，$\Omega'(A)$ はコンパクト Hausdorff である．また，$\Omega(A) = \Omega'(A) \setminus \{0\}$ は局所コンパクト Hausdorff である．

A が単位的ならば，

$$\Omega(A) = \{\omega \in \Omega'(A) \mid \omega(1) = 1\}$$

は $\Omega'(A)$ の閉集合であり，したがってコンパクトである．　□

定義 2.35（Gelfand 変換）　A を可換代数とする．$x \in A$ に対して，写像 $\widehat{x}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ を

$$\widehat{x}(\omega) = \omega(x) \qquad (\omega \in \Omega(A))$$

と定め，これを x の **Gelfand 変換**（Gelfand transform）という．$x \in A$ に $\widehat{x} \in \mathbb{C}^{\Omega(A)}$（$\mathbb{C}^{\Omega(A)}$ は $\Omega(A)$ から $\mathbb{C}$ への写像全体の集合を表す）を対応させる写像を，A 上の **Gelfand 変換**（Gelfand transform）といい，

$$\mathscr{G}_A\colon A \to \mathbb{C}^{\Omega(A)}$$

[*8] A の可換性を本質的に使っているのは，この部分である．

と書く．

命題 2.36　可換 Banach 代数 A 上の Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A$ は，A から $C_0(\Omega(A))$ へのノルム減少な準同型である．さらに，A が単位的ならば，$\mathscr{G}_A$ は A から $C(\Omega(A))$ へのノルム減少な単位的準同型である．

証明　$x \in A$ の Gelfand 変換 $\widehat{x}$ が $C_0(\Omega(A))$ に属することを示す．Gelfand スペクトル $\Omega(A)$ の位相の定義より，$\widehat{x}$ は $\Omega(A)$ 上の連続関数である．また，任意の $\epsilon > 0$ に対して，「$\widehat{x}$ の絶対値が ϵ 以上になる $\Omega(A)$ の点全体の集合」は

$$\{\omega \in \Omega'(A) \mid |\omega(x)| \geq \epsilon\}$$

と書くことができ（$|\omega(x)| \geq \epsilon$ ならば当然 $\omega \neq 0$ であることに注意する），これは $\Omega'(A)$ の閉集合だから，コンパクトである（命題 2.18）．よって，$\widehat{x} \in C_0(\Omega(A))$ である．

指標の定義より，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A \colon A \to C_0(\Omega(A))$ は準同型であり，A が単位的ならばこれは単位的準同型である．また，命題 2.32 より，$\mathscr{G}_A$ はノルム減少である．　□

定理 2.37　A を可換 Banach 代数とし，$x \in A$ とする．このとき，

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}'_{C_0(\Omega(A))}(\widehat{x}) = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega'(A)\}$$

である．さらに，A が単位的ならば，

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_{C(\Omega(A))}(\widehat{x}) = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega(A)\}$$

である．[*9]

証明　<u>後半の主張</u>　A が単位的であるとする．このとき，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A$ は単位的準同型だから（命題 2.36），$\mathrm{Sp}_{C(\Omega(A))}(\widehat{x}) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ である（命題 1.10）．$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_{C(\Omega(A))}(\widehat{x})$ を示す．$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ とすると，$\lambda - x$ は可逆でないから，極大イデアルの存在定理（定理 1.5）より，$\lambda - x$ を含む極大イデアル M が存在する．$\mathrm{Ker}\,\omega = M$ を満たす $\omega \in \Omega(A)$ をとると（命題 2.31），$\lambda - x \in M$ より $\omega(\lambda - x) = 0$ であり，したがって $\lambda = \omega(x) \in \mathrm{Sp}_{C(\Omega(A))}(\widehat{x})$ である．よって，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_{C(\Omega(A))}(\widehat{x})$ である．

<u>前半の主張</u>　A の単位化 $\widetilde{A}$ に後半の主張を適用して，単位化の普遍性より $\Omega(\widetilde{A})$ から $\Omega'(A)$ への写像 $\omega \mapsto \omega|_A$ が全単射であることに注意すれば，

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x) = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega(\widetilde{A})\} = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega'(A)\}$$

として示される．　□

系 2.38　可換 Banach 代数 A の元 x に対して，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \|\widehat{x}\|_{C_0(\Omega(A))} = \sup\{|\omega(x)| \mid \omega \in \Omega(A)\}$$

である．[*10]

証明　定理 2.37 から従う．　□

系 2.39　単位的可換複素 Banach 代数 A の元 x に対して，次の条件は同値である．

[*9] 定理 2.37 は，係数体が $\mathbb{R}$ の場合には成り立たない．

[*10] 系 2.38 は，係数体が $\mathbb{R}$ の場合には成り立たない．

(a) x は A において可逆である．

(b) $\widehat{x}$ は $C(\Omega(A))$ において可逆である．

(c) 任意の $\omega \in \Omega(A)$ に対して $\omega(x) \neq 0$ である．[*11]

証明 (a), (b) はそれぞれ $0 \notin \mathrm{Sp}_A(x)$，$0 \notin \mathrm{Sp}_{C(\Omega(A))}(\widehat{x})$ といいかえられるから，主張は定理 2.37 から従う． □

系 2.40 単位的可換 Banach 代数 A 上の Gelfand 変換の像 $\mathrm{Im}\,\mathscr{G}_A \subseteq C(\Omega(A))$ は，$C(\Omega(A))$ における逆元をとる操作で閉じている．すなわち，$f \in \mathrm{Im}\,\mathscr{G}_A$ が $C(\Omega(A))$ において逆元 $f^{-1} \in C(\Omega(A))$ をもつならば，$f^{-1} \in \mathrm{Im}\,\mathscr{G}_A$ である．[*12]

証明 $x \in A$ とする．$\widehat{x} \in \mathrm{Im}\,\mathscr{G}_A$ が $C(\Omega(A))$ において可逆ならば，系 2.39 より，x は A において可逆である．よって，$(\widehat{x})^{-1} = \widehat{x^{-1}} \in \mathrm{Im}\,\mathscr{G}_A$ である． □

2.7 Gelfand 変換の例

例 2.41 Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．$C_0(\Omega)$ の Gelfand スペクトル $\Omega(C_0(\Omega))$ が Ω と自然に同一視でき，この同一視の下で Gelfand 変換 $\mathscr{G}_{C_0(\Omega)} \colon C_0(\Omega) \to C_0(\Omega(C_0(\Omega)))$ が $C_0(\Omega)$ の恒等写像に対応することを示そう．

(1) 閉集合 $S \subseteq \Omega$ に対して，

$$I_S = \{x \in C_0(\Omega) \mid x|_S = 0\}$$

と定める．I_S は $C_0(\Omega)$ の閉イデアルである．写像 $S \mapsto I_S$ が，Ω の閉集合全体のなす集合から $C_0(\Omega)$ の閉イデアル全体の集合への全単射であることを示す．

単射性を示す．S, S' を Ω の異なる閉集合とする．一般性を失わず，点 $\omega \in S \setminus S'$ がとれるとしてよい．Ω は局所コンパクト Hausdorff であり，特に完全正則だから，$x \in C(\Omega)$ であって $x(\omega) \neq 0$ かつ $f|_{S'} = 0$ を満たすものがとれる．このとき $x \in I_{S'} \setminus I_S$ だから，$I_S \neq I_{S'}$ である．よって，写像 $S \mapsto I_S$ は単射である．

全射性を示す．閉イデアル $I \subseteq C(\Omega)$ を任意にとる．これに対して

$$S = \{\omega \in \Omega \mid 任意の\ x \in I\ に対して\ x(\omega) = 0\}$$

と置くと，S は Ω の閉集合であり，$I \subseteq I_S$ である．あとは，$I_S \subseteq I$ を示せばよい．

そのためにまず，S と交わらないコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ と $\epsilon > 0$ に対して，$z \in I$ であって常に $0 \leq z \leq 1$ かつ K 上で $z \geq 1 - \epsilon$ を満たすものが存在することを示す．S の定義と $K \cap S = \emptyset$，および K のコンパクト性より，有限個の $y_1, \ldots, y_n \in I$ を $(\{\omega \in \Omega \mid |y_k(\omega)| > 1\})_{1 \leq k \leq n}$ が K を被覆するようにとれる．これを用いて

$$y = |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 = y_1\overline{y_1} + \cdots + y_n\overline{y_n} \in I$$

と置くと，常に $y \geq 0$ かつ K 上で $y \geq 1$ を満たす．そこで，$z = \epsilon^{-1}y/(1 + \epsilon^{-1}y) \in I$ と置くと，常に $0 \leq z \leq 1$ であり，K 上で

$$1 - z = \frac{1}{1 + \epsilon^{-1}y} \leq \frac{1}{1 + \epsilon^{-1}} < \epsilon,$$

[*11] 系 2.39 は，係数体が $\mathbb{R}$ の場合には成り立たない．
[*12] 系 2.40 は，係数体が $\mathbb{R}$ の場合には成り立たない．

を満たす．これで，求める関数 $z \in I$ が構成できた．

以上を踏まえて，$I_S \subseteq I$ を示す．$x \in I_S$ とする．$\epsilon > 0$ を任意にとり，$K = \{\omega \in \Omega \mid |x(\omega)| \geq \epsilon\}$ と置く．すると，K は S と交わらないコンパクト集合だから，前段の結果より，$z \in I$ であって常に $0 \leq z \leq 1$ かつ K 上で $z \geq 1 - \epsilon$ を満たすものがとれる．この z について，$zx \in I$ かつ $\|zx - x\| \leq \max\{\epsilon, \epsilon\|x\|\}$ が成り立つ．$\epsilon \to +0$ のとき $\max\{\epsilon, \epsilon\|x\|\} \to 0$ だから，I が閉イデアルであることより，$x \in I$ を得る．これで，$I_S \subseteq I$ が示された．

(2)　点 $\omega \in \Omega$ に対して，

$$I_\omega = \{x \in C_0(\Omega) \mid x(\omega) = 0\}$$

と定めると，写像 $\omega \mapsto I_\omega$ は Ω から $C_0(\Omega)$ の極大正則イデアル全体の集合への全単射である．これは，(1) と Banach 代数の極大正則イデアルが常に閉であること（命題 2.13）から従う．

(3)　点 $\omega \in \Omega$ に対して，$C_0(\Omega)$ の元に ω を代入する写像 $x \mapsto x(\omega)$ を，ev_ω と書く．ev_ω は，$C_0(\Omega)$ 上の 0 でない指標である．(2) および 0 でない指標と極大正則イデアルとの一対一対応（命題 2.31）より，写像

$$\phi\colon \Omega \to \Omega(C_0(\Omega)), \quad \omega \mapsto \mathrm{ev}_\omega$$

は全単射である．この写像 ϕ が同相写像であることを示す．$\Omega' = \Omega \cup \{\infty\}$ を Ω の 1 点コンパクト化とすると，

$$\phi'\colon \Omega' \to \Omega'(C_0(\Omega)), \quad \omega \mapsto \begin{cases} \mathrm{ev}_\omega & (\omega \in \Omega) \\ 0 & (\omega = \infty) \end{cases}$$

は全単射で ϕ の拡張になっている．そこで，ϕ' が同相写像であることを示せばよい．$\Omega(C_0(\Omega))$ には汎弱位相が入っているから，ϕ' の連続性をいうためには，任意の $x \in C_0(\Omega)$ に対して Ω' 上の関数

$$\omega \mapsto \phi'(\omega)(x) = \begin{cases} x(\omega) & (\omega \in \Omega) \\ 0 & (\omega = \infty) \end{cases}$$

が連続であることをいえばよい．ところが，これは $x \in C_0(\Omega)$ のいいかえにすぎない．よって，ϕ' はコンパクト Hausdorff 空間の間の連続全単射だから（命題 2.34），同相写像である．

(4)　(3) の同相写像によって $\Omega(C_0(\Omega))$ を Ω と同一視するとき，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_{C_0(\Omega)}\colon C_0(\Omega) \to C(\Omega(C_0(\Omega)))$ は，恒等写像 $\mathrm{id}_{C_0(\Omega)}$ に対応する．実際，$x \in C_0(\Omega)$ の Gelfand 変換 $\widehat{x} \in C_0(\Omega(C_0(\Omega)))$ は，(3) の同相写像による同一視によって，$\widehat{x} \circ \phi = x$ に移る．

例 2.42　畳み込みを乗法とする単位的可換 Banach 代数

$$l^1(\mathbb{Z}) = \left\{ a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)| < \infty \right\}$$

を考える．$n \in \mathbb{Z}$ に対して，n において値 1，それ以外の点において値 0 をとる $l^1(\mathbb{Z})$ の元を δ_n と書くことにする．

$\lambda \in \mathbb{U}$ に対して，写像 $\omega_\lambda\colon l^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ を

$$\omega_\lambda(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \lambda^n$$

と定める．ω_λ は $l^1(\mathbb{Z})$ 上の 0 でない指標である．$\mathbb{U}$ から $\Omega(l^1(\mathbb{Z}))$ への写像 $\lambda \mapsto \omega_\lambda$ が同相であり，その逆写像が $\omega \mapsto \omega(\delta_1)$ で与えられることを示そう．

$\lambda \in \mathbb{U}$ に対して $\omega_\lambda(\delta_1) = \lambda$ であることは明らかである．逆に，$\omega \in \Omega(l^1(\mathbb{Z}))$ が与えられたとして，$\lambda = \omega(\delta_1) \in \mathbb{C}$ と置く．畳み込みに関して δ_1 が可逆かつ $\delta_1^n = \delta_n$（$n \in \mathbb{Z}$）であることに注意すると，$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ かつ

$$\omega(\delta_n) = \omega(\delta_1)^n = \lambda^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

を得る．指標 ω はノルム減少だから（命題 2.32），$\lambda \in \mathbb{U}$ でなければならない．さらに，ω の連続性より，$a \in l^1(\mathbb{Z})$ に対して

$$\omega(a) = \omega\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\lambda^n = \omega_\lambda(a),$$

したがって $\omega = \omega_\lambda$ が成り立つ．よって，写像 $\lambda \mapsto \omega_\lambda$ と写像 $\omega \mapsto \omega(\delta_1)$ とは互いに他の逆を与える全単射である．最後に，$\Omega(l^1(\mathbb{Z}))$ には $l^1(\mathbb{Z})$ 上の各点収束位相が入っているから，写像 $\omega \mapsto \omega(\delta_1)$ は連続である．コンパクト Hausdorff 空間の間の連続全単射は同相写像だから，これらの全単射は同相を与える．

これにより，$l^1(\mathbb{Z})$ の Gelfand スペクトル $\Omega(l^1(\mathbb{Z}))$ は $\mathbb{U}$ と自然に同一視できる．この同一視の下で，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_{l^1(\mathbb{Z})} \colon l^1(\mathbb{Z}) \to C(\Omega(l^1(\mathbb{Z})))$ は，

$$\overline{\mathscr{F}}a(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)e^{in\theta}$$

で与えられる共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}} \colon l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{U})$ に対応する．

例 2.42 の応用として，Fourier 級数論における次の定理を示す．

定理 2.43（Wiener の $1/f$ 定理）

$$A(\mathbb{U}) = \{f \in C(\mathbb{U}) \mid f \text{ の Fourier 級数は絶対収束する}\}$$

と置く[*13]．$f \in A(\mathbb{U})$ かつ $\mathbb{U}$ 上で常に $f \neq 0$ ならば，$1/f \in A(\mathbb{U})$ である．

証明　Fourier 級数に関する逆変換公式（たとえば，「Fourier 級数のノート」[12] を参照のこと）より，$A(\mathbb{U})$ は共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}} \colon l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{U})$ の像に等しい．例 2.42 で見たとおり，この共役 Fourier 変換は $l^1(\mathbb{Z})$ 上の Gelfand 変換に同一視されるのだったから，主張は系 2.40 の結果である．□

3　C* 代数

3.1　対合代数

定義 3.1（対合代数）　代数 A から自身への写像 $x \mapsto x^*$ であって，次の条件を満たすものを，A 上の**対合**（involution）という．

(i) 写像 $x \mapsto x^*$ は共役線型である．すなわち，任意の λ, $\mu \in \mathbb{C}$ と x, $y \in A$ に対して，$(\lambda x + \mu y)^* = \overline{\lambda}x^* + \overline{\mu}y^*$ である．
(ii) 任意の x, $y \in A$ に対して，$(xy)^* = y^*x^*$ である．
(iii) 任意の $x \in A$ に対して，$x^{**} = x$ である．

[*13] $A(\mathbb{U})$ は **Wiener 代数**と呼ばれる．

対合を備えた代数を，**対合代数**（involutive algebra）という．

特に断らなければ，対合代数に定まった対合は，記号 $x \mapsto x^*$ で表す．また，対合代数の部分集合 S に対して，$S^* = \{x^* \mid x \in S\}$ と書く．

注意 3.2 A を対合代数とする．

(1) u が A の左単位元ならば，u^* は A の右単位元であり，したがってこれらは一致して A の単位元となる．u が A の右単位元であるとしても同様である．
(2) (1) より特に，A が単位的ならば，$1_A^* = 1_A$ である．
(3) A が単位的ならば，$x \in A$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda - x$ が可逆であることと，$(\lambda - x)^* = \overline{\lambda} - x^*$ が可逆であることとは同値である．したがって，$\mathrm{Sp}_A(x^*)$ は $\mathrm{Sp}_A(x)$ の複素共役写像 $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ による像に等しい．また，A が単位的とは限らなくても，$x \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x^*)$ は $\mathrm{Sp}_A(x)$ の複素共役写像による像に等しい．

対合代数 A の部分代数 B について，B が A の対合に関して閉じていれば，B は A の対合の制限によって対合代数をなす．このとき，B を A の**部分対合代数**（involutive sublagebra）という．さらに，A が単位的で B がその部分単位的代数でもあるとき，B を A の**部分単位的対合代数**（unital involutive subalgebra）という．

S を対合代数 A の部分集合とすると，S を含む A の最小の部分対合代数が存在する．これを，**S が生成する A の部分対合代数**という．さらに，A が単位的ならば，S を含む A の最小の部分単位的対合代数が存在する．これを，**S が生成する A の部分単位的代数**という．

対合代数 A の両側イデアル I について，I が A の対合に関して閉じていれば，A の対合は A/I 上の対合を誘導し，これによって A/I は対合代数をなす．このとき，A/I を A の I による**商対合代数**という．

定義 3.3（対合準同型，対合同型） 対合代数 A から B への**対合準同型**（involutive homomorphism）とは，準同型 $\phi\colon A \to B$ であって，対合を保つ（すなわち，任意の $x \in A$ に対して $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ である）ものをいう．全単射な対合準同型を，**対合同型**（involutive isomorphism）という．対合代数 A から B への対合同型が存在するとき，A と B は**対合同型**（involutively isomorphic）であるという．さらに，A と B が単位的であるとき，対合準同型・対合同型 $\phi\colon A \to B$ であって $\phi(1_A) = 1_B$ を満たすものを，それぞれ，A から B への**単位的対合準同型・単位的対合同型**という．単位的対合代数 A から B への単位的対合同型が存在するとき，A と B は**単位的対合同型**であるという．

定義 3.4（Hermite 元，正規元，ユニタリ元） A を対合代数とし，$x \in A$ とする．

(1) x が **Hermite**（hermitian）であるとは，$x^* = x$ であることをいう．A の Hermite 元全体のなす A の部分実線型空間を，A_{h} と書く．
(2) x が**正規**（normal）であるとは，$xx^* = x^*x$ であることをいう．
(3) A が単位的であるとき，x が**ユニタリ**（unitary）であるとは，$xx^* = x^*x = 1$ であることをいう．A のユニタリ元全体のなす $A^\times$ の部分群を，$\mathscr{U}(A)$ と書く．

対合準同型は，Hermite 元を Hermite 元に，正規元を正規元に移す．単位的対合準同型は，ユニタリ元をユニタリ元に移す．

注意 3.5 A を対合代数とする．任意の $x \in A$ に対して，Hermite 元 $a, b \in A$ であって $x = a + ib$ を満たすものが一意に存在し，それは

$$a = \frac{x + x^*}{2}, \qquad b = \frac{x - x^*}{2i} \tag{$*$}$$

で与えられる．実際，この a と b が条件を満たすことは明らかであり，逆に，等式 $x = a + ib$ とその両辺の対合をとったもの $x^* = a - ib$ を a と b について解けば，($*$) が得られる．$a = (x + x^*)/2$ を x の**実部**（real part），$b = (x - x^*)/2i$ を x の**虚部**（imaginary part）という．

前段の状況に加えて，B を対合代数，$\phi\colon A \to B$ を対合準同型とすると，$\phi(x)$ の実部・虚部はそれぞれ $\phi(a), \phi(b)$ となる．このことから，$\phi(A_{\mathrm{h}}) = \phi(A)_{\mathrm{h}}$ を得る．

定義 3.6（対合代数の単位化） A を対合代数とする．$\widetilde{A}$ を A の代数としての単位化とし，$(x, \lambda) \in \widetilde{A}$ に対して

$$(x, \lambda)^* = (x^*, \overline{\lambda})$$

と定めると，容易に確かめられるように，これは $\widetilde{A}$ 上の対合である．これによって $\widetilde{A}$ を単位的対合代数とみなしたものを，対合代数 A の**単位化**（unitization）という．

容易に確かめられるように，対合代数の単位化は，次の普遍性を満たす：A を対合代数，$\widetilde{A}$ をその単位化とすると，任意の単位的対合代数 B と対合準同型 $\phi\colon A \to B$ に対して，ϕ は単位的対合準同型 $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{A} \to B$ に一意に拡張される．

3.2 対合ノルム代数と対合 Banach 代数

定義 3.7（対合ノルム代数，対合 Banach 代数） 対合代数 A 上のノルム $\|{-}\|$ が A **の対合代数の構造と整合する**とは，それが A の代数の構造の整合し，かつ対合 $x \mapsto x^*$ が等長になる（すなわち，任意の $x \in A$ に対して $\|x^*\| = \|x\|$ である）ことをいう．対合代数 A にその対合代数の構造と整合するノルムが定まっているとき，A を**対合ノルム代数**（involutive normed algebra）という．完備な対合ノルム代数を，**対合 Banach 代数**（involutive Banach algebra）という．

対合ノルム代数 A の部分対合代数 B は，A のノルムの制限によって対合ノルム代数をなす．このとき，B を A の**部分対合ノルム代数**という．A が対合 Banach 代数ならば，A の閉部分対合代数 B は，A のノルムの制限によって対合 Banach 代数をなす．このとき，B を A の**部分対合 Banach 代数**という．さらに，A が単位的で B がその部分単位的代数でもあるとき，B を A の**部分単位的対合ノルム代数**，**部分単位的対合 Banach 代数**という．対合ノルム代数において，部分ノルム代数の閉包はまた部分ノルム代数である．

A を対合ノルム代数とし，I をその対合で閉じた閉両側イデアルとすると，商対合代数 A/I に定まった対合は商ノルム代数としてのノルムに関して等長であり，したがって A/I は対合ノルム代数をなす．このとき，A/I を A の I による**商対合ノルム代数**という．A が対合 Banach 代数ならば，A/I も対合 Banach 代数であり，このとき，A/I を A の I による**商対合 Banach 代数**という．

例 3.8 例 2.2 で挙げた Banach 代数について考える．

(1) 局所コンパクト Hausdorff 空間 Ω に対して，Ω 上の無限遠で消える複素数値連続関数全体のなす可換 Banach 代数 $C_0(\Omega)$ は，複素共役 $x \mapsto \overline{x}$ を対合として，可換対合 Banach 代数をなす．

(2) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素全体のなす単位的 Banach 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ は，随伴

$x \mapsto x^*$ を対合として，単位的対合 Banach 代数をなす．特に，$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$（通常の内積により Hilbert 空間とみなす）の場合として，n 次正方行列の全体 $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ は，単位的対合 Banach 代数をなす．なお，$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の元として Hermite，正規，ユニタリであるとき，それぞれ，**自己随伴**（self-adjoint），**正規**，**ユニタリ**であるという．

(3) G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の左 Haar 測度を一つ固定する．G 上の可積分関数（の同値類）全体 $L^1(G)$ は，畳み込みを積として，L^1 ノルムに関して Banach 代数をなすのだった．さらに，$f \in L^1(G)$ に対して $f^* \in L^1(G)$ を

$$f^*(x) = \Delta_G(x)^{-1}\overline{f(x^{-1})} \qquad (x \in G)$$

と定めれば（Δ_G は G のモジュラ関数を表す），これを対合として，$L^1(G)$ は対合 Banach 代数をなす．

注意 3.9 対合代数 A に位相が定まっており，その位相によって A はノルム化可能な位相線型空間をなし，かつその位相に関して乗法 $(x, y) \mapsto xy$ と対合 $x \mapsto x^*$ は連続であるとする．このとき，A の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ であって，A を対合ノルム代数にするものが存在する．さらに，A が単位的でかつ 0 でなければ，そのノルムは $\|1\| = 1$ を満たすようにとれる．このことを示そう．

注意 2.3 で示したように，A の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ であって，A をノルム代数にするものが存在し，A が単位的でかつ 0 でなければ，そのノルムは $\|1\| = 1$ を満たすようにとれる．これを用いて

$$\|x\|_* = \max\{\|x\|, \|x^*\|\} \qquad (x \in A)$$

と定めれば，容易に確かめられるように，この $\|{-}\|_*$ が条件を満たすノルムとなる．

注意 3.10 対合代数 A 上の線型形式 f に対して，A 上の線型形式 f^* を

$$f^*(x) = \overline{f(x^*)} \qquad (x \in A)$$

と定めると，f^* も A 上の線型形式である．任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ と A 上の線型形式 f, g に対して，

$$(\lambda f + \mu g)^* = \overline{\lambda} f^* + \overline{\mu} g^*, \qquad f^{**} = f$$

である．A 上の線型形式 f は，$f^* = f$ を満たすとき **Hermite** であるといい，A 上の Hermite 線型形式全体のなす空間を，$(A^\vee)_{\mathrm{h}}$ と書く．$(A^\vee)_{\mathrm{h}}$ は，$A^\vee$ の実部分線型空間である．A が対合ノルム代数ならば，A 上の連続線型形式 f に対して，$\|f^*\| = \|f\|$ である．また，このとき，A 上の連続な Hermite 線型形式全体のなす空間を，$(A^*)_{\mathrm{h}}$ と書く．

$(A^\vee)_{\mathrm{h}}$ から $A_{\mathrm{h}}^\vee$ への写像 $f \mapsto f|_{A_{\mathrm{h}}}$ は，実線型同型である．A が対合ノルム代数ならば，この写像は $(A^*)_{\mathrm{h}}$ から A_{h}^* への実線型同型をも与えるが，これは作用素ノルムに関して等長である．このことを示そう．A 上の連続な Hermite 線型形式 f を任意にとる．$\|f|_{A_{\mathrm{h}}}\| \leq \|f\|$ は明らかである．一方で，任意の $x \in A$ に対して

$$\operatorname{Re} f(x) = f\left(\frac{x + x^*}{2}\right) \leq \|f|_{A_{\mathrm{h}}}\| \left\|\frac{x + x^*}{2}\right\| \leq \|f|_{A_{\mathrm{h}}}\| \|x\|$$

であり，この不等式で x を λx（λ は絶対値 1 の複素数）で置き換えることにより $\operatorname{Re} \lambda f(x) \leq \|f\| \|x\|$ もわかるから，

$$|f(x)| = \sup_{|\lambda|=1} \operatorname{Re} \lambda f(x) \leq \|f|_{A_{\mathrm{h}}}\| \|x\|$$

である．よって，$\|f\| \leq \|f|_{A_{\mathrm{h}}}\|$ である．これで，主張が示された．

注意 3.11（対合ノルム代数の単位化） A を対合ノルム代数とし，$\widetilde{A}$ を A の代数としての単位化とする．このとき，$\widetilde{A}$ の対合代数の構造と整合するノルム $\|-\|_{\widetilde{A}}$ であって，A のノルム $\|-\|_A$ の拡張であるものが存在する．たとえば，注意 2.4 と同様に，$x+\lambda \in \widetilde{A}$（$x \in A$，$\lambda \in \mathbb{C}$）に対して

$$\|x+\lambda\|_{\widetilde{A}} = \|x\|_A + |\lambda|$$

と定めればよい．このようなノルム $\|-\|_{\widetilde{A}}$ を一つ固定するとき，$\widetilde{A}$ を対合ノルム代数 A の単位化という．

Banach 代数の単位化が単位的 Banach 代数であるのと同様に（注意 2.4），対合 Banach 代数の単位化は単位的対合 Banach 代数である．

3.3 C* 代数

定義 3.12（C* 代数） 対合を備えた Banach 代数 A であって，任意の $x \in A$ に対して

$$\|x\|^2 = \|x^*x\|$$

を満たすものを（これを C* 条件という），**C* 代数**（C*-algebra）という．

注意 3.13

(1) A を単位的 C* 代数とすると，$\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$ だから，$\|1\|$ は 0 または 1 である．よって，$A \neq 0$ ならば $\|1\| = 1$ である．より一般に，$A \neq 0$ ならば，ユニタリ元 $u \in A$ に対して

$$\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$$

であり，したがって $\|u\| = 1$ である．

(2) A は対合を備えた Banach 代数で，条件「任意の $x \in A$ に対して $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ である」を満たすとする．すると，$x \in A$ に対して

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$$

であり，したがって $\|x\| \leq \|x^*\|$ である．x を x^* に置き換えれば $\|x^*\| \leq \|x\|$ もわかるから，A は対合 Banach 代数である．これより，$x \in A$ に対して

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$$

だから，$\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ と合わせて，$\|x\|^2 = \|x^*x\|$ を得る．よって，A は C* 代数である．

(3) (2) からわかるように，C* 代数は対合 Banach 代数である．

例 3.14 例 3.8 で挙げた対合 Banach 代数について考える．

(1) Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．容易に確かめられるように，$C_0(\Omega)$ は可換 C* 代数である．

(2) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ は単位的 C* 代数である．実際，任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，

$$\|x\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|x\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \langle \xi | x^*x\xi \rangle \leq \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\xi\|\|x^*x\xi\| \leq \|x^*x\|$$

だから，注意 3.13 (2) より，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ は C* 条件を満たす．特に，$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$（通常の内積により Hilbert 空間とみなす）の場合として，n 次正方行列の全体 $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ は，単位的 C* 代数をなす．

(3) G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の左 Haar 測度を一つ固定する．$L^1(G)$ は，一般には C* 代数にならない．

C* 代数 A の閉部分対合代数 B は，また C* 代数をなす．このとき，B を A の**部分 C* 代数**（C*-subalgebra）という．さらに，A が単位的で B がその閉部分単位的対合代数であるとき，B は単位的 C* 代数をなす．このとき，B を A の**部分単位的 C* 代数**（unital C*-subalgebra）という．

本小節の以下の部分では，C* 条件から導かれる，C* 代数の著しい性質を見る．

定理 3.15　C* 代数 A の正規元 x に対して，$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \|x\|$ である．

証明　$y \in A$ を Hermite 元とすると，C* 条件より $\|y^2\| = \|y\|^2$ が成り立つ．これを繰り返し用いることにより，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$ が成り立つことがわかる．

$x \in A$ を正規元とする．x^*x が Hermite であることに注意すると，C* 条件と前段の結果，および x の正規性より

$$\|x\|^{2\cdot 2^n} = \|x^*x\|^{2^n} = \|(x^*x)^{2^n}\| = \|(x^*)^{2^n}x^{2^n}\| = \|(x^{2^n})^*x^{2^n}\| = \|x^{2^n}\|^2$$

であり，したがって $\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$ を得る．よって，スペクトル半径公式（定理 2.29）より

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \|x\|$$

である．□

定理 3.16　対合 Banach 代数 A から C* 代数 B への対合準同型 $\phi\colon A \to B$ は，ノルム減少である．

証明　$x \in A$ とする．まず，B が C* 代数であることと定理 3.15 より，

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^*\phi(x)\| = \|\phi(x^*x)\| = \|\phi(x^*x)\|_{\mathrm{Sp}}$$

である．次に，命題 1.10 より $\mathrm{Sp}'_B(\phi(x^*x)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(x^*x)$ だから，

$$\|\phi(x^*x)\|_{\mathrm{Sp}} \le \|x^*x\|_{\mathrm{Sp}}$$

である．最後に，命題 2.25 より，

$$\|x^*x\|_{\mathrm{Sp}} \le \|x^*x\| \le \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$$

である．以上より，$\|\phi(x)\| \le \|x\|$ を得る．□

系 3.17　C* 代数の間の対合同型は，等長である．

証明　その対合同型とその逆写像に定理 3.16 を適用すればよい．□

系 3.18　対合代数 A 上のノルムであって A を C* 代数にするものは，たかだか一意である．

証明　系 3.17 からただちに従う．□

注意 3.19　定理 3.15 より，C* 代数の正規元 x が冪零ならば $\|x\| = \|x\|_{\mathrm{Sp}} = 0$ であり，したがって $x = 0$ である．特に，可換 C* 代数は 0 以外の冪零元をもたない．これより，たとえば，多項式代数 $\mathbb{C}[T]$ の商代数 $\mathbb{C}[T]/(T^2)$ が

$$(\lambda + \mu T + (T^2))^* = \overline{\lambda} + \overline{\mu}T + (T^2) \qquad (\lambda,\, \mu \in \mathbb{C})$$

を対合としてなす 2 次元の単位的可換対合代数について，これを C* 代数にするノルムは存在しないことがわかる．

C* 代数の単位化を考える．

補題 3.20　A を C* 代数とする．$x \in A$ に対して A 上の連続線型作用素 $y \mapsto xy$ を L_x と書き，準同型 $\phi\colon A \to \mathscr{L}(A)$, $x \mapsto L_x$ を考える．

(1) ϕ は等長である．
(2) A が非単位的ならば，$\mathrm{id}_A \notin \mathrm{Im}\,\phi$ である．

証明　(1)　$x \in A$ とする．任意の $y \in A$ に対して $\|L_x(y)\| = \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ だから，$\|L_x\|_{\mathscr{L}(A)} \leq \|x\|$ である．一方で，C* 条件より $\|L_x(x^*)\| = \|xx^*\| = \|x^*\|^2 = \|x\|\|x^*\|$ だから，$\|L_x\|_{\mathscr{L}(A)} \geq \|x\|$ である．よって，ϕ は等長である．
(2)　A が非単位的ならば，A は左単位元をもたない（注意 3.2 (1)）．これは，$\mathrm{id}_A \notin \mathrm{Im}\,\phi$ を意味する．　□

補題 3.21　ノルム空間 E が有限余次元の完備な部分ノルム空間 M をもつならば，E は完備である．

証明　M の E における代数的補空間 N をとる．M は完備だから E において閉であり，したがって E/M は商ノルム空間をなす．包含線型写像 $N \to E$ と等化線型写像 $\pi\colon E \to E/M$ との合成によって線型同型写像 $\phi\colon N \to E/M$ が得られるが，N, E/M は有限次元ノルム空間だから，ϕ は位相線型空間の同型である．代数的直和分解 $E = M \oplus N$ に関する射影 $E \to N$ は $\phi^{-1} \circ \pi$ と書けるから，これは連続である．よって，$E = M \oplus N$ は位相的直和分解でもある．M は完備であり N は有限次元（したがって完備）だから，E は完備である．　□

命題 3.22　A を C* 代数とする．A の対合代数としての単位化 $\widetilde{A}$ 上のノルムであって，$\widetilde{A}$ を単位的 C* 代数にするものが一意に存在する．さらに，このノルムは，A のノルムの拡張である．

証明　<u>一意性</u>　系 3.18 から従う．
<u>存在</u>　まず，A が単位元 e をもつ場合を考える．このとき，直和 $A \oplus \mathbb{C}$ を成分ごとの積と対合で対合代数とみなすと，容易に確かめられるように，写像 $\phi\colon \widetilde{A} \to A \oplus \mathbb{C}$, $x + \lambda \mapsto (x + \lambda e, \lambda)$ は対合同型であって A からの包含写像と可換である．$A \oplus \mathbb{C}$ はノルム

$$\|(x, \lambda)\|_{A \oplus \mathbb{C}} = \max\{\|x\|_A, |\lambda|\} \qquad ((x, \lambda) \in A \oplus \mathbb{C})$$

によって C* 代数をなし，$\|{-}\|_{A \oplus \mathbb{C}}$ は A のノルムの拡張になっている．よって，対合同型 ϕ を通してこれに対応するノルム $\|{-}\|_{\widetilde{A}}$ によって $\widetilde{A}$ は C* 代数をなし，$\|{-}\|_{\widetilde{A}}$ は A のノルムの拡張になっている．
次に，A が非単位的である場合を考える．$x \in \widetilde{A}$ に対して A 上の連続線型作用素 $y \mapsto xy$ を L_x と書き，準同型

$$\phi\colon \widetilde{A} \to \mathscr{L}(A), \quad x \mapsto L_x$$

を考える．補題 3.20 (1) より，ϕ は A 上では等長である．また，補題 3.20 (2) より $\phi(1) = \mathrm{id}_A \notin \phi(A)$ だから $\phi(A) \cap \phi(\mathbb{C}1) = 0$ であり，したがって ϕ は単射である．よって，

$$\|x\|_{\widetilde{A}} = \|\phi(x)\|_{\mathscr{L}(A)} \qquad (x \in \widetilde{A})$$

と定めると，$\|{-}\|_{\widetilde{A}}$ は $\widetilde{A}$ の代数の構造と整合するノルムであり，A のノルムの拡張になっている．以下，$\|{-}\|_{\widetilde{A}}$ によって $\widetilde{A}$ をノルム代数とみなす．

$\widetilde{A}$ が C* 代数であることを示す．$\widetilde{A}$ は余次元 1 の完備な部分ノルム空間 A をもつから，補題 3.21 より完備である．あとは，$x \in \widetilde{A}$ に対して $\|x\|_{\widetilde{A}}^2 \le \|x^*x\|_{\widetilde{A}}$ を示せばよい（注意 3.13 (2)）．$\|x\|_{\widetilde{A}} = 1$ のときに示せば十分だから，このように仮定する．すると，$\|{-}\|_{\widetilde{A}}$ の定義より，任意の $0 < \epsilon \le 1$ に対して，$y \in A$ であって $\|y\|_A \le 1$ かつ $\|xy\| \ge 1 - \epsilon$ を満たすものが存在する．この y について，

$$\|x^*x\|_{\widetilde{A}} \ge \|x^*xy\|_A \ge \|y^*x^*xy\|_A = \|xy\|_A^2 \ge (1-\epsilon)^2$$

である．これが任意の $0 < \epsilon \le 1$ に対して成り立つから，$\|x^*x\|_{\widetilde{A}} \ge 1$ である．これで，主張が示された．

□

定義 3.23（C* 代数の単位化） A を C* 代数とする．A の対合代数としての単位化 $\widetilde{A}$ に命題 3.22 で定まるノルムを与えて得られる単位的 C* 代数を，C* 代数 A の**単位化**（unitization）という．

注意 3.24 A を C* 代数とすると，A の C* 代数としての単位化は，A の対合ノルム代数としての単位化（注意 3.11）でもある．ただし，そのノルムは，注意 2.4 や注意 3.11 で与えたものとは，一般には異なる．

3.4 Gelfand–Naimark の定理

A を単位的 Banach 代数とする．$x \in A$ に対して，$((1/n!)x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能だから，

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \in A$$

が定義できる．

補題 3.25 単位的対合 Banach 代数 A の Hermite 元 x と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\exp(itx)$ はユニタリである．

証明 単位的対合 Banach 代数において対合が連続であることに注意すると，

$$(\exp(itx))^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(itx)^n\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-itx)^n = \exp(-itx)$$

を得る．これと，一般に $y, z \in A$ が可換ならば $\exp(y+z) = (\exp y)(\exp z)$ であることより，主張が従う．□

命題 3.26 可換 C* 代数 A 上の指標 ω は，ノルム減少な対合準同型である．

証明 ω がノルム減少であることは，命題 2.32 で示した．ω が対合を保つことを示す．単位化の普遍性より，A が単位的可換 C* 代数で，ω が A 上の単位的指標である場合に示せば十分である．Hermite 元 $x \in A$ を任意にとる．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，補題 3.25 より $\exp(itx)$ はユニタリだから，ユニタリ元のノルムが 1 以下[*14] であることより（注意 3.13 (1)），

$$|e^{it\omega(x)}| = |\omega(\exp(itx))| \le \|\exp(itx)\| \le 1$$

である．これが任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つから，$\omega(x) \in \mathbb{R}$ である．よって，ω は対合を保つ．□

[*14] $A = 0$ の場合が例外にならないように，「1 以下」とした．

定理 3.27（Gelfand–Naimark の定理） 可換 C* 代数 A 上の Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A\colon A \to C_0(\Omega(A))$ は，等長な対合同型である．さらに，A が単位的ならば，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A\colon A \to C(\Omega(A))$ は，等長な単位的対合同型である．

証明 $\mathscr{G}_A$ が（単位的）準同型であることは，Gelfand 変換の一般論であり，命題 2.36 ですでに示した．$\mathscr{G}_A$ が対合を保つことは，指標が対合を保つこと（命題 3.26）から従う．$\mathscr{G}_A$ の等長性は，可換性より任意の $x \in A$ が正規であることに注意すれば，系 2.38 と定理 3.15 より

$$\|\widehat{x}\|_{C(\Omega(A))} = \|x\|_{\mathrm{Sp}} = \|x\|$$

として示される．

$\mathscr{G}_A$ の全射性を示す．$\mathscr{G}_A$ は等長だから，A が完備であることより $\mathscr{G}_A(A)$ も完備であり，したがって $\mathscr{G}_A(A)$ は $C_0(\Omega(A))$ において閉である．一方で，$\operatorname{Im}\mathscr{G}_A$ は $C_0(\Omega(A))$ の部分対合代数であり，$\Omega(A)$ のどの点でも消えず，$\Omega(A)$ の任意の異なる 2 点を分離するから，Stone–Weierstrass の定理より，$\operatorname{Im}\mathscr{G}_A$ は $C_0(\Omega(A))$ において稠密である．よって，$\mathscr{G}_A$ は全射である． □

注意 3.28 コンパクト Hausdorff 空間と連続写像のなす圏を **CHaus**，単位的可換 C* 代数と単位的対合準同型のなす圏を $\mathbf{CC}^*_{\mathbf{1}}$ と書くことにする．コンパクト Hausdorff 空間 X に対してその上の複素数値連続関数全体のなす単位的可換 C* 代数 $C(X)$ を与える対応は，自然な方法で関手 $C\colon \mathbf{CHaus}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CC}^*_{\mathbf{1}}$ をなす．また，単位的可換 C* 代数 A に対してその Gelfand スペクトル $\Omega(A)$ を与える対応は，自然な方法で関手 $\Omega\colon \mathbf{CC}^*_{\mathbf{1}} \to \mathbf{CHaus}^{\mathrm{op}}$ をなす．例 2.41 と Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，これらは互いに他の準逆を与える反変圏同値である．

系 3.29 C* 代数 A の Hermite 元 x について，$\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}$ である．

証明 部分代数に移ることでスペクトルが真に小さくなることはないから（系 1.11），Hermite 元 x が生成する部分 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，$A = C_0(\Omega)$（Ω は局所コンパクト Hausdorff 空間）としてよい．このとき，主張は明らかである． □

系 3.30 A を C* 代数，B をその部分 C* 代数とし，$x \in B$ とする．このとき，

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}'_B(x)$$

である．さらに，A が単位的 C* 代数で B がその部分単位的 C* 代数ならば，

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$$

である．特に，B は，A における逆元をとる操作で閉じている．

証明 後半の主張 A を単位的 C* 代数とし，B をその部分単位的 C* 代数とする．$x \in B$ が A において可逆ならば，B においても可逆であることを示せばよい．まず，x が Hermite ならば，$\mathrm{Sp}_B(x)$ は $\mathbb{R}$ に含まれ（系 3.29），したがって穴をもたないから，$\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$ である（命題 2.23）．特に，x が A において可逆ならば，B においても可逆である．次に，一般の場合を考える．x が A において可逆ならば，x^* もそうであり，したがって xx^* もそうである．そこで，すでに示した Hermite 元に対する結果より，xx^* は B においても可逆である．これより，x は B において右逆元をもつ．同様に，x^*x を考えれば，x が B において左逆元をもつことがわかる．よって，x は B において可逆である．

前半の主張　$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ をそれぞれ A, B の単位化とすると，$\widetilde{B}$ は $\widetilde{A}$ の部分単位的 C* 代数とみなせる．よって，すでに示した後半の主張より，$x \in B$ に対して

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x) = \mathrm{Sp}_{\widetilde{B}}(x) = \mathrm{Sp}'_B(x)$$

である．□

系 3.31　A を C* 代数とし，$x \in A$ を正規元とする．

(1) x が Hermite であるための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}$ である．

(2) A が単位的であるとする．このとき，x がユニタリであるための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{U}$ である．

証明　部分（単位的）C* 代数に移ってもスペクトルは変わらないから（系 3.30），正規元 x が生成する部分（単位的）C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，$A = C_0(\Omega)$（Ω は，(1) については局所コンパクト Hausdorff 空間，(2) についてはコンパクト Hausdorff 空間）としてよい．このとき，主張は明らかである．□

注意 3.32　正規でない元 $x \in A$ に対しては，系 3.31 の結論は必ずしも成り立たない．たとえば，2 次正方行列全体のなす単位的 C* 代数 $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ において，$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ のスペクトルは $\{1\}$ だが，これは Hermite でもユニタリでもない．

C* 代数の間の対合同型は，必ず等長になるのだった（系 3.17）．Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）を用いて，この主張の一般化が示せる．

補題 3.33　X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし，$F\colon Y \to X$ を連続写像とする．次の条件は同値である．

(a) F は全射である．

(b) 単位的対合準同型 $F^*\colon C(X) \to C(Y),\ f \mapsto f \circ F$ は等長である．

(c) 単位的対合準同型 $F^*\colon C(X) \to C(Y),\ f \mapsto f \circ F$ は単射である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．F が全射でないとすると，$F(Y)$ は X の真の閉集合である．X はコンパクト Hausdorff であり，したがって完全正則だから，$f \in C(X) \setminus \{0\}$ であって $f|_{F(Y)} = 0$ を満たすものが存在する．この f について，$f \neq 0$ かつ $f \circ F = 0$ だから，F^* は単射でない．□

定理 3.34　C* 代数の間の単射な対合準同型は，等長である．

証明　A, B を C* 代数とし，$\phi\colon A \to B$ を単射な対合準同型とする．単位化をとることにより，A と B が単位的で ϕ が単射な単位的対合準同型である場合に帰着されるから，この場合を考える．示すべきことは，任意の $x \in A$ に対して $\|\phi(x)\| = \|x\|$ であることだが，C* 条件より，Hermite 元 $x \in A$ に対してこれを示せば十分である．x が生成する A の部分単位的 C* 代数と $\phi(x)$ が生成する B の部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A と B は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）と注意 3.28 より，$A = C(X)$，$B = C(Y)$，$\phi = F^*$（X, Y はコンパクト Hausdorff 空間，$F\colon Y \to X$ は連続写像）としてよい．このとき，主張は補題 3.33 から従う．□

3.5 連続関数算

本小節では，前小節で証明した Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）を基礎として，C* 代数の正規元を連続関数に「代入」する操作（連続関数算）を定義する．

まず，単位的 C* 代数における連続関数算を考える．

命題 3.35 A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，x が生成する A の部分単位的 C* 代数を A_x と書くことにする．x の A_x の元としての Gelfand 変換

$$\widehat{x}\colon \Omega(A_x) \to \mathbb{C}$$

は，$\Omega(A_x)$ から $\mathrm{Sp}_A(x)$ への同相写像を与える．

証明 Gelfand 変換 $\widehat{x}$ が連続であることは，すでに一般の可換 Banach 代数に対して示した（命題 2.36）．また，$\Omega(A_x)$ の各元は連続な単位的対合準同型であり，（命題 3.26），A_x は単位的 C* 代数として x によって生成されるから，$\Omega(A_x)$ の元は x における値によってたかだか一意に定まる．すなわち，$\widehat{x}$ は単射である．さらに，$\widehat{x}$ の像は，定理 2.37 と系 3.30 より

$$\widehat{x}(\Omega(A_x)) = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega(A_x)\} = \mathrm{Sp}_{A_x}(x) = \mathrm{Sp}_A(x)$$

である．以上より，$\widehat{x}$ は，$\Omega(A_x)$ から $\mathrm{Sp}_A(x)$ への連続全単射である．$\Omega(A_x)$ と $\mathrm{Sp}_A(x)$ はコンパクト Hausdorff だから（命題 2.34，命題 2.18），$\widehat{x}$ は，$\Omega(A_x)$ から $\mathrm{Sp}_A(x)$ への同相写像を与える． □

定義 3.36（連続関数算） A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，x が生成する A の部分単位的 C* 代数を A_x と書く．命題 3.35 の同相写像が誘導する単位的対合同型と，A_x 上の Gelfand 変換の逆とを合成して得られる，$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A_x への単位的対合同型

$$C(\mathrm{Sp}_A(x)) \xrightarrow{-\circ\widehat{x}} C(\Omega(A_x)) \xrightarrow{\mathscr{G}_{A_x}^{-1}} A_x$$

を考える．この単位的対合同型による $f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ の像を，$f(x) \in A_x \subseteq A$ と書く．このような，正規元の連続関数への「代入」を，**連続関数算**（continuous functional calculus）という．

定義 3.36 の状況で，写像 $f \mapsto f(x)$ は，$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への等長な単位的対合準同型である．特に，$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，$f(x)$ は必ず正規であり，$f(x)$ が Hermite であるための必要十分条件は f が実数値であることであり，$f(x)$ がユニタリであるための必要十分条件は f の値域が $\mathbb{U}$ に含まれることである．

命題 3.37 A を単位的 C* 代数とし，$x \in A$ を正規元とする．$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への写像 $f \mapsto f(x)$ は，$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への単位的対合準同型であって，$\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を x に移す唯一のものである．

証明 写像 $f \mapsto f(x)$ が単位的対合準同型であることは，上記のとおりである．命題 3.35 の同相写像が誘導する単位的対合同型によって，$\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ は $\widehat{x}$ に移され，これは Gelfand 変換の逆 $\mathscr{G}_{A_x}^{-1}$ によって x に移される．よって，写像 $f \mapsto f(x)$ は，$\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を x に移す．

C* 代数の間の対合準同型は自動的に連続であり（定理 3.16），Stone–Weierstrass の定理より C* 代数 $C(\mathrm{Sp}_A(x))$ は連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ によって生成されるから，条件を満たす写像は一意である． □

例 3.38　A を単位的 C* 代数とし，$x \in A$ を正規元とする．

(1) f を 1 変数多項式とし，これを $\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の連続関数とみなす．連続関数算の意味での $f(x)$ は，f に x を形式的に代入した結果に一致する．
(2) f を連続関数 $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ とする．x を f に代入できるための必要十分条件は，$0 \in \mathrm{Sp}_A(x)$，すなわち x が可逆であることであり，このとき，$f(x) = x^{-1}$ である．

例 3.39　Ω をコンパクト Hausdorff 空間とし，$x \in C(\Omega)$ とする．写像

$$C(\mathrm{Sp}_{C(\Omega)}(x)) = C(x(\Omega)) \to C(\Omega), \quad f \mapsto f \circ x$$

は，単位的対合準同型であって，連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を f に移す．よって，命題 3.37 より，$f \in C(x(\Omega))$ に対して $f(x) = f \circ x$ である．

連続関数算の結果 $f(x)$ は正規だから，$f(x)$ の連続関数算を考えることができる．

命題 3.40　A を単位的 C* 代数とする．正規元 $x \in A$ と $f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$ である．
(2) $g \in C(\mathrm{Sp}_A(f(x)))$ に対して，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$（(1) より，左辺が定義できる）である．

証明　(1)　写像 $f \mapsto f(x)$ は $C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への単射な単位的対合準同型だから，系 3.30 より，

$$\mathrm{Sp}_A(f(x)) = \mathrm{Sp}_{C(\mathrm{Sp}_A(x))}(f) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$$

である．

(2)　$C(\mathrm{Sp}_A(f(x)))$ から A への写像 $g \mapsto (g \circ f)(x)$ と $g \mapsto g(f(x))$ は，ともに連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を $f(x)$ に移す単位的対合準同型だから，命題 3.37 より両者は等しい．□

命題 3.41　A, B を単位的 C* 代数とし，$\phi\colon A \to B$ を単位的対合準同型とする．正規元 $x \in A$ と $f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，

$$\phi(f(x)) = f|_{\mathrm{Sp}_B(\phi(x))}(\phi(x))$$

（命題 1.10 より $\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ だから，右辺が定義できる）である．

証明　$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から B への写像 $f \mapsto \phi(f(x))$ と $f \mapsto f|_{\mathrm{Sp}_B(\phi(x))}(\phi(x))$ は，ともに連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を $\phi(x)$ に移す単位的対合準同型である．可換 C* 代数の間の対合準同型は自動的に連続であり（定理 3.16），Stone–Weierstrass の定理より単位的 C* 代数 $C(\mathrm{Sp}_A(x))$ は連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ によって生成されるから，両者は等しい．□

次に，単位的とは限らない C* 代数における連続関数算を考える．

A を C* 代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化とする．写像 $\omega_0\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ を

$$\omega_0(x + \lambda) = \lambda \qquad (x \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$$

と定めると，$\omega_0 \in \Omega(A)$ である．したがって，正規元 $x + \lambda \in \widetilde{A}$（正規元 $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$）と $f \in C(\mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x + \lambda))$ に対して，

$$\omega_0(f(x + \lambda)) = f(\omega_0(x + \lambda)) = f(\lambda)$$

である（命題 3.41）．特に，正規元 $x \in A$ と $f \in C(\mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(x)) = C(\mathrm{Sp}'_A(x))$ に対して，$f(x) \in A$ であるための必要十分条件は，$f(0) = 0$ である（命題 1.8 (1) より $0 \in \mathrm{Sp}'_A(x)$ であることに注意する）．

0 を含む $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 Ω に対して，$C(\Omega)$ の部分 C* 代数 $C'(\Omega)$ を，

$$C'(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid f(0) = 0\}$$

と定める．前段の議論より，正規元 $x \in A$ の $\widetilde{A}$ における連続関数算 $f(x)$ は，$f \in C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$ ならば A に属する．

命題 3.42　A を C* 代数とし, $x \in A$ を正規元とする．$C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$ から A への写像 $f \mapsto f(x)$ は, $C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$ から A への対合準同型であって，$\mathrm{Sp}'_A(x)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を x に移す唯一のものである．

証明　写像 $f \mapsto f(x)$ が連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を x に移す対合準同型であることは，命題 3.37 から従う．C* 代数の間の対合準同型は自動的に連続であり（定理 3.16），Stone–Weierstrass の定理より C* 代数 $C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$ は連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ によって生成されるから，条件を満たす写像は一意である．□

例 3.43　A を C* 代数とし, $x \in A$ を正規元とする．f を定数項をもたない 1 変数多項式とし，これを $\mathrm{Sp}'_A(x)$ 上の連続関数とみなす．連続関数算の意味での $f(x)$ は，f に x を形式的に代入した結果に一致する．

例 3.44　Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$x \in C_0(\Omega)$ とする．写像

$$C'(\mathrm{Sp}'_{C_0(\Omega)}(x)) = C'(x(\Omega) \cup \{0\}) \to C_0(\Omega), \quad f \mapsto f \circ x$$

は，単位的対合準同型であって，連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を x に移す．よって，命題 3.42 より，$f \in C'(x(\Omega) \cup \{0\})$ に対して $f(x) = f \circ x$ である．

命題 3.45　A を C* 代数とする．正規元 $x \in A$ と $f \in C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{Sp}'_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}'_A(x))$ である．
(2) $g \in C'(\mathrm{Sp}'_A(f(x)))$ に対して，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$（(1) より，左辺が定義できる）である．

証明　命題 3.40 から従う．□

命題 3.46　A, B を C* 代数とし，$\phi\colon A \to B$ を対合準同型とする．正規元 $x \in A$ と $f \in C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$ に対して，

$$\phi(f(x)) = f|_{\mathrm{Sp}'_B(\phi(x))}(\phi(x))$$

（命題 1.10 より $\mathrm{Sp}'_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(x)$ だから，右辺が定義できる）である．

証明　命題 3.41 から従う．□

補題 3.47（Fuglede–Putnam の定理）　A を C* 代数とする．$x \in A$ と正規元 $a, b \in A$ について，$xa = bx$ ならば，$xa^* = b^*x$ である．

証明　必要ならば単位化をとることで，一般性を失わず，A は単位的であると仮定する．

$xa = bx$ であるとする．$\lambda \in \mathbb{C}$ を固定すると，コンパクト一様収束位相に関して $e^{i\overline{\lambda}z} = \sum_{n=0}^{\infty}(i\overline{\lambda}z)^n/n!$ $(z \in \mathbb{C})$ が成り立つから，連続関数算の等長性より，A において

$$e^{i\overline{\lambda}a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\overline{\lambda}a)^n}{n!}, \qquad e^{i\overline{\lambda}b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\overline{\lambda}b)^n}{n!}$$

である．したがって，

$$xe^{i\bar{\lambda}a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(i\bar{\lambda}a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\bar{\lambda}b)^n x}{n!} = e^{i\bar{\lambda}b}x \tag{$*$}$$

である．

正則写像 $f\colon \mathbb{C} \to A$ を，

$$f(\lambda) = e^{-i\lambda b^*}xe^{i\lambda a^*} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

と定める．すると，($*$) と連続関数算の準同型性より

$$f(\lambda) = e^{-i\lambda b^*}e^{-i\bar{\lambda}b}xe^{i\bar{\lambda}a}e^{i\lambda a^*} = e^{-i(\lambda b^* + \bar{\lambda}b)}xe^{i(\bar{\lambda}a + \lambda a^*)}$$

である．$|e^{\pm i(\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z)}| = 1$（$z \in \mathbb{C}$）より $e^{-i(\lambda b^* + \bar{\lambda}b)}$ と $e^{i(\bar{\lambda}a + \lambda a^*)}$ はユニタリだから，

$$\|f(\lambda)\| \le \|e^{-i(\lambda b^* + \bar{\lambda}b)}\|\|x\|\|e^{i(\bar{\lambda}a + \lambda a^*)}\| \le \|x\|$$

である．したがって，Liouville の定理より，f は定数であり，

$$0 = f'(\lambda) = -ib^*e^{-i\lambda b^*}xe^{i\lambda a^*} + ie^{-i\lambda b^*}xa^*e^{i\lambda a^*}$$

が成り立つ．$\lambda = 0$ と置けば，$0 = -ib^*x + ixa^*$，すなわち $xa^* = b^*x$ を得る． □

定理 3.48 A を C* 代数とする．$x \in A$ と正規元 $a, b \in A$ について，次の条件 (a) と (b) は同値である．さらに，A が単位的ならば，これらは (c) とも同値である．

(a) $xa = bx$ である．
(b) 任意の $f \in C'(\mathrm{Sp}'_A(a) \cup \mathrm{Sp}'_A(b))$ に対して，$xf(a) = f(b)x$ である．
(c) 任意の $f \in C(\mathrm{Sp}_A(a) \cup \mathrm{Sp}_A(b))$ に対して，$xf(a) = f(b)x$ である．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\mathscr{F}' = \{f \in C'(\mathrm{Sp}'_A(a) \cup \mathrm{Sp}'_A(b)) \mid xf(a) = f(b)x\}$ と置くと，$\mathscr{F}'$ は $C'(\mathrm{Sp}'_A(a) \cup \mathrm{Sp}'_A(b))$ の閉部分対合代数をなす．ここで，閉であることは連続関数算の等長性から，対合で閉じていることは Fuglege–Putnam の定理（補題 3.47）から従う．したがって，Stone–Weierstrass の定理より，$\mathscr{F}'$ が連続写像 $\lambda \mapsto \lambda$ を含めば，$\mathscr{F}'$ は $C'(\mathrm{Sp}'_A(a) \cup \mathrm{Sp}'_A(b))$ 全体に一致する．すなわち，条件 (a) と (b) は同値である．

(a) $\Longleftrightarrow$ (c)（A が単位的である場合） $\mathscr{F} = \{f \in C(\mathrm{Sp}_A(a) \cup \mathrm{Sp}_A(b)) \mid xf(a) = f(b)x\}$ と置くと，$\mathscr{F}$ は $C'(\mathrm{Sp}_A(a) \cup \mathrm{Sp}_A(b))$ の閉部分単位的対合代数をなす．ここで，閉であることは連続関数算の等長性から，対合で閉じていることは Fuglege–Putnam の定理（補題 3.47）から従う．したがって，Stone–Weierstrass の定理より，$\mathscr{F}$ が連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を含めば，$\mathscr{F}$ は $C(\mathrm{Sp}_A(a) \cup \mathrm{Sp}_A(b))$ 全体に一致する．すなわち，条件 (a) と (c) は同値である． □

3.6 正元

定義 3.49（正元） C* 代数 A の元 x が**正**（positive）であるとは，x が Hermite であり，かつ $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}$ であることをいう．A の正元全体の集合を，A_+ と書く．Hermite 元 $x, y \in A$ に対して，$x - y$ が正であることを，$y \le x$ あるいは $x \ge y$ と書く．

注意 3.50 C* 代数の正規元が Hermite であるための必要十分条件は，そのスペクトルが $\mathbb{R}$ に含まれることであった（系 3.31 (1)）．したがって，正元の定義（定義 3.49）において，「Hermite」を「正規」に置き換え

ても定義は変わらない．また，A が単位的ならば，$x \in A$ に対して $\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \{0\}$ であった（命題 1.8 (2)）．したがって，このとき，正元の定義（定義 3.49）において，「$\mathrm{Sp}'_A(x)$」を「$\mathrm{Sp}_A(x)$」に置き換えても定義は変わらない．

注意 3.51　A を C* 代数とし，$x \in A$ を正規元とする．$f \in C'(\mathrm{Sp}'_A(x))$（$A$ が単位的ならば，$f \in C'(\mathrm{Sp}_A(x))$）に対して $\mathrm{Sp}'_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}'_A(x))$（$A$ が単位的ならば，$\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$）だから（命題 3.45 (1)，命題 3.40 (1)），$f(x)$ が正であるための必要十分条件は，f の値域が $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に含まれることである．たとえば，次のような連続関数算によって，正元が得られる．

(1) x が Hermite ならば，x^2 は正である．A が単位的で x が正かつ可逆ならば，x^{-1} も正である．

(2) x が Hermite ならば，$\mathbb{R}$ 上の連続関数 $t \mapsto \max\{t, 0\}$，$t \mapsto \max\{-t, 0\}$ に x を代入でき，その結果は正である．これらを，それぞれ x の**正の部分**（positive part），**負の部分**（negative part）といい，x^+，x^- と書く．連続関数算の準同型性より，
$$x^+ - x^- = x, \qquad x^+x^- = x^-x^+ = 0$$
が成り立つ．

(3) x が正ならば，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の連続関数 $t \mapsto t^\alpha$（$\alpha > 0$）に x を代入でき，その結果は正である．また，A が単位的で x が正かつ可逆ならば，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の連続関数 $t \mapsto t^\alpha$（$\alpha < 0$）に x を代入でき，その結果は正である．これらを，x^α と書く．連続関数算の準同型性と命題 3.40，命題 3.45 より，
$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$
が成り立つ（ただし，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし，$\alpha < 0$ または $\beta < 0$ ならば，A は単位的かつ x は可逆であるとする）．

注意 3.52　A, B を C* 代数とし，$\phi\colon A \to B$ を対合準同型とする．ϕ は Hermite 元を Hermite 元に移し，$x \in A$ に対して $\mathrm{Sp}'_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(x)$ だから（命題 1.10），ϕ は正元を正元に移す．次に，$y \in \phi(A)$ が正元であるとすると，Hermite 元 $x \in A$ が存在して $y = \phi(x)$ と書けるが（注意 3.5），$y = y^+ = \phi(x)^+ = \phi(x^+)$ も成り立つ（命題 3.46）．以上より，$\phi(A_+) = \phi(A) \cap B_+$ である．特に，A' が A の部分 C* 代数であるとき，$A'_+ = A' \cap A_+$ である．

例 3.53　Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，Ω 上の無限遠で消える連続関数全体のなす可換 C* 代数 $C_0(\Omega)$ を考える．$f \in C_0(\Omega)$ のスペクトルは $f(\Omega) \cup \{0\}$ だから（例 2.17 (1)），f が正であるための必要十分条件は，f の値域が $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に含まれることである．

3.7 節で，Hilbert 空間上の連続線型作用素全体のなす単位的 C* 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の正元の特徴付けを見る．

命題 3.54　A を単位的 C* 代数とする．Hermite 元 $x \in A$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\|x\| \leq t$ とする．このとき，x が正であることと $\|t - x\| \leq t$ とは同値である．

(2) $\|x\| \leq t$ と $-t \leq x \leq t$ とは同値である．

証明　部分単位的 C* 代数に移ってもスペクトルは変わらないから（系 3.30），Hermite 元 x が生成する部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，$A = C(\Omega)$（Ω はコンパクト Hausdorff 空間）としてよい．このとき，主張は明らかである．　□

系 3.55　C^* 代数 A の Hermite 元 x, y について，$0 \leq x \leq y$ ならば $\|x\| \leq \|y\|$ である．

証明　単位化をとることにより A が単位的である場合に帰着されるから，この場合を考える．$0 \leq x \leq y$ とする．命題 3.54 (2) より $y \leq \|y\|$ だから，仮定と合わせて，$0 \leq x \leq \|y\|$ を得る．このことと命題 3.54 (2) より，$\|x\| \leq \|y\|$ である． □

命題 3.56　A を C^* 代数とする．関係 $\leq$ は，A_{h} の実線型空間の構造と整合する順序であり，極限移行で保たれる．すなわち，次が成り立つ．

(1) $\lambda \geq 0$ と正元 $x \in A$ に対して，λx も正である．
(2) 正元 $x, y \in A$ に対して，$x + y$ も正である．
(3) $x \in A$ について，$x, -x$ がともに正ならば，$x = 0$ である．
(4) A_+ は，A の閉集合である．

証明　単位化をとることにより A が単位的である場合に帰着されるから，この場合を考える．

(1)　明らかである．

(2)　x, y が正ならば，命題 3.54 (1) より $\|\|x\| - x\| \leq \|x\|$ かつ $\|\|y\| - y\| \leq \|y\|$ だから，

$$\|(\|x\| + \|y\|) - (x + y)\| \leq \|\|x\| - x\| + \|\|y\| - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

である．よって，ふたたび命題 3.54 (1) より，$x + y$ は正である．

(3)　$x, -x$ がともに正ならば，$\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \{0\}$ だから，$\|x\| = \|x\|_{\mathrm{Sp}} = 0$ である（定理 3.15）．

(4)　命題 3.54 (1) より，正元全体のなす集合は

$$A_+ = \{x \in A_{\mathrm{h}} \mid \|\|x\| - x\| \leq \|x\|\}$$

と書ける．これは，A_{h} の閉集合であり，したがって A の閉集合である． □

命題 3.57　A を C^* 代数とする．

(1) A の任意の Hermite 元は，A の正元二つの差として書ける．また，A の任意の元は，A の正元たかだか四つの線型結合として書ける．
(2) A が単位的であるとする．このとき，A の任意の Hermite 元は，A のユニタリ元たかだか二つの実線型結合として書ける．また，A の任意の元は，A のユニタリ元たかだか四つの線型結合として書ける．

証明　C^* 代数の任意の元は実部・虚部への分解によって Hermite 元二つの線型結合として書けるから，Hermite 元に関する主張のみ示せば十分である．

(1)　Hermite 元 $x \in A$ は，$x = x^+ - x^-$ と書ける．

(2)　ノルム 1 以下の Hermite 元 $x \in A$ について示せば十分である．このとき，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [-1, 1]$ だから，連続関数算によって $u = x + (1 - x^2)^{1/2}$ と $v = x - (1 - x^2)^{1/2}$ が定義できる．$[-1, 1]$ 上の関数 $t \mapsto t \pm (1 - t^2)^{1/2}$ の値域は $\mathbb{U}$ に含まれるから u, v はユニタリであり，また $x = (u + v)/2$ である．これで，主張が示された． □

正元を特徴付ける定理を示すために，補題を一つ用意する．

補題 3.58　A を C^* 代数とする．$x \in A$ について，$x^* x \leq 0$ ならば $x = 0$ である．

証明　$x^*x \leq 0$ とすると，命題 1.9 より $xx^* \leq 0$ でもあり，したがって $x^*x+xx^* \leq 0$ である（命題 3.56 (2)）．x の実部・虚部をそれぞれ a, b と置くと，a, b が Hermite であることより a^2, $b^2 \geq 0$ だが（注意 3.51 (1)），一方で

$$0 \geq x^*x + xx^* = (a - ib)(a + ib) + (a + ib)(a - ib) = 2(a^2 + b^2)$$

だから，$a^2 = b^2 = 0$ である（命題 3.56）．よって，C* 条件より $\|a\|^2 = \|a^2\| = 0$ かつ $\|b\|^2 = \|b^2\| = 0$ だから，$x = a + ib = 0$ である．□

定理 3.59　A を C* 代数とする．$x \in A$ に対して，次の条件は同値である．

(a) x は正である．
(b) ある Hermite 元 $y \in A$ が存在して，$x = y^2$ となる．
(c) ある $y \in A$ が存在して，$x = y^*y$ となる．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　x が正であるとする．$y = x^{1/2}$ と置けば，y は $y^2 = x$ を満たす Hermite 元である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　注意 3.51 (1) ですでに述べた．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$y \in A$ として，y^*y が正であることを示す．$a = ((y^*y)^+)^{1/2}$，$b = ((y^*y)^-)^{1/2}$ と置くと，これらは Hermite であり，$a^2 - b^2 = y^*y$ かつ $ab = 0$ を満たす．これより

$$(yb)^*(yb) = by^*yb = b(a^2 - b^2)b = -b^4 \leq 0$$

だから，補題 3.58 より $yb = 0$ であり，したがって $b^4 = -(yb)^*(yb) = 0$ である．これより $\|b\|^4 = \|b^4\| = 0$ だから，$b = 0$ である．よって，$y^*y = a^2 - b^2 = a^2$ であり，a は Hermite だから，これは正である．□

系 3.60　A を C* 代数とする．Hermite 元 x, $y \in A$ について，$x \leq y$ ならば，任意の $z \in A$ に対して $z^*xz \leq z^*yz$ である．

証明　x, y は Hermite だから，z^*xz, z^*yz も Hermite である．$x \leq y$ とすると，定理 3.59 より，ある $a \in A$ が存在して $y - x = a^*a$ と書ける．すると $z^*yz - z^*xz = z^*a^*az = (az)^*(az)$ だから，ふたたび定理 3.59 より，$z^*xz \leq z^*yz$ である．□

定義 3.61（絶対値）　A を C* 代数とする．$x \in A$ に対して，$(x^*x)^{1/2}$（定理 3.59 より x^*x は正だから，連続関数算により，その 1/2 乗が定義される）を x の**絶対値**（absolute value）といい，$|x|$ と書く．

定義 3.61 の状況で，絶対値 $|x|$ は正である．また，x が正規ならば，絶対値 $|x|$ は，連続関数 $\lambda \mapsto |\lambda|$ に x を代入した連続関数算の結果に等しい（命題 3.45）．

最後に，実数による冪についての性質を一つ見ておく．

命題 3.62　A を C* 代数とし，x, $y \in A$ は Hermite で $0 \leq x \leq y$ を満たすとする．

(1) $0 < \alpha \leq 1$ に対して，$0 \leq x^\alpha \leq y^\alpha$ である．**（Löwner–Heinz の不等式）**
(2) A が単位的であるとする．このとき，x が可逆ならば，y も可逆であり，$0 \leq \alpha \leq 1$ に対して $0 \leq y^{-\alpha} \leq x^{-\alpha}$ である．

証明　(1)　単位化をとることにより A が単位的である場合に帰着されるから，この場合を考える．以下，$\mathbb{C}$ の部分集合上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を，z と書く．

まず，x, y が可逆である場合を考える．$[0,1]$ の部分集合 S を

$$S = \{\alpha \in [0,1] \mid x^\alpha \le y^\alpha\}$$

と定め，これが $[0,1]$ 全体に一致することを示す．K を $\mathbb{R}_{>0}$ のコンパクト集合とすると $[0,1]$ から $C(K)$ への写像 $\alpha \mapsto z^\alpha$ は連続だから，連続関数算の等長性より，$[0,1]$ から A への写像 $\alpha \mapsto x^\alpha$，$\alpha \mapsto y^\alpha$ はともに連続である．これと命題 3.56 (4) より，S は $[0,1]$ の閉集合である．また，明らかに $0, 1 \in S$ である．そこで，$S = [0,1]$ を示すためには，α, $\beta \in S$ ならば $(\alpha+\beta)/2 \in S$ であることをいえばよい．系 3.60 と命題 3.54 (2) より

$$\begin{aligned} S &= \{\alpha \in [0,1] \mid y^{-\alpha/2}x^\alpha y^{-\alpha/2} \le 1\} \\ &= \{\alpha \in [0,1] \mid \|y^{-\alpha/2}x^\alpha y^{-\alpha/2}\| \le 1\} \end{aligned}$$

であることに注意する．α, $\beta \in S$ とすると，

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha/2}y^{-\alpha/2}\|^2 &= \|(x^{\alpha/2}y^{-\alpha/2})^*(x^{\alpha/2}y^{-\alpha/2})\| = \|y^{-\alpha/2}x^\alpha y^{-\alpha/2}\| \le 1 \\ \|x^{\beta/2}y^{-\beta/2}\|^2 &= \|(x^{\beta/2}y^{-\beta/2})^*(x^{\beta/2}y^{-\beta/2})\| = \|y^{-\beta/2}x^\beta y^{-\beta/2}\| \le 1 \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} 1 &\ge \|x^{\alpha/2}y^{-\alpha/2}\|\|x^{\beta/2}y^{-\beta/2}\| \\ &\ge \|(x^{\alpha/2}y^{-\alpha/2})^*(x^{\beta/2}y^{-\beta/2})\| \\ &= \|y^{-\alpha/2}x^{(\alpha+\beta)/2}y^{-\beta/2}\| \\ &\ge \|y^{-\alpha/2}x^{(\alpha+\beta)/2}y^{-\beta/2}\|_{\mathrm{Sp}} && (*) \\ &= \|y^{(\beta-\alpha)/4}(y^{-(\alpha+\beta)/4}x^{(\alpha+\beta)/2}y^{-\beta/2})\|_{\mathrm{Sp}} \\ &= \|(y^{-(\alpha+\beta)/4}x^{(\alpha+\beta)/2}y^{-\beta/2})y^{(\beta-\alpha)/4}\|_{\mathrm{Sp}} && (**) \\ &= \|y^{-(\alpha+\beta)/4}x^{(\alpha+\beta)/2}y^{-(\alpha+\beta)/4}\|_{\mathrm{Sp}} \\ &= \|y^{-(\alpha+\beta)/4}x^{(\alpha+\beta)/2}y^{-(\alpha+\beta)/4}\| && (***) \end{aligned}$$

である．ここで，不等号 $(*)$ ではスペクトル半径がノルム以下であることを（命題 2.25），等号 $(**)$ では命題 1.9 を，等号 $(***)$ では正規元のスペクトル半径がノルムに等しいこと（定理 3.15）を用いた．これで，α, $\beta \in S$ ならば $(\alpha+\beta)/2 \in S$ であることが示された．

次に，一般の場合を考える．$0 < \alpha \le 1$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x+\epsilon), \mathrm{Sp}_A(y+\epsilon) \subseteq [\epsilon, \infty)$ より $x+\epsilon$, $y+\epsilon$ は可逆だから，前段の結果より $(x+\epsilon)^\alpha \le (y+\epsilon)^\alpha$ である．K を $\mathbb{R}_{\ge 0}$ のコンパクト集合とすると $\mathbb{R}_{\ge 0}$ から $C(K)$ への写像 $\epsilon \mapsto (z+\epsilon)^\alpha$ は連続だから，連続関数算の等長性より，$\epsilon \to +0$ のとき $(x+\epsilon)^\alpha \to x^\alpha$，$(y+\epsilon)^\alpha \to y^\alpha$ である．これらと命題 3.56 (4) より，$x^\alpha \le y^\alpha$ を得る．

(2)　(1) より，$\alpha = 1$ の場合に示せば十分である．

まず，$x = 1$ の場合を考える．部分単位的 C* 代数に移っても正性・可逆性は変わらないから（系 3.30），Hermite 元 y が生成する部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，$A = C(\Omega)$（Ω はコンパクト Hausdorff 空間）としてよい．このとき，主張は明らかである．

次に，x が一般の可逆元の場合を考える．$z = x^{-1/2}yx^{-1/2}$ と置くと，$0 \le x \le y$ と系 3.60 より $1 = x^{-1/2}xx^{-1/2} \le z$ である．したがって，前段の結果より，z は可逆かつ $z^{-1} \le 1$ である．ここで，

$$yx^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2} = x^{1/2}zz^{-1}x^{-1/2} = 1$$

であり，同様に $x^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}y=1$ だから，$x^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}$ は y の逆元である．さらに，$z^{-1}\leq 1$ と系 3.60 より，

$$y^{-1}=x^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}\leq x^{-1/2}x^{-1/2}=x^{-1}$$

である． □

注意 3.63 $\alpha>1$ に対しては，C* 代数において，$0\leq x\leq y$ だとしても $x^\alpha\leq y^\alpha$ であるとは限らない．たとえば，2 次正方行列全体のなす単位的 C* 代数 $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ の Hermite 元 p, q を

$$p=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$$

と定めると，p, $q\geq 0$ だから $0\leq p\leq p+q$ だが，

$$(p+q)^2-p^2=pq+qp+q^2=pq+qp+q=\begin{pmatrix}3/2&1\\1&1/2\end{pmatrix}$$

の固有値 $1\pm\sqrt{5}/2$ の一方は負だから，$p^2\leq(p+q)^2$ は成り立たない．

実は，ある $\alpha>1$ が存在して常に「$0\leq x\leq y$ ならば $x^\alpha\leq y^\alpha$」が成り立つような C* 代数は，可換であることが知られている [6, §1.3.9]．

3.7 例：$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の正元

補題 3.64 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とすると，$\operatorname{Ker}x^*$ と $\overline{\operatorname{Im}x}$ は，互いに他の（$\mathcal{K}$ における）直交補空間である．

証明 $\eta\in\mathcal{K}$ に対して，$\eta\in\operatorname{Ker}x^*$ は，任意の $\xi\in\mathcal{H}$ に対して $\langle x^*\eta|\xi\rangle=0$ であることと同値である．ここで，$\langle x^*\eta|\xi\rangle=\langle\eta|x\xi\rangle$ だから，これは $\eta\in(\operatorname{Im}x)^\perp=(\overline{\operatorname{Im}x})^\perp$ と同値である．よって，$\operatorname{Ker}x^*$ と $\overline{\operatorname{Im}x}$ は互いに他の直交補空間である． □

補題 3.65 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，そのスペクトル $\mathrm{Sp}_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}(x)$ は，

$$\nu(x)=\{\langle\xi|x\xi\rangle\mid\xi\in\mathcal{H},\ \|\xi\|=1\}$$

の閉包に含まれる[*15]．

証明 示すべきことは，任意の $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}(x)$ に対して $\lambda\in\overline{\nu(x)}$ であることだが，x を $x-\lambda$ に置き換えることにより，$\lambda=0$ の場合だけを考えればよい．以下，$0\in\mathrm{Sp}_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}(x)$，すなわち x が可逆でないとする．

まず，ある $c\geq 0$ が存在して，任意の $\xi\in\mathcal{H}$ に対して $\|\xi\|\leq c\|x\xi\|$ が成り立つ場合を考える．このとき，x は単射かつその像は閉だが [10, 補題 3.17]，一方で x は可逆でないから，x の像は稠密でない．したがって，補題 3.64 より x^* は単射でないから，ある $\xi\in\mathcal{H}$ が存在して $\|\xi\|=1$ かつ $x^*\xi=0$ を満たす．この ξ について

$$\langle\xi|x\xi\rangle=\langle x^*\xi|\xi\rangle=0$$

となるから，$0\in\nu(x)$ である．

[*15] $\nu(x)$ を，x の**数域**（numerical range）という．$\nu(x)$ の元の絶対値の上限を，x の**数域半径**（numerical radius）という．

次に，それ以外の場合を考える．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\xi \in \mathcal{H}$ が存在し，$\|\xi\| = 1$ かつ $\|x\xi\| \leq \epsilon$ を満たす．この ξ について，Cauchy–Schwarz の不等式より

$$|\langle \xi | x\xi \rangle| \leq \|\xi\| \|x\xi\| \leq \epsilon$$

となるから，$0 \in \overline{\nu(x)}$ である．これで，主張が示された． □

定理 3.66　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) x は単位的 C* 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の正元である．
(b) $\mathcal{H}$ 上のある連続自己随伴作用素 $y \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が存在して，$x = y^2$ となる．
(c) $\mathcal{H}$ からある Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 y が存在して，$x = y^*y$ となる．
(d) x は連続正作用素である（すなわち，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \xi | x\xi \rangle \geq 0$ である）．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　定理 3.59 の特別な場合である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$\mathcal{K}$ が Hilbert 空間であり，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 y が $x = y^*y$ を満たすとすると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \xi | x\xi \rangle = \langle \xi | y^*y\xi \rangle = \|y\xi\|^2 \geq 0$ となる．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \xi | x\xi \rangle \geq 0$ であるとする．すると，$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle \xi | x\eta \rangle + \langle \eta | x\xi \rangle = \langle \xi + \eta | x(\xi + \eta) \rangle - \langle \xi | x\xi \rangle - \langle \eta | x\eta \rangle \in \mathbb{R}$$

だから $\operatorname{Im}\langle \eta | x\xi \rangle = -\operatorname{Im}\langle \xi | x\eta \rangle$ であり，この式で ξ を $i\xi$ に置き換えれば，$\operatorname{Re}\langle \eta | x\xi \rangle = \operatorname{Im}\langle \eta | x(i\xi) \rangle = -\operatorname{Im}\langle i\xi | x\eta \rangle = \operatorname{Re}\langle \xi | x\eta \rangle$ もわかる．したがって，$\langle \eta | x\xi \rangle = \overline{\langle \xi | x\eta \rangle} = \langle x\eta | \xi \rangle$ だから，x は自己随伴である．また，補題 3.65 より，$\operatorname{Sp}_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}(x) \subseteq \overline{\nu(x)} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ である．よって，x は正である．[*16] □

3.8　近似単位元

定義 3.67（近似単位元）　ノルム代数 A の**近似単位元**（approximate unit）とは，A のノルム 1 以下の元からなるネット $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ であって，任意の $x \in A$ に対して

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda x = \lim_{\lambda \in \Lambda} x u_\lambda = x$$

を満たすものをいう．C* 代数 A の近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ のうち，各元 u_λ が正であり，順序 $\leq$（定義 3.49）に関して増加ネットであるものを，A の**増加近似単位元**（increasing approximate unit）という．

注意 3.68　一般に，単位的ノルム代数 A において，$\|1\| \geq 1$ であった．一方で，A が近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ をもつとすると，$\lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda = 1$ だから，$\|1\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda\| \leq 1$ となる．よって，単位的ノルム代数 A が近似単位元をもつならば，$\|1\| = 1$ である．逆に，$\|1\| = 1$ ならば，1 のみからなるネットが A の自明な近似単位元となる．

[*16] 定理 3.59（一般の単位的 C* 代数における正元の特徴付け）の (c) $\Longrightarrow$ (a) の証明では，補題 3.58 を準備する必要があったが，定理 3.66（$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の正元の特徴付け）では，条件 (d) を経由することでそれを回避できている．

注意 3.69　A をノルム代数とする．$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ がともに A の近似単位元ならば，$(u_\lambda v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ も A の近似単位元である．実際，任意の $x\in A$ に対して，

$$\begin{aligned}\|u_\lambda v_\lambda x - x\| &\leq \|u_\lambda\|\|v_\lambda - x\| + \|u_\lambda x - x\| \\ &\leq \|v_\lambda - x\| + \|u_\lambda x - x\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

より $\lim_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda v_\lambda x = x$ であり，同様に $\lim_{\lambda\in\Lambda} x u_\lambda v_\lambda = x$ である．また，A が対合ノルム代数であり，$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が A の近似単位元ならば，$(u_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$ も A の近似単位元である．実際，任意の $x\in A$ に対して，

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda^* x = \left(\lim_{\lambda\in\Lambda} x^* u_\lambda\right)^* = x^{**} = x$$

であり，同様に $\lim_{\lambda\in\Lambda} x u_\lambda^* = x$ である．以上より特に，A が対合ノルム代数であり，$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が A の近似単位元ならば，$(u_\lambda^* u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ も A の近似単位元である．

C* 代数における増加近似単位元の存在を示すため，補題を一つ用意する．本小節の以下の部分では，C* 代数 A に対して，

$$\begin{aligned} A_+^{\leq 1} &= \{x\in A_+ \mid \|x\|\leq 1\} = \{x\in A_{\mathrm{h}} \mid \mathrm{Sp}'_A(x)\subseteq[0,1]\}, \\ A_+^{<1} &= \{x\in A_+ \mid \|x\|< 1\} = \{x\in A_{\mathrm{h}} \mid \mathrm{Sp}'_A(x)\subseteq[0,1)\} \end{aligned}$$

と書く（各式の右側の等号は，定理 3.15 から従う）．

補題 3.70　A を C* 代数とする．連続関数 f, g を

$$\begin{aligned} f\colon [0,1)\to\mathbb{R}_{\geq 0}, &\quad f(t) = \frac{t}{1-t}, \\ g\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to[0,1), &\quad g(s) = \frac{s}{1+s} \end{aligned}$$

と定めると（$f(0)=g(0)=0$ に注意する），連続関数算によって写像

$$\begin{aligned} \phi\colon A_+^{<1}\to A_+, &\quad x\mapsto f(x), \\ \psi\colon A_+\to A_+^{<1}, &\quad y\mapsto g(y) \end{aligned}$$

が定まり，これらは互いに他の逆を与える順序同型写像である．

証明　$x\in A_+^{<1}$ に対して $\mathrm{Sp}'_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}'_A(x))\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$（命題 3.45 (1)）より $f(x)\in A_+$ だから，$x\mapsto f(x)$ は写像 $\phi\colon A_+^{<1}\to A_+$ を定める．同様に，$y\in A_+$ に対して $\mathrm{Sp}'_A(g(y)) = g(\mathrm{Sp}'_A(y))\subseteq[0,1)$（命題 3.45 (1)）より $g(y)\in A_+^{<1}$ だから，$y\mapsto g(y)$ は写像 $\psi\colon A_+\to A_+^{<1}$ を定める．さらに，$g\circ f = \mathrm{id}_{[0,1)}$ かつ $f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ だから，ϕ と ψ は互いに他の逆である（命題 3.45 (2)）．

ϕ, ψ が順序を保つことを示す．A をその単位化 $\widetilde{A}$ の部分 C* 代数とみなす．このとき，$x\in A_+^{<1}$ に対して，$\mathrm{Sp}'_A(x)\subseteq[0,1)$ より $1-x$ は可逆であり，

$$\phi(x) = x(1-x)^{-1} = (1-x)^{-1} - 1$$

である．$x, x'\in A_+^{<1}$ について，$x\leq x'$ ならば $0\leq 1-x'\leq 1-x$ であり，したがって $(1-x)^{-1}\leq(1-x')^{-1}$ だから（命題 3.62 (2)），$\phi(x)\leq\phi(x')$ である．よって，ϕ は順序を保つ．また，$y\in A_+$ に対して，$\mathrm{Sp}'_A(x)\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$ より $1+y$ は可逆であり，

$$\psi(y) = y(1+y)^{-1} = 1-(1+y)^{-1}$$

である．$y, y' \in A_+$ について，$y \leq y'$ ならば $0 \leq 1+y \leq 1+y'$ であり，したがって $(1+y)^{-1} \geq (1+y')^{-1}$ だから（命題 3.62 (2)），$\psi(y) \leq \psi(y')$ である．よって，ψ は順序を保つ．これで，主張が示された． □

定理 3.71 A を C* 代数とする．$A_+^{\leq 1}$ は順序 $\leq$（定義 3.49）に関して上に有向であり，これをネットとみなしたものは A の増加近似単位元である．

証明 A_+ は明らかに上に有向だから，補題 3.70 より $A_+^{\leq 1}$ も上に有向である．

$A_+^{\leq 1}$ をネットとみなしたものが A の増加近似単位元であることを示す．$A_+^{\leq 1}$ は A を線型空間として生成するから（命題 3.57 (1)），任意の $x \in A_+^{\leq 1}$ に対して

$$\lim_{u \in A_+^{\leq 1}} ux = \lim_{u \in A_+^{\leq 1}} xu = x$$

を示せばよいが，$\lim_{u \in A_+^{\leq 1}} ux = x$ の両辺の対合をとれば $\lim_{u \in A_+^{\leq 1}} xu = x$ が得られるから，前者のみを示せば十分である．

$x \in A_+^{\leq 1}$ とする．$\epsilon > 0$ に対して，連続関数 $f_\epsilon \colon [0,1] \to [0,1)$ を，$f_\epsilon(0) = 0$ かつ $|t - f_\epsilon(t)t| \leq \epsilon$ $(t \in [0,1])$ となるようにとる．たとえば，

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} (1-\epsilon)t/\epsilon & (0 \leq t \leq \epsilon) \\ 1-\epsilon & (\epsilon \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定めればよい．すると，連続関数算の等長性より，$\|x - f_\epsilon(x)x\| \leq \epsilon$ である．$u \in A_+^{\leq 1}$ であって $u \geq f(x)$ を満たすものを任意にとる．A をその単位化 $\widetilde{A}$ の部分 C* 代数とみなすと，

$$\begin{aligned} \|x - ux\|^2 &= \|(1-u)x\|^2 \\ &= \|((1-u)x)^*(1-u)x\| \\ &= \|x(1-u)^2 x\| \end{aligned} \tag{$*$}$$

である．また，$\mathrm{Sp}'_A(u) \subseteq [0,1]$ 上で $t^2 \leq t$ であることより $0 \leq (1-u)^2 \leq 1-u \leq 1-f_\epsilon(x)$ だから，系 3.60 より $0 \leq x(1-u)^2x \leq x(1-f_\epsilon(x))x$ であり，したがって系 3.55 より

$$\begin{aligned} \|x(1-u)^2x\| &\leq \|x(1-f_\epsilon(x))x\| \\ &\leq \|x\|\|x - f_\epsilon(x)x\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{$**$}$$

である．以上 ($*$), ($**$) より，$\|x - ux\|^2 \leq \epsilon$ が成り立つ．これで，

$$\lim_{u \in A_+^{\leq 1}} ux = x$$

が示された． □

系 3.72 A を C* 代数とし，L をその閉左イデアルとする．このとき，L に属するノルム 1 以下の正元からなる増加ネット $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ であって，任意の $x \in L$ に対して

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} xu_\lambda = x$$

を満たすものが存在する．

証明　A をその単位化 $\widetilde{A}$ の部分 C* 代数とみなす．$B = L \cap L^*$ は A の部分 C* 代数だから，定理 3.71 より B の増加近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ がとれる．$x \in L$ とすると，

$$\begin{aligned}\|x - xu_\lambda\|^2 &= \|x(1-u_\lambda)\|^2 \\ &= \|(1-u_\lambda)x^*x(1-u_\lambda)\|^2 \\ &\leq \|1-u_\lambda\|\|x^*x(1-u_\lambda)\|\end{aligned}$$

だが，$\|1-u_\lambda\| \leq 1$ であり（命題 3.54 (1)），$x^*x \in B$ より $x^*xu_\lambda \to x^*x$ だから，

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} xu_\lambda = x$$

である．よって，$(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は条件を満たすネットである．□

系 3.73　A を C* 代数とし，L をその閉左イデアルとする．このとき，L は，$L \cap A_+$ が生成する A の閉左イデアルに等しい．

証明　系 3.72 から明らかである．□

3.9　商 C* 代数

増加近似単位元の存在から，C* 代数の閉両側イデアルについて次のことがわかる．

定理 3.74　A を C* 代数，I を A の閉両側イデアルとする．

(1) I は対合で閉じている（したがって，A の部分 C* 代数である）．

(2) 商対合 Banach 代数 A/I を考える．$(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を正元からなる I の近似単位元とすると（(1) と定理 3.71 より，これは存在する），任意の $x \in A$ に対して

$$\|x + I\|_{A/I} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|x - u_\lambda x\|_A = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|x - xu_\lambda\|_A$$

である．

(3) A/I は C* 代数である．

証明　A をその単位化 $\widetilde{A}$ の部分 C* 代数とみなす．

(1)　I に属するノルム 1 以下の正元からなる増加ネット $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ であって，任意の $x \in I$ に対して $x = \lim_{\lambda \in \Lambda} xu_\lambda$ を満たすものをとる（系 3.72）．$x \in I$ とすると，$x = \lim_{\lambda \in \Lambda} xu_\lambda$ より $x^* = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda x^*$ である．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $u_\lambda x \in IA \subseteq I$ であり，I は閉だから，$x^* \in I$ である．よって，I は対合で閉じている．

(2)　$x \in A$ とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$u_\lambda x \in I$ だから，$\|x - u_\lambda x\|_A \leq \|x + I\|_{A/I}$ である．次に，$\epsilon > 0$ を任意にとり，これに対して $y \in I$ を $\|x + y\|_A \leq \|x + I\|_{A/I} + \epsilon$ となるようにとる．λ が十分大きければ $\|y - u_\lambda y\|_A \leq \epsilon$ であり，したがって

$$\begin{aligned}\|x - u_\lambda x\|_A &\leq \|(1-u_\lambda)(x+y)\|_A + \|y - u_\lambda y\|_A \\ &\leq \|x+y\|_A + \|y - u_\lambda y\|_A \\ &\leq \|x + I\|_{A/I} + 2\epsilon\end{aligned}$$

である（第二の不等号で，命題 3.54 (1) より $\|1-u_\lambda\|_{\widetilde{A}} \leq 1$ であることを用いた）．以上より，

$$\|x+I\|_{A/I} = \lim_{\lambda} \|x - u_\lambda x\|_A$$

が成り立つ．もう一つの等式も，同様に示される．

(3)　C* 条件を確かめればよい．$x \in A$ とすると，(2) より

$$\begin{aligned}\|x+I\|_{A/I}^2 &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|x(1-u_\lambda)\|_A^2 \\ &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|(1-u_\lambda)x^*x(1-u_\lambda)\|_A \\ &\leq \lim_{\lambda \in \Lambda} \|x^*x(1-u_\lambda)\|_A \\ &= \|x^*x+I\|_{A/I}\end{aligned}$$

である（不等号の部分で，命題 3.54 (1) より $\|1-u_\lambda\|_{\widetilde{A}} \leq 1$ であることを用いた）．これで，主張が示された．

□

定義 3.75（商 C* 代数）　C* 代数 A とその閉両側イデアル I に対して，C* 代数 A/I を，A の I による**商 C* 代数**（quotient C*-algebra）という．

系 3.76　$\phi\colon A \to B$ を C* 代数の間の対合準同型とする．$\phi(A)$ は B において閉（したがって，B の部分 C* 代数）であり，ϕ は対合同型 $\overline{\phi}\colon A/\operatorname{Ker}\phi \to \phi(A)$ を誘導する．

証明　ϕ は単射な対合準同型 $\overline{\phi}\colon A/\operatorname{Ker}\phi \to B$ を誘導し，定理 3.34 よりこれは等長である．商 C* 代数 $A/\operatorname{Ker}\phi$ は完備だから，$\operatorname{Im}\overline{\phi} = \phi(A)$ も完備であり，したがって，$\phi(A)$ は B において閉である．後半の主張は明らかである．□

系 3.77　A を C* 代数とし，B を A の部分 C* 代数，I を A の閉両側イデアルとする．このとき，$B+I$ は A において閉（したがって，A の部分 C* 代数）である．さらに，包含対合準同型 $B \to B+I$ は，対合同型 $B/(B\cap I) \to (B+I)/I$ を誘導する．

証明　包含対合準同型 $B \to A$ と等化対合準同型 $A \to A/I$ との合成を $\phi\colon B \to A/I$ とすると，系 3.76 より，$\phi(A) = (B+I)/I$ は A/I において閉である．よって，$B+I$ は A において閉である．後半の主張は明らかである．□

系 3.78　$\phi\colon A \to B$ を C* 代数の間の対合準同型とする．$y \in \phi(A)$ とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$x \in A$ であって $\phi(x) = y$ かつ $\|x\| \leq \|y\| + \epsilon$ を満たすものが存在する．さらに，y が Hermite ならば x も Hermite にとれ，y が正ならば x も正にとれる．

証明　ϕ が誘導する対合同型 (系 3.76) を $\overline{\phi}\colon A/\operatorname{Ker}\phi \to \phi(A)$ と書くと，$\|\overline{\phi}^{-1}(y)\|_{A/\operatorname{Ker}\phi} = \inf_{\phi(x)=y}\|x\|_A$ は $\|y\|_B$ に等しい．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$x \in A$ であって $\phi(x) = y$ かつ $\|x\| \leq \|y\| + \epsilon$ を満たすものが存在する．y が Hermite ならば，x をその実部で置き換えることにより，x も Hermite であるとしてよい（注意 3.5）．さらに，y が正ならば，Hermite にとった x をその正の部分で置き換えることにより，x も正であるとしてよい（注意 3.52）．□

C* 代数 A の閉両側イデアル I が部分 C* 代数をなすことから（定理 3.74 (1)），I における連続関数算を考えることができる．ここから，C* 代数の閉両側イデアルについて，次のことがわかる．

命題 3.79　A を C* 代数とする．

(1) I が A の閉両側イデアルであり，J が I の閉両側イデアルならば，J は A の閉両側イデアルである．
(2) A の閉両側イデアル I, J について，$I \cap J = IJ = JI$ である．

証明　(1)　$a \in A$ と $x \in J_+$ に対して，ax, $xa \in J$ を示せばよい（命題 3.57 (1)）．どちらでも同じだから，$ax \in J$ を示す．$x \in J_+$ より $x^{1/2} \in J$ であり，

$$ax = ax^{1/2}x^{1/2} \in AJJ \subseteq (AI)J \subseteq IJ \subseteq J$$

となる．

(2)　$IJ \subseteq I \cap J$ は明らかである．一方で，$x \in (I \cap J)_+$ とすると，$x^{1/2} \in I \cap J$ だから，$x = x^{1/2}x^{1/2} \in IJ$ である．したがって，$(I \cap J)_+ \subseteq IJ$ であり，命題 3.57 (1) と合わせて $I \cap J \subseteq IJ$ を得る．よって，$I \cap J = IJ$ である．I を J を入れ替えれば，$I \cap J = JI$ もわかる．□

4　正値線型形式と対合表現

4.1　正値線型形式

定義 4.1（正値線型形式）　対合代数 A 上の線型形式 f が**正値**（positive）であるとは，任意の $x \in A$ に対して $f(x^*x) \geq 0$ であることをいう．A 上の正値線型形式全体のなす集合を，$A^\vee_+$ と書く．A が対合ノルム代数ならば，A 上の連続な正値線型形式全体のなす集合を A^*_+ と書き，そのうちノルム 1 以下の元全体のなす集合を $\overline{\mathsf{S}}(A)$ と書く[*17]．

注意 4.2　A を対合代数とし，

$$(A^\vee)_{\mathrm{h}'} = \{f \in A^\vee \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } f(x^*x) \in \mathbb{R}\}$$

と書くことにする．f, $g \in (A^\vee)_{\mathrm{h}'}$ に対して，$f - g$ が正値であることを，$g \leq f$ あるいは $f \geq g$ と書く．この関係 $\leq$ は，明らかに，$(A^\vee)_{\mathrm{h}'}$ 上の前順序である（すなわち，反射性と推移性を満たす）．

さらに，A が近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ をもつ対合ノルム代数であるとする．A 上の連続な Hermite 線型形式 f が，任意の x に対して $f(x^*x) = 0$ を満たすとする．すると，任意の x, $y \in A$ に対して，

$$0 = f((x+y)^*(x+y)) = f(x^*x) + f(y^*y) + 2\operatorname{Re} f(x^*y) = 2\operatorname{Re} f(x^*y)$$

より $\operatorname{Re} f(x^*y) = 0$ である．したがって，任意の Hermite 元 $x \in A$ に対して

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Re} f(xu_\lambda) = 0$$

だから，$f = 0$ である．よって，関係 $\leq$ は，A 上の連続な Hermite 線型形式全体のなす空間 $(A^*)_{\mathrm{h}}$ 上で反対称律を満たし，$(A^*)_{\mathrm{h}}$ 上の順序を定める．

定義 4.3（状態）　ノルム代数 A 上の連続な正値線型形式 f であって，$\|f\| = 1$ を満たすものを，A 上の**状態**（state）という．A 上の状態全体のなす集合を，$\mathsf{S}(A)$ と書く．

[*17] ノルム 1 以下の連続な正値線型形式全体のなす集合を表す記号 $\overline{\mathsf{S}}(A)$ は，本稿だけのものである．これに対して，状態全体のなす集合を表す記号 $\mathsf{S}(A)$（定義 4.3）や純粋状態全体のなす集合を表す記号 $\mathsf{PS}(A)$（定義 4.37）は，ある程度普及していると思われる．

例 4.4（可換 C* 代数上の状態） Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．Riesz–Markov–角谷の定理により，$C_0(\Omega)$ 上の連続な線型形式は，Ω 上の有限複素 Borel–Radon 測度と一対一に対応する．その中で，$C_0(\Omega)$ 上の連続な正値線型形式[*18] と Ω 上の有限正値 Borel–Radon 測度，$C_0(\Omega)$ 上の状態と Ω 上の確率 Borel–Radon 測度が，それぞれ一対一に対応する．このことと Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，一般の可換 C* 代数 A について，A 上の連続な正値線型形式と $\Omega(A)$ 上の有限正値 Borel–Radon 測度，A 上の状態と $\Omega(A)$ 上の確率 Borel–Radon 測度が，それぞれ一対一に対応する．

命題 4.5 A を対合代数とし，f を A 上の正値線型形式とする．

(1) $A \times A$ から $\mathbb{C}$ への写像 $(x, y) \mapsto f(x^*y)$ は，A 上の正値 Hermite 形式である．
(2) 任意の $x, y \in A$ に対して，$|f(x^*y)|^2 \leq f(x^*x)f(y^*y)$ である．

証明 (1) 正値線型形式の定義から明らかである．
(2) (1) と Cauchy–Schwarz の不等式から従う． □

補題 4.6 A を単位的 Banach 代数とする．ノルム 1 以下の任意の元 $x \in A$ に対して，ノルム 1 以下の元 $y \in \overline{\operatorname{span}}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ であって，$(1-y)^2 = 1-x$ を満たすものが存在する．

証明 $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上の正則関数 $\lambda \mapsto (1-\lambda)^{1/2}$ の，0 を中心とする冪級数展開

$$(1-\lambda)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-\lambda)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \lambda^n \qquad (|\lambda| < 1)$$

を考える．上式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \lambda^n = 1 - (1-\lambda)^{1/2} \qquad (|\lambda| < 1)$$

だが，この等式で $\lambda \to 1-$ として単調収束定理を用いれば，この等式が $\lambda = 1$ でも成り立つことがわかる．よって，y を絶対収束する級数によって

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n \in \overline{\operatorname{span}}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

と定義でき，これは $\|y\| \leq 1$ かつ $(1-y)^2 = 1-x$ を満たす． □

命題 4.7 単位的対合 Banach 代数 A 上の正値線型形式 f は，連続である．さらに，A のノルムが $\|1\| = 1$ を満たすならば，$\|f\| = f(1)$ である．

証明 A のノルムが $\|1\| = 1$ を満たす場合だけを考えれば十分だから（注意 3.9），以下ではそのように仮定する．

$\|f\| \geq f(1)$ は明らかである．$\|f\| \leq f(1)$ を示す．まず，$x \in A$ をノルム 1 以下の Hermite 元とすると，補題 4.6 より Hermite 元 $y \in A$ であって $(1-y)^2 = 1-x$ を満たすものが存在するから，$f(1-x) = f((1-y)^2) \geq 0$ である．したがって，$f(x) \leq f(1)$ である．次に，$x \in A$ をノルム 1 以下の元とすると，x^*x はノルム 1 以下の Hermite 元だから，命題 4.5 (2) と上記の結果より，

$$|f(x)|^2 \leq f(1)f(x^*x) \leq f(1)^2$$

[*18] 命題 4.17 で示すように，C* 代数上の正値線型形式は，自動的に連続である．

である．よって，f は連続であり，$\|f\| = f(1)$ を満たす． □

系 4.8 A を対合 Banach 代数とし，f を A 上の正値線型形式とする．任意の $x, y \in A$ に対して，$|f(x^*yx)| \leq \|y\|f(x^*x)$ である．

証明 $\widetilde{A}$ を，A の単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすものとする．$x \in A$ を固定すると，$\widetilde{A}$ 上の線型形式 $y \mapsto f(x^*yx)$ は正値だから，命題 4.7 より，この $\widetilde{A}$ 上の線型形式は連続でその作用素ノルムは $f(x^*x)$ である．よって，任意の $y \in A$ に対して，$|f(x^*yx)| \leq \|y\|f(x^*x)$ である． □

近似単位元をもつ対合ノルム代数や対合 Banach 代数上の正値線型形式については，次のことが成り立つ．

命題 4.9 A を近似単位元をもつ対合ノルム代数とし，f を A 上の連続な正値線型形式とする．

(1) f は Hermite である．すなわち，任意の $x \in A$ に対して，$f(x^*) = \overline{f(x)}$ である．
(2) 任意の $x \in A$ に対して，$|f(x)|^2 \leq \|f\|f(x^*x)$ である．
(3) $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} f(x^*x)$ である．

証明 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の近似単位元とする．

(1) 写像 $(x, y) \mapsto f(x^*y)$ は A 上の正値 Hermite 形式だから，$f(x^*u_\lambda) = \overline{f(u_\lambda^*x)}$ であり，この等式において λ に関する極限をとれば，$f(x^*) = \overline{f(x)}$ を得る．

(2) 命題 4.5 (2) より，

$$|f(x)|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda} |f(u_\lambda x)|^2 \leq \liminf_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda^*u_\lambda)f(x^*x) \leq \|f\|f(x^*x)$$

である．

(3) (2) より

$$\|f\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|^2 \leq \|f\| \sup_{\|x\|\leq 1} f(x^*x) \leq \|f\|^2$$

だから，$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} f(x^*x)$ である． □

系 4.10 近似単位元をもつ対合ノルム代数 A 上の連続な正値線型形式 f，g について，$f \leq g$ ならば $\|f\| \leq \|g\|$ である．

証明 命題 4.9 (3) から従う． □

命題 4.11 A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすものとする．

(1) A 上の任意の連続な正値線型形式 f に対して，それを拡張する $\widetilde{A}$ 上の連続な正値線型形式 $\widetilde{f}$ であって $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ を満たすものが一意に存在し，それは

$$\widetilde{f}(x + \lambda) = f(x) + \lambda\|f\| \qquad (x \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$$

で与えられる．

(2) $S = \{g \in \widetilde{A}_+^* \mid g(1) = \|g|_A\|\}$ と置く．(1) によって定まる A_+^* から S への写像 $f \mapsto \widetilde{f}$ と，S から A_+^* への写像 $g \mapsto g|_A$ は，互いに他の逆を与える全単射である．さらに，これらの写像は，作用素ノルムに関して等長であり，かつ順序同型である．

証明　(1)　$\widetilde{f}$ が条件を満たすとすると，命題 4.7 より $\widetilde{f}(1) = \|\widetilde{f}\| = \|f\|$ だから，主張の等式が成り立つ．逆に，主張の等式によって $\widetilde{A}$ 上の線型形式 $\widetilde{f}$ を定義すると，任意の $x+\lambda \in \widetilde{A}$（$x \in A$，$\lambda \in \mathbb{C}$）に対して

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}((x+\lambda)^*(x+\lambda)) &= f(x^*x + \overline{\lambda}x + \lambda x^*) + |\lambda|^2\|f\| \\
&= f(x^*x) + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\lambda}f(x)) + |\lambda|^2\|f\| \\
&\geq f(x^*x) - 2|\lambda|\|f\|^{1/2}f(x^*x)^{1/2} + |\lambda|^2\|f\| \\
&= (f(x^*x)^{1/2} - |\lambda|\|f\|^{1/2})^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

だから（第二，第三の等号で，それぞれ命題 4.9 (1), (2) を用いた），$\widetilde{f}$ は $\widetilde{A}$ 上の線型形式である．さらに，命題 4.7 より，$\|\widetilde{f}\| = \widetilde{f}(1) = \|f\|$ である．これで，主張が示された．

(2)　二つの写像が互いに他の逆を与える等長な全単射であることは，(1) から明らかである．これらの写像が順序同型であることを示す．f, g を A 上の連続な正値線型形式とし，その $\widetilde{A}$ への自然な拡張を，それぞれ $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ と書く．明らかに，$\widetilde{f} \leq \widetilde{g}$ ならば，$f \leq g$ である．逆に，$f \leq g$ ならば，$\|f\| \leq \|g\|$ だから（命題 4.9 (3)），(1) の等式と合わせて $\widetilde{f} \leq \widetilde{g}$ を得る．これで，順序同型性が示された．　□

定義 4.12（正値線型形式の単位化への自然な拡張）　A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすものとする．A 上の連続な正値線型形式 f に対して，それを拡張する $\widetilde{A}$ 上の連続な正値線型形式 $\widetilde{f}$ であって $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ を満たすもの（命題 4.11 より一意に存在する）を，f の $\widetilde{A}$ への**自然な拡張**（canonical extension）という．

補題 4.13　A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすとする．f を A 上の連続な正値線型形式とし，$\widetilde{f}$ をその $\widetilde{A}$ への自然な拡張とする．$x, y \in \widetilde{A}$ に対して

$$\langle x|y\rangle_{\widetilde{f}} = \widetilde{f}(x^*y)$$

と定め（これが定めるノルムを $\|-\|_{\widetilde{f}}$ と書く），この正値 Hermite 形式によって $\widetilde{A}$ を前内積空間とみなしたものを $\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ と書く．このとき，A は $\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ において稠密である．

証明　A 上のネット $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を，$f(x_\lambda) \to \|f\|$ となるようにとる．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f(x_\lambda)^2 \leq \|f\|f(x_\lambda^*x_\lambda) \leq \|f\|^2$ だから（命題 4.9 (2)），$f(x_\lambda^*x_\lambda) \to \|f\|$ もいえる．したがって，

$$\begin{aligned}
\|x_\lambda - 1\|_{\widetilde{f}}^2 &= \widetilde{f}((x_\lambda - 1)^*(x_\lambda - 1)) \\
&= f(x_\lambda^*x_\lambda) - f(x_\lambda) - \overline{f(x_\lambda)} + \widetilde{f}(1) \\
&\to \|f\| - \|f\| - \|f\| + \|f\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

である．すなわち，$\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ において $x_\lambda \to 1$ である．さらに，系 4.8 より，任意の $x, y \in \widetilde{A}$ に対して

$$\|yx\|_{\widetilde{f}}^2 = \widetilde{f}(x^*y^*yx) \leq \|y^*y\|\widetilde{f}(x^*x) \leq \|y\|^2\|x\|_{\widetilde{f}}^2$$

だから，$\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ から自身への写像 $x \mapsto yx$ は連続である．以上より，任意の $y \in \widetilde{A}$ に対して，$\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ において $yx_\lambda \to y$ となる．よって，A は $\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ において稠密である．　□

命題 4.14　A を近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をもつ対合 Banach 代数とすると，A 上の連続な正値線型形式 f に対して，$\lim_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda) = \|f\|$ である．

証明　$\widetilde{A}$ を A の単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすものとし，f の $\widetilde{A}$ への自然な拡張を $\widetilde{f}$ と書く．前内積空間 $\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ を，補題 4.13 のように定める．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\|u_\lambda\|_{\widetilde{f}}^2 = f(u_\lambda^* u_\lambda) \leq \|f\|$ であり，任意の $x \in A$ に対して

$$\langle x|u_\lambda\rangle_{\widetilde{f}} = f(x^* u_\lambda) \to f(x^*) = \langle x|1\rangle_{\widetilde{f}}$$

だから，A が $\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ において稠密であることより（補題 4.13），$\widetilde{A}_{\widetilde{f}}$ において $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は 1 に弱収束する．特に，

$$f(u_\lambda) = \langle 1|u_\lambda\rangle_{\widetilde{f}} \to \langle 1|1\rangle_{\widetilde{f}} = \widetilde{f}(1) = \|f\|$$

が成り立つ．　□

系 4.15　近似単位元をもつ対合 Banach 代数 A 上の連続な正値線型形式 f, g に対して，$\|f+g\| = \|f\|+\|g\|$ である．

証明　$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の近似単位元とすると，命題 4.14 より，

$$\|f+g\| = \lim_{\lambda\in\Lambda}(f(u_\lambda)+g(u_\lambda)) = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda) + \lim_{\lambda} g(u_\lambda) = \|f\|+\|g\|$$

である．　□

系 4.16　A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\widetilde{A}$ をその単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすものとする．A 上の連続な正値線型形式 f に対して，その $\widetilde{A}$ への自然な拡張を $\widetilde{f}$ と書く．

(1) A 上の連続な正値線型形式 f, g に対して，$\widetilde{f+g} = \widetilde{f}+\widetilde{g}$ である．
(2) f, g がそれぞれ A, $\widetilde{A}$ 上の連続な正値線型形式であり，$g \leq \widetilde{f}$ を満たすならば，$g = \widetilde{g|_A}$ である．

証明　(1)　$\widetilde{f}+\widetilde{g}$ は，$f+g$ を拡張する $\widetilde{A}$ 上の連続な正値線型形式であり，

$$\|\widetilde{f}+\widetilde{g}\| = \|\widetilde{f}\|+\|\widetilde{g}\| = \|f\|+\|g\| = \|f+g\|$$

を満たすから（系 4.15），$f+g$ の自然な拡張である．

(2)　$g \leq \widetilde{f}$ であるとすると，$f-g|_A$, $\widetilde{f}-g$ はそれぞれ A, $\widetilde{A}$ 上の連続な正値線型形式だから，系 4.15 より

$$\|g|_A\|+\|f-g|_A\| = \|f\| = \|\widetilde{f}\| = \|g\|+\|\widetilde{f}-g\|$$

である．一方，$\|g|_A\| \leq \|g\|$ かつ $\|f-g|_A\| \leq \|\widetilde{f}-g\|$ だが，上式が成立するためには，この二つの不等式で等号が成立しなければならない．よって，$\|g|_A\| = \|g\|$ であり，g は $g|_A$ の自然な拡張である．　□

C* 代数上の正値線型形式については，次のことが成り立つ．

命題 4.17　C* 代数 A 上の正値線型形式 f は，連続である．

証明　A のノルム 1 以下の正元全体のなす集合を，$A_+^{\leq 1}$ と書く．まず，$f(A_+^{\leq 1})$ が有界であることを示す．そうでないとすると，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，$f(x_i) \geq 2^i$ を満たす $x_i \in A_+^{\leq 1}$ がとれる．$x = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}x_i \in A_+$ と置くと，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x \geq \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i}x_i$ より

$$f(x) \geq \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} f(x_i) \geq n$$

だが，これは $f(x)$ が有限値であることに反する．よって，$f(A_+^{\le 1})$ は有界である．

$x \in A$ をノルム 1 以下の元とすると，その実部 a と虚部 b もノルム 1 以下であり，したがって，そのそれぞれの正の部分と負の部分 a^+, a^-, b^+, b^- は $A_+^{\le 1}$ に属する．よって，前段の結果より，f は連続である． □

命題 4.18 C* 代数 A 上の連続線型形式 f に対して，次の条件は同値である．

(a) f は正値である．
(b) A の任意の近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\lim_\lambda f(u_\lambda) = \|f\|$ である．
(c) A のある近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して，$\lim_\lambda f(u_\lambda) = \|f\|$ を満たす．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 命題 4.14 で，近似単位元をもつ対合 Banach 代数に対して示した．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) 一般性を失わず，$\|f\| = 1$ と仮定する．A の近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，$\lim_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda) = 1$ であるとする．このとき，$(u_\lambda^* u_\lambda)_\lambda$ も A の近似単位元であり（注意 3.69），命題 4.9 より

$$1 \ge \limsup_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda^* u_\lambda) \ge \liminf_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda^* u_\lambda) \ge \lim_{\lambda\in\Lambda} |f(u_\lambda)|^2 = 1$$

だから，この近似単位元も $\lim_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda^* u_\lambda) = 1$ を満たす．そこで，必要ならば $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の代わりに $(u_\lambda^* u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を考えることで，一般性を失わず，はじめから各 u_λ は正であると仮定する．

まず，f が Hermite であることを示す．$x \in A$ をノルム 1 以下の Hermite 元として，$f(x) = a + ib$（a, $b \in \mathbb{R}$）と置く．すると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
|f(x + itu_\lambda)|^2 &\le \|x + itu_\lambda\|^2 \\
&= \|(x + itu_\lambda)^*(x + itu_\lambda)\| \\
&= \|x^2 + t^2 u_\lambda^2 + it(xu_\lambda - u_\lambda x)\| \\
&\le 1 + t^2 + t\|xu_\lambda - u_\lambda x\|
\end{aligned}$$

であり，λ に関して極限をとれば，

$$|a + ib + it|^2 \le 1 + t^2$$

を得る．したがって，$2bt \le 1 - a^2 - b^2 \le 1$ であり，これが任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つから，$b = 0$ である．よって，f は Hermite である．

次に，f が正値であることを示す．$x \in A$ をノルム 1 以下の正元とすると，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，A の単位化 $\widetilde{A}$ において

$$-1 \le -x \le u_\lambda - x \le u_\lambda \le 1$$

だから，$\|u_\lambda - x\| \le 1$ である（命題 3.54）．f は Hermite で $\|f\| = 1$ だから，

$$1 - f(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda - x) \le 1,$$

すなわち $f(x) \ge 0$ を得る．これで，主張が示された． □

系 4.19 単位的 C* 代数 A 上の連続線型形式 f に対して，次の条件は同値である．

(a) f は正値である．
(b) $f(1) = \|f\|$ である．

証明　命題 4.18 において，単位元 1 のみからなる自明な近似単位元を考えればよい． □

命題 4.20　A を C* 代数とし，f をその上の連続線型形式とする．ノルム 1 以下の正元 $x \in A_+$ であって $f(x) = \|f\|$ を満たすものが存在するならば，f は正値である．

証明　必要ならば A の単位化と f の自然な拡張を考えることで，一般性を失わず，A は単位的であると仮定する．ノルム 1 以下の正元 $x \in A_+$ が $f(x) = \|f\|$ を満たすとする．絶対値 1 のスカラー λ を $\lambda f(1-a) \geq 0$ となるようにとると，

$$f(x) + \lambda f(1-x) \geq f(x) = \|f\|$$

である．一方で，関数 $t \mapsto \lambda(1-t)$ の絶対値は $[0,1]$ 上で常に 1 以下だから，連続関数算の等長性より，

$$f(x) + \lambda f(1-x) = f(x + \lambda(1-x)) \leq \|f\|\|x + \lambda(1-x)\| \leq \|f\|$$

である．これら 2 式を比較して，$f(1-x) = 0$，すなわち，$f(1) = f(x) = \|f\|$ を得る．よって，系 4.19 より，f は正値である． □

4.2　対合表現

代数 A の線型空間 E 上の表現とは，準同型 $\pi\colon A \to \mathrm{End}(E)$ のことをいう．これに対して，対合代数の対合表現を，次のように定める．

定義 4.21（対合表現）　対合代数 A の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の**対合表現**（involutive representation）とは，対合準同型 $\pi\colon A \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ のことをいう．このとき，$(\pi, \mathcal{H})$ は A の対合表現である，ともいう．π が単射ならば，この対合表現は**忠実**（faithful）であるという．A が単位的であり，π が単位的対合準同型ならば，この対合表現は**単位的**（unital）であるという．

$(\pi, \mathcal{H})$ を対合代数 A の対合表現とするとき，$\mathcal{K}$ が $\mathcal{H}$ の $\pi(A)$-安定な閉部分線型空間ならば，$x \in A$ に $\pi(x)|_{\mathcal{K}}$ を対応させる写像は，A の $\mathcal{K}$ 上の対合表現である．これを，π の $\mathcal{K}$ 上の**部分対合表現**（involutive subrepresentation）という．また，$((\pi_i, \mathcal{H}_i))_{i \in I}$ を A の対合表現の族とするとき，$x \in A$ に $\widehat{\bigoplus}_{i \in I} \pi_i(x)$ を対応させる写像は，A の $\widehat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ 上の対合表現である．これを，$(\pi_i)_{i \in I}$ の **Hilbert 直和**（Hilbert direct sum）という．I が有限である場合には，単に**直和**（direct sum）ともいう．

定義 4.22（同変作用素，ユニタリ同値）　A を対合代数とし，$(\pi, \mathcal{H})$, $(\pi', \mathcal{H}')$ をその対合表現とする．

(1) $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ が π から π' への作用素として**同変**（equivariant）である，あるいは π から π' への**絡作用素**（intertwining operator）であるとは，任意の $x \in A$ に対して，$T\pi(x) = \pi'(x)T$ であることをいう．同変な連続線型作用素全体のなす空間を，$\mathscr{L}_A(\pi; \pi')$ あるいは $\mathscr{L}_A(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ と書く．

(2) 同変なユニタリ作用素を，**ユニタリ同値**（unitary equivalence）という．π から π' へのユニタリ同値が存在するとき，π と π' は**ユニタリ同値**（unitarily equivalent）であるという．

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を作用素の集合であって随伴で閉じているものとすると，容易に確かめられるように，$\overline{\mathscr{S}\mathcal{H}} = \overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{C}}\{T\xi \mid T \in \mathscr{S}, \xi \in \mathcal{H}\}$ と $\bigcap_{T \in \mathscr{S}} \operatorname{Ker} T$ は互いに他の直交補空間である．これを踏まえて，次のように定義する．

定義 4.23（非退化対合表現）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を作用素の集合であって随伴で閉じている

ものとする．$\mathscr{S}$ が**非退化**（non-degenerate）であるとは，$\overline{\mathscr{S}\mathcal{H}} = \mathcal{H}$（あるいは同値だが，$\bigcap_{T\in\mathscr{S}} \operatorname{Ker} T = 0$）であることをいう．

A を対合代数とし，$(\pi, \mathcal{H})$ をその対合表現とするとき，$\pi(A)$ が非退化であることを，π が非退化であるという．

命題 4.24　A を近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をもつ対合 Banach 代数とし，$(\pi, \mathcal{H})$ をその対合表現とする．このとき，$(\pi(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は，$\overline{\pi(A)\mathcal{H}}$ の上への直交射影に強収束する．

証明　任意の $x \in A$ と $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\pi(u_\lambda)\pi(x)\xi = \pi(u_\lambda x)\xi \to \xi$ であり，任意の λ に対して $\|\pi(u_\lambda)\| \leq \|u_\lambda\| \leq 1$ だから（定理 3.16），任意の $\eta \in \overline{\pi(A)\xi}$ に対して $\pi(u_\lambda)\eta \to \eta$ である．一方で，$\eta \in (\overline{\pi(A)\mathcal{H}})^\perp$ とすると，任意の $\zeta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle\zeta|\pi(u_\lambda)\eta\rangle = \langle\pi(u_\lambda^*)\zeta|\eta\rangle = 0$ だから，$\pi(u_\lambda)\eta = 0$ である．よって，$(\pi(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は，$\overline{\pi(A)\mathcal{H}}$ の上への直交射影に強収束する．□

命題 4.25　A を対合代数とし，$(\pi, \mathcal{H})$ をその対合表現とする．次の条件 (a) と (b) は同値である．さらに，A が単位的ならば，これらの条件は (c) とも同値である．

(a) π は非退化である．
(b) $\pi(A)$ の強閉包は $1_{\mathcal{H}}$ を含む．
(c) π は単位的対合準同型である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\pi(A)$ のノルム閉包を $\mathscr{A}$ と置くと，$\mathscr{A}$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分 C* 代数である．π が非退化ならば，$\mathscr{A}$ も非退化だから，$\mathscr{A}$ の近似単位元は $1_{\mathcal{H}}$ に強収束する（命題 4.24）．よって，$\pi(A)$ の強閉包は $1_{\mathcal{H}}$ を含む．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\pi(A)$ の強閉包が $1_{\mathcal{H}}$ を含むとすると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\pi(A)\xi$ の閉包は ξ を含むから，π は非退化である．

(a) $\Longrightarrow$ (c)（A が単位的である場合）　(a) $\Longrightarrow$ (b) の証明の議論において，$\pi(1_A)$ のみからなる $\mathscr{A}$ の自明な近似単位元を考えればよい．

(c) $\Longrightarrow$ (b)（A が単位的である場合）　明らかである．□

定義 4.26（巡回対合表現）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を作用素の集合とする．$\xi \in \mathcal{H}$ が $\overline{\operatorname{span}}_{\mathbb{C}}\, \mathscr{S}\xi = \mathcal{H}$ を満たすとき，ξ は $\mathscr{S}$ に対する**巡回ベクトル**（cyclic vector）であるという．$\mathscr{S}$ に対する巡回ベクトルが存在するとき，$\mathscr{S}$ は**巡回的**（cyclic）であるという．

A を対合代数とし，$(\pi, \mathcal{H})$ をその対合表現とするとき，$\pi(A)$ に対する巡回ベクトルを，π に対する巡回ベクトルという．π に対する巡回ベクトルが存在するとき，π は**巡回対合表現**（cyclic involutive representation）であるという．

明らかに，巡回対合表現は非退化である．

A を代数とし，(π, E) をその（代数としての）表現とする．$E \neq 0$ であり，かつ E の $\pi(A)$-安定な部分線型空間が 0 と E のみであるとき，π（あるいは $(\pi, \mathcal{H})$）は**代数的既約**（algebraically irreducible）であるという．この用語は，対合代数の対合表現に対しても用いる．これに対して，Hilbert 空間の位相を考慮した「既約性」を，次のように定める．

定義 4.27（既約対合表現）　A を対合代数とし，$(\pi, \mathcal{H})$ をその対合表現とする．$\mathcal{H} \neq 0$ であり，かつ $\mathcal{H}$ の $\pi(A)$-安定な閉部分線型空間が 0 と $\mathcal{H}$ のみであるとき，π は**位相的既約**（topologically irreducible）あるい

は単に**既約**（irreducible）であるという．

本稿において，単に「既約」といったとき，それは常に位相的既約性のことを指す．系 4.56 で示すように，C* 代数の対合表現に関しては，代数的既約性と位相的既約性は同値である．

対合代数 A の既約対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ は，$\mathcal{H}$ が 1 次元かつ $\pi = 0$ である場合を除いて，すべての $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ を巡回ベクトルにもち，特に非退化である．

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とするとき，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の強位相に関して閉な単位的対合代数を，$\mathcal{H}$ 上の **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）という．強位相に関して閉ならばノルム位相に関しても閉だから，von Neumann 代数は，単位的 C* 代数の特別な場合である．

事実 4.28　$\mathscr{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．$\mathscr{M}$ は，$\mathscr{M}$ に属する直交射影全体の集合 $\mathbf{P}(\mathscr{M})$ が生成する $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ のノルム閉部分線型空間に等しい．

証明は，たとえば，Murphy [7, §4.1.11] を参照のこと．

一般に，代数 A の部分集合 S に対して，

$$S' = \{y \in A \mid \text{任意の } x \in S \text{ に対して } xy = yx\}$$

と定め，これを S の A における**交換団**（commutant）という．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とするとき，部分集合 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が $\mathscr{S}^* = \mathscr{S}$ を満たすならば，その交換団 $\mathscr{S}'$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．

命題 4.29（Schur の補題）　対合代数 A の対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ であって $\mathcal{H} \neq 0$ であるものに対して，次の条件は同値である．

(a) π は既約である．
(b) π から自身への同変な連続線型作用素は，スカラー倍のみである（すなわち，$\pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ である）．

証明　容易に確かめられるように，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{K}$ が $\pi(A)$-安定であるための必要十分条件は，$\mathcal{K}$ の上への直交射影 $P_{\mathcal{K}}$ が $\pi(A)'$ に属することである．したがって，π が既約であるための必要十分条件は，$\pi(A)'$ に属する直交射影が 0 と $1_{\mathcal{H}}$ のみであることである．事実 4.28 より，この条件は，$\pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ であることと同値である．□

系 4.30　対合代数 A の既約対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$, $(\pi', \mathcal{H}')$ について，次の条件のうち，どちらか一方のみが成り立つ．

(i) π と π' はユニタリ同値であり，$\mathscr{L}_A(\pi; \pi')$ は 1 次元である．
(ii) π と π' はユニタリ同値ではなく，$\mathscr{L}_A(\pi; \pi') = 0$ である．

証明　Schur の補題（命題 4.29）より，π と π' がユニタリ同値ならば，$\mathscr{L}_A(\pi; \pi')$ は 1 次元である．あとは，π と π' がユニタリ同値でないときに，$\mathscr{L}_A(\pi; \pi') = 0$ であることを示せばよい．

対偶を示す．$T \in \mathscr{L}_A(\pi; \pi') \setminus \{0\}$ がとれたとする．このとき，T^*T, TT^* はそれぞれ π, π' から自身への同変な連続正作用素だから，Schur の補題（命題 4.29）より，$T^*T = t1_{\mathcal{H}}$（$t \geq 0$），$TT^* = t'1_{\mathcal{H}'}$（$t' \geq 0$）と置ける．すると，$tT = T(T^*T) = (TT^*)T = t'T$ だから，$t = t'$ である．そこで，$U = t^{-1/2}T$ と置けば，$U^*U = 1_{\mathcal{H}}$ かつ $UU^* = 1_{\mathcal{H}'}$ が成り立つ．すなわち，U は π から π' へのユニタリ同値である．これで，主張が示された．□

系 4.31　可換対合代数の既約対合表現は，1 次元である．

証明　$(\pi, \mathcal{H})$ を可換対合代数 A の既約対合表現とすると，可換性と Schur の補題（命題 4.29）より $\pi(A) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ である．したがって，$\mathcal{H}$ のすべての部分線型空間は，$\pi(A)$-安定である．ところが，π は既約だから，$\mathcal{H}$ は 1 次元でなければならない．□

4.3　正値線型形式と対合表現

$(\pi, \mathcal{H})$ が対合代数 A の対合表現であり，$\xi \in \mathcal{H}$ であるとき，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を A の**ベクトル付き対合表現**といい，ξ が π に対する巡回ベクトルならば，これを A の**巡回ベクトル付き対合表現**ということにする．A のベクトル付き対合表現 $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ から $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ への**ユニタリ同値**とは，$(\pi, \mathcal{H})$ から $(\pi', \mathcal{H}')$ へのユニタリ同値 U であって $U\xi = \xi'$ を満たすものをいい，これが存在するとき，これらのベクトル付き対合表現は**ユニタリ同値**であるという．

定義 4.32（ベクトル付き対合表現が定める正値線型形式）　$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を対合代数 A のベクトル付き対合表現とすると，任意の $x \in A$ に対して

$$\langle \xi | \pi(x^* x) \xi \rangle = \|\pi(x)\xi\|^2 \geq 0$$

だから，A 上の線型形式 $x \mapsto \langle \xi | \pi(x) \xi \rangle$ は正値である．この正値線型形式を，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ **が定める正値線型形式**という．

命題 4.33　A を対合 Banach 代数とし，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を A のベクトル付き対合表現，f をそれが定める正値線型形式とする．このとき，f は連続であり，$\|f\| \leq \|\xi\|^2$ を満たす．さらに，A が近似単位元をもち，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ が巡回ベクトル付き対合表現ならば，$\|f\| = \|\xi\|^2$ である．

証明　π はノルム減少だから（定理 3.16），任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x)| = |\langle \xi | \pi(x) \xi \rangle| \leq \|\xi\|^2 \|\pi(x)\| \leq \|\xi\|^2 \|x\|$$

である．すなわち，f は連続で $\|f\| \leq \|\xi\|^2$ を満たす．さらに，A が近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ をもち，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ が巡回ベクトル付き対合表現ならば，命題 4.14 と命題 4.24 より，

$$\|f\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} f(u_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \langle \xi | \pi(u_\lambda) \xi \rangle = \|\xi\|^2$$

である．□

命題 4.34　A を対合代数とし，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ と $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ を A の巡回ベクトル付き対合表現とする．このとき，次の条件は同値である．

(a) $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ と $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ はユニタリ同値である．
(b) $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ と $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ が定める正値線型形式は等しい．

さらに，これらの条件の下で，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ から $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ へのユニタリ同値は一意に存在する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ と $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ が定める正値線型形式が等しいとする．このとき，任意の $x \in A$ に対して

$$\|\pi(x)\xi\|^2 = \langle \xi | \pi(x^* x) \xi \rangle = \langle \xi' | \pi'(x^* x) \xi' \rangle = \|\pi'(x)\xi'\|^2$$

だから，$\pi(A)\xi$ から $\pi'(A)\xi'$ への等長線型同型 U を，$\pi(x)\xi \mapsto \pi'(x)\xi'$ によって定義できる．さらに，$\pi(A)\xi$, $\pi'(A)\xi'$ はそれぞれ $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ において稠密だから，U は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}'$ へのユニタリ作用素に一意に拡張できる．このユニタリ作用素を，そのまま U と書く．$x \in A$ とすると，任意の $y \in A$ に対して

$$U\pi(x)\pi(y)\xi = \pi'(x)\pi'(y)\xi' = \pi'(x)U\pi(y)\xi$$

だから，$U\pi(x) = \pi'(x)U$ である．したがって，U は $(\pi, \mathcal{H})$ から $(\pi', \mathcal{H}')$ へのユニタリ同値である．また，任意の $x \in A$ に対して

$$\langle U\xi|\pi'(x)\xi'\rangle = \langle\xi|U^{-1}\pi(x)'\xi'\rangle = \langle\xi|\pi(x)\xi\rangle = \langle\xi'|\pi'(x)\xi'\rangle$$

だから，$U\xi = \xi'$ である．よって，U は $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ から $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ へのユニタリ同値である．

最後の主張　$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ から $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ へのユニタリ同値は，前段のように構成するしかないから，一意に定まる．　□

命題 4.35　A を対合 Banach 代数とし，f をその上の連続な正値線型形式とする．$x, y \in A$ に対して

$$\langle x|y\rangle_f = f(x^*y)$$

と定め（これが定めるノルムを $\|{-}\|_f$ と書く），この正値 Hermite 形式によって A を前内積空間とみなしたものの Hausdorff 完備化を $\mathcal{H}$ と書く．A から $\mathcal{H}$ への自然な写像を，$x \mapsto [x]$ と書く．

(1) 各 $x \in A$ に対して，$\pi(x) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，任意の $y \in A$ に対して $\pi(x)[y] = [xy]$ を満たすものが，一意に存在する．
(2) (1) によって定まる写像 $\pi\colon A \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ は，A の $\mathcal{H}$ 上の対合表現である．

さらに，A が近似単位元をもつとする．

(3) $\xi \in \mathcal{H}$ であって，任意の $x \in A$ に対して $\pi(x)\xi = [x]$ を満たすものが，一意に存在する．この ξ は，π に対する巡回ベクトルであり，任意の $x \in A$ に対して $\langle\xi|[x]\rangle = f(x)$ を満たす．
(4) 巡回ベクトル付き対合表現 $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ が定める正値線型形式は，f に等しい．

証明　(1)　系 4.8 より，任意の $y \in A$ に対して

$$\|[xy]\|^2 = f(y^*x^*xy) \le \|x^*x\|^2 f(y^*y) \le \|x\|^2\|[y]\|^2$$

である．よって，写像 $[y] \mapsto [xy]$ は，$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 $\pi(x)$ に一意に拡張できる．

(2)　π が代数の準同型であることは明らかである．また，$x \in A$ とすると，任意の $y, z \in A$ に対して

$$\langle[y]|\pi(x)[z]\rangle = \langle[y]|[xz]\rangle = f(y^*xz) = f((x^*y)^*z) = \langle[x^*y]|[z]\rangle = \langle\pi(x^*)[y]|[z]\rangle$$

だから，$\pi(x^*) = \pi(x)^*$ である．よって，π は A の $\mathcal{H}$ 上の対合表現である．

(3)　$x \in A$ とする．$[y]$（$y \in A$）の全体は $\mathcal{H}$ において稠密だから，$\pi(x)\xi = [x]$ であることは，任意の $y \in A$ に対して $\langle\pi(x)\xi|[y]\rangle = \langle[x]|[y]\rangle$ であることと同値である．この等式は，両辺をそれぞれ $\langle\pi(x)\xi|[y]\rangle = \langle\xi|\pi(x^*)[y]\rangle = \langle\xi|[x^*y]\rangle$，$\langle[x]|[y]\rangle = f(x^*y)$ と変形すると，

$$\langle\xi|[x^*y]\rangle = f(x^*y) \tag{$*$}$$

と書き直せる．さらに，A が近似単位元をもつことより，$\{x^*y \mid x, y \in A\}$ は A において稠密だから，任意の $x, y \in A$ に対して $(*)$ が成り立つことは，任意の $x \in A$ に対して

$$\langle \xi | [x] \rangle = f(x) \tag{$**$}$$

が成り立つことと同値である．命題 4.9 より $|f(x)|^2 \le \|f\| f(x^*x) = \|f\| \|[x]\|^2$ だから，この条件を満たす $\xi \in \mathcal{H}$ は，一意に存在する．定義から明らかに，ξ は π に対する巡回ベクトルである．

(4) ξ の定義と $(**)$ より，$\langle \xi | \pi(x)\xi \rangle = \langle \xi | [x] \rangle = f(x)$（$x \in A$）である．すなわち，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ が定める正値線型形式は，f に等しい． □

定義 4.36（正値線型形式が定める巡回ベクトル付き対合表現） A を対合 Banach 代数とし，f を A 上の連続な正値線型形式とする．命題 4.35 のように構成される $(\pi, \mathcal{H})$ を，**f が定める対合表現**という．さらに，A が近似単位元をもつとき，命題 4.35 のように構成される，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を，**f が定める巡回ベクトル付き対合表現**という．

A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とすると，命題 4.34 と命題 4.35 より，A 上の連続な正値連続線型形式と A の巡回ベクトル付き対合表現のユニタリ同値類とは，一対一に対応する．命題 4.33 より，その中で，A 上の状態は，定まった巡回ベクトルのノルムが 1 であるものに対応する．

4.4 純粋な正値線型形式

定義 4.37（純粋な正値線型形式） 対合ノルム代数 A 上の連続な正値線型形式 $f \neq 0$ が**純粋**（pure）であるとは，A 上の任意の連続な正値線型形式 $g \le f$ が，ある $0 \le t \le 1$ を用いて $g = tf$ と表せることをいう．A 上の純粋状態全体のなす集合を，$\mathsf{PS}(A)$ と書く．

例 4.38（可換 C* 代数上の純粋状態） Ω を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．例 4.4 で述べたとおり，$C_0(\Omega)$ 上の状態は，Ω 上の正則な確率 Borel 測度と一対一に対応する．この中で，$C_0(\Omega)$ 上の純粋状態と Ω 上の Dirac 測度が一対一に対応することを示そう．

μ を Ω 上の正則な確率 Borel 測度とする．μ が Dirac 測度 δ_ω（$\omega \in \Omega$）であるとして，Ω 上の正則な有限正値 Borel 測度 $\nu \le \mu$ を任意にとる．すると，

$$\begin{aligned} &0 \le \nu(\Omega \setminus \{\omega\}) \le \mu(\Omega \setminus \{\omega\}) = 0, \\ &0 \le \nu(\{\omega\}) \le \mu(\{\omega\}) = 1 \end{aligned}$$

だから，$t = \nu(\{\omega\}) \in [0,1]$ と置けば，$\nu = t\delta_\omega$ となる．よって，μ に対応する状態は，純粋である．逆に，μ が Dirac 測度ではないとすると，μ の台 $\operatorname{supp}\mu$ は 2 点以上からなるから，Ω 上のコンパクト台連続関数 $f\colon \Omega \to [0,1]$ を，$f^{-1}(\{0\})$ と $f^{-1}(\{1\})$ がともに $\operatorname{supp}\mu$ と交わるようにとれる．このとき，$f\mu$ は Ω 上の正則な有限正値 Borel 測度であって，μ で上から抑えられるが，μ のスカラー倍としては書けない．よって，μ に対応する状態は，純粋でない．これで，主張が示された．

いいかえれば，$C_0(\Omega)$ 上の純粋状態とは，ある点 $\omega \in \Omega$ に対する線型形式 $f \mapsto f(\omega)$ のことにほかならない．このことと，Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）および例 2.41 より，可換 C* 代数 A に対して，$\mathsf{PS}(A) = \Omega(A)$ が成り立つ．

命題 4.39 A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\widetilde{A}$ を A の単位化であって $\|1\| = 1$ を満たすものとする．f を A 上の連続な正値線型形式とし，$\widetilde{f}$ をその $\widetilde{A}$ への自然な拡張とする．このとき，f が純粋である

ことと $\widetilde{f}$ が純粋であることとは同値である．

証明 系 4.16 (2) より，A 上の連続な正値線型形式 $g \le f$ と，$\widetilde{A}$ 上の連続な正値線型形式 $h \le \widetilde{f}$ とは，写像 $g \mapsto \widetilde{g}$ によって一対一に対応する．主張は，このことから従う． □

補題 4.40 A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を A の巡回ベクトル付き対合表現，f をそれが定める正値線型形式とする．また，

$$\mathscr{T}_\pi = \{T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \mid 0 \le T \le 1_{\mathcal{H}},\ T \text{ は } \pi(A) \text{ のすべての元と可換}\}$$

と置き，$T \in \mathcal{T}_\pi$ に対して，A 上の正値線型形式 f_T を

$$f_T(x) = \langle T^{1/2}\xi | \pi(x) T^{1/2}\xi \rangle \qquad (x \in A)$$

と定める．このとき，写像 $T \mapsto f_T$ は，$\mathscr{T}_\pi$ から $\{g \in A^*_+ \mid g \le f\}$ への全単射を与える．

証明 <u>$\mathscr{T}_\pi$ から $\{g \in A^*_+ \mid g \le f\}$ への写像が定まること</u> $T \in \mathscr{T}_\pi$ とすると，任意の $x \in A$ に対して

$$f_T(x^*x) = \langle T^{1/2}\xi | \pi(x^*x) T^{1/2}\xi \rangle = \|\pi(x)T^{1/2}\xi\|^2 = \|T^{1/2}\pi(x)\xi\|^2 \le \|\pi(x)\xi\|^2 = f(x^*x)$$

だから，$f_T \le f$ である．よって，$\mathscr{T}_\pi$ から $\{g \in A^*_+ \mid g \le f\}$ への写像 $T \mapsto f_T$ が定まる．

<u>単射性</u> $T, T' \in \mathscr{T}_\pi$ が $f_T = f_{T'}$ を満たすとすると，任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle T\pi(x)\xi | \pi(y)\xi \rangle = \langle T\xi | \pi(x^*y)\xi \rangle = f_T(x^*y) = f_{T'}(x^*y) = \langle T'\xi | \pi(x^*y)\xi \rangle = \langle T'\pi(x)\xi | \pi(y)\xi \rangle$$

であり，ξ は π に対する巡回ベクトルだから，$T = T'$ である．よって，写像 $f \mapsto f_T$ は単射である．

<u>全射性</u> A 上の連続な正値線型形式 $g \le f$ を任意にとる．すると，命題 4.5 (2) より，任意の $x, y \in A$ に対して

$$|g(x^*y)|^2 \le g(x^*x)g(y^*y) \le f(x^*x)f(y^*y) = \|\pi(x)\xi\|^2 \|\pi(y)\xi\|^2$$

である．したがって，ξ が π に対する巡回ベクトルであることと Hilbert 空間の一般論より，$T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，任意の $x, y \in A$ に対して

$$\langle \pi(x)\xi | T\pi(y)\xi \rangle = g(x^*y) \tag{$*$}$$

を満たすものが一意に存在する．任意の $x \in A$ に対して，$\langle \pi(x)\xi | T\pi(x)\xi \rangle = g(x^*x)$ は 0 以上 $f(x^*x) = \|\pi(x)\xi\|^2$ 以下だから，T は自己随伴で $0 \le T \le 1_{\mathcal{H}}$ を満たす．さらに，$x \in A$ とすると，任意の $y, z \in A$ に対して

$$\langle \pi(y)\xi | T\pi(x)\pi(z)\xi \rangle = f(y^*xz) = f((x^*y)^*z) = \langle \pi(x)^*\pi(y)\xi | T\pi(z)\xi \rangle = \langle \pi(y)\xi | \pi(x)T\pi(z)\xi \rangle$$

だから，ξ が π に対する巡回ベクトルであることより，$T\pi(x) = \pi(x)T$ である．よって，$T \in \mathscr{T}_\pi$ であり，($*$) より

$$f_T(x^*y) = \langle T^{1/2}\xi | \pi(x^*y)T^{1/2}\xi \rangle = \langle \pi(x)\xi | T\pi(y)\xi \rangle = g(x^*y) \qquad (x, y \in A)$$

が成り立つ（定理 3.48）．A が近似単位元をもつことより，x^*y（$x, y \in A$）の全体は A において稠密だから，上式より，$f_T = g$ である．これで，写像 $f \mapsto f_T$ の全射性が示された． □

定理 4.41 A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とする．$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を A の巡回ベクトル付き対合表現とし，f をそれが定める正値線型形式とすると，次の条件は同値である．

(a) π は既約である．
(b) f は純粋である．

証明　補題 4.40 より，f が純粋であるための必要十分条件は，$\mathscr{T}_\pi = \{t1_{\mathcal{H}} \mid 0 \le t \le 1\}$ である（記号は同補題のとおりとする）．これは，$\pi(A)$ のすべての元と可換な $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素がスカラー倍しかないことと同値であり（命題 3.57 (1)），これはさらに，π が既約であることと同値である（Schur の補題（命題 4.29））．□

実線型空間 E の部分集合 S の**端点**（extreme point）とは，点 $x \in S$ であって，「点 $x_0, x_1 \in S$ と $t \in (0,1)$ が $x = (1-t)x_0 + tx_1$ を満たすならば，$x_0 = x_1 = x$ である」という性質を満たすものをいう．S の端点全体のなす集合を，S の**端点集合**といい，$\mathrm{ex}(S)$ と書く．端点集合について，次の事実が知られている．

事実 4.42（Krein–Milman の定理）　Hausdorff 局所凸空間 E のコンパクト凸集合 S は，その端点集合の凸閉包に等しい．すなわち，$S = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(S))$ が成り立つ．

定理 4.43　A を C* 代数とする．

(1) $\overline{\mathsf{S}}(A)$ は，汎弱コンパクトかつ凸である．$\mathsf{S}(A)$ は，凸であり，A が単位的ならば，汎弱コンパクトでもある．
(2) $\mathrm{ex}(\overline{\mathsf{S}}(A)) = \mathsf{PS}(A) \cap \{0\}$ であり，$\mathrm{ex}(\mathsf{S}(A)) = \mathsf{PS}(A)$ である．
(3) $\overline{\mathsf{S}}(A) = \overline{\mathrm{co}}^{\mathrm{wk}^*}(\mathsf{PS}(A) \cap \{0\})$ である．また，A が単位的ならば，$\mathsf{S}(A) = \overline{\mathrm{co}}^{\mathrm{wk}^*}(\mathsf{PS}(A))$ である．

証明　(1)　$\overline{\mathsf{S}}(A)$ は明らかに凸であり，系 4.15 より $\mathsf{S}(A)$ も凸である．

汎弱コンパクト性に関する主張を示す．A^* における単位閉球 $\mathrm{Ball}(A^*)$ は汎弱コンパクトであり（Banach–Alaoglu の定理（事実 2.33）），$\overline{\mathsf{S}}(A) = \{f \in \mathrm{Ball}(A^*) \mid f(A_+) \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}\}$ はその汎弱閉集合だから，$\overline{\mathsf{S}}(A)$ も汎弱コンパクトである．また，A が単位的ならば，$\mathsf{S}(A) = \{f \in \mathrm{Ball}(A^*) \mid f(1) = 1\}$（系 4.19）も $\mathrm{Ball}(A^*)$ の汎弱閉集合であり，したがって汎弱コンパクトである．

(2)　f が $\overline{\mathsf{S}}(A)$ の端点ならば，$\|f\|$ は 0 または 1 だから，$f \in \mathsf{S}(A) \cup \{0\}$ である．0 が $\overline{\mathsf{S}}(A)$ の端点であることは，容易に確かめられる．また，$f \in \mathsf{S}(A)$ が $f_0, f_1 \in \overline{\mathsf{S}}(A)$ と $t \in (0,1)$ を用いて $f = (1-t)f_0 + tf_1$ と表されているとすると，$\|f_0\|, \|f_1\| \le 1$ かつ $(1-t)\|f_0\| + t\|f_1\| = \|f\| = 1$（系 4.15）だから，$\|f_0\| = \|f_1\| = 1$，すなわち $f_0, f_1 \in \mathsf{S}(A)$ である．したがって，$\mathrm{ex}(\mathsf{S}(A)) = \mathsf{PS}(A)$ を示せば十分である．

$\mathrm{ex}(\mathsf{S}(A)) \subseteq \mathsf{PS}(A)$ を示す．f が $\mathsf{S}(A)$ の端点であるとして，A 上の連続な正値線型形式 $g \le f$ を任意にとる．g が 0 でも f でもないとする．このとき，

$$f_0 = \frac{f-g}{\|f-g\|}, \qquad f_1 = \frac{g}{\|g\|}, \qquad t = \|g\|$$

と置けば，$f_0, f_1 \in \mathsf{S}(A)$，$t \in (0,1)$，かつ $f = (1-t)f_0 + tf_1$（系 4.15 より $1 - t = \|f\| - \|g\| = \|f - g\|$ であることに注意する）である．したがって，f が $\mathsf{S}(A)$ の端点であることより，$f_1 = f$，すなわち $g = tf$ である．よって，f は純粋である．

$\mathsf{PS}(A) \subseteq \mathrm{ex}(\mathsf{S}(A))$ を示す．A 上の純粋状態 f が，$f_0, f_1 \in \mathsf{S}(A)$ と $t \in (0,1)$ を用いて $f = (1-t)f_0 + tf_1$ と表されているとする．このとき，$tf_1 \le f$ は A 上の連続な正値線型形式だから，f が純粋であることより，ある $0 \le t' \le 1$ が存在して $tf_1 = t'f$ となる．ところが，$\|f_1\| = \|f\| = 1$ だから，ノルムを比較して $t = t'$ が得られ，これより $f_1 = f$ もわかる．よって，f は $\mathsf{S}(A)$ の端点である．

(3)　(1), (2) と Krein–Milman の定理（事実 4.42）から従う．□

4.5 正値線型形式の拡張

定理 4.44 A を C* 代数とし，B をその部分 C* 代数とする．

(1) B 上の任意の正値線型形式 g に対して，g を拡張する A 上の正値線型形式 f であって，$\|f\| = \|g\|$ を満たすものが存在する．

(2) (1) において，g が純粋ならば，f も純粋にとれる．

証明 (1) $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ をそれぞれ A, B の単位化とし，$\widetilde{B}$ を $\widetilde{A}$ の部分単位的 C* 代数とみなす．$\widetilde{g}$ を，g の $\widetilde{B}$ への自然な拡張とする．Hahn–Banach の拡張定理（事実 2.20）より，g を拡張する $\widetilde{A}$ 上の連続線型形式 h であって，$\|h\| = \|\widetilde{g}\| = \|g\|$ を満たすものが存在する．この h について，$h(1) = \widetilde{g}(1) = \|g\| = \|h\|$ だから，h は正値である（系 4.19）．そこで，$f = h|_A$ と置くと，f は g を拡張する A 上の正値線型形式であり，

$$\|g\| \leq \|f\| \leq \|h\| = \|g\|$$

より $\|f\| = \|g\|$ を満たす．これで，主張が示された．

(2) 一般性を失わず，g が純粋状態であると仮定する．A_+^* の部分集合

$$\begin{aligned} S &= \{f \in \mathsf{S}(A) \mid f|_B = g\} \\ &= \{f \in \overline{\mathsf{S}}(A) \mid f|_B = g\} \end{aligned}$$

は，上式の第二の表示と定理 4.43 (1) より，汎弱コンパクトかつ凸である．したがって，Krein–Milman の定理（事実 4.42）より，$S = \overline{\mathrm{co}}^{\mathrm{wk}^*}(\mathrm{ex}(S))$ である．(1) より $S \neq \emptyset$ だから，$\mathrm{ex}(S) \neq \emptyset$ である．一方で，$f \in S$ が $f_0, f_1 \in \overline{\mathsf{S}}(A)$ と $t \in (0,1)$ を用いて $f = (1-t)f_0 + tf_1$ と表されているとすると，$f_0|_B, f_1|_B \in \overline{\mathsf{S}}(B)$ かつ $g = (1-t)f_0|_B + tf_1|_B$ だから，$g \in \mathsf{PS}(B) \subseteq \mathrm{ex}(\overline{\mathsf{S}}(B))$（定理 4.43 (2)）より $f_0|_B = f_1|_B = g$，すなわち $f_0, f_1 \in S$ となる．よって，定理 4.43 (2) と合わせて，

$$\emptyset \neq \mathrm{ex}(S) = \mathrm{ex}(\overline{\mathsf{S}}(A)) \cap S = \{f \in \mathsf{PS}(A) \mid f|_B = g\}$$

を得る．これで，すなわち，g は，A 上の純粋状態 f に拡張できる． □

系 4.45 A を C* 代数とする．

(1) 任意の正規元 $x \in A \setminus \{0\}$ に対して，A 上の純粋状態 f であって，$|f(x)| = \|x\|$ を満たすものが存在する．

(2) 任意の $x \in A \setminus \{0\}$ に対して，A の既約対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ であって，$\|\pi(x)\| = \|x\|$ を満たすものが存在する．

証明 (1) まず，A が可換である場合を考える．Gelfand–Naimark の定理（定理 3.27）より，$A = C_0(\Omega)$（Ω は局所コンパクト Hausdorff 空間）としてよい．$x \in C_0(\Omega) \setminus \{0\}$ とすると，$|x(\omega)| = \|x\|$ を満たす点 $\omega \in \Omega$ が存在し，$C_0(\Omega)$ 上の線型形式 $x \mapsto x(\omega)$ が，条件を満たす純粋状態となる（例 4.38）．

次に，一般の場合を考える．正規元 $x \in A \setminus \{0\}$ が生成する A の部分 C* 代数を，A_x と書く．A_x は可換だから，前段の結果より，A_x 上の純粋状態 g であって，$|g(x)| = \|x\|$ を満たすものが存在する．さらに，定理 4.44 より，g は A 上の純粋状態 f に拡張できる．この f が，条件を満たす純粋状態となる．これで，主張が示された．

(2)　(1) より，A 上の純粋状態 f であって，$f(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$ を満たすものが存在する．この f が定める巡回ベクトル付き対合表現を $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ とすると，π は既約である（定理 4.41）．また，$\|\xi\| = 1$（命題 4.33）かつ

$$\|\pi(x)\xi\|^2 = \langle \xi | \pi(x^*x)\xi \rangle = f(x^*x) = \|x\|^2$$

だから，$\|\pi(x)\| = \|x\|$ である．よって，$(\pi, \mathcal{H})$ が条件を満たす既約対合表現である．　□

系 4.46　任意の C* 代数は，既約対合表現の族の Hilbert 直和として書ける忠実な対合表現をもつ．

証明　系 4.45 (2) から従う．　□

系 4.47　C* 代数 A の元 x に対して，次の条件は同値である．

(a) x は正である．
(b) A の任意の対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に対して，$\pi(x)$ は $\mathcal{H}$ 上の正作用素である．
(c) A の任意の既約対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に対して，$\pi(x)$ は $\mathcal{H}$ 上の正作用素である．
(d) A 上の任意の状態 f に対して，$f(x) \geq 0$ である．
(e) A 上の任意の純粋状態 f に対して，$f(x) \geq 0$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　A の忠実な対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ であって，既約対合表現の族の Hilbert 直和として書けるものをとる（系 4.46）．(c) が成り立つとすると，$\pi(x)$ は $\mathcal{H}$ 上の正作用素だから，x は正である（注意 3.52）．

(b) $\Longleftrightarrow$ (d)，(c) $\Longleftrightarrow$ (e)　A 上の正値線型形式は，A のベクトル付き対合表現 $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ が定める正値線型形式 $x \mapsto \langle \xi | \pi(x)\xi \rangle$ で尽くされる（命題 4.35，命題 4.17）．よって，(b) と (d) は同値である．また，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ が定める正値線型形式が純粋であるための必要十分条件は，π が既約であることである（定理 4.41）．よって，(c) と (e) も同値である．　□

補題 4.48　A を C* 代数とし，$\overline{\mathsf{S}}(A)$ を汎弱位相によって位相空間とみなす（定理 4.43 (1) より，これはコンパクト Hausdorff 空間である）．$x \in A$ に対して，$\overline{\mathsf{S}}(A)$ 上の連続関数 ev_x を，$\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ と定める．このとき，写像 $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ は，A の Hermite 元全体のなす実 Banach 空間 A_{h} から，$\overline{\mathsf{S}}(A)$ 上の実連続関数全体のなす実 Banach 空間 $C(\overline{\mathsf{S}}(A); \mathbb{R})$ への，等長な実線型作用素である．

証明　Hermite 元 $x \in A$ に対して，$\|\mathrm{ev}_x\|_{C(\overline{\mathsf{S}}(A);\mathbb{R})} = \sup_{f \in \overline{\mathsf{S}}(A)} |f(x)|$ が $\|x\|$ に等しいことを示せばよいが，これは系 4.45 の結果である．　□

定理 4.49　C* 代数 A 上の任意の連続な Hermite 線型形式 f に対して，A 上の正値線型形式 f^+, f^- であって，$f = f^+ - f^-$ かつ $\|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|$ を満たすものが存在する．

証明　補題 4.48 の等長埋め込みを，$\iota \colon A_{\mathrm{h}} \to C(\overline{\mathsf{S}}(A); \mathbb{R})$ と書く．すると，Hahn–Banach の拡張定理（事実 2.20）[*19] より，$C(\overline{\mathsf{S}}(A); \mathbb{R})$ 上の連続実線型形式 μ であって，$\mu \circ \iota = \phi$ かつ $\|\mu\| = \|f|_{A_{\mathrm{h}}}\| = \|f\|$（注意 3.10）を満たすものがとれる．Riesz–Markov–角谷の定理より，$C(\overline{\mathsf{S}}(A); \mathbb{R})$ 上の連続実線型形式は，コンパクト Hausdorff 空間 $\overline{\mathsf{S}}(A)$ 上の正則な有限実測度と同一視できる．そこで，$\overline{\mathsf{S}}(A)$ 上の有限実測度の Jordan

[*19] ここでは係数体は $\mathbb{C}$ ではなく $\mathbb{R}$ だが，Hahn–Banach の拡張定理は，係数体が $\mathbb{R}$ でも $\mathbb{C}$ でも成り立つ．

分解に対応する μ の分解 (μ^+, μ^-) をとると，μ^+ と μ^- は $C(\overline{\mathsf{S}}(A); \mathbb{R})$ 上の連続な正値線型形式であり，

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{かつ} \quad \|\mu\| = \|\mu^+\| - \|\mu^-\|$$

を満たす．f^+, f^- を，それぞれ $\mu^+ \circ \iota$, $\mu^- \circ \iota$ を複素線型に拡張して得られる A 上の連続な正値線型形式とする．すると，

$$f|_{A_{\mathrm{h}}} = \mu \circ \iota = \mu^+ \circ \iota - \mu^- \circ \iota = (f^+ - f^-)|_{A_{\mathrm{h}}}$$

より $f = f^+ - f^-$ である．また，

$$\|f\| = \|f^+ - f^-\| \leq \|f^+\| + \|f^-\|$$

かつ

$$\|f\| = \|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\| \leq \|f^+|_{A_{\mathrm{h}}}\| + \|f^-|_{A_{\mathrm{h}}}\| = \|f^+\| + \|f^-\|$$

だから，$\|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|$ である． □

注意 4.50　実は，定理 4.49 の条件を満たす正値線型形式 f^+, f^- は，一意に定まる．証明は，たとえば，Dixmier [5, §12.3.4] を参照のこと．

4.6　推移性定理

推移性定理を証明するための準備として，von Neumann 代数に関連する事実を二つ述べる．

事実 4.51（二重交換団定理）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathscr{A}$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の非退化な部分 C* 代数とする．このとき，$\mathscr{A}$ の二重交換団 $\mathscr{A}''$ は，$\mathscr{A}$ の強閉包に等しい．

証明は，たとえば，Bratteli–Robinson [4, Theorem 2.4.11] を参照のこと．

事実 4.52（稠密性定理）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{A}$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分対合代数とし，その強位相に関する閉包を $\mathscr{M}$ と書く．

(1) $\mathrm{Ball}(\mathscr{A}_{\mathrm{h}})$ は，$\mathrm{Ball}(\mathscr{M}_{\mathrm{h}})$ において強稠密である．
(2) $\mathrm{Ball}(\mathscr{A})$ は，$\mathrm{Ball}(\mathscr{M})$ において強稠密である．

証明は，たとえば，Murphy [7, §4.3.3] や Bratteli–Robinson [4, Theorem 2.4.16] を参照のこと．

補題 4.53　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$ は正規直交系をなすとし，$\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}$ はいずれもノルム r 以下であるとする．

(1) $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，各 ξ_i を η_i に移し，かつ $\|T\| \leq (2n)^{1/2} r$ を満たすものが存在する．
(2) 自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，各 ξ_i を η_i に移すものが存在するとする．このとき，(1) において，T を自己随伴にとれる．

証明　$\mathcal{H}_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$ と置く．正規直交系 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ を拡張して，$\mathcal{H}_0$ の正規直交基底 $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ を作る．$T_0 \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_0)$ を，正規直交基底 $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ に関する行列表示 $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ が次の条件を満たすものとして定める．

(i) $i \in \{1, \ldots, m\}$ と $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$a_{ij} = \langle \eta_j | \xi_i \rangle$ とする．

(ii) (2) の場合，任意の $i,j\in\{1,\dots,n\}$ に対して $a_{ji}=\langle\eta_i|\xi_j\rangle=\langle H\xi_i|\xi_j\rangle=\langle\xi_i|H\xi_j\rangle=\langle\xi_i|\eta_j\rangle=\overline{a_{ij}}$ であることに注意して，$i\in\{1,\dots,m\}$ と $j\in\{1,\dots,n\}$ に対して，$a_{ji}=\overline{a_{ij}}$ とする．

(iii) (i), (ii) で定まらなかった成分は，すべて 0 とする．

すると，T_0 は，各 ξ_i を η_i に移し，

$$\|T_0\|^2\leq\sum_{1\leq i,j\leq n}\|a_{ij}\|^2\leq 2(\|\eta_1\|^2+\cdots+\|\eta_n\|^2)\leq 2nr^2$$

を満たし，(2) の場合は自己随伴である．T_0 と $\mathcal{H}_0^\perp$ 上の零作用素との直和を $T\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ と定めれば，これが条件を満たす． □

補題 4.54　$\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_p$ を Hilbert 空間とし，$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_p$ と置く．$\mathscr{A}$ を，$\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数 $\mathscr{M}=\{T_1\oplus\cdots\oplus T_p\mid T_j\in\mathscr{L}(\mathcal{H}_j)\}$ の強稠密な部分対合代数とする．$\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathcal{H}$ は正規直交系をなすとし，$\eta_1,\dots,\eta_n\in\mathcal{H}$ はいずれもノルム r 以下であるとする．

(1) $T\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，各 ξ_i を η_i に移し，かつ $\|T\|\leq 2(2n)^{1/2}r$ を満たすものが存在する．

(2) 自己随伴作用素 $H\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，各 ξ_i を η_i に移すものが存在するとする．このとき，(1) において，T を自己随伴にとれる．

証明　補題 4.53 より，$S_0\in\mathscr{M}$ ((2) の場合, 自己随伴とする) であって, 各 ξ_i を η_i に移し, かつ $\|S_0\|\leq(2n)^{1/2}r$ を満たすものがとれる．これに対して，稠密性定理（事実 4.52）より，$T_0\in\mathscr{A}$（(2) の場合，自己随伴とする）であって，

$$\|T_0\|\leq(2n)^{1/2}r,\qquad\|\eta_i-T_0\xi_i\|=\|(S_0-T_0)\xi_i\|\leq\frac{1}{2}r\quad(1\leq i\leq n)$$

を満たすものがとれる．次に，補題 4.53 より，$S_1\in\mathscr{M}$（(2) の場合，自己随伴とする）であって，各 ξ_i を $\eta_i-T_0\xi_i$ に移し，かつ $\|S_1\|\leq(1/2)(2n)^{1/2}r$ を満たすものがとれる．これに対して，稠密性定理（事実 4.52）より，$T_1\in\mathscr{A}$（(2) の場合，自己随伴とする）であって，

$$\|T_1\|\leq\frac{1}{2}(2n)^{1/2}r,\qquad\|\eta_i-T_0\xi_i-T_1\xi_i\|=\|(S_1-T_1)\xi_i\|\leq\frac{1}{4}r\quad(1\leq i\leq n)$$

を満たすものがとれる．以下同様に繰り返せば，$\mathscr{A}$（(2) の場合，$\mathscr{A}_{\mathrm{h}}$）の元の列 $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ であって，各 T_k が

$$\|T_k\|\leq 2^{-k}(2n)^{1/2}r,\qquad\|\eta_i-T_0\xi_i-\cdots-T_{k-1}\xi_i\|\leq 2^{-k-1}r\quad(1\leq i\leq n)$$

を満たすものを得る．$T=\sum_{k=0}^\infty T_k$（作用素ノルム位相に関する総和）と定めれば，これが条件を満たす． □

定理 4.55（推移性定理）　A を C* 代数とし，$(\pi_j,\mathcal{H}_j)$（$1\leq j\leq p$）をどの二つもユニタリ同値でない A の非退化既約対合表現とする．各 $1\leq j\leq p$ に対して，$T_j\in\mathscr{L}(\mathcal{H}_j)$ とし，$\mathcal{K}_j$ を $\mathcal{H}_j$ の有限次元部分線型空間とする．

(1) $x\in A$ であって，すべての $1\leq j\leq p$ に対して $\pi_j(x)|_{\mathcal{K}_j}=T_j|_{\mathcal{K}_j}$ を満たすものが存在する．

(2) すべての T_j が自己随伴ならば，(1) において，x を Hermite にとれる．

(3) A が単位的であり，すべての T_j がユニタリならば，(1) において，x をユニタリにとれる．

証明　(1), (2)　$((\pi_j,\mathcal{H}_j))_{1\leq j\leq p}$ の直和を $(\pi,\mathcal{H})$ と置く．$(\pi_j,\mathcal{H}_j)$（$1\leq j\leq p$）はどの二つもユニタリ同値でない A の非退化既約対合表現だから，Schur の補題（命題 4.29）より，同変な連続線型作用素の空間

$\mathscr{L}_A(\pi_j;\pi_k)$ は，$j=k$ ならば $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}_j}$ であり，$j\neq k$ ならば 0 である．したがって，

$$\pi(A)'=\{\lambda_1 1_{\mathcal{H}_1}\oplus\cdots\oplus\lambda_p 1_{\mathcal{H}_p}\mid \lambda_j\in\mathbb{C}\}$$

であり，ここから容易に計算できるように，

$$\pi(A)''=\{T_1\oplus\cdots\oplus T_p\mid T_j\in\mathscr{L}(\mathcal{H}_j)\}$$

である．二重交換団定理（事実 4.51）より，これが $\pi(A)$ の強閉包に等しいから，$\mathscr{A}=\pi(A)$ は補題 4.54 の仮定を満たす．よって，$T\in\pi(A)$（(2) の場合は，自己随伴とする）であって，すべての $1\leq j\leq p$ に対して $T|_{\mathcal{K}_j}=T_j|_{\mathcal{K}_j}$ を満たすものがとれる．$T=\pi(x)$ を満たす $x\in A$（(2) の場合は，Hermite とする（注意 3.5)）をとれば，すべての $1\leq j\leq p$ に対して $\pi_j(x)|_{\mathcal{K}_j}=T_j|_{\mathcal{K}_j}$ となる．

(3)　A が単位的であり，すべての T_j がユニタリであるとする．各 $1\leq j\leq p$ に対して，$\mathcal{K}_j'=\mathcal{K}_j+T_j\mathcal{K}_j$ と置き（これは有限次元 Hilbert 空間である），$\mathcal{K}_j'$ 上のユニタリ作用素 T_j' を $T_j'|_{\mathcal{K}_j}=T_j|_{\mathcal{K}_j}$ を満たすようにとる．これに対して，$\mathcal{K}_j'$ 上の自己随伴作用素 H_j を，$e^{iH_j}=T_j'$ を満たすようにとる（T_j' の対角化を用いて構成できる）．H_j と $(\mathcal{K}_j')^\perp$ 上の零作用素との直和は $\mathcal{H}_j$ 上の自己随伴作用素だから，(2) より，Hermite 元 $h\in A$ であって

$$\pi_j(h)|_{\mathcal{K}_j'}=H_j\qquad(1\leq j\leq p)$$

を満たすものがとれる．連続関数算を用いて $x=e^{ih}\in\mathscr{U}(A)$ と定めれば，各 π_j が単位的対合準同型であること（命題 4.25）と命題 3.41 より，

$$\pi_j(x)|_{\mathcal{K}_j'}=e^{i\pi_j(h)}|_{\mathcal{K}_j'}=e^{iH_j}|_{\mathcal{K}_j'}=T_j'|_{\mathcal{K}_j'}\qquad(1\leq j\leq p)$$

となる．よって，このユニタリ元 x が，主張の条件を満たす． □

系 4.56　C* 代数の対合表現について，代数的既約であることと位相的既約であることとは同値である．

証明　推移性定理（定理 4.55）で $p=1$ とすれば，主張が得られる． □

系 4.57　A を C* 代数とし，f をその上の純粋な正値線型形式とする．f が定める巡回ベクトル付き対合表現 $(\pi,\mathcal{H},\xi)$ について，A から $\mathcal{H}$ への自然な写像は全射である．

証明　f が純粋であることより，π は位相的既約であり（定理 4.41），したがって，π は代数的既約でもある（系 4.56）．自然な写像 $A\to\mathcal{H}$ の像は，$\mathcal{H}$ の $\pi(A)$-安定な部分線型空間であって 0 でないから，$\mathcal{H}$ 全体となる． □

4.7　純粋状態と極大正則左イデアルとの対応

対合代数 A 上の正値線型形式 f に対して，

$$N_f=\{x\in A\mid f(x^*x)=0\}$$

を，f に伴う**退化空間**という．命題 4.5 (2) より，

$$\begin{aligned}N_f&=\{x\in A\mid \text{任意の } y\in A \text{ に対して } f(x^*y)=0\}\\&=\{y\in A\mid \text{任意の } x\in A \text{ に対して } f(x^*y)=0\}\end{aligned}$$

と書くこともでき，この表示から，N_f が A の左イデアルであることがわかる．

命題 4.58　A を近似単位元をもつ対合ノルム代数とし，f をその上の連続な正値線型形式とする．f に伴う退化空間を N_f と書く．

(1) $N_f + N_f^* \subseteq \operatorname{Ker} f$ である．

(2) A が C^* 代数ならば，(1) で等号が成立するための必要十分条件は，f が純粋であるか，または 0 であることである．

証明　(1)　$x \in A$ に対して $|f(x)|^2 \leq \|f\|f(x^*x)$ だから（命題 4.9 (2)），$N_f \subseteq \operatorname{Ker} f$ である．さらに，f が Hermite である（命題 4.9 (1)）ことより $(\operatorname{Ker} f)^* = \operatorname{Ker} f$ だから，$N_f^* \subseteq \operatorname{Ker} f$ も成り立つ．

(2)　A が C^* 代数であるとする．$f = 0$ の場合は明らかだから，以下では $f \neq 0$ とする．

<u>必要性</u>　$N_f + N_f^* = \operatorname{Ker} f$ であるとして，A 上の正値線型形式 $g \leq f$ を任意にとる．すると，$N_f \subseteq N_g$ だから，仮定および (1) と合わせて

$$\operatorname{Ker} f = N_f + N_f^* \subseteq N_g + N_g^* \subseteq \operatorname{Ker} g$$

を得る．したがって，ある $0 \leq t \leq 1$ が存在して，$g = tf$ となる．よって，f は純粋である．

<u>十分性</u>　f が純粋であるとして，f が定める巡回ベクトル付き対合表現を $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ とし，A から $\mathcal{H}$ への自然な写像を $x \mapsto [x]$ と書く．π は既約である（定理 4.41）．$x \in \operatorname{Ker} f$ とすると，$\langle \xi | [x] \rangle = f(x) = 0$ だから（命題 4.35 (3)），$\mathbb{C}[x]$ の上への直交射影は，ξ, $[x]$ をそれぞれ 0, $[x]$ に移す．したがって，推移性定理（定理 4.55）より，Hermite 元 $a \in A$ であって

$$\pi(a)\xi = 0, \qquad \pi(a)[x] = [x]$$

を満たすものが存在する．この a について，

$$\begin{aligned} &f(a^*a) = \|\pi(a)\xi\|^2 = 0, \\ &f((x - ax)^*(x - ax)) = \|\pi(x - ax)\xi\|^2 = \|[x] - \pi(a)[x]\|^2 = 0 \end{aligned}$$

だから，a, $x - ax \in N_f$ である．よって，

$$x = (x - ax) + (x^*a)^* \in N_f + N_f^*$$

である（N_f が左イデアルであることを用いた）．　□

補題 4.59　A を単位的 C^* 代数とし，L をその閉左イデアルとする．正元 $x \in A$ が，条件「任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある正元 $y \in L$ が存在して，$x \leq y + \epsilon$ となる」を満たすならば，$x \in L$ である．

証明　正元 $x \in A$ が条件を満たすとする．$\epsilon > 0$ を任意にとり，これに対して，正元 $y \in L$ であって $x \leq y + \epsilon$ を満たすものをとる．$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の定数項をもたない多項式関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，関数 $t \mapsto t^{1/2}$ にコンパクト一様収束するもの（これは存在する）をとれば，連続関数算の性質より，A において $f_n(y) \to y^{1/2}$ となる．各 $f_n(y)$ は L に属するから，$y^{1/2}$ も L に属する．L は左イデアルだから，$x^{1/2}(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}y^{1/2} \in L$ である．一方で，この元と x との差は，

$$\begin{aligned} \|x^{1/2}(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}y^{1/2} - x\|^2 &= \|\epsilon^{1/2}x^{1/2}(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}\| \\ &= \epsilon\|(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}x(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}\| && (*) \\ &\leq \epsilon\|(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}(y + \epsilon)(y^{1/2} + \epsilon^{1/2})^{-1}\| && (**) \\ &\leq \epsilon && (***) \end{aligned}$$

と評価できる．ここで，

- 不等号 $(*)$ は，C* 条件から得られる．
- 不等号 $(**)$ は，次のようにして得られる．$x \leq y + \epsilon$ より
$$(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}x(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1} \leq (y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}(y+\epsilon)(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}$$
だから（系 3.60），系 3.55 より
$$\|(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}x(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}\| \leq \|(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}(y+\epsilon)(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}\|$$
である．
- 不等号 $(***)$ は，次のようにして得られる．$t \geq 0$ に対して $0 \leq (t+\epsilon)/(t^{1/2}+\epsilon^{1/2})^2 \leq 1$ であることより
$$\mathrm{Sp}_A((y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}(y+\epsilon)(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}) \subseteq [0,1]$$
だから（命題 3.40 (1)），定理 3.15 より
$$\|(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}(y+\epsilon)(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}\| = \|(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}(y+\epsilon)(y^{1/2}+\epsilon^{1/2})^{-1}\|_{\mathrm{Sp}} \leq 1$$
である．

以上より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，x との差のノルムが ϵ 以下の L の元が存在する．L は A において閉だから，これより，$x \in L$ である． □

補題 4.60　A を C* 代数とする．L, L' は A の閉左イデアルであり，次の条件を満たすとする．

(i) $L \subseteq L'$ である．
(ii) A 上の任意の正値線型形式 f に対して，$f|_L = 0$ ならば $f|_{L'} = 0$ である．

このとき，$L = L'$ である．

証明　L と L' は A の単位化の閉左イデアルでもあるから，必要ならば単位化をとることで，一般性を失わず，A は単位的であると仮定する．系 3.73 と補題 4.59 より，条件 (i), (ii) の下で，任意の正元 $x \in L'$ と $\epsilon > 0$ に対して，ある正元 $y \in L$ が存在して，$x \leq y + \epsilon$ となることを示せばよい．

$\overline{\mathsf{S}}(A)$ の部分集合 S_ϵ を
$$S_\epsilon = \{f \in \overline{\mathsf{S}}(A) \mid f(x) \geq \epsilon\}$$
と定めると，これは汎弱コンパクトである（定理 4.43 (1)）．一方で，条件 (ii) の対偶より，各 $f \in S_\epsilon$ は L 上で消えない．すなわち，$a \in L$ に対する $U_a = \{f \in \overline{\mathsf{S}}(A) \mid f(a) \neq 0\}$ の全体は，S_ϵ の開被覆である．したがって，有限個の $a_1, \ldots, a_n \in L$ が存在して，$U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$ は S_ϵ を被覆する．このとき，$y = a_1^*a_1 + \cdots + a_n^*a_n \in L \cap A_+$ と置けば，任意の $f \in S_\epsilon$ に対して $f(y) > 0$ である（命題 4.9 (2)）．

S_ϵ は汎弱コンパクトであり，その上の関数 $f \mapsto f(x)$ と $f \mapsto f(y)$ はともに汎弱連続だから，必要ならば y をその十分大きい正の実数倍で置き換えることで，任意の $f \in S_\epsilon$ に対して $f(x) \leq f(y)$ であるとしてよい．一方で，$f \in \overline{\mathsf{S}}(A) \setminus S_\epsilon$ に対しては，$f(x) \leq \epsilon$ である．よって，任意の $f \in \overline{\mathsf{S}}(A)$ に対して，$f(x) \leq f(y) + \epsilon$ が成り立つ．系 4.47 より，これは $x \leq y + \epsilon$ を意味する．これで，主張が示された． □

補題 4.61　A を C* 代数とする．A の閉左イデアル L は，「A 上の純粋状態 f に伴う退化空間 N_f であって，L を含むもの」全体の交叉に等しい．

証明　$S = \{f \in \overline{\mathsf{S}}(A) \mid f|_L = 0\}$ と置くと，次のことが成り立つ．

- $f \in S$ とすると，任意の $x \in L$ に対して，$x^*x \in L$ より $f(x^*x) = 0$ である．したがって，$L \subseteq \bigcap_{f\in S} N_f$ であり，補題 4.60 と合わせて，
$$L = \bigcap_{f\in S} N_f$$
を得る．
- S は汎弱コンパクトかつ凸だから（定理 4.43 (1)），Krein–Milman の定理（事実 4.42）より，$S = \overline{\mathrm{co}}^{\mathrm{wk}^*}(\mathrm{ex}(S))$ である．したがって，
$$\bigcap_{f\in S} N_f = \bigcap_{f\in \mathrm{ex}(S)} N_f$$
である．
- $f \in S$ が f_0, $f_1 \in \overline{\mathsf{S}}(A)$ と $t \in (0,1)$ を用いて $f = (1-t)f_0 + tf_1$ と表されているとすると，任意の $x \in L$ に対して $f(x^*x) = 0$ より $f_0(x^*x) = f_1(x^*x) = 0$ だから，$i \in \{0,1\}$ に対して $L \subseteq N_{f_i} \subseteq \operatorname{Ker} f_i$ である（命題 4.58 (1)）．すなわち，f_0, $f_1 \in S$ である．したがって，定理 4.43 (2) と合わせて，
$$\mathrm{ex}(S) = \mathrm{ex}(\overline{\mathsf{S}}(A)) \cap S = (\mathsf{PS}(A) \cup \{0\}) \cap S$$
を得る．

以上より，
$$L = \bigcap_{f\in(\mathsf{PS}(A)\cup\{0\})\cap S} N_f = \bigcap_{f\in \mathsf{PS}(A)\cap S} N_f$$
である．これが，示したかったことにほかならない．　□

定理 4.62　A を C* 代数とする．A 上の正値線型形式 f に伴う退化空間を，N_f と書く．

(1) A 上の正値線型形式 f が純粋であるための必要十分条件は，N_f が A の極大正則左イデアルであることである．

(2) 写像 $f \mapsto N_f$ は，$\mathsf{PS}(A)$ から A の極大正則左イデアル全体のなす集合への全単射である．

証明　(1)　<u>必要性</u>　f が純粋であるとして，f が定める巡回付きベクトル対合表現を $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ とする．このとき，A から $\mathcal{H}$ への自然な写像 $x \mapsto [x]$ は全射であり（系 4.57），その核は N_f だから，$\mathcal{H}$ は A/N_f と同一視できる．π は代数的既約だから（定理 4.41，系 4.56），N_f は A の極大左イデアルである．また，$\xi = [u]$ となる $u \in A$ をとれば，任意の $x \in A$ に対して $[xu] = \pi(x)\xi = [x]$，すなわち $x - xu \in N_f$ だから，N_f は左イデアルとして正則である．よって，N_f は A の極大正則左イデアルである．

<u>十分性</u>　N_f が A の極大正則左イデアルであるとする．補題 4.61 より，N_f は「A 上の純粋状態 g に伴う退化空間 N_g であって，N_f を含むもの」全体の交叉に等しいが，N_f は極大だから，ある純粋状態 g が存在して $N_f = N_g$ となる．命題 4.58 (2) より $\operatorname{Ker} g = N_g + N_g^* = N_f + N_f^* \subseteq \operatorname{Ker} f$ だから，ある $t \geq 0$ が存在して $f = tg$ となる．$t = 0$ であるとすると，$N_f = A$ となり仮定に反するから，$t > 0$ である．よって，f は純粋である．

(2)　<u>単射性</u>　A 上の純粋状態 f, g が $N_f = N_g$ を満たすとすると，命題 4.58 (2) より $\operatorname{Ker} f = N_f + N_f^* = N_g + N_g^* = \operatorname{Ker} g$ だから，$\|f\| = \|g\| = 1$ であることと合わせて，$f = g$ を得る．

全射性　L を A の極大正則左イデアルとする．L は A において閉だから（命題 2.13），補題 4.61 より，L は「A 上の純粋状態 f に伴う退化空間 N_f であって，L を含むもの」全体の交叉に等しいが，L は極大だから，ある純粋状態 f が存在して $L = N_f$ となる． □

注意 4.63　A が可換 C* 代数ならば，$\mathrm{PS}(A) = \Omega(A)$ であり（例 4.38），$\omega \in \Omega(A)$ に対して

$$\begin{aligned} N_\omega &= \{x \in A \mid \omega(x^*x) = 0\} \\ &= \{x \in A \mid |\omega(x)|^2 = 0\} \\ &= \operatorname{Ker}\omega \end{aligned}$$

である．よって，この場合，定理 4.62 (2) の全単射は，命題 2.31 で述べた，$\Omega(A)$ から A の極大正則イデアル全体のなす集合への全単射にほかならない．

系 4.64　A を C* 代数とする．

(1) A の任意の代数的既約表現 (ϖ, E) に対して，A の位相的既約対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$ であって，(π, E) に同値である（すなわち，$\mathcal{H}$ から E への A-同変な線型同型写像が存在する）ものが存在する．

(2) A の位相的既約対合表現 $(\pi, \mathcal{H})$, $(\pi', \mathcal{H}')$ について，これらが同値である（すなわち，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}'$ への A-同変な線型同型写像が存在する）こととユニタリ同値であることとは同値である．

証明　(1)　$\varpi = 0$ である場合は明らかだから，そうでないとする．このとき，$x \in A$ と $\xi \in E$ を $\varpi(x)\xi \neq 0$ となるようにとれば，$\varpi(A)\xi$ は 0 でない $\varpi(A)$-安定な部分線型空間だから，$\varpi(A)\xi = E$ である．すなわち，A から E への写像 $x \mapsto \varpi(x)\xi$ は全射である．そこで，$N = \{x \in A \mid \varpi(x)\xi = 0\}$ と置けば，E は A/N と同一視できる．ϖ は代数的既約だから，N は A の極大左イデアルである．また，$\xi = \varpi(u)\xi$ となる $u \in A$ をとれば，任意の $x \in A$ に対して $\varpi(xu)\xi = \varpi(x)\varpi(u)\xi = \varpi(x)\xi$，すなわち $x - xu \in N$ だから，N は左イデアルとして正則である．以上より，N は A の極大正則イデアルだから，A 上の純粋状態 f であって，それに伴う退化空間 N_f が N に等しいものが存在する（定理 4.62 (2)）．この f が定める A の対合表現は，$A/N_f = A/N$ と同一視できるから（系 4.57），ϖ に代数的同値である．

(2)　$\pi = 0$ または $\pi' = 0$ である場合は明らかだから，そうでないとする．$\Phi\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ を，π から π' への代数的同値とする．$\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ を一つ固定して，$\xi' = \Phi(\xi)$ とする．巡回ベクトル付き対合表現 $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$, $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ が定める正値線型形式をそれぞれ f, f' とすると，これらは純粋であり（定理 4.41），これらに伴う退化空間 N_f, $N_{f'}$ について

$$\begin{aligned} N_f &= \{x \in A \mid \pi(x)\xi = 0\} \\ &= \{x \in A \mid \Phi(\pi(x)\xi) = 0\} \\ &= \{x \in A \mid \pi'(x)\xi' = 0\} \\ &= N_{f'} \end{aligned}$$

である．したがって，定理 4.62 (2) より，ある $t > 0$ が存在して $f' = tf$ となる．すなわち，巡回ベクトル付き対合表現 $(\pi, \mathcal{H}, t^{1/2}\xi)$ と $(\pi', \mathcal{H}', \xi')$ が定める正値線型形式は等しい．よって，命題 4.34 より，π と π' はユニタリ同値である． □

付録 A　対合 Banach 代数の包絡 C* 代数

A.1　対合 Banach 代数の包絡 C* 代数

定義 A.1（C* 半ノルム）　対合代数 A 上の **C* 半ノルム**（C*-seminorm）とは，A 上の半ノルム p であって，次の条件を満たすものをいう．

(i) 任意の $x, y \in A$ に対して，$p(xy) \leq p(x)p(y)$ である．
(ii) 任意の $x \in A$ に対して，$p(x^*x) = p(x)^2$ である．

A を対合代数とする．B が C* 代数で，$\phi\colon A \to B$ が対合準同型であるとき，関数 $x \mapsto \|\phi(x)\|$ は A 上の C* 半ノルムである．逆に，p が A 上の C* 半ノルムであるとき，A の p による Hausdorff 完備化を B と置き，$\phi\colon A \to B$ を自然な対合準同型とすれば，B は C* 代数をなし，$p(x) = \|\phi(x)\|$（$x \in A$）が成り立つ．

A が対合 Banach 代数ならば，A 上の任意の C* 半ノルム p に対して，$p(x) \leq \|x\|$（$x \in A$）が成り立つ（定理 3.16）．そこで，$x \in A$ に対して

$$\|x\|_* = \sup\{p(x) \mid p \text{ は } A \text{ 上の C* 半ノルム}\}$$

と定めると，$\|{-}\|_*$ は A 上の C* 半ノルムの中で最大のものとなる．これを，A 上の**最大 C* 半ノルム**という．これを踏まえて，次のように定義する．

定義 A.2（包絡 C* 代数）　対合 Banach 代数 A に対して，その最大 C* 半ノルムによる Hausdorff 完備化を，A の**包絡 C* 代数**（enveloping C*-algebra）といい，$\mathbf{C}^*(A)$ と書く．

対合 Banach 代数 A が可換ならば，$\mathbf{C}^*(A)$ も可換である．また，A が単位的ならば，$\mathbf{C}^*(A)$ も単位的であり，自然な対合準同型 $\iota\colon A \to \mathbf{C}^*(A)$ は単位的である．

命題 A.3（包絡 C* 代数の普遍性）　A を対合 Banach 代数とし，$\iota\colon A \to \mathbf{C}^*(A)$ を包絡 C* 代数への自然な対合準同型とする．このとき，任意の C* 代数 B と対合準同型 $\phi\colon A \to B$ に対して，対合準同型 $\phi'\colon \mathbf{C}^*(A) \to B$ であって $\phi' \circ \iota = \phi$ を満たすものが，一意に存在する．さらに，A と B が単位的で ϕ が単位的対合準同型ならば，ϕ' も単位的対合準同型である．

証明　B を C* 代数とし，$\phi\colon A \to B$ を対合準同型とすると，関数 $x \mapsto \|\phi(x)\|$ は A 上の C* 半ノルムだから，A 上の最大 C* 半ノルム $\|{-}\|_*$ で上から抑えられる．すなわち，$\|\phi(x)\| \leq \|x\|_*$（$x \in A$）である．したがって，ϕ は連続線型作用素 $\phi'\colon \mathbf{C}^*(A) \to B$ に一意に拡張できる．ϕ は対合準同型であり，$\iota(A)$ は $\mathbf{C}^*(A)$ において稠密だから，ϕ' も対合準同型である．さらに，A と B が単位的で ϕ が単位的対合準同型ならば，$\phi'(1_{\mathbf{C}^*(A)}) = \phi(1_A) = 1_B$ だから，ϕ' も単位的対合準同型である．□

A.2　包絡 C* 代数上の正値線型形式

命題 A.4　A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\iota\colon A \to \mathbf{C}^*(A)$ を包絡 C* 代数への自然な対合準同型とする．

(1) A 上の連続な正値線型形式 f に対して，$\mathbf{C}^*(A)$ 上の正値線型形式 f' であって $f' \circ \iota = f$ を満たすもの

が，一意に存在する．

(2) (1) によって定まる A_+^* から $\mathbf{C}^*(A)_+^*$ への写像 $f \mapsto f'$ と，$\mathbf{C}^*(A)_+^*$ から A_+^* への写像 $g \mapsto g \circ \iota$ は，互いに他の逆を与える全単射である．さらに，これらの写像は，作用素ノルムに関して等長であり，かつ順序同型である．

証明 (1) A 上の最大 C* 半ノルムを $\|\text{–}\|_*$ と書く．f を A 上の連続な正値線型形式とし，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を f が定める巡回ベクトル付き表現とする．任意の $x \in A$ に対して，命題 4.9 と命題 4.33 より

$$|f(x)|^2 \leq \|f\| f(x^*x) = \|f\| \|\pi(x)\xi\|^2 \leq \|f\| \|\pi(x)\|^2 \|\xi\|^2 = \|f\|^2 \|x\|_*^2$$

だから，f は最大 C* 半ノルム $\|\text{–}\|_*$ に関して連続であり，対応する作用素ノルムは $\|f\|$ 以下である．よって，$\mathbf{C}^*(A)$ 上の正値線型形式 f' であって $f' \circ \iota = f$ を満たすものが一意に存在し，この f' は $\|f'\| \leq \|f\|$ を満たす．

(2) 定義より，写像 $f \mapsto f'$ と $g \mapsto g \circ \iota$ をこの順に合成したものは，A_+^* 上の恒等写像となる．また，$\iota(A)$ は $\mathbf{C}^*(A)$ において稠密だから，写像 $g \mapsto g \circ \iota$ は単射である．よって，これらの写像は，互いに他の逆を与える全単射である．

f, g を A 上の連続な正値連続線型形式とし，これらのそれぞれに対して $\mathbf{C}^*(A)$ 上の正値線型形式 f', g' を，(1) のように定める．(1) の証明で示されているように，$\|f'\| \leq \|f\|$ である．一方で，ι はノルム減少だから（定理 3.16），$\|f\| = \|f' \circ \iota\| \leq \|f'\|$ である．これで，等長性が示された．また，不等式 $f(x^*x) \leq g(x^*x)$ は $f'(\iota(x)^*\iota(x)) \leq g'(\iota(x)^*\iota(x))$ と書き換えられ，$\iota(A)$ は $\mathbf{C}^*(A)$ において稠密だから，$f \leq g$ と $f' \leq g'$ とは同値である．これで，順序同型性が示された． □

定義 A.5（正値線型形式の包絡 C* 代数への自然な拡張） A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$\iota\colon A \to \mathbf{C}^*(A)$ を包絡 C* 代数への自然な対合準同型とする．A 上の連続な正値線型形式 f に対して，$\mathbf{C}^*(A)$ 上の正値線型形式 f' であって $f' \circ \iota = f$ を満たすもの（命題 A.4 より一意に存在する）を，f の $\mathbf{C}^*(A)$ への**自然な拡張**（canonical extension）という．

命題 A.6 A を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とする．f を A 上の連続な正値線型形式とし，f' をその包絡 C* 代数 $\mathbf{C}^*(A)$ への自然な拡張とする．このとき，f が純粋であることと f' が純粋であることとは同値である．

証明 命題 A.4 より，A 上の連続な正値線型形式 $g \leq f$ と，$\mathbf{C}^*(A)$ 上の正値線型形式 $h \leq f'$ とは，写像 $g \mapsto g'$ によって一対一に対応する．主張は，このことから従う． □

参考文献

全体を通して，Arveson [2], Bourbaki [3], Dixmier [5], Murphy [7] を参考にした．Löwner–Heinz の不等式（命題 3.62 (1)）の証明は，日合・柳 [9, 定理 5.1.1] を参考にした（この証明は Pedersen によるものと書かれている）．

[1] W. Arveson, *An Invitation to C*-Algebras*, Springer, 1976.

[2] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Théories spectrales, Chapitres 1 et 2*, 2ème édition, Springer, 2019.

[4] O. Blatteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Springer, 1987.

[5] J. Dixmier, *C*-Algebras*, North-Holland, 2011.

[6] G. K. Pedersen, *C*-Algebras and Their Automorphism Groups*, 2nd edition, Academic Press, 2018.

[7] G. J. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[8] M. Takesaki (竹崎正道), *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979.

[9] 日合文雄，柳研二郎，『ヒルベルト空間と線型作用素』，牧野書店，1995.

[10] 宮島静雄，『関数解析』，横浜図書，2005.

[11] 箱，「付値体のノート」，2020 年 5 月 9 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/valued-field.html

[12] 箱，「Fourier 級数のノート」，2020 年 9 月 8 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/fourier-series.html

[13] 箱，「Hilbert 空間」，2025 年 6 月 19 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/hilbert-space.html