微分のノート

箱（@o_ccah）

2019 年 5 月 12 日

記号と用語

- 体とは，可換とは限らない単位的環であって，零環ではなく，0 以外の元がすべて乗法に関する逆元をもつものをいう．体 K 上の絶対値とは，K から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像であって，非退化，乗法的，かつ三角不等式を満たすものをいう．体にその上の絶対値を 1 つ固定して考えたものを，付値体という．
- 本稿を通じて，K は離散でない付値体を表す．
- 左 K-（位相）線型空間を単に K-（位相）線型空間という．
- ノルム化可能な K-位相線型空間 $E_0, \dots, E_{r-1}, F$ に対して，$E_0 \times \cdots \times E_{r-1}$ から F への連続 r 重線型写像全体のなす K-線型空間に，$E_0, \dots, E_{r-1}, F$ の位相と整合するノルムから定まる作用素ノルムが定める位相を入れた（ノルム化可能な）K-位相線型空間を，$\mathscr{L}(E_0, \dots, E_{r-1}; F)$ と書く．$\mathscr{L}(E_0, \dots, E_{r-1}; F)$ の位相は，$E_0, \dots, E_{r-1}, F$ の位相にのみより，ノルムのとり方にはよらない．$\mathscr{L}(E_0, \dots, E_{r-1}; F)$ は，K-位相線型空間として $\mathscr{L}(E_0; \dots; \mathscr{L}(E_{r-1}; F) \dots)$ と自然に同型である．

1 微分

定義 1.1（微分） E, F をノルム化可能な K-位相線型空間とする．E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ について，f が x_0 において**微分可能**であるとは，ある $A \in \mathscr{L}(E; F)$ が存在して次の条件を満たすことをいう：「任意の $\epsilon > 0$ に対して，x_0 のある近傍 $V \subseteq U$ が存在して，任意の $x \in V$ に対して

$$\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_F \leq \epsilon \|x - x_0\|_E$$

が成り立つ」．このとき，A を f の x_0 における**微分**といい，$A = Df(x_0)$ と書く．さらに，$E = K$ であるとき，K-位相線型空間の自然な同型 $\mathscr{L}(K; F) \cong F$ によって $Df(x_0)$ を F の元とみなしたものを，$f'(x_0)$ と書く（すなわち，$f'(x_0) = Df(x_0)1$ である）．

$E \neq 0$ ならば，上の定義中の鉤括弧で囲んだ条件は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

と同値である．さらに $K = \mathbb{R}$ ならば，これは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|_E} = 0$$

とも書ける．$K = \mathbb{R}$ かつ f が x_0 において微分可能であるとし，$h \in E \setminus \{0\}$ を 1 つ固定して，上式の h を th（$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$）で置き換えると，

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - tDf(x_0)h}{|t| \|h\|_E} = 0,$$

したがって

$$Df(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

を得る（最後の式は $h = 0$ に対しても成り立つ）．

明らかに，f の x_0 における微分（可能性）は，f の x_0 における芽にのみ依存する．

注意　同じ位相を定めるノルムどうしはたかだか定数倍程度しか違わないから，上の定義は，E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ のとり方によらない．以下では，この類のことはいちいち注意しない．

注意　f が x_0 において微分可能であるとき，f の x_0 における微分は一意に定まる．このことを見ておく．$A, B \in \mathscr{L}(E; F)$ が上の定義中の条件を満たすとする．$x \in E$ と $\epsilon > 0$ を任意にとる．条件より，$\lambda \in K \setminus \{0\}$ を十分 0 の近くにとれば[*1]，

$$\|(B - A)(\lambda x)\|_F \leq \|f(x_0 + \lambda x) - f(x_0) - A(\lambda x)\|_F + \|f(x_0 + \lambda x) - f(x_0) - B(\lambda x)\|_F \leq \epsilon \|\lambda x\|_E$$

が成り立つ．上式の両辺を $|\lambda| > 0$ で割ると，

$$\|(B - A)x\|_F \leq \epsilon \|x\|_E$$

を得る．$\epsilon > 0$ は任意だったから，$(B - A)x = 0$ である．$x \in E$ は任意だったから，$A = B$ を得る．

E, F をノルム化可能な K-位相線型空間とする．明らかに，定値写像 $f \colon E \to F$ は各点 $x \in E$ で微分可能であり，その微分は常に 0 に等しい．また，連続線型写像 $A \colon E \to F$ は各点 $x \in E$ で微分可能であり，その微分は常に A に等しい．

命題 1.2　E, F をノルム化可能な K-位相線型空間とする．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f \colon U \to F$ について，f が x_0 において微分可能ならば，f は x_0 において連続である．

証明　E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．また，これらのノルムに対応する $\mathscr{L}(E; F)$ 上の作用素ノルムを $\|-\|_{\mathscr{L}(E;F)}$ と書く．

f が x_0 において微分可能であるとする．微分の定義より，x_0 のある近傍 $V \subseteq U$ が存在して，任意の $x \in V$ に対して

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F \leq \|x - x_0\|_E$$

が成り立つ．このとき，任意の $x \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(x_0)\|_F &\leq \|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F + \|Df(x_0)(x - x_0)\|_F \\
&\leq (1 + \|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(E;F)}) \|x - x_0\|_E
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，f は x_0 において連続である．　□

[*1] ここで，K が離散でないという仮定を使っている．

2　微分の基本的な性質

命題 2.1（微分演算の線型性）　E,F をノルム化可能な K-位相線型空間とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f,g\colon U \to F$，$\lambda,\mu \in K$ とする．f,g が x_0 において微分可能ならば，$\lambda f + \mu g$ も x_0 において微分可能であり，

$$D(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda Df(x_0) + \mu Dg(x_0)$$

が成り立つ．

証明　E,F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．

f,g が x_0 において微分可能であるとする．微分の定義より，任意の $\epsilon > 0$ に対して x_0 のある近傍 $V \subseteq U$ が存在して，任意の $x \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F &\leq \epsilon\|x - x_0\|_E, \\ \|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\|_F &\leq \epsilon\|x - x_0\|_E\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき，任意の $x \in V$ に対して

$$\begin{aligned}&\|(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0) - (\lambda Df(x_0) + \mu Dg(x_0))(x - x_0)\|_F \\ &\leq |\lambda|\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F + |\mu|\|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\|_F \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|)\epsilon\|x - x_0\|_E\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\lambda f + \mu g$ は x_0 において微分可能であり，その微分は $\lambda Df(x_0) + \mu Dg(x_0)$ に等しい．　□

命題 2.1 は，「x_0 において微分可能な写像の芽の全体」が K-線型空間をなし，x_0 における微分をとる操作がその空間から $\mathscr{L}(E;F)$ への線型写像であることを示している．

命題 2.2（微分演算の連鎖律）　E,F,G をノルム化可能な K-位相線型空間とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f\colon U \to F$，V を $f(x_0)$ の近傍で $f(U) \subseteq V$ なるもの，$g\colon V \to G$ とする．f が x_0 において微分可能かつ g が $f(x_0)$ において微分可能ならば，$g \circ f$ は x_0 において微分可能であり，

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

が成り立つ．

証明　E,F,G の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F, \|-\|_G$ をそれぞれ固定しておく．また，これらのノルムに対応する $\mathscr{L}(E;F), \mathscr{L}(F;G)$ の作用素ノルムをそれぞれ $\|-\|_{\mathscr{L}(E;F)}, \|-\|_{\mathscr{L}(F;G)}$ と書く．

f が x_0 において微分可能かつ g が $f(x_0)$ において微分可能であるとする．$\epsilon > 0$ を任意にとる．微分の定義より，x_0 のある近傍 $U' \subseteq U$ が存在して，任意の $x \in U'$ に対して

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F \leq \epsilon\|x - x_0\|_E$$

が成り立つ．また，$f(x_0)$ のある近傍 $V' \subseteq V$ が存在して，任意の $y \in V'$ に対して

$$\|g(y) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(y - f(x_0))\|_G \leq \epsilon\|y - f(x_0)\|_F$$

が成り立つ．このとき，任意の $x \in U' \cap f^{-1}(V')$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))Df(x_0)(x - x_0)\|_G \\
&\le \|g(f(x)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|_G + \|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(F;G)}\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F \\
&\le \epsilon\|f(x) - f(x_0)\|_F + \epsilon\|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(F;G)}\|x - x_0\|_E \\
&\le \epsilon(\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|_F + \|Df(x_0)(x - x_0)\|_F) + \epsilon\|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(F;G)}\|x - x_0\|_E \\
&\le \epsilon(\epsilon\|x - x_0\|_E + \|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(E;F)}\|x - x_0\|_E) + \epsilon\|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(F;G)}\|x - x_0\|_E \\
&= \epsilon(\epsilon + \|Df(x_0)\|_{\mathscr{L}(E;F)} + \|Dg(f(x_0))\|_{\mathscr{L}(F;G)})\|x - x_0\|_E
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$g \circ f$ は x_0 において微分可能であり，その微分は $Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$ に等しい． □

命題 2.3　E, F をノルム化可能な K-位相線型空間，U, V をそれぞれ E, F の開集合とし，$x_0 \in U$，$y_0 = f(x_0) \in V$ とする．全単射 $f\colon U \to V$ が次の 2 条件を満たすとする．

(i) f は点 x_0 において微分可能であり，その微分 $Df(x_0) \in \mathscr{L}(E; F)$ は K-位相線型空間の同型である．
(ii) 逆写像 $f^{-1}\colon V \to U$ は y_0 において連続である．

このとき，f^{-1} は y_0 において微分可能であり，その微分は

$$Df^{-1}(y_0) = Df(x_0)^{-1}$$

である[*2]．

証明　$E = 0$ ならば明らかだから，以下，$E \neq 0$（したがって条件より $F \neq 0$ でもある）とする．E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．また，これらのノルムに対応する $\mathscr{L}(E; F), \mathscr{L}(F; E)$ の作用素ノルムをそれぞれ $\|-\|_{\mathscr{L}(E;F)}, \|-\|_{\mathscr{L}(F;E)}$ と書く．

$y \in V \setminus \{y_0\}$ とし，$x = f^{-1}(y)$ と置く．これに対して

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - Df(x_0)^{-1}(y - y_0) &= (x - x_0) - Df(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0)) \\
&= Df(x_0)^{-1}(Df(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))),
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - Df(x_0)^{-1}(y - y_0)\|_E}{\|y - y_0\|_F} \\
&\le \|Df(x_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(F;E)} \cdot \frac{\|Df(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))\|_F}{\|y - y_0\|_F} \\
&= \|Df(x_0)^{-1}\|_{\mathscr{L}(F;E)} \cdot \frac{\|x - x_0\|_E}{\|y - y_0\|_F} \cdot \frac{\|Df(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))\|_F}{\|x - x_0\|_E} \qquad (*)
\end{aligned}$$

である．y が y_0 に近づくとき，$x = f^{-1}(y)$ は $x_0 = f^{-1}(y_0)$ に近づく．よってこのとき，微分の定義より，$(*)$

[*2] 厳密には，「f は点 x_0 において微分可能であり」は「f を U から F への写像とみなしたものは x_0 において微分可能であり」，「f^{-1} は y_0 において微分可能であり」は「f^{-1} を V から E への写像とみなしたものは y_0 において微分可能であり」というべきである．

の第 3 因子は 0 に収束する．また，

$$\begin{aligned}\frac{\|y-y_0\|_F}{\|x-x_0\|_E} &= \frac{\|f(x)-f(x_0)\|_F}{\|x-x_0\|_E} \\ &= \frac{\|Df(x_0)(x-x_0)+(f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0))\|_F}{\|x-x_0\|_E} \\ &= \frac{\|Df(x_0)(x-x_0)\|_F}{\|x-x_0\|_E} - \frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|_F}{\|x-x_0\|_E} \end{aligned} \tag{$**$}$$

である．x が x_0 に近づくとき，($**$) の第 1 項は $\inf_{\|v\|_E=1}\|Df(x_0)v\|_F > 0$（$E=0$ かつ $Df(x_0)$ が K-位相線型空間の同型であることに注意）で下から抑えられ，第 2 項は 0 に収束する．よってこのとき，$\|y-y_0\|_F/\|x-x_0\|_E$ は正の有限値で下から抑えられ，したがって ($*$) の第 1 因子 $\|x-x_0\|_E/\|y-y_0\|_F$ は有界である．以上より

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)-Df(x_0)^{-1}(y-y_0)\|_E}{\|y-y_0\|_F}=0$$

だから，f^{-1} は y_0 において微分可能で，$Df^{-1}(y_0)=Df(x_0)^{-1}$ が成り立つ． □

注意 命題 2.3 で，f^{-1} が y_0 において連続であるという条件は落とすことができない．実際，全単射 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であって，$f(0)=0$ であり，0 において微分可能で $Df(0)=1$ だが，逆写像 f^{-1} が 0 において連続でないものが，次のように構成できる．$m\in\mathbb{Z}$ と $n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して実数 $a_{m,n}$ をとり，条件

- $m\geq 0$ と任意の n に対して，$1/(n+1)\leq a_{m,n}\leq 1/n$ である．
- $m<0$ と任意の n に対して，$a_{m,n}>1$ である．
- $a_{m,n}$ はすべて相異なる．

が満たされるようにする．$S=\{a_{m,n}\mid m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}_{>0}\}$ と置き，写像 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\in\mathbb{R}\setminus S) \\ a_{m+1,n} & (x=a_{m,n})\end{cases}$$

と定める．すると，f は全単射，$f(0)=0$，f は 0 において微分可能で $Df(0)=1$ だが，逆写像 f^{-1} は 0 において連続ではない．実際，点列 $(a_{0,n})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ は 0 に収束するが，その f^{-1} による像 $(a_{-1,n})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ は $f^{-1}(0)=0$ に収束しない．

命題 2.4 $E,F_0,\dots,F_{n-1}$ をノルム化可能な K-位相線型空間とし，$F=F_0\times\cdots\times F_{n-1}$ と置く．また，$x_0\in E$，U を x_0 の近傍，$f=(f_0,\dots,f_{n-1})\colon U\to F$ とする．f が x_0 において微分可能であるための必要十分条件は，$j=0,\dots,n-1$ に対して f_j が x_0 において微分可能であることであり，このとき

$$Df(x_0)=(Df_0(x_0),\dots,Df_{n-1}(x_0))$$

が成り立つ．

証明 $E,F_0,\dots,F_{n-1}$ の位相と整合するノルム $\|-\|_E,\|-\|_{F_0},\dots,\|-\|_{F_{n-1}}$ をそれぞれ固定しておく．また，F 上のノルム $\|-\|_F$ を $\|y\|_F=\max_{0\leq j<n}\|y_j\|_{F_j}$（$y=(y_0,\dots,y_{n-1})\in F$）と定める（これは，$F$ の位相と整合する）．

$A=(A_0,\dots,A_{n-1})\in\mathscr{L}(E;F)$，$\epsilon>0$ と $x\in U$ に対して，

$$\|f_j(x)-f_j(x_0)-A_j(x-x_0)\|_{F_j}\leq\epsilon\|x-x_0\|_E \qquad (j=0,\dots,n-1)$$

が成り立つことと，

$$\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_F \le \epsilon\|x - x_0\|_E$$

が成り立つこととは同値である．ここから結論を得る． □

命題 2.5 E, F をノルム化可能な K-位相線型空間，X を F の閉部分線型空間，$c \in F$ とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f\colon U \to E$ とする．

(1) f が x_0 において微分可能かつ f の値域がアフィン空間 $c + X$ に含まれるならば，$Df(x_0) \in \mathscr{L}(E; X)$ である．

(2) (1) の状況で，さらに $c = 0$ ならば，f を E から X への写像とみなしたもの $f_0\colon E \to X$ も x_0 において微分可能であり，その微分 $Df_0(x_0)$ は $Df(x_0)$（を $\mathscr{L}(E; X)$ の元とみなしたもの）に等しい．

証明 E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．

(1) $h \in E$ を任意にとり，ノルム $\|-\|_F$ に関する $Df(x_0)h$ と X との距離を d とする．$Df(x_0)\lambda h = \lambda Df(x_0)h$ と X との距離は $|\lambda|d$ だから，$x_0 + \lambda h \in U$ となるような $\lambda \in K$ に対して

$$\|f(x_0 + \lambda h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|_F \ge |\lambda|d$$

が成り立つ．一方で，微分の定義より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\lambda \in K \setminus \{0\}$ を十分 0 の近くにとれば，

$$\|f(x_0 + \lambda h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|_F \le \epsilon\|\lambda h\|_E$$

が成り立つ．上の 2 式より，$d \le \epsilon\|h\|_E$ を得る．$\epsilon > 0$ は任意だったから，$d = 0$ である．X は閉部分線型空間だったから，これより $Df(x_0)h \in X$ である．

(2) 微分の定義から明らかである． □

命題 2.6 $E_0, \dots, E_{m-1}, F$ をノルム化可能な K-位相線型空間とし，$E = E_0 \times \cdots \times E_{m-1}$ と置く．連続 m 重線型写像 $\phi\colon E \to F$ は各点 $x = (x_0, \dots, x_{m-1}) \in E$ において微分可能であり，その微分は

$$D\phi(x)h = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_0, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}) \qquad (h = (h_0, \dots, h_{m-1}) \in E)$$

で与えられる．

証明 $E_0, \dots, E_{m-1}, F$ の位相と整合するノルム $\|-\|_{E_0}, \dots, \|-\|_{E_{m-1}}, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．また，E 上のノルム $\|-\|_E$ を $\|x\|_E = \max_{0 \le i < m}\|x_i\|_{E_i}$（$x = (x_0, \dots, x_{m-1}) \in E$）と定める（これは，$E$ の位相と整合する）．さらに，上のノルムに対応する $\mathscr{L}(E_0, \dots, E_{m-1}; F)$ 上の作用素ノルムを $\|-\|_{\mathscr{L}(E_0, \dots, E_{m-1}; F)}$ と書く．

任意の $x = (x_0, \dots, x_{m-1}) \in E$ と $h = (h_0, \dots, h_{m-1}) \in E$ に対して，ϕ の m 重線型性より

$$\begin{aligned}
&\phi(x + h) - \phi(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_0, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}) + \sum_{2 \le k \le m} \sum_{0 \le i_0 < \dots < i_{k-1} < m} \phi(x_0, \dots, h_{i_0}, \dots, h_{i_{k-1}}, \dots, x_{m-1})
\end{aligned}$$

と書けるから[*3],

$$\begin{aligned}
&\left\| \phi(x+h) - \phi(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_0, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_{m-1}) \right\|_F \\
&\leq \|\phi\|_{\mathscr{L}(E_0,\ldots,E_{m-1};F)} \sum_{2\leq k\leq m} \sum_{0\leq i_0<\cdots<i_{k-1}<m} \|x_0\|_{E_0} \cdots \|h_{i_0}\|_{E_{i_0}} \cdots \|h_{i_{k-1}}\|_{E_{i_{k-1}}} \cdots \|x_{m-1}\|_{E_{m-1}}
\end{aligned}$$

と評価できる．h が十分 0 に近いとき，上式右辺は $\|h\|_E^2$ のオーダーで上から抑えられる．よって，ϕ は x において微分可能であり，その微分は $h \mapsto \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_0, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_{m-1})$ で与えられる． □

系 2.7（Leibniz 則） $E_0, \ldots, E_{m-1}, F$ をノルム化可能な K-位相線型空間，$\phi\colon E_0 \times \cdots \times E_{m-1} \to F$ を連続 m 重線型写像とする．点 $t_0 \in K$ の近傍 U で定義された写像 $f_i\colon U \to E_i$（$i = 0, \ldots, m-1$）について，すべての f_i が t_0 において微分可能ならば，写像 $\phi(f_0, \ldots, f_{m-1})\colon U \to F; t \mapsto \phi(f_0(t), \ldots, f_{m-1}(t))$ も t_0 において微分可能であり，その微分は

$$(\phi(f_0, \ldots, f_{m-1}))'(t_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi(f_0(t_0), \ldots, f_{i-1}(t_0), f_i'(t_0), f_{i+1}(t_0), \ldots, f_{m-1}(t_0))$$

で与えられる．

証明 微分演算の線型性（命題 2.1），微分演算の連鎖律（命題 2.2），命題 2.4，命題 2.6 より，

$$\begin{aligned}
(\phi(f_0, \ldots, f_{m-1}))'(t_0) &= D(\phi(f_0, \ldots, f_{m-1}))(t_0)1 \\
&= D\phi(f_0(t_0), \ldots, f_{m-1}(t_0))D(f_0, \ldots, f_{m-1})(t_0)1 \\
&= D\phi(f_0(t_0), \ldots, f_{m-1}(t_0))(Df_0(t_0)1, \ldots, Df_{m-1}(t_0)1) \\
&= D\phi(f_0(t_0), \ldots, f_{m-1}(t_0))(f_0'(t_0), \ldots, f_{m-1}'(t_0)) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \phi(f_0(t_0), \ldots, f_{i-1}(t_0), f_i'(t_0), f_{i+1}(t_0), \ldots, f_{m-1}(t_0))
\end{aligned}$$

である． □

3 偏微分

定義 3.1（偏微分） E, F をノルム化可能な K-位相線型空間とする．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ と，E の部分線型空間 X について，$0 \in X$ の近傍で定義された写像 $x \mapsto f(x_0 + x)$ が $0 \in X$ において微分可能ならば，f は x_0 において X 方向に**偏微分可能**であるという．また，対応する微分を，f の x_0 における X 方向の**偏微分**といい，$D_X f(x_0)$ と書く．

X 方向の偏微分 $D_X f(x_0)$ は，（存在すれば）$\mathscr{L}(X; F)$ の元である．

命題 3.2（偏微分演算の線型性） E, F をノルム化可能な K-位相線型空間，X を E の部分線型空間とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f, g\colon U \to F$，$\lambda, \mu \in K$ とする．f, g が x_0 において X 方向に偏微分可能ならば，$\lambda f + \mu g$ も x_0 において X 方向に偏微分可能であり，

$$D_X(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda D_X f(x_0) + \mu D_X g(x_0)$$

[*3] 上式右辺第 2 項の総和において，和の本体は $\phi(x_0, \ldots, x_{m-1})$ の x_{i_p} を h_{i_p} で置き換えたもの（$p = 0, \ldots, k-1$）である．

が成り立つ．

証明　微分演算の線型性（命題 2.1）から従う． □

命題 3.3（偏微分演算の連鎖律）　E, F, G をノルム化可能な K-位相線型空間とする，X を E の部分線型空間とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f\colon U \to F$，V を $f(x_0)$ の近傍で $f(U) \subseteq V$ なるもの，$g\colon V \to G$ とする．f が x_0 において X 方向に偏微分可能かつ g が $f(x_0)$ において微分可能ならば，$g \circ f$ は x_0 において X 方向に偏微分可能であり，

$$D_X(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ D_X f(x_0)$$

が成り立つ．

証明　微分演算の連鎖律（命題 2.2）から従う． □

命題 3.4　E, F をノルム化可能な K-位相線型空間，X, X' を E の部分空間で $X' \subseteq X$ なるものとする．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ について，f が x_0 において X 方向に偏微分可能であれば，f は x_0 において X' 方向にも偏微分可能であり，$D_{X'} f(x_0)$ は $D_X f(x_0)$ の X' への制限に一致する．

証明　E, F の位相と整合するノルム $\|{-}\|_E, \|{-}\|_F$ をそれぞれ固定しておく．

f が x_0 において X 方向に偏微分可能であるとする．偏微分の定義より，任意の $\epsilon > 0$ に対して $0 \in X$ のある近傍 V が存在して，任意の $x \in V$ に対して

$$\|f(x_0 + x) - f(x_0) - D_X f(x_0)x\|_F \leq \epsilon\|x\|_E$$

が成り立つ．特に，$x \in V \cap X'$ に対してもこの式が成り立つから，f は x_0 において X' 方向に偏微分可能であり，その偏微分は $D_X f(x_0)$ の X' への制限に等しい． □

系 3.5　$E_0, \dots, E_{m-1}, F$ をノルム化可能な K-位相線型空間とし，$E = E_0 \times \dots \times E_{m-1}$ と置く．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ について，f が x_0 において微分可能ならば，$i = 0, \dots, m-1$ に対して f は x_0 において E_i 方向に微分可能であり，

$$Df(x_0)h = D_{E_0} f(x_0)h_0 + \dots + D_{E_{m-1}} f(x_0)h_{m-1} \qquad (h = (h_0, \dots, h_{m-1}) \in E)$$

が成り立つ．

証明　f が x_0 において微分可能であるとすると，命題 3.4 より，$i = 0, \dots, m-1$ に対して f は x_0 において E_i 方向に偏微分可能であり，その偏微分は $Df(x_0)$ の E_i への制限に等しい．よって，$h = (h_0, \dots, h_{m-1}) \in E$ に対して

$$\begin{aligned} Df(x_0)h &= Df(x_0)(h_0 + \dots + h_{m-1}) \\ &= Df(x_0)h_0 + \dots + Df(x_0)h_{m-1} \\ &= D_{E_0} f(x_0)h_0 + \dots + D_{E_{m-1}} f(x_0)h_{m-1} \end{aligned}$$

が成り立つ． □

4　高階微分

定義 4.1（高階偏微分）　E,F をノルム化可能な K-位相線型空間とし，点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ を考える．$r \in \mathbb{N}$ と E の部分線型空間 $X_0,\dots,X_{r-1}$ に対して，f の x_0 における $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向の r **階偏微分**を，次のように帰納的に定める．

- f の x_0 における 0 階偏微分を $f(x_0)$ と定める．
- $r \geq 1$ とする．x_0 のある近傍 V が存在して，任意の $x \in V$ に対して「f の x における $(X_1,\dots,X_{r-1})$ 方向の $r-1$ 階偏微分 $D_{X_1}\cdots D_{X_{r-1}}f(x)$」が定義され，かつ V で定義され $\mathscr{L}(X_1;\dots;\mathscr{L}(X_{r-1};F)\dots)$ に値をとる写像 $x \mapsto D_{X_1}\cdots D_{X_{r-1}}f(x)$ が x_0 において X_0 方向に偏微分可能であるとき，f は x_0 において $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向に r **階偏微分可能**であるという．またこのとき，写像 $x \mapsto D_{X_1}\cdots D_{X_{r-1}}f(x)$ の x_0 における X_0 方向の偏微分を，f の x_0 における $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向の r **階偏微分**といい，$D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}f(x_0)$ と書く．

f の x_0 における $(E,\dots,E)$ 方向の r 階偏微分可能性を，単に f の x_0 における r **階微分（可能性）**といい，$D_E\cdots D_E f(x_0)$ を単に $D^r f(x_0)$ と書く．さらに，$E=K$ であるとき，K-位相線型空間の自然な同型 $\mathscr{L}(K;\dots;\mathscr{L}(K;F)\dots) \cong F$ によって $D^r f(x_0)$ を F の元とみなしたものを，$f^{(r)}(x_0)$ と書く（すなわち，$f^{(r)}(x_0) = D^r f(x_0)1\cdots 1$ である）．

$(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向の r 階偏微分 $D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}f(x_0)$ は，（存在すれば）$\mathscr{L}(X_0;\dots;\mathscr{L}(X_{r-1};F)\dots)$ の元である．$\mathscr{L}(X_0;\dots;\mathscr{L}(X_{r-1};F)\dots)$ は K-位相線型空間として $\mathscr{L}(X_0,\dots,X_{r-1};F)$ に自然に同型だから，r 階偏微分を $\mathscr{L}(X_0,\dots,X_{r-1};F)$ の元とみなすこともできる．以下，特に断らずにこのようにみなすことがある．

定義 4.2（高階偏導写像）　E,F をノルム化可能な K-位相線型空間，$X_0,\dots,X_{r-1}$ を E の部分線型空間，U を K の開集合とする．写像 $f\colon U \to F$ が U の各点で $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であるとき，f は $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向に r **階偏微分可能**であるという．このとき，$x \in U$ に対して $D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}f(x) \in \mathscr{L}(X_0;\dots;\mathscr{L}(X_{r-1};F)\dots)$ を対応させる写像 $D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}f\colon U \to \mathscr{L}(X_0;\dots;\mathscr{L}(X_{r-1};F)\dots)$ が定まる．これを，f の $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向の r **階偏導写像**という．f の $(E,\dots,E)$ 方向の r 階偏微分可能性・偏導写像を，単に f の r **階微分可能性・導写像**といい，$D_E\cdots D_E f$ を単に $D^r f$ と書く．さらに，$E=K$ であるとき，$f^{(r)}\colon E \to F$ も同様に定める．

f が任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して r 階微分可能であれば，f は**無限階微分可能**であるという．

命題 4.3（高階偏微分演算の線型性）　E,F をノルム化可能な K-位相線型空間，$X_0,\dots,X_{r-1}$ を E の部分線型空間とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f,g\colon U \to F$，$\lambda,\mu \in K$ とする．f,g が x_0 において $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能ならば，$\lambda f + \mu g$ も x_0 において $(X_0,\dots,X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であり，

$$D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}(\lambda f+\mu g)(x_0) = \lambda D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}f(x_0) + \mu D_{X_0}\cdots D_{X_{r-1}}g(x_0)$$

が成り立つ．

証明　帰納的に考えれば，偏微分演算の線型性（命題 3.2）から従う．　□

系 4.4（高階偏導演算の線型性）　E,F をノルム化可能な K-位相線型空間，U を E の開集合，$X_0,\dots,X_{r-1}$ を

E の部分線型空間とする．また，$f, g\colon U \to F$，$\lambda, \mu \in K$ とする．f, g が $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 階偏微分可能ならば，$\lambda f + \lambda g$ も $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 階偏微分可能であり，

$$D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}}(\lambda f + \mu g) = \lambda D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f + \mu D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} g$$

が成り立つ．

証明　命題 4.3 から従う． □

命題 4.5　$E, F_0, \ldots, F_{n-1}$ をノルム化可能な K-位相線型空間，$X_0, \ldots, X_{r-1}$ を E の部分線型空間とし，$F = F_0 \times \cdots \times F_{n-1}$ と置く．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f = (f_0, \ldots, f_{n-1})\colon U \to F$ とする．f が x_0 において $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であるための必要十分条件は，$j = 0, \ldots, n-1$ に対して f_j が x_0 において $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であることであり，このとき

$$D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f(x_0) = (D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f_0(x_0), \ldots, D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f_{n-1}(x_0))$$

が成り立つ．

証明　帰納的に考えれば，命題 2.4 から従う． □

系 4.6　$E, F_0, \ldots, F_{n-1}$ をノルム化可能な K-位相線型空間，U を E の開集合，$X_0, \ldots, X_{r-1}$ を E の部分線型空間とし，$F = F_0 \times \cdots \times F_{n-1}$ と置く．また，$f = (f_0, \ldots, f_{n-1})\colon U \to F$ とする．f が $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であるための必要十分条件は，$j = 0, \ldots, n-1$ に対して f_j が $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であることであり，このとき

$$D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f = (D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f_0, \ldots, D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f_{n-1})$$

が成り立つ．

証明　命題 4.5 から従う． □

命題 4.7　E, F をノルム化可能な K-位相線型空間，$X_0, \ldots, X_{r-1}, X'_0, \ldots, X'_{r-1}$ を E の部分空間で $i = 0, \ldots, r-1$ に対して $X'_i \subseteq X_i$ なるものとする．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ について，f が x_0 において $(X_0, \ldots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能であれば，f は x_0 において $(X'_0, \ldots, X'_{r-1})$ 方向にも r 階偏微分可能であり，$D_{X'_0} \cdots D_{X'_{r-1}} f(x_0)$ は $D_{X_0} \cdots D_{X_{r-1}} f(x_0)$ の $X'_0 \times \cdots \times X'_{r-1}$ への制限に一致する．

証明　帰納的に考えれば，命題 3.4 から従う． □

系 4.8　$E_0, \ldots, E_{m-1}$ をノルム化可能な K-位相線型空間とし，$E = E_0 \times \ldots E_{m-1}$ と置く．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f\colon U \to F$ について，f が x_0 において r 階微分可能ならば，$i_0, \ldots, i_{r-1} \in \{0, \ldots, m-1\}$ に対して f は x_0 において $(E_{i_0}, \ldots, E_{i_{r-1}})$ 方向に r 階偏微分可能であり，

$$D^r f(x_0)(h_0, \ldots, h_r) = \sum_{i_0, \ldots, i_{r-1} \in \{0, \ldots, m-1\}} D_{E_{i_0}} \cdots D_{E_{i_{r-1}}} f(x_0)(h_{0, i_0}, \ldots, h_{r-1, i_{r-1}}) \qquad (h_p = (h_{p,0}, \ldots, h_{p,m-1}) \in E)$$

が成り立つ．

証明 f が x_0 において r 階微分可能であるとすると，命題 4.7 より，$i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,m-1\}$ に対して f は x_0 において $(E_{i_0},\dots,E_{i_{m-1}})$ 方向に r 階偏微分可能であり，その r 階偏微分は $D^r f(x_0)$ の $E_{i_0}\times\cdots\times E_{i_{r-1}}$ への制限に等しい．よって，$h_p=(h_{p,0},\dots,h_{p,m-1})\in E$（$p=0,\dots,r-1$）に対して

$$\begin{aligned}D^r f(x_0)(h_0,\dots,h_r) &= D^r f(x_0)\left(\sum_{i_0=0}^{m-1} h_{0,i_0},\dots,\sum_{i_{r-1}=0}^{m-1} h_{r-1,i_{r-1}}\right)\\ &= \sum_{i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,m-1\}} D^r f(x_0)(h_{0,i_0},\dots,h_{r-1,i_{r-1}})\\ &= \sum_{i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,m-1\}} D_{E_{i_0}}\cdots D_{E_{i_{r-1}}} f(x_0)(h_{0,i_0},\dots,h_{r-1,i_{r-1}})\end{aligned}$$

が成り立つ． □

命題 4.9 $E_0,\dots,E_{m-1},F$ をノルム化可能な K-位相線型空間とし，$E=E_0\times\cdots\times E_{m-1}$ と置く．連続 m 重線型写像 $:E\to F$ は，無限階微分可能である．その $x=(x_0,\dots,x_{m-1})\in E$ における r 階微分は，$0\le r\le m$ に対しては

$$D^r\phi(x)(h_0,\dots,h_{r-1}) = \sum_{\substack{i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_0,\dots,i_{r-1}\text{: distinct}}} \phi(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots,h_{r-1,i_{r-1}},\dots,x_{m-1})$$
$$(h_p=(h_{p,0},\dots,h_{p,m-1})\in E)$$

で与えられ[*4]，$r>m$ に対しては $D^r\phi(x)=0$ である．

証明 まず，$0\le r\le m$ の場合を，r に関する帰納法で示す．$r=0$ の場合は明らかである．$r<m$ の場合に成立したと仮定して，$r+1$ の場合に示す．相異なる $i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}$ に対して，

- $E_{i_1},\dots,E_{i_r}$-成分を潰す E 上の射影を $p_{i_1,\dots,i_r}\colon E\to E_0\times\cdots\times\widehat{E_{i_1}}\times\cdots\times\widehat{E_{i_r}}\times\cdots\times E_{m-1}$，
- $(x_0,\dots,\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})\in E_0\times\cdots\times\widehat{E_{i_1}}\times\cdots\times\widehat{E_{i_r}}\times\cdots\times E_{m-1}$ に対して連続 r 重線型写像

$$(h_1,\dots,h_r)\mapsto\phi(x_0,\dots,h_{1,i_1},\dots,h_{r,i_r},\dots,x_{m-1})\qquad(h_p=(h_{p,0},\dots,h_{p,m-1})\in E)\tag{$*$}$$

  を対応させる写像を $\phi_{i_1,\dots,i_r}\colon E_0\times\cdots\times\widehat{E_{i_1}}\times\cdots\times\widehat{E_{i_r}}\times\cdots\times E_{m-1}\to\mathscr{L}(E,\dots,E;F)$

と置く[*5]．すると，帰納法の仮定より，

$$D^r f=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\text{: distinct}}}\phi_{i_1,\dots,i_r}\circ p_{i_1,\dots,i_r}$$

が成り立つ．$p_{i_1,\dots,i_r}$ は連続線型写像だから微分可能で，その微分は常に $p_{i_1,\dots,i_r}$ に等しい．$\phi_{i_1,\dots,i_r}$ は連続 $m-r$ 重線型写像だから，命題 2.6 より，微分可能で，$(x_0,\dots,\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})$ における微分は

$$h_0=(h_{0,0},\dots,\widehat{h_{0,i_1}},\dots,\widehat{h_{0,i_r}},\dots,h_{0,m-1})\mapsto\sum_{i_0\in\{0,\dots,m-1\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}}\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})\tag{$**$}$$

[*4] 上式右辺の総和において，$i_0,\dots,i_{r-1}$ は $i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,m-1\}$ かつこれらが相異なる範囲を動き，和の本体は $\phi(x_0,\dots,x_{m-1})$ の x_{i_p} を h_{p,i_p} で置き換えたもの（$p=0,\dots,r-1$）である．便宜上 $\phi(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots,h_{r-1,i_{r-1}},\dots,x_{m-1})$ と表記したが，$i_0<\cdots<i_{r-1}$ とは限らないことに注意せよ．

[*5] $\widehat{\ }$ は除外を表す．たとえば，$(x_0,\dots,\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})$ は $(x_0,\dots,x_{m-1})$ から $i_1,\dots,i_r$-成分を除いたものを表す．

である[*6]．したがって，微分演算の線型性（命題 2.1）と連鎖律（命題 2.2）より，$D^r\phi$ も微分可能であり，その $x=(x_0,\dots,x_{m-1})\in E$ における微分は

$$\begin{aligned}D^{r+1}\phi(x)&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}D\phi_{i_1,\dots,i_r}(p_{i_1,\dots,i_r}(x))\circ Dp_{i_1,\dots,i_r}(x)\\&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}D\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})\circ p_{i_1,\dots,i_r}\end{aligned}$$

である．この両辺を $h=(h_0,\dots,h_{m-1})\in E$ に作用させると，(**) より，

$$\begin{aligned}D^{r+1}\phi(x)h&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}D\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})p_{i_1,\dots,i_r}h\\&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}D\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})(h_0,\dots,\widehat{h_{i_1}},\dots,\widehat{h_{i_r}},\dots,h_{m-1})\\&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}\sum_{i\in\{0,\dots,m-1\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}}\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,h_i,\dots\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})\end{aligned}$$

となる．さらに，この両辺を $(h_1,\dots,h_r)$（$h_p=(h_{p,0},\dots,h_{p,m-1})\in E$）に作用させると，(*) より，

$$\begin{aligned}&D^{r+1}\phi(x)(h,h_0,\dots,h_{r-1})\\&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}\sum_{i_0\in\{0,\dots,m-1\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}}\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})(h_1,\dots,h_r)\\&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}\sum_{i_0\in\{0,\dots,m-1\}\setminus\{i_1,\dots,i_r\}}\phi(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots h_{1,i_1},\dots,h_{r,i_r},\dots,x_{m-1})\\&=\sum_{\substack{i,i_1,\dots,i_r\in\{0,\dots,m-1\}\\ i_0,i_1,\dots,i_r\colon\text{ distinct}}}\phi(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots h_{1,i_1},\dots,h_{r,i_r},\dots,x_{m-1})\end{aligned}$$

となる．これで，$r+1$ の場合にも示された．

前段の結果から，特に $D^m\phi$ が定値であることがわかる．よって，任意の $r>m$ に対して ϕ は r 階微分可能で，$D^r\phi=0$ である． □

命題 4.10（高階 Leibniz 則） $E_0,\dots,E_{m-1},F$ をノルム化可能な K-位相線型空間，$\phi\colon E_0\times\cdots\times E_{m-1}\to F$ を連続 m 重線型写像とする．点 $t_0\in K$ の近傍 U で定義された写像 $f_i\colon U\to E_i$（$i=0,\dots,m-1$）について，すべての f_i が t_0 において r 階微分可能ならば，写像 $\phi(f_0,\dots,f_{m-1})\colon U\to F; t\mapsto\phi(f_0(t),\dots,f_{m-1}(t))$ も t_0 において r 階微分可能であり，その r 階微分は，

$$(\phi(f_0,\dots,f_{m-1}))^{(r)}(t_0)=\sum_{r_0+\cdots+r_{m-1}=r}\phi(f_0^{(r_0)}(t_0),\dots,f_{m-1}^{(r_{m-1})}(t_0))$$

で与えられる．

証明 帰納的に考えれば，Leibniz 則（系 2.7）から従う． □

---

*6 上式右辺の総和において，便宜上 $\phi_{i_1,\dots,i_r}(x_0,\dots,h_{0,i_0},\dots\widehat{x_{i_1}},\dots,\widehat{x_{i_r}},\dots,x_{m-1})$ と表記したが，$i_0<i_1<\cdots<i_r$ とは限らないことに注意せよ．

命題 4.11 E, F, G をノルム化可能な K-位相線型空間，$X_0, \dots, X_{r-1}$ を E の部分線型空間とする．また，$x_0 \in E$，U を x_0 の近傍，$f: U \to F$，V を $f(x_0)$ の近傍で $f(U) \subseteq V$ なるもの，$g: V \to G$ とする．f が x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能かつ g が $f(x_0)$ において r 階微分可能ならば，$g \circ f$ は x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能である．

証明 r に関する帰納法で示す．$r = 0$ の場合は明らかであり，$r = 1$ の場合は偏微分演算の連鎖律（命題 3.3）からただちに従う．$r \geq 1$ の場合に成立したとして，$r + 1$ の場合を示す．f が x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1}, X_r)$ 方向に $r + 1$ 階偏微分可能かつ g が $f(x_0)$ において $r + 1$ 階微分可能とする．このとき，f は x_0 のある開近傍 U' で X_r 方向に偏微分可能であり，対応する偏導写像 $D_{X_r} f$ は x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能である．また，g は $f(x_0)$ のある開近傍 V' で微分可能であり，対応する導写像 Dg は $f(x_0)$ において r 階微分可能である．$f(U') \subseteq V'$ と仮定してよい．さて，偏微分演算の連鎖律（命題 3.3）より，$x \in U'$ に対して

$$D_{X_r}(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ D_{X_r} f(x)$$

が成り立つ．すなわち，$\phi: \mathscr{L}(X_r; F) \times \mathscr{L}(F; G) \to \mathscr{L}(X_r; G); (A, B) \mapsto B \circ A$ と置くと，U' から G への写像の等式

$$D_{X_r}(g \circ f) = \phi \circ (D_{X_r} f, Dg \circ f)$$

が成り立つ．ϕ は連続双線型写像だから，命題 2.6 より無限回微分可能である．また，$D_{X_r} f$ は x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能である．さらに，帰納法の仮定より，$Dg \circ f$ も x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能である．よって，命題 4.5 と帰納法の仮定より，$D_{X_r}(g \circ f) = \phi \circ (D_{X_r} f, Dg \circ f)$ は x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能である．これは，$g \circ f$ が x_0 において $(X_0, \dots, X_{r-1}, X_r)$ 方向に $r + 1$ 階偏微分可能であることを意味する．これで，$r + 1$ の場合も示された． □

系 4.12 E, F, G をノルム化可能な K-位相線型空間，$X_0, \dots, X_{r-1}$ を E の部分線型空間，U, V をそれぞれ E, F の開集合とする．写像 $f: U \to V$ と $g: V \to G$ について，f が $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能[*7]かつ g が r 階微分可能ならば，$g \circ f$ は $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能である．

証明 命題 4.11 から従う． □

5 実係数の場合

本節では，係数体が $\mathbb{R}$ の場合に成り立つ微分の性質を見る．

5.1 有限増分定理

$\mathbb{R}$-位相線型空間 E の部分集合 A に対して，$\overline{\mathrm{co}}\, A$ で A の閉凸包，すなわち A を含む最小の閉凸集合を表す．

定理 5.1（有限増分定理） E, F をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，U を E の開集合，$f: U \to F$ とする．$x, y \in U$ であり，x と y を結ぶ閉線分 L が U に含まれ，f が L の各点において微分可能ならば，

$$f(y) - f(x) \in \overline{\mathrm{co}}\{Df(z)(y - x) \mid z \in L\}$$

が成り立つ．

[*7] 厳密には，「f を U から F への写像とみなしたものが $(X_0, \dots, X_{r-1})$ 方向に r 階偏微分可能」というべきである．

証明　$[0,1]$ を含む開集合から F への写像 g を，$g(t)=f((1-t)x+ty)$ と定める．すると，微分演算の連鎖律（命題 2.2）より，g は微分可能であって $Dg(t)1=Df((1-t)x+ty)(y-x)$ を満たす．したがって，

$$g(1)-g(0)\in\overline{\mathrm{co}}\{Dg(t)1\mid t\in[0,1]\}$$

を示せばよい．

まず，$\{Dg(t)1\mid t\in[0,1]\}$ を含む F の任意の凸開集合 V に対して，$g(1)-g(0)\in\overline{V}$ を示す．$[0,1]$ の部分集合

$$S=\{t\in[0,1]\mid g(t)-g(0)\in t\overline{V}\}$$

を考えよう．$0\in S$ だから S は空でなく，f の連続性より S は $[0,1]$ の閉集合である．さらに，S が $[0,1]$ の開集合であることを示す．$t_0\in S$ を任意にとると，

$$g(t_0)-g(0)\in t_0\overline{V}\tag{$*$}$$

である．一方で，$Dg(t_0)1=\lim_{t\to t_0}(g(t)-g(t_0))/(t-t_0)$ が開集合 V に属することより，t_0 に十分近い任意の $t\in[0,1]$ に対して

$$g(t)-g(t_0)\in(t-t_0)V\subseteq(t-t_0)\overline{V}\tag{$**$}$$

である．これら 2 式 ($*$)，($**$) と $\overline{V}$ の凸性より，

$$g(t)-g(0)=(g(t)-g(t_0))+(g(t_0)-g(0))\in(t-t_0)\overline{V}+t_0\overline{V}\subseteq t\overline{V}$$

が成り立つ．よって，t_0 は S の内点である．$t_0\in S$ は任意だったから，S は $[0,1]$ の開集合である．以上のことと $[0,1]$ の連結性より，$S=[0,1]$ である．特に，$g(1)-g(0)\in\overline{V}$ を得る．

前段の結果より，$g(1)-g(0)$ は「$\{Dg(t)1\mid t\in[0,1]\}$ を含む F の凸開集合の閉包全体の交叉」に含まれる．ところが，Hahn–Banach の分離定理より，これは $\overline{\mathrm{co}}\{Dg(t)1\mid t\in[0,1]\}$ に等しい．これで，主張は示された．　□

系 5.2　E,F を $\mathbb{R}$-ノルム空間（それぞれのノルムを $\|-\|_E,\|-\|_F$ と書く），U を E の開集合，$f\colon U\to F$ とする．$x,y\in U$ であり，x と y を結ぶ閉線分 L が U に含まれ，f が L の各点において微分可能ならば，

$$\|f(y)-f(x)\|_F\le\left(\sup_{z\in L}\|Df(z)\|_{\mathscr{L}(E;F)}\right)\|y-x\|_E$$

が成り立つ．

証明　任意の $z\in L$ に対して $\|Df(z)(y-x)\|_F\le\|Df(z)\|_{\mathscr{L}(E;F)}\|y-x\|_E$ だから，0 を中心とする半径 $(\sup_{z\in L}\|Df(z)\|_{\mathscr{L}(E;F)})\|y-x\|_E$ の閉球は，$\{Df(z)(y-x)\mid z\in L\}$ を含む閉凸集合である．よって，有限増分定理（定理 5.1）より，$f(y)-f(x)$ はこの閉球に属する．これが示したかったことである．　□

系 5.3　E,F をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，U を E の連結開集合，$f\colon U\to F$ とする．f が微分可能で Df が常に 0 に等しければ，f は定値である．

証明　U は連結だから，f が局所定値であることを示せば十分である．点 $x_0\in E$ を任意にとり，x_0 の凸近傍 $V\subseteq U$ を 1 つとる．任意の $x\in V$ に対して，x_0 と x を結ぶ閉線分 L は U に含まれるから，有限増分定理（定理 5.1）より

$$f(x)-f(x_0)\in\overline{\mathrm{co}}\{Df(z)(x-x_0)\mid z\in L\}=\{0\}$$

が成り立つ．すなわち，f は V で定値である．これで，f が局所定値であることが示された．　□

5.2　導写像と極限

次の定理およびその証明で用いる記号を準備しておく．集合 X, Y に対して，X から Y への写像全体の集合を $\mathscr{F}(X;Y)$ と書く．ノルム化可能な位相線型空間 E の開集合 U とノルム化可能な位相線型空間 F に対して，U から F への微分可能な写像全体の集合を $\mathscr{D}(U;F)$ と書く．微分可能な写像に対してその導写像を対応させる写像を，$D\colon \mathscr{D}(U;F) \to \mathscr{F}(U;\mathscr{L}(E;F))$ と書く．

さらに，次の用語を確認しておく．X を位相空間，Y を一様空間とする．$\mathscr{F}(X;Y)$ 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が $f \in \mathscr{F}(X;Y)$ に局所一様収束するとは，「任意の点 $x \in X$ に対して，ある x の近傍 U が存在し，制限を対応させる写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(U;Y)$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタが $f|_U$ に一様収束すること」をいう．

定理 5.4　E をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，F を完備かつノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，U を E の連結開集合とし，$\mathfrak{F}$ を $\mathscr{D}(U;F)$ 上の真フィルタとする．2 条件

(i) ある点 $x_0 \in E$ が存在して，$\mathfrak{F}(x_0)$（x_0 を代入する写像 $\mathscr{D}(U;F) \to F$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタ）は収束する．
(ii) $D(\mathfrak{F})$（$D\colon \mathscr{D}(E;F) \to \mathscr{F}(U;\mathscr{L}(E;F))$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタ）は局所一様収束極限 $g\colon U \to \mathscr{L}(E;F)$ をもつ．

が満たされるとき，$\mathfrak{F}$ は局所一様収束極限 $f\colon U \to F$ をもち，f は微分可能であって，$Df = g$ が成り立つ．

証明　E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．また，これらのノルムに対応する $\mathscr{L}(E;F)$ 上の作用素ノルムを $\|-\|_{\mathscr{L}(E;F)}$ と書く．

$D(\mathfrak{F})$ がその上で一様収束するような有界凸集合 $V \subseteq U$ を考える．1 点 $x_0 \in V$ に対して $\mathfrak{F}(x_0)$ が収束するとして，$\mathfrak{F}$ が V 上で一様収束することを示そう．$X \in \mathfrak{F}$ に対して，有限増分定理（定理 5.1）より，任意の $\xi, \eta \in X$ と $x \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(x) - \xi(x) &= (\eta(x) - \xi(x)) - (\eta(x_0) - \xi(x_0)) + (\eta(x_0) - \xi(x_0)) \\ &\in \overline{\mathrm{co}}\{D(\eta - \xi)(y)(x - x_0) \mid y \in V\} + (X(x_0) - X(x_0))\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\{X(x) - X(x) \mid x \in V\} &\subseteq \overline{\mathrm{co}}\{(D(\eta - \xi))(y)(x - x_0) \mid x, y \in V\} + (X(x_0) - X(x_0)) \\ &\subseteq \overline{\mathrm{co}}(D(X) - D(X))(V)(V - x_0) + (X(x_0) - X(x_0))\end{aligned}$$

が成り立つ．$\mathfrak{F}(x_0)$ は収束するから，$X \in \mathfrak{F}$ を適当にとれば $X(x_0) - X(x_0) \subseteq F$ はいくらでも小さくなる．一方で，$D(\mathfrak{F})$ は V 上で一様収束し，$V - x_0 \subseteq E$ は有界だから，$X \in \mathfrak{F}$ を適当にとれば $\overline{\mathrm{co}}(D(X) - D(X))(V)(V - x_0) \subseteq F$ はいくらでも小さくなる．よって，X を適当にとれば $\{X(x) - X(x) \mid x \in V\} \subseteq F$ はいくらでも小さくなる．これは，$\mathfrak{F}$ が V 上の一様収束構造に関して Cauchy であることを示している．F は完備だから，この一様収束構造も完備である．よって，$\mathfrak{F}$ は V 上で一様収束する．

さて，$\mathfrak{F}(x)$ が収束するような $x \in U$ の全体を U' とすると，(i) より U' は空でなく，(ii) と前段の結果より U' と U'^c はともに U の開集合である．よって，U の連結性より，$U' = U$ である．これで，任意の $x \in U$ に対して $\mathfrak{F}(x)$ が収束することが示された．

$x \in U$ に対して $\mathfrak{F}(x)$ の極限を $f(x) \in F$ として，写像 $f\colon U \to F$ を定める．先の議論より，$\mathfrak{F}$ は f に局所一様収束する．f が微分可能であり，$Df = g$ であることを示そう．$x_0 \in U$ と $\epsilon > 0$ を任意にとる．$D(\mathfrak{F})$ が

その上で一様収束するような x_0 の凸近傍 V をとっておく．次の条件を満たす $X \in \mathfrak{F}$ を固定しておく．

(a) 任意の $\xi, \eta \in X$ に対して $\sup_{y \in V} \|D(\eta - \xi)(y)\|_{\mathscr{L}(E;F)} \leq \epsilon$ である．
(b) 任意の $\xi \in X$ に対して $\|D\xi(x_0) - g(x_0)\|_{\mathscr{L}(E;F)} \leq \epsilon$ である．

有限増分定理の系（系 5.2）と (a) より，任意の $\xi, \eta \in X$ と $x \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \|(\eta(x) - \eta(x_0)) - (\xi(x) - \xi(x_0))\|_F &\leq \left(\sup_{y \in V} \|D(\eta - \xi)(y)\|_{\mathscr{L}(E;F)}\right) \|x - x_0\|_E \\ &\leq \epsilon \|x - x_0\|_E \end{aligned} \tag{$*$}$$

が成り立つ．$\mathfrak{F}(x_0), \mathfrak{F}(x)$ はそれぞれ $f(x_0), f(x)$ に収束するから，$f(x_0) \in \overline{X(x_0)}$，$f(x) \in \overline{X(x)}$ である．したがって，($*$) より，任意の $\xi \in X$ と $x \in V$ に対して

$$\|(f(x) - f(x_0)) - (\xi(x) - \xi(x_0))\|_F \leq \epsilon \|x - x_0\|_E \tag{$**$}$$

を得る．$\xi \in X$ を 1 つ固定しよう．微分の定義より，x_0 の近傍 $W \subseteq V$ を十分小さくとれば，任意の $x \in W$ に対して

$$\|(\xi(x) - \xi(x_0)) - D\xi(x_0)(x - x_0)\|_F \leq \epsilon \|x - x_0\|_E \tag{$***$}$$

が成り立つ．以上 (b)，($**$)，($***$) より，任意の $x \in W$ に対して

$$\begin{aligned} &\|(f(x) - f(x_0)) - g(x_0)(x - x_0)\|_F \\ &\leq \|(f(x) - f(x_0)) - (\xi(x) - \xi(x_0))\|_F + \|(\xi(x) - \xi(x_0)) - D\xi(x_0)(x - x_0)\|_F + \|D\xi(x_0) - g(x_0)\|_{\mathscr{L}(E;F)} \|x - x_0\|_E \\ &\leq 3\epsilon \|x - x_0\|_E \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，f は x_0 において微分可能であり，その微分は $g(x_0)$ に等しい． □

5.3 高階微分の対称性

定理 5.5（高階微分の対称性） E, F をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間とする．点 $x_0 \in E$ の近傍 U で定義された写像 $f \colon U \to F$ が x_0 において r 階微分可能ならば，r 階偏微分 $D^r f(x_0)$ は対称 r 重線型写像である．すなわち，任意の $h_0, \ldots, h_{r-1} \in E$ と全単射 $\sigma \colon \{0, \ldots, r-1\} \to \{0, \ldots, r-1\}$ に対して，

$$D^r f(x_0)(h_{\sigma(0)}, \ldots, h_{\sigma(r-1)}) = D^r f(x_0)(h_0, \ldots, h_{r-1})$$

が成り立つ．

証明 E, F の位相と整合するノルム $\|-\|_E, \|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．また，これらのノルムに対応する $\mathscr{L}(E;F)$ 上の作用素ノルムを $\|-\|_{\mathscr{L}(E;F)}$ と書く．

まず，$r = 2$ の場合に示す．$f \colon U \to F$ が x_0 において 2 階微分可能であるとする．U は開集合で，f は U の各点で微分可能であるとしてよい．固定した $h, k \in E$ に対して，

$$D^2 f(x_0)(h, k) = \lim_{s \to +0} \frac{f(x_0 + sh + sk) - f(x_0 + sh) - f(x_0 + sk) + f(x_0)}{s^2}$$

が成り立つことを示そう．上式右辺は h と k に関して対称だから，これが示されれば，$D^2 f(x_0)(k, h) = D^2 f(x_0)(h, k)$ がわかる．$s > 0$ を十分小さくとり，$x_0, x_0 + sh, x_0 + sk, x_0 + sh + sk$ を 4 頂点とする平行四辺形

が U に収まるようにする．写像 $g(v) = f(x_0 + sh + v) - f(x_0 + sh) - f(x_0 + v) + f(x_0) - D^2 f(x_0)(sh, v)$ に有限増分定理の系（系 5.2）を適用して，

$$\|g(sk) - g(0)\|_F \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|Dg(stk)\|_{\mathscr{L}(E;F)} \right) \|sk\|_E \tag{$*$}$$

を得る．右辺については

$$g(sk) - g(0) = f(x_0 + sh + sk) - f(x_0 + sh) - f(x_0 + sk) + f(x_0) - D^2 f(x_0)(sh, sk) \tag{$**$}$$

であり，左辺については

$$\begin{aligned} Dg(stk) &= Df(x_0 + sh + stk) - Df(x_0 + stk) - D^2 f(x_0)sh \\ &= (Df(x_0 + sh + stk) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(sh + stk)) - (Df(x_0 + stk) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)stk) \end{aligned} \tag{$***$}$$

と書ける．以上 ($*$)，($**$)，($***$) より，

$$\begin{aligned} &\|f(x_0 + sh + sk) - f(x_0 + sh) - f(x_0 + sk) + f(x_0) - D^2 f(x_0)(sh, sk)\|_F \\ &\leq \|sk\|_E \sup_{t \in [0,1]} \left(\|Df(x_0 + sh + stk) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(sh + stk)\|_{\mathscr{L}(E;F)} + \|Df(x_0 + stk) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)stk\|_{\mathscr{L}(E;F)} \right) \end{aligned}$$

と評価できる．両辺を s^2 で割ると，

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{f(x_0 + sh + sk) - f(x_0 + sh) - f(x_0 + sk) + f(x_0)}{s^2} - D^2 f(x_0)(h, k) \right\|_F \\ &\leq \|k\|_E \sup_{t \in [0,1]} \left(\frac{\|Df(x_0 + sh + stk) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(sh + stk)\|_{\mathscr{L}(E;F)}}{s} + \frac{\|Df(x_0 + stk) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)stk\|_{\mathscr{L}(E;F)}}{s} \right) \end{aligned}$$

を得る．ここで $s \to +0$ とすると，微分の定義より右辺は 0 に収束するから，

$$D^2 f(x_0)(h, k) = \lim_{s \to +0} \frac{f(x_0 + sh + sk) - f(x_0 + sh) - f(x_0 + sk) + f(x_0)}{s^2}$$

が成り立つ．これで，$r = 2$ の場合は示された．

次に，r が一般の場合に示す．$r = 0, 1$ ならば示すことは何もないから，$r \geq 2$ とする．$f\colon U \to F$ が x_0 において r 階微分可能であるとする．U は開集合で，f は U の各点で $r - 1$ 階微分可能であるとしてよい．任意の $h_0, \dots, h_{r-1} \in E$ と $i \in \{0, \dots, r-2\}$ に対して

$$D^r f(x_0)(h_0, \dots, h_{i-1}, h_{i+1}, h_i, h_{i+2}, \dots, h_{r-1}) = D^r f(x_0)(h_0, \dots, h_{r-1}) \tag{$*$}$$

を示せば十分である．$D^{r-i-2} f\colon U \to F$ は各点 $x \in U$ において $i + 2 \geq 2$ 階微分可能だから（ただし，$i = 0$ の場合は，この x は x_0 と読み替える．以下同様），前段の結果より，任意の $h_i, h_{i+1} \in E$ に対して $D^{r-i} f(x)(h_{i+1}, h_i) = D^{r-i} f(x)(h_i, h_{i+1})$ が成り立つ．すなわち，$D^{r-i} f$ の値域は F の閉部分線型空間

$$\begin{aligned} X \in \{&A \in \mathscr{L}(E, \dots, E; F) \\ &\mid \text{任意の } h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \dots h_{r-1} \in E \text{ に対して } A(h_{i+1}, h_i, h_{i+2}, \dots, h_{r-1}) = A(h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \dots, h_{r-1})\} \end{aligned}$$

に含まれる．これに命題 2.5 (1) を繰り返し適用して，($*$) を得る．これで，r が一般の場合も示された． □

5.4 C^r 級写像

定義 5.6（C^r 級写像） E,F をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，U を E の開集合とする．写像 $f\colon U\to F$ が C^r 級であるとは，f が r 階微分可能であり，かつ r 階導写像 $D^r f$ が連続であることをいう．

命題 5.7 E,F をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，U を E の開集合とする．また，$f,g\colon U\to F$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ とする．f,g が C^r 級ならば，$\lambda f+\mu g$ も C^r 級同相写像である．

証明 命題 4.3 から従う． □

定理 5.8 $E_0,\dots,E_{m-1},F$ をノルム化可能な K-位相線型空間とし，$E=E_0\times\cdots\times E_{m-1}$ と置き，U を E の開集合とする．写像 $f\colon U\to F$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) f は C^r 級である．

(b) 任意の $i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,m-1\}$ に対して，f は $(E_{i_0},\dots,E_{i_{r-1}})$ 方向に r 階偏微分可能であり，対応する r 階偏導写像 $D_{E_{i_0}}\cdots D_{E_{i_{r-1}}}f$ は連続である．

証明 $E_0,\dots,E_{m-1},F$ の位相と整合するノルム $\|-\|_{E_0},\dots,\|-\|_{E_{m-1}},\|-\|_F$ をそれぞれ固定しておく．また，E 上のノルム $\|-\|_E$ を $\|x\|_E=\sum_{i=0}^{m-1}\|x_i\|_{E_i}$（$x=(x_0,\dots,x_{m-1})\in E$）と定める（これは，$E$ の位相と整合する）．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 命題 4.7 から明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $r=1$ の場合を示せば十分である．$i=0,\dots,m-1$ に対して，f が E_i 方向に偏微分可能であり，対応する導写像 $D_{E_i}f$ は連続であるとする．$x_0\in U$ と $\epsilon>0$ を任意にとる．$h=(h_0,\dots,h_{m-1})\in E$ を十分小さくとって，任意の $t_0,\dots,t_{m-1}\in[0,1]$ に対して $x_0+t_0h_0+\cdots+t_{m-1}h_{m-1}\in U$ となるようにする．この h に対して，

$$
\begin{aligned}
&\left\|f(x_0+h)-f(x_0)-\sum_{i=0}^{m-1}D_{E_i}f(x_0)h_i\right\|_F\\
&\leq\sum_{i=0}^{m-1}\|f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},h_i,0,\dots,0))-f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},0,0,\dots,0))-D_{E_i}f(x_0)h_i\|_F \qquad (*)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，写像 $v\mapsto f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},v,0,\dots,0))-f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},0,0,\dots,0))-D_{E_i}f(x_0)v$ に対して有限増分定理の系（系 5.2）を適用することで，

$$
\begin{aligned}
&\|f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},h_i,0,\dots,0))-f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},0,0,\dots,0))-D_{E_i}f(x_0)h_i\|_F\\
&\leq\left(\sup_{t\in[0,1]}\|D_{E_i}f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},th_i,\dots,0))-D_{E_i}f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},0,0,\dots,0))\|_{\mathscr{L}(E_i;F)}\right)\|h_i\|_{E_i} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

を得る．$(*)$ と $(**)$ より，

$$
\begin{aligned}
&\left\|f(x_0+h)-f(x_0)-\sum_{i=0}^{m-1}D_{E_i}f(x_0)h_i\right\|_F\\
&\leq\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sup_{t\in[0,1]}\|D_{E_i}f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},th_i,\dots,0))-D_{E_i}f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},0,0,\dots,0))\|_{\mathscr{L}(E_i;F)}\right)\|h_i\|_{E_i}\\
&\leq\left(\max_{0\leq i<m}\sup_{t\in[0,1]}\|D_{E_i}f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},th_i,\dots,0))-D_{E_i}f(x_0+(h_0,\dots,h_{i-1},0,0,\dots,0))\|_{\mathscr{L}(E_i;F)}\right)\|h\|_E
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$D_{E_i} f$ は連続だから，上式最右辺の $\|h\|_E$ の係数は，$h \to 0$ のとき 0 に収束する．これは，f が x_0 において微分可能で，その微分が $h \mapsto \sum_{i=0}^{m-1} D_{E_i} f(x_0)h_i$ に等しいことを示している．よって，f は U の各点で微分可能であり，その導写像 Df は連続である． ◻

5.5 Taylor の定理

補題 5.9 E, F, G を K-位相線型空間，U を K の開集合，$\phi\colon E \times F \to G$ を連続双線型写像とする．r 階微分可能な写像 $f\colon U \to E$，$g\colon U \to F$（$r \in \mathbb{N}$）に対して，

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \phi(f^{(k)}, g^{(r-1-k)})\right)' = \phi(f, g^{(r)}) - (-1)^r \phi(f^{(r)}, g)$$

が成り立つ．

証明 微分演算の線型性（命題 2.1）と Leibniz 則（系 2.7）より，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \phi(f^{(k)}, g^{(r-1-k)})\right)' &= \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k (\phi(f^{(k)}, g^{(r-1-k)}))' \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k (\phi(f^{(k+1)}, g^{(r-1-k)}) + \phi(f^{(k+1)}, g^{(r-k)})) \\ &= \phi(f, g^{(r)}) - (-1)^r \phi(f^{(r)}, g)\end{aligned}$$

を得る． ◻

対称 k 重線型写像 $\phi\colon E \times \cdots \times E \to F$ と $h \in E$ に対して，$\phi(h, \ldots, h)$ を ϕh^k と書くことにする．

定理 5.10（Taylor の定理） E, F をノルム化可能な $\mathbb{R}$-位相線型空間，U を E の開集合，$f\colon U \to F$ を C^r 級写像（$r \in \mathbb{N}_{>0}$）とする．また，$x \in U$，$h \in E$ であり，x と h とを結ぶ閉線分は U に含まれるとする．このとき，

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} D^k f(x) h^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f(x+th) h^r \, dt$$

が成り立つ．

証明 $[0,1]$ を含む開集合から F への写像 g を，$g(t) = f(x+th)$ と定める．すると，微分演算の連鎖律（命題 2.2）を繰り返し用いることにより，g は C^r 級であって $g^{(k)}(t) = D^k f(t) h^k$（$0 \le k \le r$）を満たすことがわかる．したがって，

$$g(1) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} g^{(r)}(t) \, dt$$

を示せばよい．

補題 5.9 を連続双線型写像 $\mathbb{R} \times F \to F; (\lambda, y) \mapsto \lambda y$ と写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto (1-t)^{r-1}/(r-1)!$ および $g\colon \mathbb{R} \to F$ に適用して

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot (-1)^{r-1-k} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k)}(t)\right)' = 0 - (-1)^r \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} g^{(r)}(t),$$

すなわち

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(1-t)^k}{k!}g^{(k)}(t)\right)' = \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}g^{(r)}(t)$$

を得る[*8]．g は C^r 級だから，この両辺は t に関して連続である．そこで，両辺を 0 から 1 まで積分すると，微分積分学の基本定理より，

$$g(1)-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)=\int_0^1\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}g^{(r)}(t)\,dt,$$

を得る．これが示したかった式である．□

系 5.11　E, F を $\mathbb{R}$-ノルム空間（それぞれのノルムを $\|-\|_E, \|-\|_F$ と書く），U を E の開集合，$f\colon U\to F$ を C^r 級写像（$r\in\mathbb{N}_{>0}$）とする．このとき，任意の $x\in U$ と $\epsilon>0$ に対して，0 のある近傍 $V\subseteq U-x$ が存在して，任意の $h\in V$ に対して

$$\left\|f(x+h)-\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}D^k f(x)h^k\right\|_F\le\epsilon\|h\|_E^r$$

が成り立つ．

証明　$x\in U$ と $\epsilon>0$ を任意にとる．f は C^r 級だから，0 の凸近傍 $V\subseteq U-x$ を，任意の $h\in V$ に対して $\|D^r f(x+h)-D^r f(x)\|_{\mathscr{L}(E,\dots,E;F)}\le\epsilon$ となるようにとれる．これに対して，Taylor の定理（定理 5.10）より，

$$\begin{aligned}\left\|f(x+h)-\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}D^k f(x)h^k\right\|_F &= \left\|\int_0^1\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}D^r f(x+th)h^r-\frac{1}{r!}D^r f(x)h^r\,dt\right\|_F\\ &= \left\|\int_0^1\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}(D^r f(x+th)-D^r f(x))h^r\,dt\right\|_F\\ &\le \int_0^1\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}\|D^r f(x+th)-D^r f(x)\|_{\mathscr{L}(E,\dots,E;F)}\|h\|_E^r\,dt\\ &= \frac{1}{r!}\epsilon\|h\|_E^r\end{aligned}$$

が成り立つ．これで，主張は示された．□

参考文献

[1] N. Bourbaki（著），齋藤 正彦（編・訳），『ブルバキ数学原論 多様体 要約』，東京図書，1970.
[2] J. Dieudonné（著），森 毅（訳），『現代解析の基礎 2』，東京図書，1971.
[3] 梅田 亨，『森毅の主題による変奏曲 上』，日本評論社，2018.
[4] 杉浦 光夫，『解析入門 I』，東京大学出版会，1980.

[*8] 上式右辺は，写像 $t\mapsto\sum_{k=0}^{r-1}((1-t)^k/k!)g^{(k)}(t)$ の導写像に（改めて）t を代入したものを表す．