フィルタのノート

箱（@o_ccah）

2019 年 8 月 12 日

概要

フィルタに関する基礎事項を解説する．

目次

1 フィルタの定義 2

2 準フィルタ基とフィルタ基 2

3 極大フィルタ 3

4 フィルタ射 4

5 フィルタの誘導 4

5.1 始フィルタと終フィルタ 4

5.2 逆像フィルタと像フィルタ 7

5.3 相対フィルタ 8

5.4 積フィルタ 9

記号と用語

- 0 を含む自然数全体の集合を，$\mathbb{N}$ と書く．
- 集合 X の部分集合全体のなす集合を，$\mathfrak{P}(X)$ と書く．
- $A_0, \ldots, A_{n-1}$ などと書いた場合，特に断らない限り，$n \in \mathbb{N}$ とする．
- 集合 X の部分集合について考えているとき，空な交叉は X，空な合併は $\emptyset$ であると約束する．
- 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ について，$\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつとは，任意の有限個の元 $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ に対して $A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \neq \emptyset$ であることをいう．
- 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ と $X' \subseteq X$ に対して，$\mathfrak{A}$ の X' への制限を $\mathfrak{A}|_{X'} = \{A \cap X' \mid A \in \mathfrak{A}\}$ と定める．

1　フィルタの定義

定義 1.1（フィルタ） 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{F}$ が次の条件を満たすとき，$\mathfrak{F}$ は X 上の**フィルタ**であるといい，これらの組 $(X, \mathfrak{F})$ を**フィルタ付き集合**という．

(F1) $F \in \mathfrak{F}$ かつ $F \subseteq F' \subseteq X$ ならば $F' \in \mathfrak{F}$ である．
(F2) $F_0, \dots, F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ ならば $F_0 \cap \dots \cap F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ である（特に $X \in \mathfrak{F}$ である）．

$\mathfrak{P}(X)$ を X 上の**自明なフィルタ**という．自明でないフィルタを**真フィルタ**という．

容易にわかるように，集合 X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ が真フィルタであるための必要十分条件は，$\emptyset \notin \mathfrak{F}$ である．また，真フィルタは有限交叉性をもつ．

命題 1.2 X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．X の部分集合 $A_0, \dots, A_{n-1}$ に対して，$A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \in \mathfrak{F}$ であることと，すべての A_i が $\mathfrak{F}$ に属することとは同値である． □

定義 1.3（フィルタの比較） 集合 X 上のフィルタ全体の集合を，包含関係によって順序集合とみなす．より詳しくは，集合 X 上のフィルタ $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ に対して，$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ であるとき，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{F}$ よりも**細かい**，$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{G}$ よりも**粗い**という．より強く $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ であるとき，それぞれ**真に細かい**，**真に粗い**という．

2　準フィルタ基とフィルタ基

定義 2.1（準フィルタ基・フィルタ基） X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$\mathfrak{B}$ を X の部分集合族とする．

(1) $\mathfrak{B}$ の元の有限交叉の拡大として表せる集合全体が $\mathfrak{F}$ と一致するとき，すなわち

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{有限個の元 } B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B_0 \cap \dots \cap B_{n-1} \subseteq F\} \tag{$*$}$$

であるとき，$\mathfrak{B}$ はフィルタ $\mathfrak{F}$ の**準フィルタ基**である，あるいは $\mathfrak{B}$ はフィルタ $\mathfrak{F}$ を**生成する**という．

(2) $\mathfrak{B}$ の元の拡大として表せる集合全体が $\mathfrak{F}$ と一致するとき，すなわち

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$$

であるとき，$\mathfrak{B}$ はフィルタ $\mathfrak{F}$ の**フィルタ基**であるという．$\mathfrak{B}$ が集合 X 上のあるフィルタのフィルタ基であるとき，単に $\mathfrak{B}$ は X 上の**フィルタ基**であるといい，$\mathfrak{B}$ が X 上のある真フィルタのフィルタ基であるとき，$\mathfrak{B}$ は X 上の**真フィルタ基**であるという．

容易にわかるように，集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ に対して，($*$) の右辺は常に X 上のフィルタとなっている．さらに，これは $\mathfrak{B}$ を含む X 上のフィルタの中で最小のものである．したがって，$\mathfrak{B}$ が生成するフィルタとは，$\mathfrak{B}$ を含むような最小のフィルタのことに他ならない．

命題 2.2 X を集合，$\mathfrak{B}$ をその部分集合族とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が X 上のある真フィルタの準フィルタ基である（すなわち，$\mathfrak{B}$ が真フィルタを生成する）ための必要十分条件は，$\mathfrak{B}$ が有限交叉性をもつことである．

(2) $\mathfrak{B}$ が X 上の（あるフィルタの）フィルタ基であるための必要十分条件は，「$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ ならば，ある集合 $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1}$ となる」ことである．

(3) $\mathfrak{B}$ が X 上の真フィルタ基であるための必要十分条件は，(2) の条件に加えて $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ が成り立つことである．

証明 (1) $\mathfrak{B}$ が有限交叉性をもたなければ，$\mathfrak{B}$ の元の有限交叉として $\emptyset$ が得られるから，$\mathfrak{B}$ は自明なフィルタを生成する．逆に，$\mathfrak{B}$ が有限交叉性をもてば，$\mathfrak{B}$ の有限交叉の拡大全体は $\emptyset$ を含まないから，$\mathfrak{B}$ は真フィルタを生成する．

(2) 必要性を示す．$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid$ ある $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq F\}$ がフィルタであるとする．$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ とすると，フィルタの定義より $B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \in \mathfrak{F}$ だから，$\mathfrak{F}$ の定義より $B \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_n$ なる $B \in \mathfrak{B}$ が存在する．よって，条件は必要である．

十分性を示す．件の条件が成り立つとする．$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid$ ある $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq F\}$ と置くと，(F1) は明らかに成り立ち，仮定より (F2) も成り立つ．よって，条件は十分である．

(3) $\mathfrak{B}$ が X 上の真フィルタ基であるための必要十分条件は「(1) かつ (2)」だが，容易にわかるように，(2) の条件の下で (1) の条件は $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ と同値なので，主張が従う． □

3　極大フィルタ

定義 3.1（極大フィルタ） 集合 X 上の真フィルタのうち包含関係に関して極大であるものを，X 上の**極大フィルタ**という．

命題 3.2 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ について，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{A}$ は X 上の極大フィルタである．

(b) $\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもち，かつ任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{M}$ または $A^c \in \mathfrak{M}$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\mathfrak{A}$ が X 上の極大フィルタであるとする．まず，$\mathfrak{A}$ は真フィルタだから，有限交叉性をもつ．次に，ある $A \subseteq X$ に対して $A, A^c \notin \mathfrak{A}$ と仮定する．$A^c \notin \mathfrak{A}$ だから，$\mathfrak{A}$ は A^c の部分集合を含まない．すなわち，$\mathfrak{A}$ のすべての元は A と交わる．したがって，$\mathfrak{A} \cup \{A\}$ はまた有限交叉性をもつ．$\mathfrak{A} \cup \{A\}$ が生成する真フィルタは $\mathfrak{A}$ よりも真に細かいが，これは $\mathfrak{A}$ の極大性に矛盾する．よって，任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{A}$ または $A^c \in \mathfrak{A}$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\mathfrak{A}$ が (b) の条件を満たすとする．まず，$\mathfrak{A}$ が真フィルタであることを示す．$A \in \mathfrak{A}$ かつ $A \subseteq A' \subseteq X$ とすると，$\mathfrak{A}$ の有限交叉性より $A'^c \notin \mathfrak{A}$ だから，$A' \in \mathfrak{A}$ である．また，$A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ とすると，$A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap (A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^c = \emptyset$ だから，$\mathfrak{A}$ の有限交叉性より $(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^c \notin \mathfrak{A}$ であり，したがって $A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ である．さらに，$\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもつから $\emptyset \notin \mathfrak{A}$ である．よって，$\mathfrak{A}$ は真フィルタである．

次に，$\mathfrak{A}$ が極大フィルタであることを示す．$A \notin \mathfrak{A}$ とすると，$A^c \in \mathfrak{A}$ である．$A \cap A^c = \emptyset$ だから，$\mathfrak{A} \cup \{A\}$ を含む真フィルタは存在しない．よって，$\mathfrak{A}$ は極大フィルタである． □

命題 3.3 X を集合, $\mathfrak{M}$ を X 上の極大フィルタとする．X の部分集合 $A_0, \dots, A_{n-1}$ に対して, $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \mathfrak{M}$ であることと，ある A_i が $\mathfrak{M}$ に属することとは同値である．特に，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} = X$ ならば，ある A_i が $\mathfrak{M}$ に属する．

証明　命題 3.2 より，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \mathfrak{M}$ は「$A_0^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \in \mathfrak{M}$」の否定と同値であり，ある A_i が $\mathfrak{M}$ に属することは「すべての A_i^c が $\mathfrak{M}$ に属する」ことの否定と同値である．鉤括弧で囲った 2 つの条件は同値だから（命題 1.2），主張が従う． $\square$

定理 3.4　集合 X 上の任意の真フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$\mathfrak{F}$ よりも細かい極大フィルタが存在する．

証明　真フィルタ $\mathfrak{F}$ よりも細かい真フィルタの全体に Zorn の補題を適用して，結論を得る． $\square$

4　フィルタ射

定義 4.1（フィルタ射）　$(X,\mathfrak{F}), (Y,\mathfrak{G})$ をフィルタ付き集合とする．写像 $f\colon X \to Y$ が $(X,\mathfrak{F})$ から $(Y,\mathfrak{G})$ への**フィルタ射**であるとは，任意の $G \in \mathfrak{G}$ に対して $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$ であることをいう．

命題 4.2　フィルタ付き集合 $(X,\mathfrak{F}), (Y,\mathfrak{G}), (Z,\mathfrak{H})$ の間の写像 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ について，f と g がフィルタ射ならば，$g \circ f$ もフィルタ射である． $\square$

命題 4.3　$(X,\mathfrak{F}), (Y,\mathfrak{G})$ をフィルタ付き集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{G}$ の準フィルタ基であるとき，f がフィルタ射であるための必要十分条件は，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ となることである．

証明　必要性は明らかだから，十分性を示す．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{G}$ の準フィルタ基であり，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ が成り立つとする．任意に $G \in \mathfrak{G}$ をとると，準フィルタ基の定義より，$B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \subseteq G$ を満たす $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ が存在する．このとき

$$f^{-1}(B_0) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_{n-1}) = f^{-1}(B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \subseteq f^{-1}(G)$$

が成り立つ．条件より $f^{-1}(B_1), \ldots, f^{-1}(B_n) \in \mathfrak{F}$ だから，フィルタの性質より $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$ である．よって，f はフィルタ射である． $\square$

5　フィルタの誘導

5.1　始フィルタと終フィルタ

定義 5.1（始フィルタ・終フィルタ）　X を集合，$\{(Y_i,\mathfrak{G}_i)\}_{i\in I}$ をフィルタ付き集合族とする．

(1) 写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ に対して，すべての ϕ_i がフィルタ射となるような X 上の最小のフィルタ構造を，$\{((Y_i,\mathfrak{G}_i),\phi_i)\}_{i\in I}$（あるいは単に $\{\phi_i\}_{i\in I}$）が誘導する X 上の**始フィルタ**という．
(2) 写像族 $\{\sigma_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ に対して，すべての σ_i がフィルタ射となるような X 上の最大のフィルタ構造を，$\{((Y_i,\mathfrak{G}_i),\sigma_i)\}_{i\in I}$（あるいは単に $\{\sigma_i\}_{i\in I}$）が誘導する X 上の**終フィルタ**という．

容易にわかるように，$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終フィルタは，

$$\{F \subseteq X \mid \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(F) \in \mathfrak{G}_i\}$$

で与えられる．

$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとするとき，$\phi_i\colon X \to Y_i$ が $(X,\mathfrak{F})$ から $(Y_i,\mathfrak{G}_i)$ へのフィルタ射であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が $\phi_i^{-1}(G)$（$G \in \mathfrak{G}_i$）という形の集合をすべて含むことである．よって，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始

フィルタは，$\phi_i^{-1}(G)$（$i \in I$，$G \in \mathfrak{G}_i$）という形の集合全体が生成するフィルタに他ならない．より詳しく，次の命題が成り立つ．

命題 5.2　X を集合，$\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族，$\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が $\mathfrak{G}_i$ の準フィルタ基ならば，
$$\mathfrak{B}' = \{\phi_i^{-1}(C) \mid i \in I,\ C \in \mathfrak{C}_i\}$$
は $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタの準フィルタ基である．

(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が $\mathfrak{G}_i$ のフィルタ基ならば，
$$\mathfrak{B} = \{\phi_{i_0}^{-1}(C_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ i_0, \ldots, i_{n-1} \in I \text{ は相異なる},\ C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}\}$$
は $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタのフィルタ基である．

証明　(1)　$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとするとき，命題 4.3 より，$\phi_i \colon X \to Y_i$ が $(X, \mathfrak{F})$ から $(Y_i, \mathfrak{G}_i)$ へのフィルタ射であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が $\phi_i^{-1}(C)$（$C \in \mathfrak{C}_i$）という形の集合をすべて含むことである．よって，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは，$\phi_i^{-1}(C)$（$i \in I$，$C \in \mathfrak{C}_i$）という形の集合全体が生成するフィルタに他ならない．これは，$\mathfrak{B}'$ がその始フィルタの準フィルタ基であることを示している．

(2)　(1) より，$\phi_i^{-1}(C)$（$i \in I$，$C \in \mathfrak{C}_i$）の全体は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタの準フィルタ基だから，その有限交叉の全体
$$\mathfrak{B}'' = \{\phi_{i_0}^{-1}(C_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ i_0, \ldots, i_{n-1} \in I,\ C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}\}$$
はその始フィルタのフィルタ基である．そこで，$\mathfrak{B}''$ の元の拡大全体と $\mathfrak{B}$ の元の拡大全体とが等しいことを示せばよい．明らかに $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}''$ だから，任意の $B'' \in \mathfrak{B}''$ が $\mathfrak{B}$ のある元の拡大になっていることをいえば十分である．B'' は，相異なる $i_0, \ldots, i_{n-1} \in I$ と，各 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ごとに有限個の $C_{k,0}, \ldots, C_{k,m_k-1} \in \mathfrak{C}_{i_k}$（$m_k \in \mathbb{N}$）を用いて
$$B'' = \bigcap_{k=0}^{n-1} (\phi_{i_k}^{-1}(C_{k,0}) \cap \cdots \cap \phi_{i_k}^{-1}(C_{k,m_k-1}))$$
と書ける．ここで，$\mathfrak{C}_{i_k}$ はフィルタ基だから，$C_k \subseteq C_{k,0} \cap \cdots \cap C_{k,m_k-1}$ を満たす $C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}$ がとれる（命題 2.2 (2)）．そこで $B = \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi_{i_k}^{-1}(C_k)$ と置くと，これは $\mathfrak{B}$ の元であり，$B \subseteq B''$ を満たす．これで示された．□

特に，命題 5.2 で $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{G}_i$ と置いたときの $\mathfrak{B}'$ と $\mathfrak{B}$ を，それぞれ $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始フィルタの**標準準フィルタ基**・**標準フィルタ基**という．標準フィルタ基は，標準準フィルタ基の元の有限交叉の全体に等しい．

命題 5.3（始フィルタ・終フィルタの特徴付け）　X を集合，$\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族とする．

(1) 写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは，次の性質をもつ唯一の X 上のフィルタである．

　任意のフィルタ付き集合 $(Z, \mathfrak{H})$ と写像 $f \colon Z \to X$ について，f がフィルタ射であることと，任意の $i \in I$ に対して $\phi_i \circ f$ がフィルタ射であることとは同値である．

(2) 写像族 $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタは，次の性質をもつ唯一の X 上のフィルタである．

任意のフィルタ付き集合 $(Z,\mathfrak{H})$ と写像 $g\colon X\to Z$ について，g がフィルタ射であることと，任意の $i\in I$ に対して $g\circ\sigma_i$ がフィルタ射であることとは同値である．

証明 (1) $\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始フィルタを $\mathfrak{F}_{\mathrm{i}}$ とする．このとき，フィルタ付き集合 Z と写像 $f\colon Z\to X$ に対して，次の同値関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } i\in I \text{ に対して } \phi_i\circ f \text{ がフィルタ射}\\
&\iff \text{任意の } i\in I \text{ と } G\in\mathfrak{G}_i \text{ に対して } f^{-1}(\phi_i^{-1}(G))\in\mathfrak{H}\\
&\iff \mathfrak{F}_{\mathrm{i}} \text{ の標準準フィルタ基の任意の元 } B \text{ に対して } f^{-1}(B)\in\mathfrak{H}\\
&\iff \text{任意の } F\in\mathfrak{F}_{\mathrm{i}} \text{ に対して } f^{-1}(F)\in\mathfrak{H}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

一方で，X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ によって X をフィルタ付き集合とみなすとき，f がフィルタ射であることは，次のようにいいかえられる．

$$\text{任意の } F\in\mathfrak{F} \text{ に対して } f^{-1}(F)\in\mathfrak{H} \qquad (**)$$

任意のフィルタ付き集合 $(Z,\mathfrak{H})$ と写像 $f\colon Z\to X$ に対して $(*)\iff(**)$ であることは，$\mathfrak{F}_{\mathrm{i}}=\mathfrak{F}$ であることに他ならない．

(2) $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終フィルタを $\mathfrak{F}_{\mathrm{f}}$ とする．このとき，フィルタ付き集合 Z と写像 $g\colon X\to Z$ に対して，次の同値関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } i\in I \text{ に対して } g\circ\sigma_i \text{ がフィルタ射}\\
&\iff \text{任意の } i\in I \text{ と } H\in\mathfrak{H} \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(g^{-1}(H))\in\mathfrak{G}_i\\
&\iff \text{任意の } H\in\mathfrak{H} \text{ に対して } g^{-1}(H)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{f}}. \qquad (***)
\end{aligned}
$$

一方で，X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ によって X をフィルタ付き集合とみなすとき，g がフィルタ射であることは，次のようにいいかえられる．

$$\text{任意の } H\in\mathfrak{H} \text{ に対して } g^{-1}(H)\in\mathfrak{F}. \qquad (****)$$

任意のフィルタ付き集合 $(Z,\mathfrak{H})$ と写像 $g\colon X\to Z$ に対して $(***)\iff(****)$ であることは，$\mathfrak{F}_{\mathrm{f}}=\mathfrak{F}$ であることに他ならない． □

命題 5.4（始フィルタ・終フィルタの推移性） X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を集合族，$\{(Z_{ij},\mathfrak{H}_{ij})\}_{i\in I,\, j\in J_i}$（$J_i$ は各 $i\in I$ に対して定まる添字集合）をフィルタ付き集合族とする．

(1) $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$，$\{\psi_{ij}\colon Y_i\to Z_{ij}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\psi_{ij}\circ\phi_i\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ が誘導する X 上の始フィルタと，「各 Y_i を $\{\psi_{ij}\}_{j\in J_i}$ が誘導する始フィルタによってフィルタ付き集合とみなすときの，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始フィルタ」とは一致する．

(2) $\{\sigma_i\colon Y_i\to X\}_{i\in I}$，$\{\tau_{ij}\colon Z_{ij}\to Y_i\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\sigma_i\circ\tau_{ij}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ が誘導する X 上の終フィルタと，「各 Y_i を $\{\tau_{ij}\}_{j\in J_i}$ が誘導する終フィルタによってフィルタ付き集合とみなすときの，$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終フィルタ」とは一致する．

証明 (1) 始フィルタの特徴付け（命題 5.3 (1)）より，ϕ_i がフィルタ射であることと，任意の $j\in J_i$ に対して $\psi_{ij}\circ\phi_i$ がフィルタ射であることとは同値である．ここから結論が従う．

(2) 終フィルタの特徴付け（命題 5.3 (2)）より，σ_i がフィルタ射であることと，任意の $j\in J_i$ に対して $\sigma_i\circ\tau_{ij}$ がフィルタ射であることとは同値である．ここから結論が従う． □

5.2　逆像フィルタと像フィルタ

定義 5.5（逆像フィルタ・像フィルタ）　X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) Y をフィルタ構造 $\mathfrak{G}$ によってフィルタ付き集合とみなすとき，f が誘導する X 上の始フィルタを，$\mathfrak{G}$ の f による**逆像フィルタ**といい，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ と書く．
(2) X をフィルタ構造 $\mathfrak{F}$ によってフィルタ付き集合とみなすとき，f が誘導する Y 上の終フィルタを，$\mathfrak{F}$ の f による**像フィルタ**といい，$f(\mathfrak{F})$ と書く．

逆像フィルタ $f^{-1}(\mathfrak{G})$，像フィルタ $f(\mathfrak{F})$ を具体的に書けば，

$$f^{-1}(\mathfrak{G}) = \{A \subseteq X \mid \text{ある } G \in \mathfrak{F} \text{ が存在して } f^{-1}(G) \subseteq A\},$$
$$f(\mathfrak{F}) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\}$$

となる．

命題 5.6　X, Y を集合，$\mathfrak{G}$ を Y 上のフィルタ，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) $\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{G}$ の準フィルタ基ならば，$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ の準フィルタ基である．
(2) $\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{G}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基である．

証明　(1)　命題 5.2 (1) から従う．

(2)　命題 5.2 (2) より，$\mathfrak{B} \cup \{X\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基である．$\mathfrak{C}$ はフィルタ基だから $\mathfrak{C} \neq \emptyset$，したがって $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ であることと合わせて，$\mathfrak{B}$ が $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基であることを得る．　□

命題 5.7　X, Y を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{C} = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は $f(\mathfrak{F})$ のフィルタ基である．

証明　一般に $B \subseteq X$ に対して $f^{-1}(f(B)) \supseteq B$ だから，$B \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ ならば $f^{-1}(f(B)) \in \mathfrak{F}$，したがって $f(B) \in f(\mathfrak{F})$ である．よって，$\mathfrak{C} \subseteq f(\mathfrak{F})$ である．一方で，$G \in f(\mathfrak{F})$ ならば $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$，したがってある $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq f^{-1}(G)$ となる．このとき $f(B) \in \mathfrak{C}$ であり，$f(B) \subseteq G$ が成り立つ．よって，$\mathfrak{C}$ は $f(\mathfrak{F})$ のフィルタ基である．　□

命題 5.8　X, Y, Z を集合，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を写像とする．

(1) Z 上のフィルタ $\mathfrak{H}$ に対して，$f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{H})) = (g \circ f)^{-1}(\mathfrak{H})$ である．
(2) X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$g(f(\mathfrak{F})) = g \circ f(\mathfrak{F})$ である．

証明　始フィルタ・終フィルタの推移性（命題 5.4）から従う．　□

命題 5.9　X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像，$\mathfrak{G}$ を Y 上のフィルタとする．$f^{-1}(\mathfrak{G})$ が真フィルタであるための必要十分条件は，任意の $G \in \mathfrak{G}$ が $f(X)$ と交わることである．特に，f が全射で $\mathfrak{G}$ が真フィルタならば，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ も真フィルタである．

証明　$f^{-1}(\mathfrak{G})$ が真フィルタであるための必要十分条件は，$\emptyset \notin f^{-1}(\mathfrak{G})$ であること，すなわち，任意の $G \in \mathfrak{G}$ に対して $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ であることである．これは，任意の $G \in \mathfrak{G}$ が $f(X)$ と交わることと同値である．　□

命題 5.10　X, Y を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) $\mathfrak{F}$ が真フィルタならば，$f(\mathfrak{F})$ も真フィルタである．
(2) $\mathfrak{F}$ が極大フィルタならば，$f(\mathfrak{F})$ も極大フィルタである．

証明　(1)　明らかである．

(2)　命題 3.2 より，$\mathfrak{F}$ が極大フィルタであることは任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{F}$ または $A^c \in \mathfrak{F}$ が成り立つことと同値であり，$f(\mathfrak{F})$ が極大フィルタであることは任意の $B \subseteq Y$ に対して $B \in f(\mathfrak{F})$ または $B^c \in f(\mathfrak{F})$ が成り立つことと同値である．$A = f^{-1}(B)$ と置けばわかるように，後者は前者から従うから，$\mathfrak{F}$ が極大フィルタならば $f(\mathfrak{F})$ も極大フィルタである．□

命題 5.11　X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}$ である．
(2) Y 上のフィルタ $\mathfrak{G}$ に対して，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である．$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ であるための必要十分条件は，$f(X) \in \mathfrak{G}$ である．

証明　(1)　f は $(X, \mathfrak{F})$ から $(Y, f(\mathfrak{F}))$ へのフィルタ射であり，$(X, f^{-1}(f(\mathfrak{F})))$ から $(X, f(\mathfrak{F}))$ へのフィルタ射でもある．よって，始フィルタの最小性より，$f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}$ である．

(2)　f は $(X, f^{-1}(\mathfrak{G}))$ から $(Y, \mathfrak{G})$ へのフィルタ射であり，$(X, f^{-1}(\mathfrak{G}))$ から $(Y, f(f^{-1}(\mathfrak{G})))$ へのフィルタ射でもある．よって，終フィルタの最大性より，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である．

後半の主張を示す．$f(X) \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ だから，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ ならば $f(X) \in \mathfrak{G}$ である．逆に，$f(X) \in \mathfrak{G}$ とする．$B \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ を任意にとると，$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathfrak{G})$ だから，ある $G \in \mathfrak{G}$ が存在して $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(B)$ となる．このとき $G \cap f(X) = f(f^{-1}(G)) \subseteq B$ であり，仮定より $G, f(X) \in \mathfrak{G}$ だから，$B \in \mathfrak{G}$ である．よって，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{G}$ であり，前半の結論と合わせて $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ を得る．□

5.3　相対フィルタ

定義 5.12（相対フィルタ）　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X' \subseteq X$ とする．X を $\mathfrak{F}$ によってフィルタ付き集合とみなすときの，包含写像 $\iota\colon X' \to X$ が誘導する X' 上の始フィルタ（すなわち，ι による $\mathfrak{F}$ の逆像フィルタ）を，$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の**相対フィルタ**という．

$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタは，具体的には，$\mathfrak{F}$ の X' への制限 $\mathfrak{F}|_{X'} = \{F \cap X' \mid F \in \mathfrak{F}\}$ に一致する．

命題 5.13　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X' \subseteq X$ とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ の準フィルタ基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は $\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタの準フィルタ基である．
(2) $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は $\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタのフィルタ基である．

証明　命題 5.6 から従う．□

命題 5.14　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X'' \subseteq X' \subseteq X$ とする．このとき，$\mathfrak{F}$ が誘導する X'' 上の相対フィルタと，「$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタ」が誘導する X'' 上の相対フィルタとは一致する．

証明　命題 5.8 (1) から従う．□

命題 5.15 X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X' \subseteq X$ とする．$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタが真フィルタであるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ の任意の元が X' と交わることである．

証明 命題 5.9 から従う． □

5.4 積フィルタ

定義 5.16（積フィルタ） $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族，$X = \prod_{i\in I} X_i$ とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．各 X_i を $\mathfrak{F}_i$ によってフィルタ付き集合とみなすときの，射影 $p_i\colon X \to X_i$ の全体が誘導する X 上の始フィルタを，$\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ の**積フィルタ**といい，$\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ と書く．$\mathfrak{F}_0, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ の積フィルタを，$\mathfrak{F}_0 \times \dots \times \mathfrak{F}_{n-1}$ とも書く．

命題 5.17 $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が $\mathfrak{F}_i$ の準フィルタ基ならば，

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; 1 \text{ つの } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ の準フィルタ基である．

(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が $\mathfrak{F}_i$ のフィルタ基ならば，

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ のフィルタ基である．

証明 命題 5.2 から従う． □

積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ の標準準フィルタ基・標準フィルタ基は，それぞれ

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} F_i \;\middle|\; \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，} 1 \text{ つの } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\},$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} F_i \;\middle|\; \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，有限個の } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}$$

で与えられる．

命題 5.18 $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ が真フィルタであるための必要十分条件は，すべての $\mathfrak{F}_i$ が真フィルタであることである．

証明 積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ の標準フィルタ基は

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} F_i \;\middle|\; \text{すべての } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，有限個の } i \in I \text{ を除いて } F_i = X_i \right\}$$

であった．$\mathfrak{F}$ が真フィルタであることは $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ と同値であり，これはすべての $\mathfrak{F}_i$ が真フィルタであることと同値である． □

命題 5.19　$\{X_{ij}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$（$J_i$ は各 $i\in I$ に対して定まる添字集合）を集合族とし，各 $i\in I$，$j\in J_i$ に対して $\mathfrak{F}_{ij}$ を X_{ij} 上のフィルタとする．このとき，積フィルタ $\prod_{i\in I,\, j\in J_i}\mathfrak{F}_{ij}$ と，積フィルタの族の積フィルタ $\prod_{i\in I}\prod_{j\in J_i}\mathfrak{F}_{ij}$ とは等しい．

証明　始フィルタの推移性（命題 5.4 (1)）から従う． □

命題 5.20　$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族，$X=\prod_{i\in I}X_i$ とし，各 $i\in I$ に対して $X'_i\subseteq X_i$，$X'=\prod_{i\in I}X'_i$ とする．また，各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}_i$ が誘導する X'_i 上の相対フィルタを $\mathfrak{F}'_i$，$\mathfrak{F}=\prod_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ が誘導する X' 上の相対フィルタを $\mathfrak{F}'$ とするとき，$\mathfrak{F}'=\prod_{i\in I}\mathfrak{F}'_i$ が成り立つ．

証明　$p_i\colon X\to X_i$ および $p'_i\colon X'\to X'_i$ を射影，$\iota\colon X'\to X$ および $\iota_i\colon X'_i\to X_i$ を包含写像とする．フィルタ $\mathfrak{F}'$ は，始フィルタの推移性（命題 5.4 (1)）より，$\{p_i\circ\iota\}_{i\in I}$ が誘導する始フィルタに等しい．一方で，積フィルタ $\prod_{i\in I}\mathfrak{F}'_i$ は，同命題より，$\{\iota_i\circ p'_i\}_{i\in I}$ が誘導する始フィルタに等しい．ところが $p_i\circ\iota=\iota_i\circ p'_i$ だから，これらのフィルタは等しい． □

命題 5.21　$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族とし，各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上の真フィルタとする．$X=\prod_{i\in I}X_i$，$\mathfrak{F}=\prod_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ と置き，$p_i\colon X\to X_i$ を射影とする．このとき，各 $i\in I$ に対して，$p_i(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}_i$ が成り立つ．

証明　積フィルタ $\mathfrak{F}=\prod\mathfrak{F}_i$ の標準フィルタ基は

$$\mathfrak{B}=\left\{\prod_{i\in I}F_i\;\middle|\;\text{すべての } i\in I \text{ に対して } F_i\in\mathfrak{F}_i\text{，有限個の } i\in I \text{ を除いて } F_i=X_i\right\}$$

だったから，命題 5.7 より，$p_i(\mathfrak{F})$ のフィルタ基として $\mathfrak{B}_i=\{p_i(B)\mid B\in\mathfrak{B}\}$ がとれる．ところが，各 $\mathfrak{F}_i$ が真フィルタであり，したがって空集合を含まないことに注意すると，$\mathfrak{B}_i$ が $\mathfrak{F}_i$ に等しいことがわかる．よって，$p_i(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}_i$ である． □

参考文献

[1] N. Bourbaki（著），森 毅（編・訳），清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 1』，東京図書，1968.