Fourier 級数のノート

箱（@o_ccah）

2020 年 9 月 8 日

概要

本稿は，Fourier 級数論のまとめである．まず，L^1 上の Fourier 級数論を解説する．ここでは，Fejér 核が近似単位元であることを用いて，Riemann–Lebesgue の定理や逆変換公式を見通しよく証明する．次に，L^2 上の Fourier 級数論を，Hilbert 空間の一般論を用いて解説する．最後に，Fourier 級数のさまざまな収束問題について論じる．

目次

記号と用語

基本的な集合

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．
- $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする．$\mathbb{T}^d$ 上の関数を，しばしば $\mathbb{R}^d$ 上の周期 $\mathbb{Z}^d$ をもつ関数と同一視する．

関数に対する操作

- 群 G 上の関数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ に対して，関数 $\overline{f}\colon G \to \mathbb{C}$ を $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$（$x \in G$）によって定め，関数 $\widetilde{f}\colon G \to \mathbb{C}$ を $\widetilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$（$x \in G$）によって定める．
- 群 G 上の関数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ と $y \in G$ に対して，関数 $\tau_y f\colon G \to \mathbb{C}$ を $\tau_y f(x) = f(y^{-1}x)$（$x \in G$）によって定める．
- $\mathbb{R}^d$ の開集合上で定義された関数 f に対して，その i-方向の偏導関数を $\partial_i f$ と書く．多重指数 $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ に対して，$\partial^\alpha = \partial_0^{\alpha_0} \cdots \partial_{d-1}^{\alpha_{d-1}}$ と定める．また，$\mathbb{T}^d$ 上で定義された関数に対しては，それを $\mathbb{R}^d$ 上で定義された周期関数とみなすことによって，微分可能性や偏導関数を定義する．

関数空間

- 集合 X 上の複素数値関数全体のなす線型空間を，$\mathbb{C}^X$ と書く．
- 位相空間 X 上の複素数値連続関数全体のなす線型空間を，$C(X)$ と書く．X がコンパクト空間の場合，$C(X)$ は一様ノルムによって Banach 空間とみなす．
- 局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上のコンパクト台をもつ複素数値連続関数全体のなす線型空間を，$C_0(X)$ と書く．
- 局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の無限遠で消える複素数値連続関数全体のなす線型空間を，$C_\infty(X)$ と書く．X が離散である場合には，$C_\infty(X)$ を $c_\infty(X)$ と書く．
- $\mathbb{R}^d$ の開集合 Ω 上の C^k 級関数全体のなす線型空間を，$C^k(\Omega)$ と書く．また，$\mathbb{T}^d$ 上で定義された関数に対して上述のとおり定めた偏微分を用いて，$\mathbb{T}^d$ 上の C^k 級関数全体のなす線型空間 $C^k(\mathbb{T}^d)$ を定義する．
- 測度空間 (X, μ) と $1 \le p \le \infty$ に対して，(X, μ) 上の複素数値 p 乗可積分関数全体のなす線型空間を $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ あるいは単に $\mathscr{L}^p(X)$ と書き，これをほとんどいたるところで一致する関数を同一視する同値関係で割って得られる線型空間を $L^p(X, \mu)$ あるいは単に $L^p(X)$ と書く．$L^p(X)$ の元 f について，f の代表元のとり方によらない性質や操作を考える場合には，しばしば f を X 上で定義された関数であるかのように扱う．(X, μ) が離散である場合には，$L^p(X)$ を $l^p(X)$ と書く．

その他の記号

- $n = (n_0, \dots, n_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$|n|_\infty = \max\{|n_0|, \dots, |n_{d-1}|\}$ と書く．

- 多重指数 $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ に対して，$|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_{d-1}$ と書く．

本稿を通しての約束

- 本稿を通して，d は自然数とする．
- 本稿を通して，線型空間，ノルム空間，Hilbert 空間はすべて $\mathbb{C}$ 上のものとし，いちいち係数体を明示しない．
- 本稿を通して，$\mathbb{T}^n$ には全測度 1 の Haar 測度を，$\mathbb{Z}^n$ には各点が測度 1 をもつ Haar 測度を考えるとし，特に断らなくても，積分はこの測度に関するものとする．

1 Fourier 変換

1.1 $\mathbb{T}^d$ 上の Fourier 変換

定義 1.1（$\mathbb{T}^d$ 上の Fourier 変換） $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，その Fourier 変換 $\mathscr{F}f\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ を，

$$\mathscr{F}f(n) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)e^{-2\pi int}\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)$$

と定める．写像 $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ を，（$\mathbb{T}^d$ 上の）Fourier 変換という．

後に，$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して $\mathscr{F}f \in c_\infty(\mathbb{Z}^d)$ であることを示す（定理 2.11：Riemann–Lebesgue の定理）．

命題 1.2 Fourier 変換 $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ について，次が成り立つ．

(1) $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ は線型写像である．
(2) $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F}\widetilde{f} = \overline{\mathscr{F}f}$ である．
(3) $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F}\overline{f} = \widetilde{\mathscr{F}f}$ である．
(4) $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}f\mathscr{F}g$ である．

証明 (1) 明らかである．
(2) $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，

$$\mathscr{F}\widetilde{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{f(-t)}e^{-2\pi int}\,dt = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{f(t)e^{-2\pi int}}\,dt = \overline{\mathscr{F}f(n)} = \overline{\mathscr{F}f}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)$$

だから，$\mathscr{F}\widetilde{f} = \overline{\mathscr{F}f}$ である．
(3) $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，

$$\mathscr{F}\overline{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{f(t)}e^{-2\pi int}\,dt = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{f(t)e^{-2\pi i(-n)t}}\,dt = \overline{\mathscr{F}f(-n)} = \widetilde{\mathscr{F}f}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)$$

だから，$\mathscr{F}\overline{f} = \widetilde{\mathscr{F}f}$ である．

(4)　$f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g)(n) &= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\int_{\mathbb{T}^d} f(s) g(-s+t)\, ds \right) e^{-2\pi i n t}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} f(s) g(-s+t) e^{-2\pi i n t}\, d(s,t) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\int_{\mathbb{T}^d} g(-s+t) e^{-2\pi i n(-s+t)}\, dt \right) f(s) e^{-2\pi i n s}\, ds \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \mathscr{F} g(n) f(s) e^{-2\pi i n s}\, ds \\
&= \mathscr{F} f(n) \mathscr{F} g(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)
\end{aligned}$$

だから，$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F} f \mathscr{F} g$ である．ここで，$f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ と Tonelli の定理より $(s,t) \mapsto f(s) g(-s+t) e^{2\pi i n t}$ が $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ 上可積分であることに注意して，Fubini の定理を用いた． □

命題 1.3　Fourier 変換 $\mathscr{F} \colon L^1(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ について，次が成り立つ．

(1) $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $s \in \mathbb{T}^d$ に対して，$\mathscr{F}(\tau_s f) = e^{-2\pi i (-) s} \mathscr{F} f$ である．
(2) $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $m \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$\mathscr{F}(e^{2\pi i m (-)} f) = \tau_m(\mathscr{F} f)$ である．

証明　(1)　$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $s \in \mathbb{T}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\tau_s f)(n) &= \int_{\mathbb{T}^d} f(-s+t) e^{-2\pi i n t}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-2\pi i n (s+t)}\, dt \\
&= e^{-2\pi i n s} \mathscr{F} f(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)
\end{aligned}$$

だから，$\mathscr{F}(\tau_s f) = e^{-2\pi i (-) s} \mathscr{F} f$ である．

(2)　$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $m \in \mathbb{Z}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(e^{2\pi i m (-)} f)(n) &= \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i m t} f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-2\pi i (-m+n) t}\, dt \\
&= \tau_m(\mathscr{F} f)(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)
\end{aligned}$$

だから，$\mathscr{F}(e^{2\pi i m (-)} f) = \tau_m(\mathscr{F} f)$ である． □

命題 1.4　$\alpha \in \mathbb{N}^d$ とする．$f \in C^\alpha(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = (2\pi i (-))^\alpha \mathscr{F} f$ である．

証明　$f \in C^\alpha(\mathbb{T}^d)$ に対して，部分積分より

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\partial^\alpha f)(n) &= \int_{\mathbb{T}^d} \partial^\alpha f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt \\
&= (-1)^\alpha \int_{\mathbb{T}^d} f(t) (-2\pi i n)^\alpha e^{-2\pi i n t}\, dt \\
&= (2\pi i n)^\alpha \mathscr{F} f(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)
\end{aligned}$$

だから，$\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = (2\pi i (-))^\alpha \mathscr{F} f$ である． □

1.2　$\mathbb{Z}^d$ 上の共役 Fourier 変換

定義 1.5（$\mathbb{Z}^d$ 上の共役 Fourier 変換）　$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，その共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}}a\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ を，

$$\overline{\mathscr{F}}a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a(n)e^{2\pi int} \qquad (t \in \mathbb{T}^d)$$

と定める．写像 $\overline{\mathscr{F}}\colon l^1(\mathbb{Z}^d) \to \mathbb{C}^{\mathbb{T}^d}$ を，（$\mathbb{Z}^d$ 上の）共役 Fourier 変換という．

$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，$\mathbb{T}^d$ 上の連続関数の族 $\{t \mapsto a(n)e^{2\pi int}\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C(\mathbb{T}^d)$ において絶対総和可能である．ここから，各点における総和として定義された関数 $\overline{\mathscr{F}}a$ が，実は $C(\mathbb{T}^d)$ における $\{t \mapsto a(n)e^{2\pi int}\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ の総和であることがわかる．よって，共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}}$ は $l^1(\mathbb{Z}^d)$ から $C(\mathbb{T}^d)$ への写像を定める．

命題 1.6　共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}}\colon l^1(\mathbb{Z}^d) \to C(\mathbb{Z}^d)$ について，次が成り立つ．

(1) $\overline{\mathscr{F}}\colon l^1(\mathbb{Z}^d) \to C(\mathbb{Z}^d)$ は線型写像である．
(2) $a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，$\overline{\mathscr{F}}\widetilde{a} = \overline{\overline{\mathscr{F}}a}$ である．
(3) $a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，$\overline{\mathscr{F}}\overline{a} = \widetilde{\overline{\mathscr{F}}a}$ である．
(4) $a,\, b \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，$\overline{\mathscr{F}}(a * b) = \overline{\mathscr{F}}a\overline{\mathscr{F}}b$ である．

証明　(1)　明らかである．
(2)　$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，

$$\overline{\mathscr{F}}\widetilde{a}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{a(-n)}e^{2\pi int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{a(n)e^{2\pi int}} = \overline{\overline{\mathscr{F}}a(t)} = \overline{\overline{\mathscr{F}}a}(t) \qquad (t \in \mathbb{T}^d)$$

だから，$\overline{\mathscr{F}}\widetilde{a} = \overline{\overline{\mathscr{F}}a}$ である．
(3)　$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，

$$\overline{\mathscr{F}}\overline{a}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{a(n)}e^{2\pi int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{a(n)e^{2\pi in(-t)}} = \overline{\overline{\mathscr{F}}a(-t)} = \widetilde{\overline{\mathscr{F}}a}(t) \qquad (t \in \mathbb{T}^d)$$

だから，$\overline{\mathscr{F}}\overline{a} = \widetilde{\overline{\mathscr{F}}a}$ である．
(4)　$a,\, b \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\overline{\mathscr{F}}(a * b)(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} a(m)b(-m+n) \right) e^{2\pi int} \\
&= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} a(m)b(-m+n)e^{2\pi int} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} b(-m+n)e^{2\pi i(-m+n)t} \right) a(m)e^{2\pi imt} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \overline{\mathscr{F}}b(t)a(m)e^{2\pi imt} \\
&= \overline{\mathscr{F}}a(t)\overline{\mathscr{F}}b(t) \qquad (t \in \mathbb{T}^d)
\end{aligned}$$

だから，$\overline{\mathscr{F}}(a*b)=\overline{\mathscr{F}}a\overline{\mathscr{F}}b$ である．ここで，a, $b\in l^1(\mathbb{Z}^d)$ と Tonelli の定理より $(m,n)\mapsto a(m)b(-m+n)e^{2\pi int}$ が $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ 上可積分であることに注意して，Fubini の定理を用いた． □

命題 1.7　共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}\colon l^1(\mathbb{Z}^d)\to C(\mathbb{T}^d)$ について，次が成り立つ．

(1) $a\in l^1(\mathbb{Z}^d)$ と $m\in\mathbb{Z}^d$ に対して，$\overline{\mathscr{F}}(\tau_m a)=e^{2\pi im(-)}\overline{\mathscr{F}}a$ である．
(2) $a\in l^1(\mathbb{Z}^d)$ と $s\in\mathbb{T}^d$ に対して，$\overline{\mathscr{F}}(e^{2\pi i(-)s}a)=\tau_{-s}(\overline{\mathscr{F}}a)$ である．

証明　(1)　$a\in l^1(\mathbb{Z}^d)$ と $m\in\mathbb{Z}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{F}}(\tau_m a)(t)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}a(-m+n)e^{2\pi int}\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}a(n)e^{-2\pi i(m+n)t}\\&=e^{2\pi imt}\overline{\mathscr{F}}a(t)\qquad\qquad(t\in\mathbb{T}^d)\end{aligned}$$

だから，$\overline{\mathscr{F}}(\tau_m a)=e^{2\pi im(-)}\overline{\mathscr{F}}a$ である．

(2)　$a\in l^1(\mathbb{Z}^d)$ と $s\in\mathbb{T}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{F}}(e^{2\pi i(-)s}a)(t)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}e^{2\pi ins}a(n)e^{2\pi int}\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}a(n)e^{2\pi in(s+t)}\\&=\tau_{-s}(\overline{\mathscr{F}}a)(t)\qquad\qquad(t\in\mathbb{T}^d)\end{aligned}$$

だから，$\overline{\mathscr{F}}(e^{2\pi i(-)s}a)=\tau_{-s}(\overline{\mathscr{F}}a)$ である． □

2　Dirichlet 核，Fejér 核

2.1　指標との畳み込み

命題 2.1　$f\in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $n\in\mathbb{Z}^d$ に対して，

$$(e^{2\pi in(-)}*f)(t)=\mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\qquad(t\in\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

証明　$t\in\mathbb{T}^d$ に対して

$$(e^{2\pi in(-)}*f)(t)=(f*e^{2\pi in(-)})(t)=\int_{\mathbb{T}^d}f(s)e^{2\pi in(-s+t)}\,ds=\mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}$$

である． □

2.2　Dirichlet 核

定義 2.2（Dirichlet 核）　$N\in\mathbb{N}$ に対して，$D_N\in C(\mathbb{T}^d)$ を

$$D_N(t)=\sum_{|n|_\infty\le N}e^{2\pi int}\qquad(t\in\mathbb{T}^d)$$

と定める．関数 D_N を総称して Dirichlet 核という．$d=1$ のときの Dirichlet 核 D_N を D_N^1 と書く．

d 次元の Dirichlet 核 D_N は，1 次元の Dirichlet 核 D_N^1 を用いて

$$D_N(t) = D_N^1(t_0)\cdots D_N^1(t_{d-1}) \qquad (t=(t_0,\ldots,t_{d-1})\in\mathbb{T}^d)$$

と表せる．

命題 2.3 $f\in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $N\in\mathbb{N}$ に対して，

$$(D_N * f)(t) = \sum_{|n|_\infty\le N} \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int} \qquad (t\in\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

証明 命題 2.1 から従う． □

命題 2.4 $N\in\mathbb{N}$ に対して，

$$D_N(t) = \prod_{i=0}^{d-1}\frac{\sin((2N+1)\pi t_i)}{\sin(\pi t_i)} \qquad (t=(t_0,\ldots,t_{d-1})\in\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．ここで，右辺は $\mathbb{T}^d$ 上に連続に拡張して考えるものとする．

証明 d 次元の Dirichlet 核 D_N は 1 次元の Dirichlet 核 D_N^1 の積で書けるのだったから，1 次元の場合を示せばよい．1 次元の場合は，

$$\begin{aligned} D_N^1(t) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi int} \\ &= e^{-2\pi iNt}\frac{e^{2\pi i(2N+1)t}-1}{e^{2\pi it}-1} \\ &= \frac{e^{\pi i(2N+1)t}-e^{-\pi i(2N+1)t}}{e^{\pi it}-e^{-\pi it}} \\ &= \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \end{aligned}$$

と計算できる．これで示された． □

2.3 Fejér 核

定義 2.5（Fejér 核） $N\in\mathbb{N}$ に対して，$F_N\in C(\mathbb{T}^d)$ を

$$F_N(t) = \sum_{|n|_\infty\le N}\left(1-\frac{|n_0|}{N+1}\right)\cdots\left(1-\frac{|n_{d-1}|}{N+1}\right)e^{2\pi int} \qquad (t\in\mathbb{T}^d)$$

と定める．関数 F_N を総称して Fejér 核という．$d=1$ のときの Fejér 核 F_N を F_N^1 と書く．

d 次元の Fejér 核 F_N は，1 次元の Fejér 核 F_N^1 を用いて

$$F_N(t) = F_N^1(t_0)\cdots F_N^1(t_{d-1}) \qquad (t=(t_0,\ldots,t_{d-1})\in\mathbb{T}^d)$$

と表せる．また，1 次元の Fejér 核 F_N^1 は，Dirichlet 核を用いて

$$F_N^1 = \frac{1}{N+1}(D_0^1 + D_1^1 + \cdots + D_N^1) \qquad (t \in \mathbb{T})$$

と表せる．

命題 2.6　$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$(F_N * f)(t) = \sum_{|n|_\infty \leq N} \left(1 - \frac{|n_0|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|n_{d-1}|}{N+1}\right) \mathscr{F} f(n) e^{2\pi i n t} \qquad (t \in \mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

証明　命題 2.1 から従う．　□

命題 2.7　$N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$F_N(t) = \frac{1}{(N+1)^d} \prod_{i=0}^{d-1} \left(\frac{\sin((N+1)\pi t_i)}{\sin(\pi t_i)} \right)^2 \qquad (t = (t_0, \ldots, t_{d-1}) \in \mathbb{T}^d)$$

が成り立つ[*1]．

証明　d 次元の Fejér 核 F_N は 1 次元の Fejér 核 F_N^1 の積で書けるのだったから，1 次元の場合を示せばよい．示すべき等式は，

$$\sum_{n=-N}^{N} (N+1-|n|) e^{2\pi i n t} = \left(\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \right)^2 \tag{$*$}$$

である．

($*$) の左辺は，

$$\sum_{n=-N}^{N} (N+1-|n|) e^{2\pi i n t} = \sum_{n=0}^{N} (N+1-n) e^{2\pi i n t} + \sum_{n=0}^{N} (N+1-n) e^{-2\pi i n t} - (N+1) \tag{$**$}$$

と書ける．まず，$\sum_{n=0}^{N} (N+1-n) e^{2\pi i n t}$ を計算しよう．

$$\begin{aligned}(e^{2\pi i t} - 1)\left(\sum_{n=0}^{N} (N+1-n) e^{2\pi i n t}\right) &= (e^{2\pi i t} + e^{2\pi i 2t} + \cdots + e^{2\pi i (N+1) t}) - (N+1) \\ &= e^{2\pi i t} \frac{e^{2\pi i (N+1) t} - 1}{e^{2\pi i t} - 1} - (N+1)\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} (N+1-n) e^{2\pi i n t} &= e^{2\pi i t} \frac{e^{2\pi i (N+1) t} - 1}{(e^{2\pi i t} - 1)^2} - (N+1) \frac{1}{e^{2\pi i t} - 1} \\ &= e^{\pi i (N+1) t} \frac{e^{\pi i (N+1) t} - e^{-\pi i (N+1) t}}{(e^{\pi i t} - e^{-\pi i t})^2} - (N+1) \frac{e^{-\pi i t}}{e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}} \qquad (***)\end{aligned}$$

[*1] 右辺を連続に延長することで，$t_i = 0$ なる i が存在する場合も含めて成り立つ．

である．また，(***) で t を $-t$ に置き換えて，

$$\sum_{n=0}^{N}(N+1-n)e^{-2\pi int}=-e^{-\pi i(N+1)t}\frac{e^{\pi i(N+1)t}-e^{-\pi i(N+1)t}}{(e^{\pi it}-e^{-\pi it})^2}+(N+1)\frac{e^{\pi it}}{e^{\pi it}-e^{-\pi it}} \tag{****}$$

を得る．(***) と (****) を (**) に代入すると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N}(N+1-|n|)e^{2\pi int}&=e^{\pi i(N+1)t}\frac{e^{\pi i(N+1)t}-e^{-\pi i(N+1)t}}{(e^{\pi it}-e^{-\pi it})^2}-(N+1)\frac{e^{-\pi it}}{e^{\pi it}-e^{-\pi it}}\\&\quad-e^{-\pi i(N+1)t}\frac{e^{\pi i(N+1)t}-e^{-\pi i(N+1)t}}{(e^{\pi it}-e^{-\pi it})^2}+(N+1)\frac{e^{\pi it}}{e^{\pi it}-e^{-\pi it}}\\&\quad+(N+1)\\&=\left(\frac{e^{\pi i(N+1)t}-e^{-\pi i(N+1)t}}{e^{\pi it}-e^{-\pi it}}\right)^2\\&=\left(\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2\end{aligned}$$

となる．これで，(*) が示された． □

定理 2.8 Fejér 核 $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は，$L^1(\mathbb{T}^d)$ の近似単位元である．

証明 示すべきことは，次の 3 つである（定義 A.11）．

(AI1) $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $L^1(\mathbb{T}^d)$ において有界である．すなわち，ある $C\geq 0$ が存在し，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して $\|F_N\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\leq C$ が成り立つ．
(AI2) 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して，$\int_{\mathbb{T}^d}F_N(t)\,dt=1$ である．
(AI3) 単位元 $0\in\mathbb{T}^d$ の任意の近傍 U に対して，$N\to\infty$ のとき $\int_{\mathbb{T}^d\setminus U}|F_N(t)|\,dt\to 0$ となる．

(AI1), (AI2) 命題 2.7 より $F_N\geq 0$ だから，$\int_{\mathbb{T}^d}F_N(t)\,dt=1$ を示せばよい．これは，関数 $t\mapsto e^{2\pi int}$ の $\mathbb{T}^d$ 上の積分が，$n=0$ のとき 1，それ以外のとき 0 となることからただちに従う．

(AI3) F_N を $[-1/2,1/2]^d$ 上の関数とみなす．示すべきことは，任意の $0<\epsilon\leq 1/2$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\int_{[-1/2,1/2]^d\setminus[-\epsilon,\epsilon]^d}F_N(t)\,dt=0$$

となることである．

まず，$d=1$ のときを考える．$0<\epsilon\leq 1/2$ を任意にとる．命題 2.7 と $|\sin x|\geq(2/\pi)|x|$（$|x|\leq\pi/2$）より，$\epsilon\leq|t|\leq 1/2$ に対して

$$\begin{aligned}F_N^1(t)&=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2\\&\leq\frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{\sin(\pi t)}\right)^2\\&\leq\frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{(2/\pi)(\pi t)}\right)^2\\&=\frac{1}{N+1}\frac{1}{4t^2}\\&\leq\frac{1}{N+1}\frac{1}{4\epsilon^2}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$N\to\infty$ のとき

$$\int_{[-1/2,1/2]\setminus[-\epsilon,\epsilon]} F_N(t)\,dt \le \frac{1}{N+1}\frac{1-2\epsilon}{4\epsilon^2} \to 0$$

となる．

次に，d が一般のときを考える．$0<\epsilon\le 1/2$ を任意にとる．$i=0,\ldots,d-1$ に対して

$$A_i = \{(t_0,\ldots,t_{d-1})\in\mathbb{Z}^d \mid \epsilon\le|t_i|\le 1/2\}$$

と置くと，$[-1/2,1/2]^d\setminus[-\epsilon,\epsilon]^d = \bigcup_{i=0}^{d-1} A_i$ だから，

$$\int_{[-1/2,1/2]^d\setminus[-\epsilon,\epsilon]^d} F_N(t)\,dt \le \sum_{i=0}^{d-1}\int_{A_i} F_N(t)\,dt$$

である．ここで，(AI2) より $\int_{-1/2}^{1/2} F_N^1(t)\,dt = 1$ だから

$$\begin{aligned}
\int_{A_i} F_N(t) &= \int_{-1/2}^{1/2}\cdots\int_{[-1/2,1/2]\setminus[-\epsilon,\epsilon]}\cdots\int_{-1/2}^{1/2} F_N^1(t_0)\cdots F_N^1(t_{d-1})\,dt_{d-1}\cdots dt_0\\
&= \left(\int_{-1/2}^{1/2} F_N^1(t)\,dt\right)^{d-1}\left(\int_{[-1/2,1/2]\setminus[-\epsilon,\epsilon]} F_N^1(t)\,dt\right)\\
&= \left(\int_{[-1/2,1/2]\setminus[-\epsilon,\epsilon]} F_N^1(t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

であり，$d=1$ のときの結果より，$N\to\infty$ の極限において上式は 0 に収束する．よって，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{[-1/2,1/2]^d\setminus[-\epsilon,\epsilon]^d} F_N(t) = 0$$

である． □

系 2.9 Fourier 変換 $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{T}^d)\to\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$ は単射である．

証明 $f\in L^1(\mathbb{T}^d)$ が $\mathscr{F}f=0$ を満たすとすると，命題 2.6 より，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して $F_N*f=0$ である．また，$\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は近似単位元だから（定理 2.8），$N\to\infty$ のとき $L^1(\mathbb{T}^d)$ において $F_N*f\to f$ である（定理 A.12）．よって，$f=0$ である． □

系 2.10 $1\le p<\infty$ とする．$L^p(\mathbb{T}^d)$ において，$\{t\mapsto e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ が生成する部分線型空間は稠密である．

証明 $f\in L^p(\mathbb{T}^d)$ を任意にとる．命題 2.6 より，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して F_N*f は $\{t\mapsto e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ が生成する部分線型空間に属する．また，$\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は近似単位元だから（定理 2.8），$N\to\infty$ のとき $L^p(\mathbb{T}^d)$ において $F_N*f\to f$ である（定理 A.12）．これで示された． □

系 2.10 は，Stone–Weierstrass の近似定理と $C(\mathbb{T}^d)$ が $L^p(\mathbb{T}^d)$（$1\le p<\infty$）において稠密であること（命題 A.2）からもわかる．

定理 2.11（Riemann–Lebesgue の定理） $f\in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F}f\in c_\infty(\mathbb{Z}^d)$ である．

証明　$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，系 2.10 より，$g(t) = \sum_{|n|_\infty \le N} c_n e^{2\pi int}$（$N \in \mathbb{N}$, $|n|_\infty \le N$ に対して $c_n \in \mathbb{C}$）と書ける g であって $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \le \epsilon$ を満たすものがとれる．このとき，任意の $n \in \mathbb{Z}^d$，$|n|_\infty > N$ に対して，$\mathscr{F}g(n) = 0$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}f(n)| &= |\mathscr{F}f(n) - \mathscr{F}g(n)| \\ &= \left|\int_{\mathbb{T}^d} (f-g)(t)e^{2\pi int}\,dt\right| \\ &\le \int_{\mathbb{T}^d} |(f-g)(t)e^{2\pi int}|\,dt \\ &= \|f-g\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \\ &\le \epsilon\end{aligned}$$

を得る．よって，$\mathscr{F}f \in c_\infty(\mathbb{Z}^d)$ である．　□

3　逆変換公式

$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して $\overline{\mathscr{F}}a \in C(\mathbb{T}^d) \subseteq L^1(\mathbb{T}^d)$ だから，$\overline{\mathscr{F}}a$ の Fourier 変換が考えられる．

定理 3.1（$\mathbb{Z}^d$ 上の共役逆変換公式）　$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して，$\mathbb{Z}^d$ 上の関数としての等式

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}a = a$$

が成り立つ．すなわち，

$$a(n) = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{\mathscr{F}}a(t)e^{2\pi int}\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)$$

が成り立つ．

証明　$a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ とする．$\mathbb{T}^d$ 上の連続関数の族 $\{t \mapsto a(m)e^{2\pi imt}\}_{m \in \mathbb{Z}^d}$ は，一様ノルムを備えた Banach 空間 $C(\mathbb{T}^d)$ において絶対総和可能であり，その総和は $\overline{\mathscr{F}}f$ となるのであった．積分は $C(\mathbb{T}^d)$ 上の連続線型形式を定めるから，総和と積分の順序を交換でき，

$$\int_{\mathbb{T}^d} \overline{\mathscr{F}}a(m)e^{2\pi int}\,dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} a(m)e^{2\pi imt}e^{2\pi int}\,dt = a(n)$$

を得る．　□

$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ に対して，もし $\mathscr{F}f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ ならば，$\mathscr{F}f$ の共役 Fourier 変換が考えられる．

定理 3.2（$\mathbb{T}^d$ 上の逆変換公式）　$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ が $\mathscr{F}f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ を満たすならば，$L^1(\mathbb{T}^d)$ の元としての等式

$$\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f = f$$

が成り立つ．すなわち，（f の代表元を 1 つとりそれも f と書くと，）

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int} \qquad (\text{a.e. } t \in \mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

証明　$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ が $\mathscr{F}f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ を満たすならば，定理 3.1 より $\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f = \mathscr{F}f$ であり，これと Fourier 変換の単射性（系 2.9）より $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f = f$ を得る．　□

系 3.3　$f \in C(\mathbb{T}^d)$ が $\mathscr{F}f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ を満たすならば，連続関数の族 $\{t \mapsto \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C(\mathbb{T}^d)$ において絶対総和可能であり，その総和は f に等しい．

証明　$f \in C(\mathbb{T}^d)$ が $\mathscr{F}f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ を満たすとする．すると，連続関数の族 $\{t \mapsto \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C(\mathbb{T}^d)$ において絶対総和可能であり，その総和は $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f$ に等しい．また，$\mathbb{T}^d$ 上の逆変換公式（定理 3.2）より，$\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f$ と f は $\mathbb{T}^d$ 上ほとんどいたるところで等しいが，いま $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f$ と f はともに連続関数なので，これらは関数として等しい．よって，$\{t \mapsto \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ の $C(\mathbb{T}^d)$ における総和は $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f = f$ である．　□

4　L^2 上の Fourier 級数論

$\mathbb{T}^d$ はコンパクトだから，$L^2(\mathbb{T}^d) \subseteq L^1(\mathbb{T}^d)$ であることに注意する．$L^2(\mathbb{T}^d)$ 上の Fourier 級数論には Hilbert 空間の理論が適用でき，次のように簡明な結果が得られる．

定理 4.1　$L^2(\mathbb{T}^d)$ において，$\{t \mapsto e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は正規直交基底をなす．

証明　正規直交性は，計算によりただちに確かめられる．完全性は，系 2.10 で示した．　□

系 4.2（Planchrel の定理）　(1) $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F}f \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ である．したがって，線型写像 $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{T}^d) \to l^2(\mathbb{Z}^d)$（これも Fourier 変換という）が定まるが，これは Hilbert 空間の同型である．

(2) 共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}}\colon l^1(\mathbb{Z}^d) \to C(\mathbb{T}^d)$ は，$l^2(\mathbb{Z}^d)$ から $L^2(\mathbb{Z}^d)$ への連続線型写像に一意に延長される（これも共役 Fourier 変換という）．この延長は，Fourier 変換 $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{T}^d) \to l^2(\mathbb{Z}^d)$ の逆を与える Hilbert 空間の同型である．

証明　(1)　$\mathscr{F}f(n)$ は f と $t \mapsto e^{2\pi int}$ との L^2 内積に等しいから，Hilbert 空間の一般論（事実 B.2）と定理 4.1 から従う．

(2)　$\mathbb{Z}^d$ 上の逆変換公式（定理 3.1）で見たように，任意の $a \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ に対して $\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}a = a$ だから，Fourier 変換の逆 $\mathscr{F}^{-1}\colon l^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2(\mathbb{Z}^d)$ は共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}}\colon l^1(\mathbb{Z}^d) \to C(\mathbb{T}^d)$ の延長である．$\overline{\mathscr{F}}$ の延長たる連続線型写像の一意性は，$l^1(\mathbb{Z}^d)$ が $l^2(\mathbb{Z}^d)$ において稠密であることから従う．　□

系 4.3　$f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ に対して，連続関数の族 $\{t \mapsto \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は $L^2(\mathbb{T}^d)$ において総和可能であり，その総和は f に等しい．

証明　Hilbert 空間の一般論（事実 B.2）と定理 4.1 から従う．　□

系 4.4（Parseval の等式）　$f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ に対して

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \|\mathscr{F}f\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)},$$

すなわち

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\mathscr{F}f(n)|^2$$

が成り立つ．

証明　Hilbert 空間の一般論（事実 B.2）と定理 4.1 から従う． $\square$

5　Fourier 級数のさまざまな収束問題

5.1　逆変換公式の利用

逆変換公式（定理 3.2）は，$f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ であって $\mathscr{F}f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ を満たすものに対して適用できるのだった．本小節では，これが成り立つための 1 つの十分条件を与える．

準備として，Hölder 連続関数と Hölder 空間を定義する．

定義 5.1（Hölder 連続関数）　$0 < \gamma \leq 1$ とする．

(1) 関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ が **γ-Hölder 連続**であるとは，ある定数 $C \geq 0$ が存在し，任意の 2 点 $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\gamma$$
が成り立つことをいう．1-Hölder 連続性を特に **Lipschitz 連続性**という．

(2) 関数 $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ が **γ-Hölder 連続**であるとは，f を $\mathbb{R}^d$ 上の周期関数とみなしたものが γ-Hölder 連続であることをいう．**Lipschitz 連続性**も同様に定める．

明らかに，γ-Hölder 連続関数は一様連続である．また，1 階微分可能関数であって，そのすべての 1 階偏導関数が有界なものは，Lipschitz 連続である．特に，$C^1(\mathbb{T}^d)$ の元はすべて Lipschitz 連続である．

$0 < \gamma \leq \gamma' \leq 1$ のとき，有界な γ'-Hölder 連続関数は γ-Hölder 連続である．実際，関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ が $|f(x)| \leq M$（$x \in \mathbb{R}^d$）かつ $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\gamma'}$（$x, y \in \mathbb{R}^d$）を満たすとすると，$|x-y| \leq 1$ なる x, $y \in \mathbb{R}^d$ に対しては
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\gamma'} \leq C|x-y|^\gamma,$$
$|x-y| \leq 1$ なる $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対しては
$$|f(x) - f(y)| \leq 2M \leq 2M|x-y|^\gamma$$
となるから，f は γ-Hölder 連続である．したがって特に，$0 < \gamma \leq \gamma' \leq 1$ のとき，$\mathbb{T}^d$ 上の γ'-Hölder 連続関数は γ-Hölder 連続である．

定義 5.2（Hölder 空間）　$k \in \mathbb{N}$ と $0 < \gamma \leq 1$ に対して，**Hölder 空間** $C^{k,\gamma}(\mathbb{T}^d)$ を
$$C^{k,\gamma}(\mathbb{T}^d) = \{f \in C^k(\mathbb{T}^d) \mid \text{任意の } \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| = k \text{ に対して } \partial^\alpha f \text{ は } \gamma\text{-Hölder 連続}\}$$
と定める．

前述の注意より，$k \in \mathbb{N}$ と $0 < \gamma \leq \gamma' \leq 1$ に対して
$$C^{k+1}(\mathbb{T}^d) \subseteq C^{k,1}(\mathbb{T}^d) \subseteq C^{k,\gamma'}(\mathbb{T}^d) \subseteq C^{k,\gamma}(\mathbb{T}^d) \subseteq C^k(\mathbb{T}^d)$$
が成り立つ．

以上の準備のもとで，定理を述べる．

定理 5.3　$d/2 - \lfloor d/2 \rfloor < \gamma \le 1$ とする．任意の $f \in C^{\lfloor d/2 \rfloor, \gamma}(\mathbb{T}^d)$ に対して，$\mathscr{F} f \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ である．

証明　$f \in C^{\lfloor d/2 \rfloor, \gamma}(\mathbb{T}^d)$ を任意にとる．任意の $\alpha \in \mathbb{N}^d$，$|\alpha| = \lfloor d/2 \rfloor$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\gamma \qquad (x,\, y \in \mathbb{R}^d) \tag{$*$}$$

を満たす定数 $C \ge 0$ をとっておく．

$l \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_l = \{n \in \mathbb{Z}^d \mid 2^l \le |n|_\infty < 2^{l+1}\}$$

と置くと，Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\mathscr{F} f(n)| &= |\mathscr{F} f(0)| + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n \in A_l} |\mathscr{F} f(n)| \\ &\le |\mathscr{F} f(0)| + \sum_{l=0}^{\infty} \#A_l \sum_{n \in A_l} |\mathscr{F} f(n)|^2 \\ &\le |\mathscr{F} f(0)| + 4\sum_{l=0}^{\infty} 2^{ld} \sum_{n \in A_l} |\mathscr{F} f(n)|^2\end{aligned}$$

である．そこで，

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{ld} \sum_{n \in A_l} |\mathscr{F} f(n)|^2 < \infty \tag{$**$}$$

を示せばよい．

$l \in \mathbb{N}$ を固定し，$\sum_{n \in A_l} |\mathscr{F} f(n)|^2$ を評価する．$i \in \{0, \ldots, d-1\}$ に対して

$$A_{l,i} = \{n = (n_0, \ldots, n_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d \mid 2^l \le |n_i| < 2^{l+1}\}$$

と置くと，$A_l \subseteq \bigcup_{i=0}^{d-1} A_{l,i}$ だから，

$$\sum_{n \in A_l} |\mathscr{F} f(n)|^2 \le \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{n \in A_{l,i}} |\mathscr{F} f(n)|^2 \tag{$***$}$$

である．

l に加えて $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ を固定し，$\sum_{n \in A_{l,i}} |\mathscr{F} f(n)|^2$ を評価する．まず，$f \in C^{\lfloor d/2 \rfloor}(\mathbb{T}^d)$ と命題 1.4，および $n \in A_{l,i}$ に対して $|n_i| < 2^{l+1}$ であることより，

$$\begin{aligned}\sum_{n \in A_{l,i}} |\mathscr{F} f(n)|^2 &= \sum_{n \in A_{l,i}} \left| \frac{\mathscr{F}(\partial_i^{\lfloor d/2 \rfloor} f)(n)}{(2\pi i n_i)^{\lfloor d/2 \rfloor}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi \cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2 \rfloor}} \sum_{n \in A_{l,i}} |\mathscr{F}(\partial_i^{\lfloor d/2 \rfloor} f)(n)|^2\end{aligned} \tag{$****$}$$

が成り立つ．次に，$|e^{ix} - 1| = 2|\sin x/2| \ge (2/\pi)|x|$（$|x| \le \pi$）に注意すると，任意の $n \in A_{l,i}$ に対して，$2^l \le |n_i| < 2^{l+1}$ であることより，

$$\begin{aligned}|e^{2\pi i n \cdot 2^{-l-2} e_i} - 1| &= |e^{2\pi i n_i \cdot 2^{-l-2}} - 1| \\ &\ge \frac{2}{\pi} \cdot 2\pi |n_i| \cdot 2^{-l-2} \\ &\ge 1\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる（ここで，i-方向の単位ベクトルを e_i と書いた）．したがって，命題 1.3 (1) より

$$
\begin{aligned}
(****) &\le \frac{1}{(2\pi\cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2\rfloor}}\sum_{n\in A_{l,i}}|e^{2\pi in\cdot 2^{-l-2}e_i}-1|^2|\mathscr{F}(\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f)(n)|^2\\
&= \frac{1}{(2\pi\cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2\rfloor}}\sum_{n\in A_{l,i}}|(e^{2\pi in\cdot 2^{-l-2}e_i}-1)\mathscr{F}(\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f)(n)|^2\\
&= \frac{1}{(2\pi\cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2\rfloor}}\sum_{n\in A_{l,i}}|\mathscr{F}(\tau_{-2^{-l-2}e_i}\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f-\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f)(n)|^2\\
&\le \frac{1}{(2\pi\cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2\rfloor}}\|\mathscr{F}(\tau_{-2^{-l-2}e_i}\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f-\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f)\|_{l^2(\mathbb{Z}^d)}\\
&= \frac{1}{(2\pi\cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2\rfloor}}\|\tau_{-2^{-l-2}e_i}\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f-\partial_i^{\lfloor d/2\rfloor}f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \qquad (*****)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，最後の式変形では，Planchrel の定理（系 4.2）を用いた．最後に，$(*)$ に注意すると，

$$(*****) \le \frac{1}{(2\pi\cdot 2^{l+1})^{2\lfloor d/2\rfloor}}\cdot(C(2^{-l-2})^{\gamma})^2 = C'\cdot 2^{-2l(\lfloor d/2\rfloor+\gamma)} \qquad (******)$$

と評価できる．ここで，$C'\ge 0$ は l に依存しない定数である．以上 $(****)$, $(*****)$, $(******)$ より，

$$\sum_{n\in A_{l,i}}|\mathscr{F}f(n)|^2 \le C'\cdot 2^{-2l(\lfloor d/2\rfloor+\gamma)} \qquad (*******)$$

が成り立つ．

$(***)$ と $(*******)$ より，$(**)$ の左辺は

$$\sum_{l=0}^{\infty}2^{ld}\sum_{n\in A_l}|\mathscr{F}f(n)|^2 \le C'd\sum_{l=0}^{\infty}2^{2l(d/2-\lfloor d/2\rfloor-\gamma)}$$

と評価できる．仮定より $d/2-\lfloor d/2\rfloor-\gamma<0$ だから，上式右辺は有限値に収束する．これで，$(**)$ が示された． □

系 5.4 $d/2-\lfloor d/2\rfloor<\gamma\le 1$ とする．任意の $f\in C^{\lfloor d/2\rfloor,\gamma}(\mathbb{T}^d)$ に対して，連続関数の族 $\{t\mapsto \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C(\mathbb{T}^d)$ において絶対総和可能であり，その総和は f に等しい．

証明 定理 5.3 と系 3.3 の結果である． □

系 5.5 任意の Lipschitz 連続関数 $f\colon\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ に対して，連続関数の族 $\{t\mapsto \mathscr{F}f(n)e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C(\mathbb{T})$ において絶対総和可能であり，その総和は f に等しい．

証明 系 5.4 で $d=1$，$\gamma=1$ とした場合である． □

5.2 Fourier 級数の各点収束（一般次元の場合）

定理 5.6（Dini–Tonelli 条件） $f\in L^1(\mathbb{T}^d)$，$a\in\mathbb{T}^d$，$A\in\mathbb{C}$ とする．（f の代表元を 1 つとりそれも f と書くとき,）$\mathbb{R}^d$ 上ほとんどいたるところで定義された関数

$$t=(t_0,\dots,t_{d-1})\mapsto\frac{f(a+t)-A}{t_0\cdots d_{d-1}}$$

が $[-1/2,1/2]^d$ 上で可積分ならば，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|_\infty\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}=A$$

が成り立つ．

証明　命題 2.3 より，与えられた仮定のもとで

$$\lim_{N\to\infty}(D_N*f)(a)=A \tag{$*$}$$

を示せばよい．

$\int_{\mathbb{T}^d}D_N(t)\,dt=1$ であることと命題 2.4 より，

$$\begin{aligned}
&(D_N*f)(a)-A\\
&=\int_{\mathbb{T}^d}D_N(t)(f(a-t)-A)\,dt\\
&=\int_{\mathbb{T}^d}(f(a-t)-A)\prod_{i=0}^{d-1}\frac{\sin((2N+1)\pi t_i)}{\sin(\pi t_i)}\,dt\\
&=\int_{\mathbb{T}^d}(f(a-t)-A)\prod_{i=0}^{d-1}\left(\frac{\sin(2N\pi t_i)\cos(\pi t_i)}{\sin(\pi t_i)}+\cos(2N\pi t_i)\right)dt\\
&=\sum_{I\subseteq\{0,\dots,d-1\}}\int_{\mathbb{T}^d}\left((f(a-t)-A)\prod_{i\in I}\frac{\cos(\pi t_i)}{\sin(\pi t_i)}\right)\prod_{i\in I}\sin(2N\pi t_i)\prod_{j\in\{0,\dots,d-1\}\setminus I}\cos(2N\pi t_j)\,dt
\end{aligned} \tag{$**$}$$

と計算できる（積分変数を $t=(t_0,\dots,t_{d-1})$ と表した）．$I\subseteq\{0,\dots,d-1\}$ に対して，$\mathbb{T}^d$ 上ほとんどいたるところで定義された関数 g_I を

$$g_I(t)=(f(a-t)-A)\prod_{i\in I}\frac{\cos(\pi t_i)}{\sin(\pi t_i)}\qquad(t=(t_0,\dots,t_{d-1}))$$

と定める．$|x|\le 1/2$ に対して $|\sin(\pi x)|\ge 2|x|$ であることと仮定より，g_I は $\mathbb{T}^d$ 上で可積分である．よって g_I の Fourier 変換が定義でき，($**$) より $(D_N*f)(a)-A$ は g_I（$I\subseteq\{0,\dots,d-1\}$）の Fourier 変換の $(\pm N,\dots,\pm N)\in\mathbb{Z}^d$ における値たちの，係数が N に依存しない線型結合で表せる．Riemann–Lebesgue の定理（定理 2.11）より，これは $N\to\infty$ のとき 0 に収束する．これで，($*$) が示された．□

系 5.7　$f\in L^1(\mathbb{T}^d)$，$a\in\mathbb{T}^d$，$A\in\mathbb{C}$ とする．（f の代表元を 1 つとりそれも f と書くとき，）ある定数 $C\ge 0$ と δ_0, …, $\delta_{d-1}>0$ が存在して，ほとんどすべての $t=(t_0,\dots,t_{d-1})\in[-1/2,1/2]^d$ に対して

$$|f(a+t)-A|\le C|t_0|^{\delta_0}\cdots|t_{d-1}|^{\delta_{d-1}}$$

であるならば，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|_\infty\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}=A$$

が成り立つ．

証明　このとき，Tonelli の定理より

$$\begin{aligned}\int_{[-1/2,1/2]^d}\left|\frac{f(a+t)-A}{t_0\cdots t_{d-1}}\right|dt &\le C\int_{[-1/2,1/2]^d}|t_0|^{\delta_0-1}\cdots|t_{d-1}|^{\delta_{d-1}-1}\,dt\\ &= C\left(\int_{-1/2}^{1/2}|t_0|^{\delta_0-1}\,dt_0\right)\cdots\left(\int_{-1/2}^{1/2}|t_{d-1}|^{\delta_{d-1}-1}\,dt_{d-1}\right)\\ &= C\cdot\frac{2}{\delta_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta_0}\cdots\frac{2}{\delta_{d-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta_{d-1}}\\ &< \infty\end{aligned}$$

だから（積分変数を $t=(t_0,\ldots,t_{d-1})$ と表した），Dini–Tonelli 条件（定理 5.6）が満たされる．□

5.3 Fourier 級数の各点収束（1 次元の場合）

定理 5.8　$f\in L^1(\mathbb{T})$，$a\in\mathbb{T}$，$A\in\mathbb{C}$ とする．（f の代表元を 1 つとりそれも f と書くとき,）$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上で定義された関数

$$t\mapsto\frac{f(a+t)-A}{t}$$

が 0 のある近傍上で可積分ならば,

$$\lim_{M,N\to\infty}\sum_{-M\le n\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}=A$$

が成り立つ．[*2]

証明（Chernoff [1]）　$g(t)=(f(a+t)-A)/(e^{2\pi it}-1)$ と置くと，与えられた仮定の下で g は $\mathbb{T}$ 上可積分だから，g の Fourier 変換が定義できる．$f(a+t)-A=(e^{2\pi it}-1)g(t)$ だから，命題 1.3 より

$$\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}-A\delta(n)=\mathscr{F}g(n-1)-\mathscr{F}g(n)\qquad(n\in\mathbb{Z})$$

である．ここで，$\delta(n)$ は $n=0$ のとき 1，それ以外のとき 0 を値にとる関数とする．上式を $-M$ から N まで総和すると,

$$\sum_{-M\le n\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}-A=\mathscr{F}g(-M-1)-\mathscr{F}g(N)$$

となる．Riemann–Lebesgue の定理（定理 2.11）より，上式右辺は $M,N\to\infty$ のとき 0 に収束する．これで示された．□

系 5.9　$f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$，$a\in\mathbb{T}$ とする．f が a において左微分可能かつ右微分可能ならば,

$$\lim_{M,N\to\infty}\sum_{-M\le n\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}=f(a)$$

が成り立つ．

[*2] より弱い結論 $\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}=A$ は，定理 5.6 からも従う．

証明　f が a において左微分可能かつ右微分可能とし，左・右微分係数をそれぞれ $f'_-(a)$, $f'_+(a)$ と書く．十分 0 に近い任意の $t \neq 0$ に対して

$$\left| \frac{f(a-t) - f(a)}{t} \right| \leq \max\{|f'_-(a)|, |f'_+(a)|\} + 1$$

が成り立つから，定理 5.8 が適用できる． □

系 5.10（Riemann の局所化原理）　$f \in L^1(\mathbb{T})$，$a \in \mathbb{T}$ とする．f（の 1 つの代表元）が a のある近傍上でほとんどいたるところ 0 ならば，

$$\lim_{M,N\to\infty} \sum_{-M\leq n\leq N} \mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina} = 0$$

が成り立つ．

証明　このとき，明らかに定理 5.8 の仮定は満たされる． □

定理 5.11　$f \in L^1(\mathbb{T})$，$a \in \mathbb{T}$，$A \in \mathbb{C}$ とする．（f の代表元を 1 つとりそれも f と書くとき，）$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上で定義された関数

$$t \mapsto \frac{(f(a-t) + f(a+t))/2 - A}{t}$$

が 0 のある近傍上で可積分ならば，

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina} = A$$

が成り立つ．

証明　$g(t) = (f(a-t) + f(a+t))/2$ と置くと，与えられた仮定の下で関数 $t \mapsto (g(t) - A)/t$ は 0 のある近傍上で可積分だから，定理 5.8 より

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \mathscr{F}g(n) = A \tag{$*$}$$

が成り立つ．ここで，命題 1.2 (2), (3) と命題 1.3 (1) より

$$\begin{aligned}
\sum_{|n|\leq N} \mathscr{F}g(n) &= \sum_{|n|\leq N} \frac{e^{-2\pi ina}\mathscr{F}f(-n) + e^{2\pi ina}\mathscr{F}f(n)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{|n|\leq N} e^{-2\pi ina}\mathscr{F}f(-n) + \sum_{|n|\leq N} e^{2\pi ina}\mathscr{F}f(n) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{|n|\leq N} e^{2\pi ina}\mathscr{F}f(n) + \sum_{|n|\leq N} e^{2\pi ina}\mathscr{F}f(n) \right) \\
&= \sum_{|n|\leq N} e^{2\pi ina}\mathscr{F}f(n)
\end{aligned}$$

と計算できるから，($*$) に代入して

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina} = A$$

を得る． □

関数 $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ の点 $a\in\mathbb{T}$ における左・右極限値を,（存在すれば）それぞれ $f(a-)$, $f(a+)$ と書く.

系 5.12　$f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$，$a\in\mathbb{T}$ とする．f が a において有限な左極限 $f(a-)$ と右極限 $f(a+)$ をもち，かつ有限な極限値

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(a-t)-f(a-)}{t},\qquad \lim_{t\to 0+}\frac{f(a+t)-f(a+)}{t}$$

が存在するならば,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\le N}\mathscr{F}f(n)e^{2\pi ina}=\frac{f(a-)+f(a+)}{2}$$

が成り立つ.

証明　f が仮定を満たすとし，$L=\lim_{t\to 0+}(f(a-t)-f(a-))/t$，$R=\lim_{t\to 0+}(f(a+t)-f(a+))/t$ と置く．十分 0 に近い任意の $t\neq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{(f(a-t)+f(a+t))/2-(f(a-)+f(a+))/2}{t}\right| &\le \frac{1}{2}\left(\left|\frac{f(a-t)-f(a-)}{t}\right|+\left|\frac{f(a-t)-f(a-)}{t}\right|\right)\\ &\le \frac{1}{2}(|L|+|R|)+1\end{aligned}$$

が成り立つから，定理 5.11 が適用できる.　□

6　Poisson の和公式

本節では，次に定義する $\mathbb{R}^d$ 上の Fourier 変換と区別するため，$\mathbb{T}^d$ 上の Fourier 変換を $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^d}$ と書く.

定義 6.1（$\mathbb{R}^d$ 上の Fourier 変換）　$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，その Fourier 変換 $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^d}f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ を,

$$\mathscr{F}_{\mathbb{R}^d}f(\xi)=\int_{\mathbb{T}^d}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx\qquad(\xi\in\mathbb{R}^d)$$

と定める．写像 $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^d}\colon L^1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}^{\mathbb{R}^d}$ を,（$\mathbb{R}^d$ 上の）Fourier 変換という.

$\mathbb{T}^d$ 上の Fourier 変換と $\mathbb{R}^d$ 上の Fourier 変換との間には，次の関係がある.

定理 6.2　$f\in C(\mathbb{R}^d)$ が条件

> $[0,1]^d$ 上の連続関数の族 $\{x\mapsto f(x+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C([0,1]^d)$ において絶対総和可能である

を満たすとする．このとき，次が成り立つ.

(1) 関数 $F\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{C};\ x\mapsto\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)$ は，周期 $\mathbb{Z}^d$ をもつ連続関数である.
(2) $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ である.
(3) (1) の関数 F を $C(\mathbb{T}^d)$ の元とみなすと,

$$\mathscr{F}_{\mathbb{T}^d}F=(\mathscr{F}_{\mathbb{R}^d}f)|_{\mathbb{Z}^d}$$

が成り立つ.

証明 (1) 仮定と和の対称性より，F は周期 $\mathbb{Z}^d$ をもち，任意の $n \in \mathbb{Z}^d$ に対して F は $[0,1]^d + n$ 上で連続である．$\{[0,1]^d + n\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ は $\mathbb{R}^d$ の局所有限閉被覆だから，これより F は $\mathbb{R}^d$ 上で連続である．

(2) 仮定より，$[0,1]^d$ 上の連続関数の族 $\{x \mapsto |f(x+n)|\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ も $C([0,1]^d)$ において絶対総和可能である．そこで，(1) を $|f|$ に適用することで，関数 $G\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C};\ x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|$ が周期 $\mathbb{Z}^d$ をもち連続であることがわかる．$G \in C(\mathbb{T}^d)$ とみなすと，

$$\int_{\mathbb{T}^d} G(t)\,dt < \infty$$

である．また，$[0,1]^d$ 上の連続関数の族 $\{x \mapsto |f(x+n)|\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ が $C([0,1]^d)$ において絶対総和可能であることと単調収束定理より，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} G(t)\,dt &= \int_{[0,1]^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |f(x+n)|\,dx \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} |f(x+n)|\,dx \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d + n} |f(x)|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．これら 2 式より，$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ である．

(3) $[0,1]^d$ 上の連続関数の族 $\{x \mapsto f(x+n)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ が $C([0,1]^d)$ において絶対総和可能であることと Lebesgue の収束定理より，$m \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mathbb{T}^d} F(m) &= \int_{\mathbb{T}^d} F(t) e^{-2\pi i m t}\,dt \\
&= \int_{[0,1]^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x+n) e^{-2\pi i m x}\,dx \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} f(x+n) e^{-2\pi i m x}\,dx \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d + n} f(x) e^{-2\pi i m x}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i m x}\,dx \\
&= \mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f(m)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\mathscr{F}_{\mathbb{T}^d} F = (\mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f)|_{\mathbb{Z}^d}$ である． □

定理 6.2 の仮定は，たとえば，定数 $C \geq 0$ と $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-d-\delta}$ が成り立つときに満たされる．

系 6.3（Poisson の和公式） $f \in C(\mathbb{R}^d)$ が条件

> $[0,1]^d$ 上の連続関数の族 $\{x \mapsto f(x+n)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ は一様ノルムを備えた Banach 空間 $C([0,1]^d)$ において絶対総和可能である

を満たし，（定理 6.2 (2) よりこのとき $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ だが，）さらに $(\mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f)|_{\mathbb{Z}^d} \in l^1(\mathbb{Z}^d)$ であるとする．このとき，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x+n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f(m) e^{2\pi i m x}$$

が成り立つ．特に，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f(m)$$

が成り立つ．

証明　関数 $F \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ を $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$（$x \in \mathbb{R}^d$）と定める．定理 6.2 (1) より，$F \in C(\mathbb{T}^d)$ の元とみなせる．系 3.3 と定理 6.2 (3) より，$x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\mathbb{T}^d} F(m) e^{2\pi i m x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f(m) e^{2\pi i m x}$$

が成り立つ．よって，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x+n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f(m) e^{2\pi i m x}$$

である．$x = 0$ とすれば，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\mathbb{R}^d} f(m)$$

を得る．□

付録 A　局所コンパクト Hausdorff 群上の積分論

本節の内容の詳細については，たとえば Cohn [2, ch. 7, 9] や Grafakos [3, sec. 1.2] を参照のこと．

A.1　正則測度

定義 A.1（正則測度）　X を Hausdorff 空間，μ を X 上の Borel 測度とする．

(1) μ が**外正則**であるとは，任意の Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ は } A \text{ を含む } X \text{ の開集合}\}$$

であることをいう．

(2) μ が**内正則**であるとは，任意の開集合 $U \subseteq X$ に対して

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ は } U \text{ に含まれる } X \text{ のコンパクト集合}\}$$

であることをいう．

(3) μ が**コンパクト有限**であるとは，任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対して $\mu(K) < \infty$ であることをいう．

(4) μ が**正則**であるとは，外正則，内正則かつコンパクト有限であることをいう．

命題 A.2　X を局所コンパクト Hausdorff 空間，μ を X 上の正則 Borel 測度とし，$1 \leq p < \infty$ とする．$L^p(X, \mu)$ において，コンパクト台をもつ連続関数全体のなす部分線型空間 $C_0(X)$ は稠密である．

証明　単関数近似を考えれば，測度有限の Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して，A の特性関数 χ_A が $L^p(X, \mu)$ において $C_0(X)$ の元でいくらでもよく近似できることを示せばよい．$A \subseteq X$ を測度有限の Borel 集合とし，$\epsilon > 0$ を任意にとる．μ の外正則性より，A を含む開集合 U であって $\mu(U) \leq \mu(A) + \epsilon$ を満たすものがとれる．さらに，μ の内正則性より，U に含まれるコンパクト集合 K であって $\mu(K) \geq \mu(U) - \epsilon$ を満たすものがとれる．ここで，X の局所コンパクト Hausdorff 性（およびそれから従う完全正則性）より，コンパクト台をもつ連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ であって $f(K) \subseteq \{1\}$，$f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$ を満たすものがとれる．$K \cap A$ 上では $f = 1 = \chi_A$ であり，$X \setminus U$ 上では $f = 0 = \chi_A$ だから，

$$
\begin{aligned}
\|f - \chi_A\|_{L^p(X,\mu)} &\leq \mu(U \setminus K) + \mu(K \setminus A) \\
&\leq \mu(U \setminus K) + \mu(U \setminus A) \\
&\leq 2\epsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これで，χ_A が $L^p(X, \mu)$ において $C_0(X)$ の元でいくらでもよく近似できることが示された．　□

A.2　Haar 測度

以下，特に断らなくても，群の単位元を e と書く．

定義 A.3（Haar 測度）　G を局所コンパクト Hausdorff 群，μ を G 上の Borel 測度とする．任意の $x \in G$ と Borel 集合 $A \subseteq G$ に対して

$$\mu(xA) = \mu(A)$$

であるとき，μ は**左不変**であるという．G 上の 0 でない左不変な正則 Borel 測度を，G 上の**左 Haar 測度**，あるいは単に **Haar 測度**という．

事実 A.4（Haar 測度の存在と一意性）　局所コンパクト Hausdorff 群 G に対して，G 上の Haar 測度が，正の定数倍を除いて一意に存在する．

証明については，Cohn [2, sec. 9.2] を参照のこと．

系 A.5　コンパクト Hausdorff 群 G に対して，G 上の Haar 測度であって全測度が 1 であるものが一意に存在する．　□

命題 A.6（平行移動の連続性）　G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の Haar 測度を 1 つ固定する．$1 \leq p < \infty$ とする．任意の $f \in L^p(G)$ に対して，

$$\lim_{y \to e} \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)} = 0$$

である．

証明　$f \in L^p(G)$ とし，$\epsilon > 0$ を任意にとる．命題 A.2 より，$\|g - f\|_{L^p(G)} \leq \epsilon$ なる $g \in C_0(G)$ がとれる．g は左一様連続だから，$y \to e$ のとき，$\tau_y g$ は g に一様収束する．また，$e \in G$ のコンパクト近傍 U を 1 つ固定すると，$y \in U$ に対する $\tau_y g$ の台はある一定のコンパクト集合に含まれる．よって，$\lim_{y \to e} \|\tau_y g - g\|_{L^p(G)} = 0$

だから，e に十分近い任意の $y \in G$ に対して $\|\tau_y g - g\|_{L^p(G)} \leq \epsilon$ となる．この y に対して，

$$\|\tau_y f - f\|_{L^p(G)} \leq \|\tau_y f - \tau_y g\|_{L^p(G)} + \|\tau_y g - g\|_{L^p(G)} + \|g - f\|_{L^p(G)} \leq 3\epsilon$$

が成り立つ．よって，

$$\lim_{y \to e} \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)} = 0$$

である． □

A.3 畳み込み

命題 A.7 (X, μ) を測度空間とする．$1 \leq p < \infty$ と可測関数 $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\left(\int_X |fg|\,d\mu\right)^p \leq \left(\int_X |f||g|^p\,d\mu\right)\left(\int_X |f|\,d\mu\right)^{p-1}$$

が成り立つ．

証明 p の共役指数を q と置き，$|fg| = |f|^{1/p}|g| \cdot |f|^{1/q}$ と考えて Hölder の不等式を適用すると，

$$\int_X |fg|\,d\mu \leq \left(\int_X |f||g|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |f|\,d\mu\right)^{1/q},$$

したがって

$$\left(\int_X |fg|\,d\mu\right)^p \leq \left(\int_X |f||g|^p\,d\mu\right)\left(\int_X |f|\,d\mu\right)^{p-1}$$

を得る． □

定理 A.8 G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の Haar 測度を 1 つ固定する．$1 \leq p \leq \infty$ とし，$f \in L^1(G)$，$g \in L^p(G)$ とする．

(1) ほとんどすべての $x \in G$ に対して，関数 $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ は G 上可積分である．また，このような $x \in G$ の全体のなす集合は Borel 可測である．

(2) 関数 $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ が G 上可積分であるような $x \in G$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy$$

と定めると，これは $L^p(G)$ の元を定める．すなわち，$L^p(G)$ の元であって，その代表元が G 上ほとんどいたるところ上式で定まる $f * g$ と一致するようなものが存在する．

(3) (2) によって定まる $L^p(G)$ の元を，そのまま $f * g$ と書く．すると，

$$\|f * g\|_{L^p(G)} \leq \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^p(G)}$$

が成り立つ．

ここでは，G 上の Haar 測度が σ-有限である場合に限って証明を与える．G が一般の局所コンパクト Hausdorff 群で $p = 1$ である場合の証明が，Cohn [2, sec. 9.4] にある．その証明と以下に述べる σ-有限である場合の証明を参考にすれば，定理 A.8 の完全な証明を与えることは難しくない．

部分的証明　G 上の Haar 測度が σ-有限であるとする．このとき，G 上の Haar 測度に関する Tonelli の定理や Fubini の定理が使えることに注意する．

$p=\infty$ の場合，任意の $x \in G$ に対して

$$\int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\,dy \leq \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^\infty(G)}$$

だから，$f*g$ は G 上いたるところで定義され，$L^\infty(G)$ の元を定め，

$$\|f*g\|_{L^\infty(G)} \leq \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^\infty(G)}$$

を満たす．

次に，$1 \leq p < \infty$ とする．Tonelli の定理より関数 $x \mapsto \int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\,dy$ は Borel 可測だから，$y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ が G 上可積分であるような $x \in G$ の全体のなす集合は Borel 可測である．また，命題 A.7 より，$x \in G$ に対して

$$\left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\,dy\right)^p \leq \left(\int_G |f(y)||g(y^{-1}x)|^p\,dy\right)\left(\int_G |f(y)|\,dy\right)^{p-1}$$

が成り立つ．Tonelli の定理より，上式の両辺は $x \in G$ の関数として Borel 可測だから，x に関して積分することができる．さらに Tonelli の定理を用いることで，

$$\begin{aligned}
\int_G \left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\,dy\right)^p dx &\leq \left(\int_G\int_G |f(y)||g(y^{-1}x)|^p\,dy\,dx\right)\left(\int_G |f(y)|\,dy\right)^{p-1} \\
&= \left(\int_G |f(y)|\int_G |g(y^{-1}x)|^p\,dx\,dy\right)\left(\int_G |f(y)|\,dy\right)^{p-1} \\
&= \left(\int_G |f(y)|\,dy\int_G |g(x)|^p\,dx\right)\left(\int_G |f(y)|\,dy\right)^{p-1} \\
&= \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^p(G)}^p \cdot \|f\|_{L^1(G)}^{p-1} \\
&= (\|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^p(G)})^p \\
&< \infty
\end{aligned}$$

を得る．上式より，ほとんどすべての $x \in G$ に対して $(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\,dy)^p < \infty$，すなわち関数 $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ は G 上可積分である．さらに，上式より，$f*g$ は $L^p(G)$ の元を定め，

$$\|f*g\|_{L^p(G)} \leq \|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^p(G)}$$

を満たす．　□

定義 A.9（畳み込み）　G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の Haar 測度を 1 つ固定する．$1 \leq p \leq \infty$ とし，$f \in L^1(G)$，$g \in L^p(G)$ とする．

(1) 関数 $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ が G 上可積分であるような $x \in G$ に対して，$(f*g)(x)$ を定理 A.8 (2) のとおり定める．
(2) 定理 A.8 (2) によって定まる $L^p(G)$ の元を，f と g の**畳み込み**といい，$f*g$ と書く．

命題 A.10　G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の Haar 測度を 1 つ固定する．$1 \leq p \leq \infty$ とする．

(1) 写像 $L^1(G) \times L^p(G) \to L^p(G);\ (f,g) \mapsto f*g$ は双線型である．

(2) G が可換であるとし，$f,\, g \in L^1(G)$ とする．このとき，$x \in G$ に対して関数 $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ が G 上可積分であることと $y \mapsto g(y)f(y^{-1}x)$ が G 上可積分であることとは同値であり，これを満たす x に対して $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ が成り立つ．したがって特に，$L^1(G)$ の元として $f * g = g * f$ が成り立つ．

(3) 任意の $f,\, g,\, h \in L^1(G)$ に対して，$L^1(G)$ の元として $(f * g) * h = f * (g * h)$ が成り立つ．

(3) については，上と同様に，G 上の Haar 測度が σ-有限である場合に限って証明を与える．一般の場合の証明については，Cohn [2, sec. 9.4] を参照のこと．

部分的証明　(1)　明らかである．

(2)　G が可換であるとき，$x \in G$ に対して $\Phi_x\colon G \to G;\, y \mapsto y^{-1}x$ は（固定した Haar 測度に関して）測度空間の同型である．関数 $y \mapsto f(y)g(y^{-1}x)$ と $y \mapsto g(y)f(y^{-1}x)$ とはこの同型 Φ_x によってうつり合うから，これら 2 つの関数の可積分性は同値であり，可積分である場合の積分の値は等しい．これで示された．

(3)　G 上の Haar 測度が σ-有限であるとする．このとき，G 上の Haar 測度に関する Tonelli の定理や Fubini の定理が使えることに注意する．

$f,\, g,\, h \in L^1(G)$ とする．$(f * (g * h))(x)$ が定義される $x \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(x) &= \int_G f(y)(g * h)(y^{-1}x)\, dy \\ &= \int_G \int_G f(y)g(z)h(z^{-1}y^{-1}x)\, dz\, dy\end{aligned}$$

である．一方で，$((f * g) * h)(x)$ が定義される $x \in G$ に対して

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \int_G (f * g)(z)h(z^{-1}x)\, dz \\ &= \int_G \int_G f(y)g(y^{-1}z)h(z^{-1}x)\, dy\, dz \\ &= \int_G \int_G f(y)g(y^{-1}z)h(z^{-1}x)\, dz\, dy \\ &= \int_G \int_G f(y)g(z)h(z^{-1}y^{-1}x)\, dz\, dy\end{aligned}$$

である．ここで，$f,\, g,\, h \in L^1(G)$ と Tonelli の定理より $(x, y, z) \mapsto f(y)g(y^{-1}z)h(z^{-1}x)$ が $G \times G \times G$ 上（積測度に関して）可積分であることに注意して，Fubini の定理を用いた．よって，ほとんどすべての $x \in G$ に対して $(f*(g*h))(x) = ((f*g)*h)(x)$ が成り立ち，したがって $L^1(G)$ の元として $(f*g)*h = f*(g*h)$ が成り立つ．　□

A.4　近似単位元

定義 A.11（近似単位元）　G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の Haar 測度を 1 つ固定する．$L^1(G)$ の元の族 $\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は，次の 3 条件を満たすとき，$L^1(G)$ の**近似単位元**であるという．

(AI1) $\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は $L^1(G)$ において有界である．すなわち，ある $C \geq 0$ が存在し，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $\|k_N\|_{L^1(G)} \leq C$ が成り立つ．

(AI2) 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\int_G k_N(x)\, dx = 1$ である．

(AI3) 単位元 $e \in G$ の任意の近傍 U に対して，$N \to \infty$ のとき $\int_{G \setminus U} |k_N(x)|\, dx \to 0$ となる．

定理 A.12　G を局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の Haar 測度を 1 つ固定する．$\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $L^1(G)$ の近似単位元とする．このとき，任意の $f \in L^p(G)$（$1 \leq p < \infty$）に対して，

$$\lim_{N \to \infty} \|k_N * f - f\|_{L^p(G)} = 0$$

である．

証明　$\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は近似単位元だから，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $\|k_N\|_{L^1(G)} \leq C$ であるような $C \geq 0$ がとれる．これをとっておく．

$f \in L^p(G)$ とし，$\epsilon > 0$ を任意にとる．近似単位元 $\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は $\int_G k_N(y)\, dy = 1$ を満たすから，ほとんどすべての $x \in G$ に対して

$$(k_N * f)(x) - f(x) = \int_G k_N(y)(f(y^{-1}x) - f(x))\, dy$$

が成り立つ（f の代表元を 1 つとり，これも f と書いた）．一方で，命題 A.7 より，任意の $x \in G$ に対して

$$\left(\int_G |k_N(y)(f(y^{-1}x) - f(x))|\, dy \right)^p \leq C^{p-1} \int_G |k_N(y)||f(y^{-1}x) - f(x)|^p\, dy$$

が成り立つ．以上 2 式と Tonelli の定理より，

$$\begin{aligned}
\|(k_N * f) - f\|_{L^p(G)}^p &\leq \int_G \left(\int_G |k_N(y)(f(y^{-1}x) - f(x))|\, dy \right)^p dx \\
&\leq C^{p-1} \int_G \int_G |k_N(y)||f(y^{-1}x) - f(x)|^p\, dy\, dx \\
&= C^{p-1} \int_G |k_N(y)| \int_G |f(y^{-1}x) - f(x)|^p\, dx\, dy \\
&= C^{p-1} \int_G |k_N(y)| \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)}^p\, dy
\end{aligned}$$

である．そこで，

$$\lim_{N \to \infty} \int_G |k_N(y)| \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)}^p\, dy = 0 \tag{$*$}$$

を示せばよい．

$\epsilon > 0$ を任意にとる．平行移動の連続性（命題 A.6）より，単位元 $e \in G$ の近傍 U であって，任意の $y \in U$ に対して $\|\tau_y f - f\|_{L^p(G)} \leq \epsilon$ を満たすものがとれる．評価すべき積分の積分範囲を U と $G \setminus U$ に分割して考える．まず，U のとり方より，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_U |k_N(y)| \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)}^p\, dy \leq \int_U |k_N(y)| \cdot \epsilon\, dy \leq C\epsilon$$

である．一方で，$\{k_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は近似単位元だから，十分大きい任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $\int_{G \setminus U} |k_N(y)|\, dy \leq \epsilon$ となる．このとき，

$$\int_{G \setminus U} |k_N(y)| \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)}^p\, dy \leq (2\|f\|_{L^p(G)})^p \int_{G \setminus U} |k_N(y)|\, dy \leq (2\|f\|_{L^p(G)})^p \epsilon$$

である．よって，十分大きい任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_G |k_N(y)| \|\tau_y f - f\|_{L^p(G)}^p\, dy \leq (C + (2\|f\|_{L^p(G)})^p)\epsilon$$

が成り立つ．これで，($*$) が示された．　□

付録 B　Hilbert 空間論

本節の内容の詳細については，たとえば Rudin [4, ch. 4] を参照のこと．

Hilbert 空間の内積 $\langle -|- \rangle$ は，第 1 変数に関して線型，第 2 変数に関して共役線型であるとする．

定義 B.1（正規直交基底） E を Hilbert 空間，$\{e_i\}_{i\in I}$ を E の元の族とする．

(1) $\{e_i\}_{i\in I}$ が**完全**であるとは，E において $\{e_i\}_{i\in I}$ が生成する部分線型空間が稠密であることをいう．
(2) $\{e_i\}_{i\in I}$ が**直交系**であるとは，任意の異なる 2 つの $i, j \in I$ に対して e_i と e_j が直交することをいう．さらに，任意の $i \in I$ に対して $\|e_i\| = 1$ であるとき，$\{e_i\}_{i\in I}$ は**正規直交系**であるという．
(3) $\{e_i\}_{i\in I}$ が E の**正規直交基底**であるとは，$\{e_i\}_{i\in I}$ が完全な正規直交系であることをいう．

事実 B.2 E を Hilbert 空間，$\{e_i\}_{i\in I}$ を E の元の族とする．次の 2 条件は同値である．

(a) $\{e_i\}_{i\in I}$ は E の正規直交基底である．
(b) 任意の $u \in E$ に対して，$\{\langle u|e_i\rangle e_i\}_{i\in I}$ は E において総和可能であり，
$$u = \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i$$
が成り立つ．
(c) 任意の $u, v \in E$ に対して，$\{\langle u|e_i\rangle \overline{\langle v|e_i\rangle}\}_{i\in I}$ は $\mathbb{C}$ において絶対総和可能であり，
$$\langle u|v\rangle = \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle \overline{\langle v|e_i\rangle}$$
が成り立つ．
(d) 任意の $u \in E$ に対して，
$$\|u\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle u|e_i\rangle|^2$$
が成り立つ．
(e) $u \in E$ に $(\langle u|e_i\rangle)_{i\in I}$ を対応させる写像は，E から $l^2(I)$ への Hilbert 空間の同型である．

参考文献

全体を通して，Grafakos [3, ch. 3] を参考にした．5.3 節の内容は，主に Chernoff [1] による．

[1] P. R. Chernoff, “Pointwise convergence of Fourier series”, *The American Mathematical Monthly*, **87**.5 (1980): 399–400.
[2] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Springer, 2013.
[3] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, 3rd edition, Springer, 2014.
[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 2005.