Gelfand 理論のノート

箱（@o_ccah）

2021 年 10 月 21 日

概要

Gelfand 理論について解説する．前半では，ノルム代数と Banach 代数に関する一般論を述べたあと，Gelfand スペクトルと Gelfand 変換を定義し，その基本的な性質を見る．後半では，C* 代数を定義し，単位的可換 C* 代数に対する Gelfand–Naimark の定理を証明したあと，それを用いて正規元の連続関数算や正元について調べる．最後には，状態の存在定理，表現の存在定理を経由して，任意の単位的可換 C* 代数がある作用素のなす単位的可換 C* 代数に同型であることを示す．

目次

記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．また，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$，$\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0]$ と置く．
- $\mathbb{K}$-代数とは，$\mathbb{K}$-線型空間 A に乗法と呼ばれる結合的な双線型写像 $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$ が定まったものをいう．乗法単位元をもつ $\mathbb{K}$-代数は単位的であるといい，乗法が可換な $\mathbb{K}$-代数は可換であるという．単位的 $\mathbb{K}$-代数 A の乗法単位元を 1_A あるいは単に 1 と書き，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$\lambda \cdot 1_A \in A$ を単に λ と書く．単位的 $\mathbb{K}$-代数 A の可逆元全体のなす群を $A^\times$ と書く．
- A を $\mathbb{K}$-代数，$B \subseteq A$ とする．B が A の部分 $\mathbb{K}$-代数であるとは，B が A の演算の制限によって $\mathbb{K}$-代数をなすことをいう．さらに，A が単位的 $\mathbb{K}$-代数であるとき，B が A の部分単位的 $\mathbb{K}$-代数であるとは，B が A の部分 $\mathbb{K}$-代数であり，かつ A の乗法単位元が B の乗法単位元でもあることをいう．
- A, B を $\mathbb{K}$-代数，$\phi\colon A \to B$ とする．ϕ が $\mathbb{K}$-代数の準同型であるとは，ϕ が線型であり，かつ乗法を保つことをいう．ϕ が $\mathbb{K}$-代数の同型であるとは，ϕ が全単射であり，かつ ϕ と ϕ^{-1} がともに $\mathbb{K}$-代数の準同型であることをいう．さらに，A, B が単位的 $\mathbb{K}$-代数であるとき，ϕ が単位的 $\mathbb{K}$-代数の準同型であるとは，ϕ が $\mathbb{K}$-代数の準同型であり，かつ乗法単位元を保つことをいい，ϕ が単位的 $\mathbb{K}$-代数の同型であるとは，ϕ が全単射であり，かつ ϕ と ϕ^{-1} がともに単位的 $\mathbb{K}$-代数の準同型であることをいう．
- $\mathbb{K}$-ノルム空間 E のノルムを $\|{-}\|_E$ あるいは単に $\|{-}\|$ と書き，$\mathbb{K}$-Hilbert 空間 E の内積を $\langle {-}|{-} \rangle_E$ あるいは単に $\langle {-}|{-} \rangle$ と書く．複素 Hilbert 空間の内積は，左の引数に関して共役線型，右の引数に関して線型とする．

1 ノルム代数，Banach 代数

本節では，ノルム代数と Banach 代数の一般論を解説する．なお，Gelfand 理論で扱われるのは専ら Banach 代数だから，一般のノルム代数に関する記述を無視して読み進めることも可能である．

1.1　ノルム代数，Banach 代数

定義 1.1（ノルム代数，Banach 代数）　$\mathbb{K}$-代数 A にその $\mathbb{K}$-線型空間の構造と整合するノルム $\|{-}\|$ が定まっており，かつそのノルムが

(NA) 任意の $x, y \in A$ に対して，$\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ である．

を満たすとき，このノルム $\|{-}\|$ は A の $\mathbb{K}$-代数の構造と**整合する**といい，A と $\|{-}\|$ との組を **$\mathbb{K}$-ノルム代数**という．完備な $\mathbb{K}$-ノルム代数を，**$\mathbb{K}$-Banach 代数**という．

例 1.2　(1) コンパクト分離空間 X に対して，X 上の $\mathbb{K}$ 値連続関数全体 $C(X;\mathbb{K})$ は，各点ごとの積を積として，一様ノルムに関して単位的可換 $\mathbb{K}$-Banach 代数をなす．

(2) $\mathbb{K}$-ノルム空間 E に対して，E 上の連続線型作用素全体 $\mathscr{L}(E)$ は，合成を積として作用素ノルムに関して単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数をなす（一般に可換ではない）．E が $\mathbb{K}$-Banach 空間ならば，$\mathscr{L}(E)$ は $\mathbb{K}$-Banach 代数となる．

(3) G を局所コンパクト分離群とし，G 上の左 Haar 測度を 1 つ固定する．このとき，G 上の $\mathbb{K}$ 値可積分関数（の同値類）全体 $L^1(G;\mathbb{K})$ は，畳み込みを積として，L^1 ノルムに関して $\mathbb{K}$-Banach 代数をなす．G が可換ならば $L^1(G;\mathbb{K})$ は可換であり，G が離散ならば $L^1(G;\mathbb{K})$ は単位的である．

注意 1.3　一般に，$\mathbb{K}$-ノルム空間 E, F, G と双線型写像 $\phi\colon E\times F\to G$ について，次の 2 条件は同値である．

(a) ϕ 連続である．
(b) ある $C\ge 0$ が存在して，任意の $x\in E$，$y\in F$ に対して $\|\phi(x,y)\|\le C\|x\|\|y\|$ が成り立つ．

これを証明しよう．

まず，ϕ が連続ならば，ある $\epsilon>0$ が存在して，任意の $x\in E$，$y\in F$ に対して，$\|x\|, \|y\|\le\epsilon$ ならば $\|\phi(x,y)\|\le 1$ が成り立つ．このとき，$C=\epsilon^{-2}$ と置けば (b) が成り立つ．逆に，(b) を満たす $C\ge 0$ がとれたとすると，任意の $(x_0,y_0), (x,y)\in E\times F$ に対して

$$\begin{aligned}\|\phi(x,y)-\phi(x_0,y_0)\| &\le \|\phi(x-x_0,y)\|+\|\phi(x_0,y-y_0)\|\\ &\le C\|x-x_0\|\|y\|+C\|x_0\|\|y-y_0\|\end{aligned}$$

が成り立つ．上式の最右辺は $(x,y)\to(x_0,y_0)$ のとき 0 に収束する．よって，ϕ は連続である．これで (a) $\iff$ (b) が示された．

よって，$\mathbb{K}$-ノルム代数の乗法は連続である．逆に，$\mathbb{K}$-代数 A にその $\mathbb{K}$-線型空間の構造と整合するノルムが定まっており，そのノルムが定める位相に関して A の乗法が連続ならば，ノルムを適当に正の実数倍することで，A を $\mathbb{K}$-ノルム代数にすることができる．

注意 1.4　単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数 A において，$\|1\|=\|1\cdot 1\|\le\|1\|^2$ だから，$A\ne 0$ ならば $\|1\|\ge 1$ である．単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数 $A\ne 0$ に対して $\|1\|=1$ を仮定することもあるが，本稿では仮定しない．ただし，（本稿での）単位的ノルム代数 $A\ne 0$ に対して，そのノルム $\|{-}\|$ を同値なノルム $\|{-}\|'$ にとりかえて，$(A,\|{-}\|')$ が $\|1\|'=1$ を満たす単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数になるようにすることができる．これを証明しよう．

$x\in A$ に対して，A 上の連続線型作用素 $y\mapsto xy$ を $L_x\in\mathscr{L}(A)$ と書く．写像

$$\phi\colon A\to\mathscr{L}(A),\quad x\mapsto L_x$$

を考えよう．ϕ は明らかに単位的 $\mathbb{K}$-代数の準同型である．また，容易にわかるように，$x \in A$ に対して L_x の作用素ノルム $\|L_x\|_{\mathscr{L}(A)}$ は

$$\frac{\|x\|}{\|1\|} \leq \|L_x\|_{\mathscr{L}(A)} \leq \|x\|$$

を満たす．そこで，A 上の新しいノルムを $\|{-}\|'$ を

$$\|x\|' = \|L_x\|_{\mathscr{L}(A)} \qquad (x \in A)$$

と定めると，これはもとのノルム $\|{-}\|$ と同値である．さらに，$\mathscr{L}(A)$ が単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数で $\|1\|_{\mathscr{L}(A)} = 1$ を満たすことから，$(A, \|{-}\|')$ も単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数で $\|1\|' = 1$ を満たす．これで主張は示された．

事実 1.5 $\mathbb{K}$-ノルム空間 E に対して，$\mathbb{K}$-Banach 空間 $\widehat{E}$ と $\mathbb{K}$-ノルム空間の稠密な埋め込み $\iota\colon E \to \widehat{E}$ との組 $(\widehat{E}, \iota)$ が，同型を除いて一意に存在する．

$\mathbb{K}$-ノルム空間 E に対して，事実 1.5 のように定まる $\mathbb{K}$-Banach 空間 $\widehat{E}$ を，E の（$\mathbb{K}$-ノルム空間としての）完備化という．多くの場合，$\iota\colon E \to \widehat{E}$ によって E を $\widehat{E}$ の稠密部分ノルム空間とみなす．

命題 1.6 A を $\mathbb{K}$-ノルム代数とし，A の $\mathbb{K}$-ノルム代数としての完備化を $\widehat{A}$ と書く．

(1) A の乗法 $A \times A \to A$ は，連続写像 $\widehat{A} \times \widehat{A} \to \widehat{A}$ に一意に延長され，これを乗法として $\widehat{A}$ は $\mathbb{K}$-Banach 代数をなす．
(2) (1) の状況で，A が可換ならば $\widehat{A}$ も可換である．
(3) (1) の状況で，A が単位的ならば $\widehat{A}$ も単位的であり，両者の乗法単位元は一致する．

証明 (1) $A \times A$ は $\widehat{A} \times \widehat{A}$ において稠密だから，A の乗法の $\widehat{A} \times \widehat{A}$ 上への連続な延長はたかだか一意である．

A の乗法が $\widehat{A} \times \widehat{A}$ 上に連続に延長できることを示す．まず，$x \in A$ を固定し，写像 $L_x\colon A \to A$, $y \mapsto xy$ を考える．これは作用素ノルム $\|x\|$ 以下の連続線型作用素だから，作用素ノルム $\|x\|$ 以下の連続線型作用素 $\widehat{L_x}\colon \widehat{A} \to \widehat{A}$ に延長される．いま，任意の $x \in A$ と $y \in \widehat{A}$ に対して

$$\|\widehat{L_x}(y)\| \leq \|x\|\|y\| \tag{$*$}$$

が成り立っている．次に，$y \in \widehat{A}$ を固定し，写像 $R_y\colon A \to \widehat{A}$, $x \mapsto \widehat{L_x}(y)$ を考える．($*$) より R_y は作用素ノルム $\|y\|$ 以下の連続線型作用素だから，作用素ノルム $\|y\|$ 以下の連続線型作用素 $\widehat{R_y}\colon \widehat{A} \to \widehat{A}$ に延長される．いま，任意の x, $y \in \widehat{A}$ に対して

$$\|\widehat{R_y}(x)\| \leq \|x\|\|y\| \tag{$**$}$$

が成り立っている．$\widehat{A} \times \widehat{A}$ から $\widehat{A}$ への写像 $(x, y) \mapsto \widehat{R_y}(x)$ は A の乗法の拡張であり，($**$) と注意 1.3 より連続である．これで，A の乗法が $\widehat{A} \times \widehat{A}$ 上に連続に延長できることが示された．

x, $y \in \widehat{A}$ に対して $m(x, y) = \widehat{R_y}(x)$ と書くことにする．A の乗法が双線型かつ結合的であることと等式延長原理より，写像 $m\colon \widehat{A} \times \widehat{A} \to \widehat{A}$ も双線型かつ結合的であることがわかる．さらに，($**$) より，任意の x, $y \in \widehat{A}$ に対して $\|m(x, y)\| \leq \|x\|\|y\|$ が成り立つ．よって，$\widehat{A}$ は m を乗法として $\mathbb{K}$-Banach 代数をなす．

(2) 等式延長原理より，A が可換ならば $\widehat{A}$ も可換である．

(3) 等式延長原理より，A の乗法単位元は $\widehat{A}$ の乗法単位元にもなる． □

定義 1.7 $\mathbb{K}$-ノルム代数 A に対して，命題 1.6 のように定まる $\mathbb{K}$-Banach 代数 $\widehat{A}$ を，A の（$\mathbb{K}$-ノルム代数としての）**完備化**という．

1.2 単位的 Banach 代数における乗法逆元

命題 1.8 A を単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数とする．任意の $x \in A$, $\|x\| < 1$ に対して，$1-x$ は可逆かつ $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能であり，

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$$

が成り立つ．さらにこのとき，

$$\|(1-x)^{-1}\| \le \|1\| + \frac{\|x\|}{1-\|x\|}, \qquad \|(1-x)^{-1} - 1\| \le \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

である[*1]．

証明 $x \in A$, $\|x\| < 1$ を任意にとる．$n \ge 1$ に対して $\|x^n\| \le \|x\|^n$ だから，$\|x\| < 1$ より $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能である．また，$N \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^{N-1}) = (1+x+\cdots+x^{N-1})(1-x) = 1-x^N$$

だから，$N\to\infty$ として

$$(1-x)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)(1-x) = 1$$

を得る．よって，$1-x$ は可逆であり，その逆元は $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ で与えられる．さらに，

$$\|(1-x)^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{n\ge 1} x^n\right\| \le \sum_{n\ge 1}\|x\|^n = \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

であり，したがって

$$\|(1-x)^{-1}\| \le \|1\| + \|(1-x)^{-1} - 1\| \le \|1\| + \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

である． □

系 1.9 A を単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数とする．

(1) 乗法逆元をとる写像 $A^\times \to A^\times$, $x \mapsto x^{-1}$ は連続である．
(2) A が単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数ならば，$A^\times$ は A の開集合である．

証明 A の完備化 $\widehat{A}$ を考えると，$A^\times \subseteq (\widehat{A})^\times$ であり，A における乗法逆元をとる写像 $A^\times \to A^\times$ は $\widehat{A}$ における乗法逆元をとる写像 $(\widehat{A})^\times \to (\widehat{A})^\times$ の制限である．そこで，A が単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数であるとして，$A^\times$ が A の開集合であり，写像 $A^\times \to A^\times$, $x \mapsto x^{-1}$ が連続であることを示せばよい．以下，A が単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数であると仮定する．

$x \in A^\times$ とする．$h \in A$ に対して $x+h = x(1+x^{-1}h)$ である．$h \in A$ が十分 0 に近く $\|x^{-1}h\| < 1$ であるとき，命題 1.8 より $x+h \in A^\times$ である．よって，$A^\times$ は A の開集合である．また，h をこのようにとるとき，

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} = (1+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} = ((1+x^{-1}h)^{-1} - 1)x^{-1}$$

[*1] $\|1\| = 1$ ならば，第一の式は $\|(1-x)^{-1}\| \le 1/(1-\|x\|)$ となる．

だから，命題 1.8 より

$$\|(x+h)^{-1}-x^{-1}\| \le \|((1+x^{-1}h)^{-1}-1)\|\|x^{-1}\| \le \frac{\|x^{-1}h\|}{1-\|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\|$$

が成り立つ．上式の最右辺は，$h\to 0$ のとき 0 に収束する．これで，乗法逆元をとる写像の連続性が示された． □

系 1.10　A を単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数とし，$x\in A$ とする．$\lambda\in\mathbb{K}$ は $\lambda-x$ が A において可逆であるような範囲を動くとする．この条件の下で λ が無限遠に近づくとき，$(\lambda-x)^{-1}$ は $0\in A$ に収束する[*2]．

証明　A の完備化 $\widehat{A}$ を考えると，$\lambda\in\mathbb{K}$ に対して，$\lambda-x$ が A において可逆ならば $\widehat{A}$ においても可逆である．したがって，$\widehat{A}$ に対する主張を示せば，A に対する主張も示される．そこで，はじめから A は単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数をであるとしてよい．以下，そのように仮定する．

$x\in A$ を任意にとる．$\lambda\in\mathbb{K}$ が無限遠点に十分近く $\|\lambda^{-1}x\|<1$ であるとき，命題 1.8 より，$\lambda-x=\lambda(1-\lambda^{-1}x)$ は可逆であって

$$\|(\lambda-x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(1-\lambda^{-1}x)^{-1}\| \le |\lambda|^{-1}\left(\|1\|+\frac{\|\lambda^{-1}x\|}{1-\|\lambda^{-1}x\|}\right)$$

が成り立つ．上式の最右辺は，$\lambda\to\infty$ のとき 0 に収束する．これで，主張が示された． □

1.3　単位的 Banach 代数のイデアル

定義 1.11（イデアル）　A を $\mathbb{K}$-代数とする．$I\subseteq A$ が A の**両側イデアル**あるいは単に**イデアル**であるとは，I が A の部分線型空間であり，かつ任意の $a\in A$，$x\in I$ に対して ax, $xa\in I$ であることをいう．A のイデアルのうち A 以外のものを，A の**真イデアル**という．A の真イデアルの中で包含関係に関して極大なものを，A の**極大イデアル**という．

定理 1.12（極大イデアルの存在定理）　A を単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．任意の真イデアル $I\subseteq A$ に対して，I を含む A の極大イデアルが存在する．

証明　I を含む A の真イデアル全体が包含関係に関してなす順序集合に，Zorn の補題を適用すればよい． □

命題 1.13　A を $\mathbb{K}$-ノルム代数とする．イデアル $I\subseteq A$ に対して，I の A における閉包 $\overline{I}$ も A のイデアルである．

証明　A の加法，スカラー倍および乗法が連続であることから従う． □

命題 1.14　A を単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数とする．どんな真イデアル $I\subseteq A$ も，$1\in A$ を中心とする半径 1 の開球とは交わらない．

証明　命題 1.8 より，$1\in A$ を中心とする半径 1 の開球に属する元は可逆だから，それを含むイデアルは A 自身しかない． □

[*2] ある $R\ge 0$ が存在して $\mathrm{Sp}_A(x)$ が $\{\lambda\in\mathbb{K}\mid|\lambda|\ge R\}$ を含む場合，$\lambda\in\mathbb{K}\setminus\mathrm{Sp}_A(x)$ は無限遠には近づけないが，このとき主張は自明に成立するとみなす．

系 1.15　単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数 A の極大イデアル M は，A において閉である．

証明　$M \subseteq A$ を極大イデアルとする．命題 1.14 より M は $1 \in A$ を中心とする半径 1 の開球とは交わらないから，その閉包 $\overline{M}$ も同様であり，特に $\overline{M}$ は A の真イデアルである．よって，M の極大性より，$\overline{M} = M$ が成り立つ．　□

事実 1.16　E を $\mathbb{K}$-ノルム空間，M を E の閉部分線型空間とする．$x + M \in E/M$（$x \in E$）に対して

$$\|x + M\|_{E/M} = \inf_{z \in M} \|x + z\|_E$$

と定めると，E/M は $\|{-}\|_{E/M}$ をノルムとして $\mathbb{K}$-ノルム空間をなす．さらに，E が $\mathbb{K}$-Banach 空間ならば，E/M も $\mathbb{K}$-Banach 空間となる．

$\mathbb{K}$-ノルム空間 E とその閉部分線型空間 M に対して，事実 1.16 のように定まる $\mathbb{K}$-ノルム空間 E/M を，E の M による商ノルム空間という．E が $\mathbb{K}$-Banach 空間ならば，商ノルム空間の代わりに商 Banach 空間という．

命題 1.17　A を $\mathbb{K}$-ノルム代数，I を A の閉イデアルとする．商 $\mathbb{K}$-代数 A/I は，その商ノルム空間としてのノルムに関して，$\mathbb{K}$-ノルム代数をなす．さらに，A が $\mathbb{K}$-Banach 代数ならば，A/I も $\mathbb{K}$-Banach 代数となる．

証明　任意の $x, y \in A$ に対して

$$\begin{aligned}
\|xy + I\|_{A/I} &= \inf_{z \in I} \|xy + z\|_A \\
&\leq \inf_{z, w \in I} \|xy + xw + zy + zw\|_A \\
&\leq \inf_{z, w \in I} \|x + z\|_A \|y + w\|_A \\
&= \|x + I\|_{A/I} \|y + I\|_{A/I}
\end{aligned}$$

が成り立つから，A/I は $\mathbb{K}$-ノルム代数をなす．さらに，A が $\mathbb{K}$-Banach 代数ならば，A/I は $\mathbb{K}$-ノルム空間として完備だから，A/I は $\mathbb{K}$-Banach 代数をなす．　□

定義 1.18（商ノルム代数，商 Banach 代数）　$\mathbb{K}$-ノルム代数 A とその閉イデアル I に対して，命題 1.17 のように定まる $\mathbb{K}$-ノルム代数 A/I を，A の I による**商ノルム代数**という．A が $\mathbb{K}$-Banach 代数ならば，商ノルム代数の代わりに**商 Banach 代数**ともいう．

2　元のスペクトルと Gelfand–Mazur の定理

本節では，単位的 $\mathbb{K}$-代数の元のスペクトルを定義し，特に単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数に対してそれを調べることによって，Gelfand–Mazur の定理（系 2.9）を証明する．

2.1　元のスペクトルと Gelfand–Mazur の定理

定義 2.1（元のスペクトル）　A を単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．$x \in A$ の（A における）スペクトルを，

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda - x \text{ は } A \text{ において可逆でない}\}$$

と定める．$\mathrm{Sp}_A(x)$ を単に $\mathrm{Sp}(x)$ とも書く．

例 2.2 (1) X をコンパクト分離空間とする．$f \in C(X;\mathbb{K})$ のスペクトルは，f の値域 $f(X)$ である．

(2) E を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．E が有限次元ならば，$T \in \mathscr{L}(E)$ のスペクトルは，T の固有値全体のなす集合である．E が無限次元ならば，一般には，T のスペクトルは T の固有値全体を真に含む集合となる．

命題 2.3 A を単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数，$x \in A$ とする．x のスペクトル $\mathrm{Sp}_A(x)$ は，$0 \in \mathbb{K}$ を中心とする半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれるコンパクト集合である．

証明 $A^\times$ は A の開集合だったから（系 1.9 (2)），$\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda - x \in A^\times\}$ は $\mathbb{K}$ の開集合であり，したがって $\mathrm{Sp}_A(x)$ は $\mathbb{K}$ の閉集合である．また，$\lambda \in \mathbb{K}$，$|\lambda| > \|x\|$ とすると，$\|\lambda^{-1}x\| < 1$ だから，命題 1.8 より $\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ は可逆である．対偶をとれば，$\mathrm{Sp}_A(x)$ が $0 \in \mathbb{K}$ を中心とする半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれることがわかる．最後に，以上のことより $\mathrm{Sp}_A(x)$ は $\mathbb{K}$ の有界閉集合だから，コンパクトである． □

次に，0 でない単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数の元のスペクトルが空でないことを示す（定理 2.7）．その証明では，次の 2 つの事実を用いる．

事実 2.4（Liouville の定理） $\mathbb{C}$ 全体で定義された有界な正則関数は，定数関数に限る．

事実 2.5（Hahn–Banach の拡張定理） E を $\mathbb{K}$-ノルム空間，F を E の部分線型空間とする．F 上の任意の連続線型形式 ψ に対して，その拡張であるような E 上の連続線型形式 ϕ であって，$\|\phi\| = \|\psi\|$ を満たすものが存在する．

系 2.6（Hahn–Banach の拡張定理の帰結） E を $\mathbb{K}$-ノルム空間，$x \in E$ とする．E 上の任意の連続線型形式 ϕ に対して $\phi(x) = 0$ ならば，$x = 0$ である．

証明 $x \neq 0$ とすると，$\mathbb{K}x$ 上の連続線型形式 ψ が $\psi(\lambda x) = \lambda$（$\lambda \in \mathbb{K}$）によって定まる．Hahn–Banach の拡張定理より，ψ は E 上の連続線型形式 ϕ に拡張できる．このとき，$\phi(x) = 1 \neq 0$ である．対偶をとれば，主張を得る． □

定理 2.7 A を 0 でない単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数とする．任意の $x \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は空でない．

証明 $\mathrm{Sp}_A(x)$ が空であると仮定する．すると，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda - x$ は可逆だから，写像 $\mathbb{C} \to A$，$\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ が考えられる．$\mathbb{C}$-ノルム空間 A 上の連続線型形式 ϕ ごとに，関数 $f_\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f_\phi(\lambda) = \phi((\lambda - x)^{-1})$$

によって定める．すると，f_ϕ は正則関数である．実際，$\lambda_0, \lambda \in \mathbb{C}$，$\lambda \neq \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{\phi((\lambda - x)^{-1}) - \phi((\lambda_0 - x)^{-1})}{\lambda - \lambda_0} \\
&= \phi\left(\frac{(\lambda - x)^{-1} - (\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= \phi\left(\frac{(\lambda - x)^{-1}((\lambda_0 - x) - (\lambda - x))(\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= \phi(-(\lambda - x)^{-1}(\lambda_0 - x)^{-1})
\end{aligned}$$

だから，$\lambda \to \lambda_0$ として，乗法逆元をとる写像の連続性（系 1.9 (1)）より

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \phi(-(\lambda_0 - x)^{-2})$$

を得る．また，系 1.10 より，f_ϕ は無限遠方において 0 に収束する．よって，f_ϕ は $\mathbb{C}$ 全体で定義された無限遠方において 0 に収束する正則関数だから，Liouville の定理（事実 2.4）より，$f_\phi = 0$ である．

以上より，$\lambda \in \mathbb{C}$ を 1 つ固定すると，A 上の任意の連続線型形式 ϕ に対して $\phi((\lambda - x)^{-1}) = 0$ だから，Hahn–Banach の拡張定理の帰結（系 2.6）より $(\lambda - x)^{-1} = 0$ となる．ところが，これは A が 0 でないことに矛盾する．よって，背理法より，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は空でない． □

注意 2.8　0 でない単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数 A に対しては，A の元のスペクトルが空になることもありうる．たとえば，$\mathbb{R}^2$ 上の線型作用素 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ がその例である．

系 2.9（Gelfand–Mazur の定理）　（可換とは限らない）体をなす単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数は，単位的 $\mathbb{C}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．

証明　A が体をなす単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数であるとする．写像 $\mathbb{C} \to A$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$ が全単射であることを示せばよい．$A \neq 0$ だから，この写像は単射である．全射性を示す．$x \in A$ を任意にとる．定理 2.7 より，$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ がとれる．スペクトルの定義より $\lambda \cdot 1_A - x$ は A において可逆でないが，いま A は体をなすから，そのためには $x = \lambda \cdot 1_A$ でなければならない．これで，全射性が示された． □

2.2　元のスペクトルと準同型

命題 2.10　A, B を単位的 $\mathbb{K}$-代数，$\phi\colon A \to B$ を単位的 $\mathbb{K}$-代数の準同型とする．このとき，$x \in A$ に対して

$$\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$$

である．

証明　$\lambda \in \mathbb{K}$ について，$\lambda - x$ が A において可逆ならば $\lambda - \phi(x) = \phi(\lambda - x)$ は B において可逆だから，$\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_B(\phi(x))$ であり，よって $\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ である． □

系 2.11　A を単位的 $\mathbb{K}$-代数，$B \subseteq A$ を部分単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．このとき，$x \in B$ に対して

$$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$$

である．

証明　B から A への包含写像に命題 2.10 を適用すればよい． □

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト集合とするとき，$\mathbb{C} \setminus K$ の有界な連結成分を K の穴という．

命題 2.12　A を単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数，$B \subseteq A$ を部分単位的 $\mathbb{K}$-代数であって完備なものとする．

(1) $B^\times$ は $B \cap A^\times$ において開かつ閉である．
(2) 任意の $x \in B$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$ かつ $\partial\,\mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \partial\,\mathrm{Sp}_A(x)$ である（∂ は $\mathbb{C}$ における境界を表す）．

(3) $\mathrm{Sp}_B(x)$ は $\mathrm{Sp}_A(x)$ と $\mathrm{Sp}_A(x)$ のいくつかの穴との合併である．

証明 (1) 系 1.9 (2) より $B^\times$ の B の開集合だから，$B\cap A^\times$ の開集合でもある．また，

$$B^\times = \{x\in B\cap A^\times \mid x^{-1}\in B\}$$

であり，B は完備性より A において閉であり，乗法逆元をとる操作は連続だから（系 1.9 (1)），$B^\times$ は $B\cap A^\times$ の閉集合である．

(2) $\mathrm{Sp}_A(x)\subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$ は系 2.11 ですでに示した．$\partial\,\mathrm{Sp}_B(x)\subseteq\partial\,\mathrm{Sp}_A(x)$ を示す．$\lambda\in\partial\,\mathrm{Sp}_B(x)$ を任意にとる．まず，$\lambda\notin\mathrm{Sp}_B(x)^\circ$ だから，$\lambda\notin\mathrm{Sp}_A(x)^\circ$ である．次に，λ に収束する点列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}_B(x)$ をとる．もし $\lambda\notin\mathrm{Sp}_A(x)$ であるとすると，点列 $(\lambda_n-x)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B^\times$ が点 $\lambda-x\in B\cap A^\times$ に収束することになるから，(1) より $\lambda-x\in B^\times$，すなわち $\lambda\notin\mathrm{Sp}_B(x)$ である．これは矛盾である．よって，背理法より $\lambda\in\mathrm{Sp}_A(x)$ である．これで，$\lambda\in\partial\,\mathrm{Sp}_A(x)=\mathrm{Sp}_A(x)\setminus\mathrm{Sp}_A(x)^\circ$ が示された．

(3) U を $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}_A(x)$ の連結成分とする．$\mathrm{Sp}_B(x)$ は $\mathbb{C}$ のコンパクト集合だから，$\mathrm{Sp}_B(x)\cap U$ は U の閉集合である．また，$\partial\,\mathrm{Sp}_B(x)\subseteq\partial\,\mathrm{Sp}_A(x)$ より $\partial\,\mathrm{Sp}_B(x)\cap U=\emptyset$ だから，$\mathrm{Sp}_B(x)\cap U$ は U の開集合である．したがって，$\mathrm{Sp}_B(x)\cap U$ は U において開かつ閉だが，U は連結だから，$\mathrm{Sp}_B(x)\cap U$ は $\emptyset$ または U のいずれかである．また，$\mathrm{Sp}_B(x)$ はコンパクトだから，$\mathrm{Sp}_B(x)$ が $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}_A(x)$ の非有界連結成分を含むことはない．よって，$\mathrm{Sp}_B(x)$ は $\mathrm{Sp}_A(x)$ と $\mathrm{Sp}_A(x)$ のいくつかの穴との合併である．□

2.3 スペクトル半径

定義 2.13（スペクトル半径） A を単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．$x\in A$ の（A における）スペクトル半径を，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}}=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\mathrm{Sp}_A(x)\}$$

と定める．ただし，$\mathrm{Sp}_A(x)=\emptyset$ の場合には，$\|x\|_{\mathrm{Sp}}=0$ と約束する．

命題 2.14 A を単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数とする．$x\in A$ に対して，$\|x\|_{\mathrm{Sp}}\le\|x\|$ が成り立つ．

証明 $\mathrm{Sp}_A(x)$ が中心 $0\in\mathbb{K}$，半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれること（命題 2.3）のいいかえにすぎない．□

4 節で，単位的 $\mathbb{C}$-Banach 代数の元のスペクトル半径を具体的に表示するスペクトル半径公式を示す[*3]．

3 Gelfand スペクトルと Gelfand 変換

本節では，単位的可換 Banach 代数に対して Gelfand スペクトルと Gelfand 変換を定義し，その性質を調べる．Gelfand 変換は，抽象的な単位的可換 Banach 代数を，連続関数のなす単位的可換 Banach 代数という具体的な対象を通して調べることを可能にするものであり，Gelfand 理論の中核といえる道具である．

本節以下では，特に断らなければ，係数体は $\mathbb{C}$ とする．記号においても，$C(X;\mathbb{C})$ を単に $C(X)$ と書くなどする．

[*3] スペクトル半径公式の証明はここまでの準備で可能だから，論理的には，ここでスペクトル半径公式を示すことも可能である．そうしなかったのは，スペクトル半径公式の証明はテクニカルであるため，スペクトル半径公式を使わずに展開できる内容を先に済ませておいた方が見通しがよくなると考えたからである．

3.1 指標と Gelfand スペクトル

定義 3.1（指標） A を単位的可換 Banach 代数とする．A から $\mathbb{C}$ への単位的代数の準同型を，A 上の**指標**という．

定義 3.2（Gelfand スペクトル） A を単位的可換 Banach 代数とする．A 上の指標全体のなす集合に A 上の各点収束位相を入れて得られる位相空間を，A の **Gelfand スペクトル**，**極大スペクトル**あるいは**指標空間**といい，$\mathsf{X}(A)$ と書く．

E, F をノルム空間とする．線型写像 $\phi\colon E \to F$ がノルム減少であるとは，任意の $x \in E$ に対して $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ が成り立つことをいう．

命題 3.3 A を単位的可換 Banach 代数とする．A 上の任意の指標 χ は，ノルム減少である．さらに，$1 \in A$ のノルムが 1 ならば，χ の作用素ノルムは 1 に等しい．

証明 $\chi \in \mathsf{X}(A)$ とする．$x \in A$ を任意にとる．$\chi\colon A \to \mathbb{C}$ は単位的代数の準同型だから，命題 2.10 より $\{\chi(x)\} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\chi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ である．また，命題 2.3 より，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は中心 $0 \in \mathbb{C}$，半径 $\|x\|$ の閉円板に含まれる．よって，$|\chi(x)| \leq \|x\|$ である．これが任意の $x \in A$ に対して成り立つから，χ はノルム減少である．

後半の主張は，前半の結果と $\chi(1) = 1$ から明らかである． □

命題 3.3 より，$\mathsf{X}(A)$ は A の位相的双対の（作用素ノルムに関する）閉単位球の部分集合である．$\mathsf{X}(A)$ の位相は，汎弱位相に他ならない．

定理 3.4 単位的可換 Banach 代数 A に対して，その Gelfand スペクトル $\mathsf{X}(A)$ はコンパクト分離空間である．[*4]

証明 $0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \geq 0$ の閉円板を $B(r)$ と書くことにする．命題 3.3 より，$\mathsf{X}(A)$ は積空間

$$\mathscr{X} = \prod_{x \in A} B(\|x\|)$$

の部分空間とみなせる．このようにみなすとき，

$$\mathsf{X}(A) = \left\{ \chi \in \mathscr{X} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \lambda,\, \mu \in \mathbb{C},\ x,\, y \in A \text{ に対して } \chi(\lambda x + \mu y) = \lambda\chi(x) + \mu\chi(y), \\ \chi(xy) = \chi(x)\chi(y),\ \text{かつ } \chi(1) = 1 \end{array} \right\}$$

だから，積位相の定義より，$\mathsf{X}(A)$ は $\mathscr{X}$ の閉集合である．Tychonoff の定理より $\mathscr{X}$ はコンパクト分離だから，その閉集合 $\mathsf{X}(A)$ もコンパクト分離である． □

命題 3.5 A を単位的可換 Banach 代数とする．指標 $\chi \in \mathsf{X}(A)$ に対して $\operatorname{Ker}\chi$ は A の極大イデアルである．さらに，写像 $\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$ は，$\mathsf{X}(A)$ から A の極大イデアル全体のなす集合への全単射である．

証明 準同型定理より，指標 $\chi \in \mathsf{X}(A)$ は単位的代数の同型 $A/\operatorname{Ker}\chi \cong \mathbb{C}$ を誘導する．$\mathbb{C}$ は体だから，$\operatorname{Ker}\chi$ は A の極大イデアルである．

$\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$ の単射性を示す．χ, $\chi' \in \mathsf{X}(A)$，$\operatorname{Ker}\chi = \operatorname{Ker}\chi'$ とすると，準同型定理より，単位的代数の同型 $\mathbb{C} \cong A/\operatorname{Ker}\chi = A/\operatorname{Ker}\chi' \cong \mathbb{C}$ を得る．ところが，$\mathbb{C}$ から自身への単位的代数の同型は恒等写像しかない

[*4] 定理 3.4 の証明は，ほとんど Banach–Alaoglu の定理の証明そのものである．

から，χ が誘導する同型 $A/\operatorname{Ker}\chi \cong \mathbb{C}$ と χ' が誘導する同型 $A/\operatorname{Ker}\chi' \cong \mathbb{C}$ とは等しい．よって，$\chi_0 = \chi'$ である．これで，単射性が示された．

$\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$ の全射性を示す．極大イデアル $M \subseteq A$ を任意にとる．すると，M は A の閉イデアルだから（系 1.15），商 Banach 代数 A/M が考えられる．M の極大性より A/M は体だから[*5]，Gelfand–Mazur の定理（系 2.9）より，単位的代数として $A/M \cong \mathbb{C}$ である．自然な全射 $A \to A/M$ とこの同型 $A/M \cong \mathbb{C}$ との合成を $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ とすれば，$\chi \in \mathsf{X}(A)$ かつ $\operatorname{Ker}\chi = M$ である．これで，全射性が示された．　□

3.2　Gelfand 変換

定義 3.6（Gelfand 変換）　A を単位的可換 Banach 代数とする．$x \in A$ に対して，A 上の指標に x を代入する写像 $\chi \mapsto \chi(x)$ を，$\widehat{x}$ と書く．$\mathsf{X}(A)$ の位相の定義より，これは $\mathsf{X}(A)$ 上の連続関数である．$x \in A$ に対して $\widehat{x} \in C(\mathsf{X}(A))$ を対応させる写像を，A 上の **Gelfand 変換**といい，$\mathscr{G}_A\colon A \to C(\mathsf{X}(A))$ と書く．

命題 3.7　A を単位的可換 Banach 代数とする．A 上の Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A\colon A \to C(\mathsf{X}(A))$ は，ノルム減少な単位的代数の準同型である．

証明　単位的代数の準同型であることは指標の定義から明らかであり，ノルム減少性は命題 3.3 の結果である．　□

Gelfand 変換によって，抽象的な単位的可換 Banach 代数 A を，コンパクト分離空間上の連続関数のなす単位的可換 Banach 代数のように思える．次の定理は，その一例である．

定理 3.8　A を単位的可換 Banach 代数とする．任意の $x \in A$ に対して，

$$\operatorname{Sp}_A(x) = \operatorname{Sp}_{C(\mathsf{X}(A))}(\widehat{x}) = \{\chi(x) \mid \chi \in \mathsf{X}(A)\}$$

が成り立つ．

証明　$x \in A$ とする．Gelfand 変換は単位的代数の準同型だから（命題 3.7），命題 2.10 より，$\operatorname{Sp}_{C(\mathsf{X}(A))}(\widehat{x}) \subseteq \operatorname{Sp}_A(x)$ である．次に，$\operatorname{Sp}_A(x) \subseteq \operatorname{Sp}_{C(\mathsf{X}(A))}(\widehat{x})$ を示す．$\lambda \in \operatorname{Sp}_A(x)$ とすると，$\lambda - x$ は可逆でないから，極大イデアルの存在定理（定理 1.12）より，$\lambda - x$ を含む極大イデアル M が存在する．$\operatorname{Ker}\chi = M$ なる $\chi \in \mathsf{X}(A)$ をとると（命題 3.5），$\lambda - x \in M$ より $\chi(\lambda - x) = 0$ であり，したがって $\lambda = \chi(x) \in \operatorname{Sp}_{C(\mathsf{X}(A))}(\widehat{x})$ である．よって，$\operatorname{Sp}_A(x) \subseteq \operatorname{Sp}_{C(\mathsf{X}(A))}(\widehat{x})$ である．　□

系 3.9　A を単位的可換 Banach 代数とする．任意の $x \in A$ に対して，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \|\widehat{x}\|_{C(\mathsf{X}(A))} = \sup\{|\chi(x)| \mid \chi \in \mathsf{X}(A)\}$$

が成り立つ．

証明　定理 3.8 より，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp}_A(x)\} = \sup\{|\chi(x)| \mid \chi \in \mathsf{X}(A)\} = \|\widehat{x}\|_{C(\mathsf{X}(A))}$$

である．　□

[*5] A の可換性を本質的に使っているのは，この部分である．

系 3.10　A を単位的可換 Banach 代数とする．$x \in A$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) x は A において可逆である．
(b) $\widehat{x}$ は $C(\mathsf{X}(A))$ において可逆である．
(c) 任意の $\chi \in \mathsf{X}(A)$ に対して $\chi(x) \neq 0$ である．

証明　(a), (b) はそれぞれ $0 \notin \mathrm{Sp}_A(x)$，$0 \notin \mathrm{Sp}_{C(\mathsf{X}(A))}(\widehat{x})$ といいかえられる．よって，主張は定理 3.8 から従う．□

系 3.11　A を単位的可換 Banach 代数とする．A 上の Gelfand 変換の像 $\mathscr{G}_A(A) \subseteq C(\mathsf{X}(A))$ は，$C(\mathsf{X}(A))$ における逆元をとる操作で閉じている．すなわち，$f \in \mathscr{G}_A(A)$ が $C(\mathsf{X}(A))$ において逆元 $f^{-1} \in C(\mathsf{X}(A))$ をもつならば，$f^{-1} \in \mathscr{G}_A(A)$ である．

証明　$x \in A$ とする．$\widehat{x} \in \mathscr{G}_A(A)$ が $C(\mathsf{X}(A))$ において可逆ならば，系 3.10 より，x は A において可逆である．よって，$(\widehat{x})^{-1} = \widehat{x^{-1}} \in \mathscr{G}_A(A)$ である．□

3.3　例と応用（Wiener の $1/f$ 定理）

例 3.12　X をコンパクト分離空間とする．$C(X)$ の Gelfand スペクトル $\mathsf{X}(C(X))$ が X と自然に同一視でき，この同一視の下で Gelfand 変換 $\mathscr{G}_{C(X)}\colon C(X) \to C(\mathsf{X}(C(X)))$ が $C(X)$ の恒等写像に対応することを示そう．

(1)　閉集合 $S \subseteq X$ に対して，

$$I_S = \{f \in C(X) \mid f|_S = 0\}$$

と定める．I_S は $C(X)$ の閉イデアルである．写像 $S \mapsto I_S$ が，X の閉集合全体のなす集合から $C(X)$ の閉イデアル全体のなす集合への全単射であることを示す．

$S \mapsto I_S$ の単射性を示す．S_0, S_1 を X の異なる閉集合とする．一般性を失わず，点 $p \in S_0 \setminus S_1$ がとれるとしてよい．X はコンパクト分離であり，したがって完全正則だから，$f \in C(X)$ であって $f(p) \neq 0$ かつ $f|_{S_1} = 0$ なるものがとれる．このとき $f \in I_{S_1} \setminus I_{S_0}$ だから，$I_{S_0} \neq I_{S_1}$ である．よって，$S \mapsto I_S$ は単射である．

$S \mapsto I_S$ の全射性を示す．閉イデアル $I \subseteq C(X)$ を任意にとる．これに対して

$$S = \{p \in X \mid \text{任意の } f \in I \text{ に対して } f(p) = 0\}$$

と置くと，S は X の閉集合であり，$I \subseteq I_S$ である．あとは，$I_S \subseteq I$ を示せばよい．

そのためにまず，S と交わらない閉集合 $K \subseteq X$ と $\epsilon > 0$ に対して，$h \in I$ であって常に $0 \leq h \leq 1$ かつ K 上で $h \geq 1 - \epsilon$ を満たすものが存在することを示す．S の定義と $K \cap S = \emptyset$，および K のコンパクト性より，有限個の $g_0, \dots, g_{n-1} \in I$ を $\{\{p \in X \mid |g_k(x)| > 1\}\}_{0 \leq k < n}$ が K を被覆するようにとれる．これを用いて

$$g = |g_0|^2 + \cdots + |g_{n-1}|^2 = g_0\overline{g_0} + \cdots + g_{n-1}\overline{g_{n-1}} \in I$$

と置くと，常に $g \geq 0$ かつ F 上で $g \geq 1$ を満たす．そこで，$h = \epsilon^{-1}g/(1 + \epsilon^{-1}g)$ と置くと，$h \in I$ であり，常に $0 \leq g \leq 1$ かつ F 上で

$$1 - h = \frac{1}{1 + \epsilon^{-1}g} \leq \frac{1}{1 + \epsilon^{-1}} < \epsilon,$$

を満たす．これで，求める関数 $h \in I$ が構成できた．

以上を踏まえて，$I_S \subseteq I$ を示す．$f \in I_S$ とする．$\epsilon > 0$ を任意にとり，$K = \{p \in X \mid |f(p)| \geq \epsilon\}$ と置く．すると，K は S と交わらない閉集合だから，前段の結果より，$h \in I$ であって常に $0 \leq h \leq 1$ かつ K 上で $h \geq 1 - \epsilon$ を満たすものがとれる．この h について，$hf \in I$ かつ $\|hf - f\| \leq \max\{\epsilon, \epsilon\|f\|\}$ が成り立つ．$\epsilon \to +0$ のとき $\max\{\epsilon, \epsilon\|f\|\} \to 0$ だから，I が閉イデアルであることより，$f \in I$ を得る．これで，$I_S \subseteq I$ が示された．

(2)　$p \in X$ に対して，

$$I_p = \{f \in C(X) \mid f(p) = 0\}$$

と定める．写像 $p \mapsto I_p$ が，X から $C(X)$ の極大イデアル全体のなす集合への全単射であることを示す．

$p \in X$ に対して I_p が $C(X)$ の極大イデアルであることは，容易に確かめられる．$p \mapsto I_p$ の単射性は，(1) の単射性の結果である．$p \mapsto I_p$ の全射性は，(1) の全射性と，$C(X)$ の極大イデアルが必ず閉であること（系 1.15）の結果である．

(3)　$p \in X$ に対して，$C(X)$ の元に p を代入する写像 $f \mapsto f(p)$ を ev_p と書く．ev_p は，$C(X)$ 上の指標である．写像 $\mathrm{ev}\colon X \to \mathsf{X}(C(X)), p \mapsto \mathrm{ev}_p$ が同相写像であることを示す．

(2) の全単射により，$p \in X$ は極大イデアル $I_p \subseteq C(X)$ に対応する．さらに，$\operatorname{Ker}\mathrm{ev}_p = I_p$ だから，命題 3.5 の全単射により，極大イデアル I_p は指標 $\mathrm{ev}_p \in \mathsf{X}(C(X))$ に対応する．よって，ev は全単射である．また，$\mathsf{X}(C(X))$ には $C(X)$ 上の各点収束位相が入っているから，ev は連続である．以上より，ev はコンパクト分離空間の間の連続全単射だから（定理 3.4），同相写像である．

(4)　(3) の同相写像によって $\mathsf{X}(C(X))$ を X と同一視するとき，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_{C(X)}\colon C(X) \to C(\mathsf{X}(C(X)))$ は恒等写像 $\mathrm{id}_{C(X)}\colon C(X) \to C(X)$ に対応する．実際，$f \in C(X)$ は Gelfand 変換によって $\widehat{f} \in C(\mathsf{X}(C(X)))$ に移り，$\widehat{f}$ は (3) の同相写像による同一視によって $\widehat{f} \circ \mathrm{ev} = f \in C(X)$ に移る．

例 3.13

$$l^1(\mathbb{Z}) = \left\{ a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)| < \infty \right\}$$

を考える．$l^1(\mathbb{Z})$ は，畳み込みを乗法として単位的可換 Banach 代数をなす．$n \in \mathbb{Z}$ に対して，n において値 1，それ以外の点において値 0 をとる $l^1(\mathbb{Z})$ の元を δ_n と書くことにする．

$\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ と置く．$\lambda \in \mathbb{T}$ に対して，$\chi_\lambda\colon l^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_\lambda(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)\lambda^n$$

と定める．χ_λ は $l^1(\mathbb{Z})$ 上の指標である．写像 $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ が $\mathbb{T}$ から $\mathsf{X}(l^1(\mathbb{Z}))$ への同相写像であり，その逆写像は $\chi \mapsto \chi(\delta_1)$ で与えられることを示そう．

$\lambda \in \mathbb{T}$ に対して $\chi_\lambda(\delta_1) = \lambda$ であることは明らかである．逆に，$\chi \in \mathsf{X}(l^1(\mathbb{Z}))$ が与えられたとして，$\lambda = \chi(\delta_1) \in \mathbb{C}$ と置く．畳み込みに関して δ_1 が可逆かつ $\delta_1^n = \delta_n$（$n \in \mathbb{Z}$）であることに注意すると，$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ かつ

$$\chi(\delta_n) = \chi(\delta_1)^n = \lambda^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

を得る．指標 χ はノルム減少だから（命題 3.3），$\lambda \in \mathbb{T}$ でなければならない．さらに，χ の連続性より，$a \in l^1(\mathbb{Z})$ に対して

$$\chi(a) = \chi\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)\delta^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)\lambda^n = \chi_\lambda(a),$$

したがって $\chi = \chi_\lambda$ が成り立つ．よって，$\lambda \mapsto \chi_\lambda$ と $\chi \mapsto \chi(\delta_1)$ とは互いに他の逆を与える全単射である．最後に，$\mathsf{X}(l^1(\mathbb{Z}))$ には $l^1(\mathbb{Z})$ 上の各点収束位相が入っているから，$\chi \mapsto \chi(\delta_1)$ は連続である．コンパクト分離空間の間の連続全単射は同相写像だから，$\chi \mapsto \chi(\delta_1)$ は同相写像であり，したがって $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ も同相写像である．

これにより，$l^1(\mathbb{Z})$ の Gelfand スペクトル $\mathsf{X}(l^1(\mathbb{Z}))$ は $\mathbb{T}$ と自然に同一視できる．この同一視の下で，Gelfand 変換 $\mathscr{G}_{l^1(\mathbb{Z})} \colon l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathsf{X}(l^1(\mathbb{Z})))$ は，

$$\overline{\mathscr{F}} a(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{in\theta}$$

で与えられる共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}} \colon l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$ に対応する．

例 3.13 の応用として，Fourier 級数論における次の定理を示す．

定理 3.14（Wiener の $1/f$ 定理）

$$A(\mathbb{T}) = \{ f \in C(\mathbb{T}) \mid f \text{ の Fourier 級数は絶対収束する} \}$$

と置く[*6]．$f \in A(\mathbb{T})$ かつ $\mathbb{T}$ 上で常に $f \neq 0$ ならば，$1/f \in A(\mathbb{T})$ である．

証明　Fourier 級数に関する逆変換公式（たとえば，「Fourier 級数のノート」 [7] を参照のこと）より，$A(\mathbb{T})$ は共役 Fourier 変換 $\overline{\mathscr{F}} \colon l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$ の像に等しい．例 3.13 で見たとおり，この共役 Fourier 変換は $l^1(\mathbb{Z})$ 上の Gelfand 変換に同一視されるのだったから，主張は系 3.11 の結果である． □

4　スペクトル半径公式

本節では，スペクトル半径公式（定理 4.4）を示す．スペクトル半径公式は，5 節で Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）を証明するためのステップの 1 つで用いられる．

A を単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．$x \in A$ と $\mathbb{K}$ 係数 1 変数多項式 $f(t)$ に対して，$f(t)$ の t に形式的に x を代入して得られる元 $f(x) \in A$ を考えることができる．

補題 4.1　A を単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．$x \in A$ と $\mathbb{K}$ 係数 1 変数多項式 $f(t)$ に対して，$f(\mathrm{Sp}_A(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(f(x))$ である．

証明　$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ を任意にとる．多項式 $f(\lambda) - f(t)$ は λ を根にもつから，$\mathbb{K}$ 係数多項式 $g(t)$ が存在して $f(\lambda) - f(t) = (\lambda - t)g(t) = g(t)(\lambda - t)$ となる．ここで t に x を代入すると，$f(\lambda) - f(x) = (\lambda - x)g(x) = g(x)(\lambda - x)$ を得る．もし $f(\lambda) - f(x)$ が可逆だとすると，$\lambda - x$ も可逆となってしまい，$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ に反する．したがって，$f(\lambda) - f(x)$ は可逆でない．すなわち，$f(\lambda) \in \mathrm{Sp}_A(f(x))$ である．よって，$f(\mathrm{Sp}_A(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(f(x))$ である． □

事実 4.2（Banach–Steinhaus の定理の帰結）　E を $\mathbb{K}$-ノルム空間とする．部分集合 $S \subseteq E$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) S は E のノルムに関して有界である．

[*6] $A(\mathbb{T})$ は Wiener 代数と呼ばれる．

(b) S は弱有界である．すなわち， E 上の任意の連続線型形式 ϕ に対して，$\phi(S) \subseteq \mathbb{K}$ は有界である．

事実 4.3　Ω を $\mathbb{C}$ の開集合，$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ を正則関数とする．$\lambda_0 \in \Omega$ を中心とする半径 $r > 0$ の開円板が Ω に含まれるとする．このとき，f の λ_0 を中心とする冪級数展開の収束半径は，r 以上である．

定理 4.4（スペクトル半径公式）　A を単位的 Banach 代数とする．$x \in A$ に対して，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}$$

が成り立つ．

証明　$x \in A$ とする．まず，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

であることを示す．右側 2 つの不等式は明らかだから，いちばん左の不等式のみ示す．$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ とする．$n \geq 1$ を任意にとる．補題 4.1 より $\lambda^n \in \mathrm{Sp}_A(x^n)$ だから，命題 2.3 より $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|x^n\|$ であり，したがって $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$ である．これが任意の $n \geq 1$ に対して成り立つから，$|\lambda| \leq \inf_{n\geq 1} |x^n|^{1/n}$ である．よって，$\|x\|_{\mathrm{Sp}} \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}$ である．これで示された．

あとは，

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|_{\mathrm{Sp}}$$

を示せばよい．そのために，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$，$0 < |\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$（$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = 0$ のときは $1/\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \infty$ とみなす．以下同様）に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{|\lambda|} \tag{$*$}$$

をいう．($*$) をいうためには，

$$\{(\lambda x)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ が } A \text{ のノルムに関して有界である} \tag{$**$}$$

ことをいえばよい．実際，($**$) がいえたとすると，ある $C \geq 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|(\lambda x)^n\| \leq C$，したがって $\|x^n\| \leq C/|\lambda|^n$ だから，

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{C^{1/n}}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}$$

となり，($*$) が示される．

($**$) を示す．Banach–Steinhaus の定理の帰結（事実 4.2）より，そのためには，

$$A \text{ 上の任意の連続線型形式 } \phi \text{ に対して，} \{\phi(x)^n\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C} \text{ が有界である} \tag{$*{*}*$}$$

ことをいえばよい．A 上の連続線型形式 ϕ を任意にとり，関数

$$f_\phi\colon \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| < \frac{1}{\|x\|_{\mathrm{Sp}}}\right\} \to \mathbb{C}, \quad f_\phi(\lambda) = \phi((1-\lambda x)^{-1})$$

を考える（$\lambda \in \mathbb{C}$，$|\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$ とすると $\|\lambda x\|_{\mathrm{Sp}} < 1$ だから，$1 - \lambda x$ は可逆であることに注意する）．すると，

- f_ϕ は正則関数である．実際，$|\lambda_0|, |\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$，$\lambda \neq \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{\phi((1-\lambda x)^{-1}) - \phi((1-\lambda_0 x)^{-1})}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \phi\biggl(\frac{(1-\lambda x)^{-1} - (1-\lambda_0 x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}\biggr) \\ &= \phi\biggl(\frac{(1-\lambda x)^{-1}((1-\lambda_0 x) - (1-\lambda x))(1-\lambda_0 x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}\biggr) \\ &= \phi\bigl((1-\lambda x)^{-1} x (1-\lambda_0 x)^{-1}\bigr)\end{aligned}$$

  だから，$\lambda \to \lambda_0$ として，乗法逆元をとる写像の連続性（系 1.9 (1)）より

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \phi\bigl((1-\lambda_0 x)^{-1} x (1-\lambda_0 x)^{-1}\bigr)$$

  を得る．
- $|\lambda| < 1/\|x\|$ に対しては，$(1-\lambda x)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda x)^n$ だから（命題 1.8），

$$f_\phi(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(x^n)\lambda^n \tag{****}$$

  である．(****) は f_ϕ の 0 を中心とする冪級数展開を与える．

よって，事実 4.3 より，(****) の収束半径は $1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$ 以上である．特に，$|\lambda| < 1/\|x\|_{\mathrm{Sp}}$ に対して $\{\phi(x)^n\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{C}$ において有界である．これで，(***) が示された． □

5 C* 代数と Gelfand–Naimark の定理

本節では，C* 代数を定義し，単位的可換 C* 代数に対する基本的かつ重要な結果である Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）を証明する．Gelfand–Naimark の定理は，単位的可換 C* 代数上では Gelfand 変換が完全な同型になることを主張する．

5.1 対合代数

定義 5.1（対合代数） A を代数とする．次の 3 条件を満たす A から A への写像 $x \mapsto x^*$ を，A 上の**対合**という．

(INV1) $x \mapsto x^*$ は共役線型である．すなわち，任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x, y \in A$ に対して，$(\lambda x + \mu y)^* = \overline{\lambda} x^* + \overline{\mu} y^*$ である．

(INV2) 任意の $x, y \in A$ に対して，$(xy)^* = y^* x^*$ である．

(INV3) 任意の $x \in A$ に対して，$x^{**} = x$ である．

対合を備えた代数を，**対合代数**という．特に断らなければ，対合代数に定まった対合は，記号 $x \mapsto x^*$ で表す．

A が単位的対合代数ならば，$1^* = 1$ である．

A を対合代数，$B \subseteq A$ とする．B が A の**部分対合代数**であるとは，B が A の演算の制限によって対合代数をなすことをいう．さらに，A が単位的対合代数であるとき，B が A の**部分単位的対合代数**であるとは，B が A の部分対合代数であり，かつ A の乗法単位元が B の乗法単位元でもあることをいう．

定義 5.2（Hermite 元，正規元，ユニタリ元） A を対合代数，$x \in A$ とする．

(1) x が **Hermite** あるいは**自己随伴**であるとは，$x^* = x$ であることをいう．
(2) x が**正規**であるとは，$xx^* = x^*x$ であることをいう．
(3) A が単位的対合代数であるとき，x が**ユニタリ**であるとは，$xx^* = x^*x = 1$ であることをいう．

対合代数 A の Hermite 元全体は，A の部分実線型空間をなす．

命題 5.3 A を対合代数とする．$x \in A$ に対して，$x = x_0 + ix_1$ を満たす Hermite 元 x_0, $x_1 \in A$ が一意に存在し，それらは $x_0 = (x + x^*)/2$，$x_1 = (x - x^*)/2i$ で与えられる．

証明 $x_0 = (x+x^*)/2$, $x_1 = (x-x^*)/2i$ が条件を満たすことは明らかである．逆に，Hermite 元 x_0, $x_1 \in A$ が $x = x_0 + ix_1$ を満たすとすると，

$$x = x_0 + ix_1, \qquad x^* = x_0 - ix_1$$

だから，$x_0 = (x + x^*)/2$，$x_1 = (x - x^*)/2i$ となる． □

定義 5.4（実部・虚部） A を対合代数とする．$x \in A$ に対して，$(x + x^*)/2$ を x の**実部**，$(x - x^*)/2i$ を x の**虚部**という．

対合代数の準同型・同型を定義する．

定義 5.5（対合準同型・同型） A, B を対合代数，$\phi\colon A \to B$ を写像とする．

(1) ϕ が**対合準同型**であるとは，ϕ が代数の準同型であり，かつ対合を保つ（すなわち，任意の $x \in A$ に対して $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ である）ことをいう．
(2) ϕ が**対合同型**であるとは，ϕ が全単射であり，かつ ϕ と ϕ^{-1} がともに対合準同型であることをいう．

さらに，A, B が単位的であるとする．

(3) ϕ が**単位的対合準同型**であるとは，ϕ が対合準同型であり，かつ乗法単位元を保つ（すなわち，$\phi(1) = 1$ である）ことをいう．
(4) ϕ が**単位的対合同型**であるとは，ϕ が全単射であり，かつ ϕ と ϕ^{-1} がともに単位的対合準同型であることをいう．

全単射な対合準同型は対合同型であり，全単射な単位的対合準同型は単位的対合同型である．

5.2 対合ノルム代数，対合 Banach 代数

定義 5.6（対合ノルム代数，対合 Banach 代数） 対合を備えたノルム代数 A であって，対合 $x \mapsto x^*$ が等長である（すなわち，任意の $x \in A$ に対して $\|x^*\| = \|x\|$ である）ものを，**対合ノルム代数**という．完備な対合ノルム代数を，**対合 Banach 代数**という．

A を対合ノルム代数（対合 Banach 代数），$B \subseteq A$ とする．B が A の**部分対合ノルム代数**（**部分対合 Banach 代数**）であるとは，B が A の演算およびノルムの制限によって対合ノルム代数（対合 Banach 代数）をなすことをいう．さらに，A が単位的対合ノルム代数（単位的対合 Banach 代数）であるとき，B が A の部

分単位的対合ノルム代数（部分単位的対合 Banach 代数）であるとは，B が A の部分対合ノルム代数（部分対合 Banach 代数）であり，かつ A の乗法単位元が B の乗法単位元でもあることをいう．

例 5.7　例 1.2 で挙げた Banach 代数について考える．

(1) コンパクト分離空間 X に対して，X 上の複素数値連続関数全体のなす単位的可換 Banach 代数 $C(X)$ は，複素共役 $f \mapsto \overline{f}$ を対合として単位的可換対合 Banach 代数をなす．
(2) Hilbert 空間 E に対して，E 上の連続線型作用素全体のなす単位的 Banach 代数 $\mathscr{L}(E)$ は，随伴 $T \mapsto T^*$ を対合として単位的対合 Banach 代数をなす．なお，$\mathscr{L}(E)$ の Hermite 元，正規元，ユニタリ元を，それぞれ E 上の**自己随伴作用素**，**正規作用素**，**ユニタリ作用素**という．
(3) G を局所コンパクト分離群とし，G 上の左 Haar 測度を 1 つ固定する．G 上の複素数値可積分関数（の同値類）全体 $L^1(G)$ は，畳み込みを積として，L^1 ノルムに関して Banach 代数をなすのだった．さらに，$f \in L^1(G)$ に対して $f^* \in L^1(G)$ を

$$f^*(x) = \mathit{\Delta}_G(x)^{-1}\overline{f(x^{-1})} \qquad (x \in G)$$

と定めると（ここで，$\mathit{\Delta}_G$ は G のモジュラ関数を表す），これを対合として $L^1(G)$ は対合 Banach 代数をなす．

5.3　C* 代数

定義 5.8（C* 代数）　対合を備えた Banach 代数 A であって，条件

(C* 条件) 任意の $x \in A$ に対して，$\|x\|^2 = \|x^*x\|$ である．

を満たすものを，**C* 代数**という．

A を C* 代数，$B \subseteq A$ とする．B が A の**部分 C* 代数**であるとは，B が A の演算およびノルムの制限によって C* 代数をなすことをいう．さらに，A が単位的 C* 代数であるとき，B が A の**部分単位的 C* 代数**であるとは，B が A の部分 C* 代数であり，かつ A の乗法単位元が B の乗法単位元でもあることをいう．

注意 5.9　(1) A を単位的 C* 代数とすると，$\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$ だから，$\|1\|$ は 0 または 1 である．よって，$A \neq 0$ ならば $\|1\| = 1$ である．より一般に，$A \neq 0$ ならば，ユニタリ元 $u \in A$ に対して

$$\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1,$$

したがって $\|u\| = 1$ である．

(2) A は対合を備えた Banach 代数で，条件「任意の $x \in A$ に対して $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ である」を満たすとする．すると，$x \in A$ に対して

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$$

であり，したがって $\|x\| \leq \|x^*\|$ である．x を x^* に置き換えれば $\|x^*\| \leq \|x\|$ もわかるから，A は対合 Banach 代数である．これより，$x \in A$ に対して

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$$

だから，$\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ と合わせて，$\|x\|^2 = \|x^*x\|$ を得る．よって，A は C* 代数である．

(3) (2) からわかるように，C* 代数は対合 Banach 代数である．

例 5.10　例 5.7 で挙げた対合 Banach 代数について考える．

(1) X をコンパクト分離空間とする．容易にわかるように，$C(X)$ は単位的可換 C* 代数をなす．

(2) E を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(E)$ は単位的 C* 代数をなす．実際，$T \in \mathscr{L}(E)$ に対して

$$\|T\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \langle T\xi | T\xi \rangle = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \langle \xi | T^*T\xi \rangle \leq \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\xi\| \|T^*T\xi\| \leq \|T^*T\|$$

だから，注意 5.9 (2) より，$\mathscr{L}(E)$ は C* 条件を満たす．

(3) G を局所コンパクト分離群とし，G 上の左 Haar 測度を 1 つ固定する．$L^1(G)$ は，一般には C* 代数にならない．

C* 条件は「Hermite 元の話に帰着できる」ための条件だといえる．

定理 5.11　A を単位的 C* 代数とする．任意の正規元 $x \in A$ に対して，

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \|x\|$$

が成り立つ．

証明　$y \in A$ を Hermite 元とすると，C* 条件より $\|y^2\| = \|y\|^2$ が成り立つ．これを繰り返し用いることにより，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$ が成り立つことがわかる．

$x \in A$ を正規元とする．x^*x が Hermite であることに注意すると，C* 条件と前段の結果，および x の正規性より

$$\|x\|^{2 \cdot 2^n} = \|x^*x\|^{2^n} = \|(x^*x)^{2^n}\| = \|(x^*)^{2^n} x^{2^n}\| = \|(x^{2^n})^* x^{2^n}\| = \|x^{2^n}\|^2$$

であり，したがって $\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$ を得る．よって，スペクトル半径公式（定理 4.4）より

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n \to \infty} \|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \|x\|$$

である．□

定理 5.12　A を単位的対合 Banach 代数，B を単位的 C* 代数とする．任意の単位的対合準同型 $\phi\colon A \to B$ は，ノルム減少である．

証明　$x \in A$ を任意にとる．まず，B の C* 性と定理 5.11 より，

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^*\phi(x)\| = \|\phi(x^*x)\| = \|\phi(x^*x)\|_{\mathrm{Sp}}$$

である．次に，命題 2.10 より $\mathrm{Sp}_B(\phi(x^*x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x^*x)$ だから，

$$\|\phi(x^*x)\|_{\mathrm{Sp}} \leq \|x^*x\|_{\mathrm{Sp}}$$

である．最後に，命題 2.14 より，

$$\|x^*x\|_{\mathrm{Sp}} \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\| \|x\| = \|x\|^2$$

である．以上 3 式より，$\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ を得る．□

系 5.13　単位的 C* 代数の間の単位的対合同型は，必ず等長である．

証明　その単位的対合同型とその逆写像に定理 5.12 を適用すればよい．□

系 5.14　単位的対合代数 A 上のノルムであって A を C* 代数にするようなものは，たかだか一意である．

証明　系 5.13 からただちに従う．□

5.4　単位的可換 C* 代数上の指標

A を単位的 Banach 代数とする．$x \in A$ に対して，$\{(1/n!)x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能だから，

$$\exp x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}x^n \in A$$

が定義できる．

補題 5.15　A を単位的 Banach 代数とする．$x \in A$ が Hermite ならば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\exp(itx)$ はユニタリである．

証明　単位的 Banach 代数において対合が連続であることに注意すると，

$$(\exp(itx))^* = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(itx)^n\right)^* = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(-itx)^n = \exp(-itx)$$

を得る．これと，一般に $y,\ z \in A$ が可換ならば $\exp(y+z) = (\exp y)(\exp z)$ であることより，主張が従う．□

定理 5.16　A を単位的可換 C* 代数とする．任意の指標 $\chi \in \mathsf{X}(A)$ は，ノルム減少な単位的対合準同型である．

証明　指標 $\chi \in \mathsf{X}(A)$ を任意にとる．χ が単位的代数の準同型であることは指標の定義であり，ノルム減少であることは命題 3.3 で示した．あとは，対合を保つことを示せばよい．そのためには，Hermite 元 $x \in A$ に対して $\chi(x) \in \mathbb{R}$ であることをいえばよい（一般の元については，実部・虚部への分解を考えればよい）．

$x \in A$ を Hermite 元とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，補題 5.15 より $\exp(itx)$ はユニタリだから，ユニタリ元のノルムが 1 以下[*7] であることより（注意 5.9 (1)），

$$|e^{it\chi(x)}| = |\chi(\exp(itx))| \le \|\exp(itx)\| \le 1$$

である．これが任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つためには，$\chi(x) \in \mathbb{R}$ でなければならない．□

5.5　Gelfand–Naimark の定理

定理 5.17（Gelfand–Naimark の定理）　A を単位的可換 C* 代数とする．Gelfand 変換 $\mathscr{G}_A\colon A \to C(\mathsf{X}(A))$ は，単位的 C* 代数の同型である．すなわち，$\mathscr{G}_A$ は単位的対合同型であり，ノルムを保つ．

証明　$\mathscr{G}_A$ が単位的代数の準同型であることは，Gelfand 変換の一般論であり，命題 3.7 ですでに述べた．

*7 $A = 0$ の場合が例外にならないように，「1 以下」とした．

$\mathscr{G}_A$ が対合を保つことは，任意の指標 $\chi \in \mathsf{X}(A)$ が対合を保つこと（定理 5.16）のいいかえにすぎない．

$\mathscr{G}_A$ の等長性を示す．A は可換だから，そのすべての元は正規である．よって，系 3.9 と定理 5.11 より，

$$\|\widehat{x}\|_{C(\mathsf{X}(A))} = \|x\|_{\mathrm{Sp}} = \|x\|$$

である．

$\mathscr{G}_A$ の全射性を示す．$\mathscr{G}_A$ は等長だから，A が完備であることより $\mathscr{G}_A(A)$ も完備であり，したがって $\mathscr{G}_A(A)$ は $C(\mathsf{X}(A))$ において閉である．一方で，Stone–Weierstrass の定理より，$\mathscr{G}_A(A)$ は $C(\mathsf{X}(A))$ において稠密である．よって，$\mathscr{G}_A(A) = C(\mathsf{X}(A))$ である． □

A を単位的 C* 代数とする．$x \in A$ に対して，x を含む A の部分単位的 C* 代数の中で最小のものを，x が**生成する A の部分単位的 C* 代数**という．x および x^* を任意の順序で 0 回以上有限回掛け合わせて得られる A の元全体を S とする（すなわち，$S = \{1, x, x^*, x^2, xx^*, x^*x, (x^*)^2, \dots\}$ とする）と，x が生成する A の部分単位的 C* 代数は，S が生成する A の部分線型空間の閉包に等しい．x が生成する A の部分単位的 C* 代数が A に等しいとき，x は A を**単位的 C* 代数として生成する**という．

x が生成する A の部分単位的 C* 代数が可換であるための必要十分条件は，x が正規であることである．

系 5.18　単位的 C* 代数において，Hermite 元のスペクトルは $\mathbb{R}$ に含まれる．

証明　$x \in A$ を Hermite 元とする．部分単位的代数に移ることでスペクトルが真に小さくなることはないから（系 2.11），x が生成する部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）より，$A = C(X)$（X はコンパクト分離空間）としてよい．$C(X)$ の Hermite 元とは実数値の元のことであり，$C(X)$ の元のスペクトルはその像だから，このとき主張は明らかである． □

系 5.19　A を単位的 C* 代数，$B \subseteq A$ を部分単位的 C* 代数とする．任意の $x \in B$ に対して，

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$$

である．特に，B は A における逆元をとる操作で閉じている．

証明　$x \in B$ が A において可逆ならば B においても可逆であることを示せばよい．

まず，x が Hermite である場合を考える．$\mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \mathbb{R}$（系 5.18）より $\mathrm{Sp}_B(x)$ は穴をもたないから，命題 2.12 より $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$ である．特に，x が A において可逆ならば B においても可逆である．

次に，x が一般の元の場合を考える．x が A において可逆ならば，x^* も A において可逆であり，したがって xx^* も A において可逆である．これと前段の結果より，xx^* は B においても可逆である．これより，x は B において右逆元をもつ．同様に，x^*x を考えれば，x が B において左逆元をもつことがわかる．よって，x は B において可逆である． □

系 5.20　A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とする．

(1) x が Hermite であるための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}$ である．
(2) x がユニタリであるための必要十分条件は，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ である．

証明　部分単位的 C* 代数に移ってもスペクトルは変わらないから（系 5.19），正規元 x が生成する部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）より，$A = C(X)$（X はコンパクト分離空間）としてよい．このとき，主張は明らかである． □

注意 5.21 正規でない元 $x \in A$ に対しては，系 5.20 の結論は必ずしも成り立たない．たとえば，$\mathbb{R}^2$ 上の線型作用素 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ のスペクトルは $\{1\}$ だが，これは Hermite でもユニタリでもない．

注意 5.22 コンパクト分離空間と連続写像のなす圏を $\mathbf{CHaus}$，単位的可換 C* 代数と単位的対合準同型のなす圏を $\mathbf{CC}^*_\mathbf{1}$ と書くことにする．コンパクト分離空間 X に対してその上の複素数値連続関数全体のなす単位的可換 C* 代数 $C(X)$ を与える対応は，自然な方法で関手 $C\colon \mathbf{CHaus}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CC}^*_\mathbf{1}$ をなす．また，単位的可換 C* 代数 A に対してその Gelfand スペクトル $\mathsf{X}(A)$ を与える対応は，自然な方法で関手 $\mathsf{X}\colon \mathbf{CC}^*_\mathbf{1} \to \mathbf{CHaus}^{\mathrm{op}}$ をなす．例 3.12 と Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）より，これらは互いに他の準逆を与える $\mathbf{CHaus}$ と $\mathbf{CC}^*_\mathbf{1}$ との間の反変圏同値関手である．

6 正規元の連続関数算

本節では，5 節で証明した Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）を基礎として，単位的 C* 代数の正規元を連続関数に「代入」する操作（連続関数算）について調べる．最後には，連続関数算の応用として，単位的 C* 代数の間の単射な単位的対合準同型がノルムを保つこと（定理 6.8）を示す．

6.1 正規元の連続関数算

定理 6.1 A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，x が生成する A の部分単位的 C* 代数を A_x と書くことにする．x の A_x の元としての Gelfand 変換

$$\widehat{x}\colon \mathsf{X}(A_x) \to \mathbb{C}$$

の像は $\mathrm{Sp}_A(x)$ に等しく，$\widehat{x}$ は $\mathsf{X}(A_x)$ から $\mathrm{Sp}_A(x)$ への同相写像を与える．

証明 $\widehat{x}$ の連続性は，Gelfand 変換の一般論である（$\mathsf{X}(A_x)$ に A_x 上の各点収束位相が入っていることから従う）．また，$\mathsf{X}(A_x)$ の $\widehat{x}$ による像は，定理 3.8 と系 5.19 より

$$\{\chi(x) \mid \chi \in \mathsf{X}(A_x)\} = \mathrm{Sp}_{A_x}(x) = \mathrm{Sp}_A(x)$$

と計算できる．さらに，A_x 上の指標は連続な単位的対合準同型であり（定理 5.16），A_x は単位的 C* 代数として x によって生成されるから，A_x 上の指標は x における値によってたかだか一意に定まる．すなわち，$\widehat{x}$ は単射である．

以上より，$\widehat{x}$ は $\mathsf{X}(A_x)$ から $\mathrm{Sp}_A(x)$ への連続全単射である．$\mathsf{X}(A_x)$ および $\mathrm{Sp}_A(x)$ はコンパクト分離だから（定理 3.4，命題 2.3），$\widehat{x}\colon \mathsf{X}(A_x) \to \mathrm{Sp}_A(x)$ は同相写像である． □

定義 6.2（正規元の連続関数算） A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，x が生成する A の部分単位的 C* 代数を A_x と書くことにする．定理 6.1 の同相写像が誘導する単位的 C* 代数の同型

$$C(\mathrm{Sp}_A(x)) \to C(\mathsf{X}(A_x))$$

と，A_x 上の Gelfand 変換の逆

$$\mathscr{G}_{A_x}^{-1}\colon C(\mathsf{X}(A_x)) \to A_x$$

（Gelfand–Naimark の定理：定理 5.17 より，これは単位的 C* 代数の同型である）とを合成して得られる単位的 C* 代数の同型

$$C(\mathrm{Sp}_A(x)) \to A_x$$

を考える．この単位的 C* 代数の同型による $f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ の像を，$f(x) \in A_x \subseteq A$ と書く．

定義より，定義 6.2 の状況で，$f \mapsto f(x)$ は $C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A_x への単位的 C* 代数の同型であり，したがって $C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への単位的 C* 代数の埋め込みである．特に，$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，$f(x)$ は常に正規であり，また $f(x)$ が Hermite であるための必要十分条件は f が実数値であることである．

命題 6.3 A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，$\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を z と書くことにする．$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への写像 $f \mapsto f(x)$ は，$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への単位的対合準同型であって，z を x に移す唯一のものである．

証明 $f \mapsto f(x)$ が単位的対合準同型（より強く，単位的 C* 代数の埋め込み）であることは，上で述べたとおりである．定理 6.1 の同相写像が誘導する単位的 C* 代数の同型によって，$z \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ は $z \circ \widehat{x} = \widehat{x}$ に移され，これは $\mathscr{G}_{A_x}^{-1} \colon C(\mathsf{X}(A_x)) \to A_x$ によって x に移されるから，$f \mapsto f(x)$ は z を x に移す．

単位的可換 C* 代数の間の単位的対合準同型は自動的に連続であり（定理 5.12），また，Stone–Weierstrass の定理より，$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ は単位的 C* 代数として z で生成されるから，条件を満たす写像は一意である． □

例 6.4 A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とする．

(1) f を複素係数 1 変数多項式とし，f を $\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の多項式関数とみなしたものもそのまま f と書くことにする．すると，連続関数算の意味での $f(x)$ は，f に x を形式的に代入した結果と一致する．

(2) $0 \in \mathrm{Sp}_A(x)$，すなわち x が可逆なとき，またそのときに限り x を $f(\lambda) = \lambda^{-1}$ で与えられる連続関数 f に代入でき，$f(x) = x^{-1}$ となる．

例 6.5 X をコンパクト分離空間，$f \in C(X)$ とする．写像 $C(\mathrm{Sp}_{C(X)}(f)) = C(f(X)) \to C(X)$, $g \mapsto g \circ f$ は，単位的対合準同型であって，$f(X)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を f に移す．よって，命題 6.3 より，$g \in C(\mathrm{Sp}_{C(X)}(f)) = C(f(X))$ に対して $g(f) = g \circ f$ である．

A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，x が生成する A の部分単位的 C* 代数を A_x と書くことにする．$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，$f(x), (f(x))^* \in A_x$ であり，A_x は可換だから，$f(x)$ は正規である．したがって，$f(x)$ の連続関数算を考えることができる．

命題 6.6 A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とし，$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ とする．

(1) $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$ である．

(2) $g \in C(\mathrm{Sp}_A(f(x)))$ に対して，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ である．

証明 (1) x が生成する A の部分単位的 C* 代数を，A_x と書くことにする．$f \mapsto f(x)$ が $C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から A への単位的 C* 代数の埋め込みであることと系 5.19 より，

$$\mathrm{Sp}_A(f(x)) = \mathrm{Sp}_{C(\mathrm{Sp}_A(x))}(f) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$$

である．

(2) $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を z と書くことにする．$C(\mathrm{Sp}_A(f(x))) = C(f(\mathrm{Sp}_A(x)))$ から A への写像 $g \mapsto (g \circ f)(x)$ および $g \mapsto g(f(x))$ は，ともに z を $f(x)$ に移す単位的対合準同型だから，命題 6.3 より両者は等しい． □

A, B を単位的 C* 代数，$\phi\colon A \to B$ を単位的対合準同型とする．$x \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$

であること（命題 2.10）に注意する．

命題 6.7　A, B を単位的 C* 代数，$\phi\colon A \to B$ を単位的対合準同型，$x \in A$ を正規元とする．$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，

$$\phi(f(x)) = f|_{\mathrm{Sp}_B(\phi(x))}(\phi(x))$$

である．

証明　$\mathrm{Sp}_A(x)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を z と書くことにする．$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ から B への写像 $f \mapsto \phi(f(x))$ および $f \mapsto f|_{\mathrm{Sp}_B(\phi(x))}(\phi(x))$ は，ともに z を $\phi(x)$ に移す単位的対合準同型である．単位的可換 C* 代数の間の単位的対合準同型は自動的に連続であり（定理 5.12），また，Stone–Weierstrass の定理より，$C(\mathrm{Sp}_A(x))$ は単位的 C* 代数として z で生成されるから，両者は等しい．□

6.2　単位的 C* 代数の間の単射準同型

定理 6.8　A, B を単位的 C* 代数，$\phi\colon A \to B$ を単位的対合準同型とする．ϕ が単射ならば，ϕ は等長である（したがって，ϕ は単位的 C* 代数の埋め込みである）．

証明　ϕ が単射であるとする．示すべきことは，任意の $x \in A$ に対して $\|\phi(x)\| = \|x\|$ であることだが，C* 条件より，任意の Hermite 元 $x \in A$ に対してこれを示せば十分である．さらに，Hermite 元に対してはノルムとスペクトル半径は等しいから（定理 5.11），結局，Hermite 元 $x \in A$ に対して $\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) = \mathrm{Sp}_A(x)$ を示せばよい．

Hermite 元 $x \in A$ を任意にとる．$\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ が成り立つことは，単位的代数の一般論である（命題 2.10）．$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x) \setminus \mathrm{Sp}_B(\phi(x))$ がとれたと仮定する．$\mathrm{Sp}_A(x)$ はコンパクト分離（命題 2.3），したがって完全正則であり，$\mathrm{Sp}_B(\phi(x))$ はそのコンパクト集合だから（命題 2.3），$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ であって $f(\lambda) \neq 0$ かつ $f|_{\mathrm{Sp}_B(\phi(x))} = 0$ なるものがとれる．すると，命題 6.7 より

$$\phi(f(x)) = f|_{\mathrm{Sp}_B(\phi(x))}(\phi(x)) = 0$$

であり，ϕ は単射だから $f(x) = 0$ となる．さらに，$C(\mathrm{Sp}_A(x)) \to A$, $g \mapsto g(x)$ は単射だから，$f = 0$ となる．ところがこれは，$f(\lambda) \neq 0$ に矛盾する．よって，背理法より，$\mathrm{Sp}_B(\phi(x)) = \mathrm{Sp}_A(x)$ である．□

7　単位的 C* 代数の正元

7.1　単位的 C* 代数の正元

定義 7.1（正元）　A を単位的 C* 代数とする．$x \in A$ が正であるとは，x が Hermite かつ $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ であることをいう．Hermite 元 $x, y \in A$ に対して，$x - y$ が正であることを，$x \leq y$ あるいは $y \geq x$ と書く．

単位的 C* 代数の正規元が Hermite であるための必要十分条件はそのスペクトルが $\mathbb{R}$ に含まれることだから（系 5.20 (1)），正元の定義は「正規かつスペクトルが $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に含まれること」としても同じである．

A を単位的 C* 代数，B を A の部分単位的 C* 代数とする．$x \in B$ に対して $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$ だから（系 5.19），$x \in B$ が A において正であることと B において正であることとは同値である．

A, B を単位的 C* 代数，$\phi\colon A \to B$ を単位的対合準同型とする．ϕ は Hermite 元を Hermite 元に移し，ϕ で移された先の元のスペクトルはもとの元のスペクトルに含まれるから（命題 2.10），$x \in A$ が正ならば $\phi(x) \in B$ も正である．

例 7.2　X をコンパクト分離空間とする．$f \in C(X)$ のスペクトルは f の値域だから（例 2.2 (1)），f が正であるための必要十分条件は，f の値域が $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に含まれることである．

7.3 節で，Hilbert 空間上の連続線型作用素全体のなす単位的 C* 代数の正元について調べる．

命題 7.3　A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を Hermite 元とし，$t \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\|x\| \leq t$ とする．このとき，x が正であることと $\|t - x\| \leq t$ とは同値である．
(2) $\|x\| \leq t$ ならば $x \leq t$ である．
(3) x が正であるとする．このとき，$\|x\| \leq t$ と $x \leq t$ とは同値である．

証明　部分単位的 C* 代数に移ってもスペクトルは変わらないから（系 5.19），Hermite 元 x が生成する部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）より，$A = C(X)$（X はコンパクト分離空間）としてよい．このとき，主張は明らかである． □

系 7.4　単位的 C* 代数 A の Hermite 元 x, y について，$0 \leq x \leq y$ ならば $\|x\| \leq \|y\|$ である．

証明　$0 \leq x \leq y$ とする．命題 7.3 (2) より $y \leq \|y\|$ だから，仮定と合わせて $x \leq \|y\|$ を得る．これと命題 7.3 (3) より，$\|x\| \leq \|y\|$ である． □

命題 7.5　A を単位的 C* 代数とする．

(1) $\lambda \geq 0$ と正元 $x \in A$ に対して，λx も正である．
(2) x, $y \in A$ が正ならば，$x + y$ も正である．
(3) $x \in A$ について，x, $-x$ がともに正ならば，$x = 0$ である．
(4) A の正元全体の集合は，A の閉集合である．

証明　(1)　明らかである．

(2)　x, y が正ならば，命題 7.3 (1) より $\|\|x\| - x\| \leq \|x\|$ かつ $\|\|y\| - y\| \leq \|y\|$ だから，

$$\|(\|x\| + \|y\|) - (x + y)\| \leq \|\|x\| - x\| + \|\|y\| - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

である．よって，ふたたび命題 7.3 (1) より，$x + y$ は正である．

(3)　x, $-x$ がともに正ならば，$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \{0\}$ だから，$\|x\| = \|x\|_{\mathrm{Sp}} = 0$ である（定理 5.11）．

(4)　命題 7.3 (1) より，A の正元全体の集合は

$$\{x \in A \mid x^* = x \text{ かつ } \|\|x\| - x\| \leq \|x\|\}$$

と書ける．対合やノルムの連続性より，これは A の閉集合である． □

A を単位的 C* 代数とする．命題 7.5 より，A の Hermite 元全体のなす実線型空間上の関係 $\leq$ が順序（反射律，推移律，反対称律を満たす関係）であることがわかる．

7.2　正元と連続関数算

命題 7.6　A を単位的 C* 代数，$x \in A$ を正規元とする．$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して，$f(x)$ が正であるための必要十分条件は，f の値域が $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に含まれることである．

証明　$f(x)$ が正規であることと，$f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ に対して $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A(x))$ であること（命題 6.6）から従う．　□

系 7.7　A を単位的 C* 代数とする．

(1) Hermite 元 $x \in A$ に対して，x^2 は正である．
(2) 可逆な正元 $x \in A$ に対して，x^{-1} は正である．　□

定義 7.8（正の部分・負の部分）　A を単位的 C* 代数とする．連続関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を，それぞれ

$$f(t) = \begin{cases} t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0), \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & (t \geq 0) \\ t & (t < 0) \end{cases}$$

と定める．Hermite 元 $x \in A$ に対して，$f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ x の**正の部分**，**負の部分**といい，x^+, x^- と書く．

定義 7.8 の状況で，$f - g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ かつ $fg = gf = 0$ だから，連続関数算の準同型性より，$x^+ - x^- = x$ かつ $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ である．また，命題 7.6 より，x^+, x^- は正である．

定義 7.9（実数による冪）　A を単位的 C* 代数とする．

(1) $x \in A$ を正元とし，$\alpha \geq 0$ とする．$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の連続関数 $t \mapsto t^\alpha$ に代入した結果を，x^α と書く．
(2) $x \in A$ を可逆な正元とし，$\alpha < 0$ とする．$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ 上の連続関数 $t \mapsto t^\alpha$ に代入した結果を，x^α と書く．

定義 7.8 の状況で，連続関数算の準同型性と命題 6.6 より，$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ かつ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ である（ただし，x は正元とし，α または β が真に負ならば x は可逆であるとする）．また，命題 7.6 より，x^α は正である．

補題 7.10　A を単位的 $\mathbb{K}$-代数とする．$x, y \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(xy) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}_A(yx) \setminus \{0\}$ である．

証明　示すべきことは，$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ に対して $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(xy) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}_A(yx)$ であることだが，x を $\lambda^{-1}x$ で置き換えることにより，$\lambda = 1$ の場合だけを考えればよい．$1 - xy$ が可逆ならば，$1 - yx$ は逆元 $1 + y(1 - xy)^{-1}x$ をもち，可逆となる．x と y を入れ替えれば，逆もわかる．これで示された．　□

補題 7.11　A を単位的 C* 代数，$x \in A$ とする．$x^*x \leq 0$ ならば $x = 0$ である．

証明　$x^*x \leq 0$ とすると，補題 7.10 より $xx^* \leq 0$ でもあり，したがって命題 7.5 (2) より $x^*x + xx^* \leq 0$ である．x の実部・虚部をそれぞれ a, b と置くと，a, b は Hermite であり，

$$0 \geq x^*x + xx^* = (a - ib)(a + ib) + (a + ib)(a - ib) = 2(a^2 + b^2),$$

したがって $a^2 + b^2 \leq 0$ である．また，b は Hermite だから $-b^2 \leq 0$ である（系 7.7 (1)）．したがって，命題 7.5 (2) より $a^2 = (a^2 + b^2) + (-b^2) \leq 0$ である．一方で，a は Hermite だから $a^2 \geq 0$ である（系 7.7 (1)）．

よって，命題 7.5 (3) より，$a^2=0$ である．これより $\|a\|^2=\|a^2\|=0$ だから，$a=0$ である．同様にして $b=0$ もわかるから，$x=0$ である． □

定理 7.12 A を単位的 C* 代数とする．$x\in A$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) x は正である．
(b) ある Hermite 元 $y\in A$ が存在して，$x=y^2$ となる．
(c) ある $y\in A$ が存在して，$x=y^*y$ となる．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) x が正であるとする．$y=x^{1/2}$ と置けば，y は $y^2=x$ を満たす Hermite 元である．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) 任意の $y\in A$ に対して，y^*y が正であることを示せばよい．y^*y が Hermite であることは明らかだから，$\mathrm{Sp}_A(y^*y)\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$ を示す．$a=((y^*y)^+)^{1/2}$，$b=((y^*y)^-)^{1/2}$ と置くと，これらは Hermite であり，$a^2-b^2=y^*y$ かつ $ab=0$ を満たす．これらのことと系 7.7 (1) より

$$(yb)^*(yb)=by^*yb=b(a^2-b^2)b=-b^4\leq 0$$

だから，補題 7.11 より $yb=0$ であり，したがって $b^4=-(yb)^*(yb)=0$ である．これより $\|b\|^4=\|b^4\|=0$ だから，$b=0$ である．よって，$y^*y=a^2-b^2=a^2$ であり，a は Hermite だから，これは正である（系 7.7 (1)）． □

系 7.13 A を単位的 C* 代数，$x,\ y\in A$ を Hermite 元とする．$x\leq y$ ならば，任意の $z\in A$ に対して $z^*xz\leq z^*yz$ である．

証明 x,y は Hermite だから，$z^*xz,\ z^*yz$ も Hermite である．$x\leq y$ とすると，定理 7.12 より，ある $a\in A$ が存在して $y-x=a^*a$ と書ける．すると $z^*yz-z^*xz=z^*a^*az=(az)^*(az)$ だから，ふたたび定理 7.12 より，$z^*xz\leq z^*yz$ である． □

命題 7.14 A を単位的 C* 代数，$x,y\in A$ を Hermite 元とする．$0\leq x\leq y$ かつ x が可逆ならば，y も可逆であり，$y^{-1}\leq x^{-1}$ である．

証明 $0\leq x\leq y$ かつ x が可逆であるとする．

まず，$x=1$ の場合を考える．部分単位的 C* 代数に移っても正性・可逆性は変わらないから（系 5.19），Hermite 元 y が生成する部分単位的 C* 代数を考えることにより，はじめから A は可換であるとしてよい．さらに，Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）より，$A=C(X)$（X はコンパクト分離空間）としてよい．このとき，主張は明らかである．

次に，一般の場合を考える．$z=x^{-1/2}yx^{-1/2}$ と置くと，$0\leq x\leq y$ と系 7.13 より $1=x^{-1/2}xx^{-1/2}\leq z$ である．したがって，前段の結果より，z は可逆かつ $z^{-1}\leq 1$ である．ここで，

$$yx^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}=x^{1/2}zz^{-1}x^{-1/2}=1$$

であり，同様に $x^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}y=1$ だから，$x^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}$ は y の逆元である．さらに，$z^{-1}\leq 1$ と系 7.13 より，

$$y^{-1}=x^{-1/2}z^{-1}x^{-1/2}\leq x^{-1/2}x^{-1/2}=x^{-1}$$

である． □

7.3　例と応用（極分解）

Hilbert 空間 E 上の連続線型作用素 $T \in \mathscr{L}(E)$ が正であるための条件について考える．$\mathscr{L}(E)$ の正元を，E 上の**正作用素**と呼ぶ．

位相線型空間 E, F に対して，E から F への連続線型作用素全体のなす空間を $\mathscr{L}(E; F)$ と書く．

補題 7.15　E, F を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E; F)$ に対して，$\operatorname{Ker} T^*$ と $\overline{\operatorname{Im} T}$ は互いに他の（F における）直交補空間である．

証明　$\xi \in F$ に対して，$\xi \in \operatorname{Ker} T^*$ は，任意の $\eta \in E$ に対して $\langle T^*\xi | \eta \rangle = 0$ であることと同値である．ここで $\langle T^*\xi | \eta \rangle = \langle \xi | T\eta \rangle$ だから，これは $\xi \in (\operatorname{Im} T)^\perp = (\overline{\operatorname{Im} T})^\perp$ と同値である．よって，$\operatorname{Ker} T^*$ と $\overline{\operatorname{Im} T}$ は互いに他の直交補空間である．　□

補題 7.16　E を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E)$ に対して，$\operatorname{Sp}_{\mathscr{L}(E)}(T)$ は

$$\nu(T) = \{\langle \xi | T\xi \rangle \mid \xi \in E, \|\xi\| = 1\}$$

の閉包に含まれる[*8]．

証明　示すべきことは，任意の $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathscr{L}(E)}(T)$ に対して $\lambda \in \overline{\nu(T)}$ であることだが，T を $T - \lambda$ に置き換えることにより，$\lambda = 0$ の場合だけを考えればよい．$0 \in \operatorname{Sp}_{\mathscr{L}(E)}(T)$，すなわち T が可逆でないとする．

まず，ある $c \geq 0$ が存在して，任意の $\xi \in E$ に対して $\|\xi\| \leq c\|T\xi\|$ が成り立つ場合を考える．このとき，T は単射かつその像は閉だが [6, 補題 3.17]，一方で T は可逆でないから，T の像は稠密でない．したがって，補題 7.15 より T^* は単射でないから，ある $\xi \in E$ が存在して $\|\xi\| = 1$ かつ $T^*\xi = 0$ を満たす．この ξ について

$$\langle \xi | T\xi \rangle = \langle T^*\xi | \xi \rangle = 0$$

となるから，$0 \in \nu(T)$ である．

次に，それ以外の場合を考える．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\xi \in E$ が存在し，$\|\xi\| = 1$ かつ $\|T\xi\| \leq \epsilon$ を満たす．この ξ について，Cauchy–Schwarz の不等式より

$$|\langle \xi | T\xi \rangle| \leq \|\xi\|\|T\xi\| \leq \epsilon$$

となるから，$0 \in \overline{\nu(T)}$ である．これで示された．　□

定理 7.17　E を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E)$ に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) T は正である．
(b) ある自己随伴作用素 $S \in \mathscr{L}(E)$ が存在して，$T = S^2$ となる．
(c) Hilbert 空間 F と $S \in \mathscr{L}(E; F)$ が存在して，$T = S^*S$ となる．
(d) 任意の $\xi \in E$ に対して $\langle \xi | T\xi \rangle \geq 0$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　定理 7.12 の特別な場合である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

[*8] $\nu(T)$ を T の**数域**といい，$\nu(T)$ の元の絶対値の上限を T の**数域半径**という．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　Hilbert 空間 F と $S \in \mathscr{L}(E;F)$ について，$T = S^*S$ であるとすると，任意の $\xi \in E$ に対して $\langle \xi | T\xi \rangle = \langle \xi | S^*S\xi \rangle = \|S\xi\|^2 \geq 0$ が成り立つ．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　任意の $\xi \in E$ に対して $\langle \xi | T\xi \rangle \geq 0$ であるとする．$\xi, \eta \in E$ に対して

$$\langle \xi | T\eta \rangle + \langle \eta | T\xi \rangle = \langle \xi + \eta | T(\xi + \eta) \rangle - \langle \xi | T\xi \rangle - \langle \eta | T\eta \rangle \in \mathbb{R}$$

だから，$\operatorname{Im}\langle \eta | T\xi \rangle = -\operatorname{Im}\langle \xi | T\eta \rangle$ である．また，この式で ξ を $i\xi$ に置き換えることにより，$\operatorname{Re}\langle \eta | T\xi \rangle = \operatorname{Im}\langle \eta | T(i\xi) \rangle = -\operatorname{Im}\langle i\xi | T\eta \rangle = \operatorname{Re}\langle \xi | T\eta \rangle$ を得る．したがって，$\langle \eta | T\xi \rangle = \overline{\langle \xi | T\eta \rangle} = \langle T\eta | \xi \rangle$ だから，T は自己随伴である．また，補題 7.16 より $\operatorname{Sp}_{\mathscr{L}(E)}(T) \subseteq \overline{\nu(T)} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ である．よって，T は正である．[*9] □

次に，連続線型作用素の極分解について解説する．定理 7.17 より，Hilbert 空間の間の連続線型作用素 $T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，T^*T が $\mathscr{L}(E)$ の正元であることに注意する．

定義 7.18　E, F を Hilbert 空間とする．$T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$(T^*T)^{1/2}$ を T の**絶対値**といい，$|T|$ と書く．

$T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$|T|$ は E 上の正作用素である．$E = F$ かつ T が E 上の正規作用素ならば，$|T|$ は $\operatorname{Sp}_{\mathscr{L}(E)}(T)$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto |\lambda|$ に T を代入した結果に一致する（命題 6.6）．

命題 7.19　E を Hilbert 空間，$T \in \mathscr{L}(E;F)$ とする．

(1) 任意の $\xi \in E$ に対して，$\||T|\xi\| = \|T\xi\|$ が成り立つ．特に，$\||T|\| = \|T\|$ である．
(2) $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$，$\overline{\operatorname{Im}|T|} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ である．

証明　(1)　$\xi \in E$ に対して

$$\||T|\xi\|^2 = \langle |T|\xi | |T|\xi \rangle = \langle \xi | |T|^2\xi \rangle = \langle \xi | T^*T\xi \rangle = \langle T\xi | T\xi \rangle = |T\xi|^2$$

であり，したがって $\||T|\xi\| = \|T\xi\|$ である．ここから $\||T|\| = \|T\|$ が従うことは明らかである．

(2)　$\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$ は (1) からただちに従う．$|T|$ が自己随伴であることと補題 7.15 より $\overline{\operatorname{Im}|T|} = (\operatorname{Ker}|T|)^{\perp}$ だから，$\overline{\operatorname{Im}|T|} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ もわかる． □

E, F を Hilbert 空間，$T \in \mathscr{L}(E;F)$ とする．$(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ を T の**始空間**といい，$\overline{\operatorname{Im} T}$ を T の**終空間**という．T は制限によって T の始空間から T の終空間への連続線型作用素を誘導するが，これがユニタリであるとき，T は**部分等長**であるという．

定理 7.20　E, F を Hilbert 空間，$T \in \mathscr{L}(E;F)$ とする．$U \in \mathscr{L}(E;F)$ であって，$T = U|T|$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} T$ を満たすものが一意に存在する．さらに，この条件を満たす U は部分等長であり，T と同じ始空間・終空間をもつ．

証明　任意の $\xi \in E$ に対して $\||T|\xi\| = |T\xi|$ だから（命題 7.19 (1)），等長線型同型 $V_0 \colon \operatorname{Im}|T| \to \operatorname{Im} T$ であって，任意の $\xi \in E$ に対して $V_0|T|\xi = T\xi$ を満たすものが一意に存在する．完備化の一意性より，V_0 はユニタリ作用素 $V \colon \overline{\operatorname{Im}|T|} \to \overline{\operatorname{Im} T}$ に一意に延長される．

[*9] 定理 7.12（一般の単位的 C* 代数での正元の特徴付け）の (c) $\Longrightarrow$ (a) の証明では補題 7.10 と補題 7.11 を準備する必要があったが，定理 7.17（正作用素の特徴付け）では条件 (d) を経由することでそれを回避できている．

$U \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$T = U|T|$ は $U|_{\mathrm{Im}|T|} = V$ といいかえられる．また，命題 7.19 (2) より，$\mathrm{Im}|T|$ の直交補空間は $\mathrm{Ker}\, T$ である．よって，$T = U|T|$ かつ $\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}\, T$ を満たす $U \in \mathscr{L}(E;F)$ は一意に存在し，その U は $\mathrm{Ker}\, T$ を始空間，$\overline{\mathrm{Im}\, T}$ を終空間とする部分等長作用素である． □

定義 7.21（極分解） E, F を Hilbert 空間，$T \in \mathscr{L}(E;F)$ とする．定理 7.20 の記号において，$(|T|, U)$ を T の**極分解**という．

極分解は，次のようにも特徴付けられる．

命題 7.22 E, F を Hilbert 空間, $T \in \mathscr{L}(E;F)$ とする．正作用素 $A \in \mathscr{L}(E)$ と部分等長作用素 $U \in \mathscr{L}(E;F)$ が $T = UA$ かつ $\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}\, A$ を満たすならば，(A, U) は T の極分解である．

証明 正作用素 $A \in \mathscr{L}(E)$ と部分等長作用素 $U \in \mathscr{L}(E;F)$ が，$T = UA$ かつ $\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}\, A$ を満たすとする．部分等長作用素の定義から容易にわかるように，U^*U は $(\mathrm{Ker}\, U)^\perp$ の上への直交射影である．いま，仮定より $(\mathrm{Ker}\, U)^\perp = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}\, A}$ だから（A が自己随伴であることと補題 7.15 を用いた），$T^*T = AU^*UA = A^2$ であり，したがって $|T| = (T^*T)^{1/2} = (A^2)^{1/2} = A$ である．これより，$U \in \mathscr{L}(E;F)$ は $T = U|T|$ かつ $\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}|T| = \mathrm{Ker}\, T$ を満たすから（命題 7.19），極分解の一意性（定理 7.20）より，$(A, U) = (|T|, U)$ は T の極分解である． □

8 正値線型形式と状態，表現

8.1 単位的 C* 代数上の正値線型形式

定義 8.1（正値線型形式） 単位的 C* 代数 A 上の（複素）線型形式 ρ が**正値**であるとは，任意の正元 $x \in A$ に対して $\phi(x) \geq 0$ が成り立つことをいう．

命題 8.2 A を単位的 C* 代数とする．A 上の正値線型形式 ρ に対して，写像

$$A \times A \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \rho(x^*y)$$

は A 上の正値 Hermite 形式である．

証明 $(x, y) \mapsto \rho(y^*x)$ が準双線型であることは明らかである．また，ρ が正値であることと定理 7.12 より，任意の $x \in A$ に対して $\rho(x^*x) \geq 0$ である．最後に，任意の x, $y \in A$ に対して $\rho(y^*x) = \overline{\rho(x^*y)}$ であることを示す．x, $y \in A$ に対して

$$\rho(x^*y) + \rho(y^*x) = \rho((x+y)^*(x+y)) - \rho(x^*x) - \rho(y^*y) \in \mathbb{R}$$

だから，$\mathrm{Im}\, \rho(y^*x) = -\mathrm{Im}\, \rho(x^*y)$ である．また，この式で x を ix に置き換えることにより，$\mathrm{Re}\, \rho(y^*x) = \mathrm{Im}\, \rho(y^*(ix)) = -\mathrm{Im}\, \rho((ix)^*y) = \mathrm{Re}\, \rho(x^*y)$ を得る．よって，$\rho(y^*x) = \overline{\rho(x^*y)}$ である． □

系 8.3 A を単位的 C* 代数とし，ρ を A 上の正値線型形式とする．任意の x, $y \in A$ に対して，

$$|\rho(x^*y)|^2 \leq \rho(x^*x)\rho(y^*y)$$

が成り立つ．

証明　命題 8.2 と Cauchy–Schwarz の不等式から従う． □

命題 8.4　単位的 C* 代数 A 上の正値線型形式 ρ は連続であり，$\|\rho\| = \rho(1)$ を満たす．

証明　A を単位的 C* 代数とし，ρ を A 上の正値線型形式とする．$x \in A$ に対して，系 8.3 より，

$$|\rho(x)|^2 = |\rho(1^*x)|^2 \leq \rho(1^*1)\rho(x^*x) = \rho(1)\rho(x^*x) \tag{$*$}$$

である．さらに，$\|x\| \leq 1$ ならば，x^*x はノルム 1 以下の Hermite 元だから，$x^*x \leq 1$ である（命題 7.3 (2)）．したがって，

$$\rho(x^*x) \leq \rho(1) \tag{$**$}$$

である．($*$), ($**$) より，$\|x\| \leq 1$ ならば $|\rho(x)| \leq \rho(1)$ である．よって，$\|\rho\| \leq \rho(1)$ である．

$A = 0$ ならば，明らかに $\|\rho\| = 0 = \rho(1)$ である．$A \neq 0$ ならば $\|1\| = 1$ だから，$\|\rho\| \geq \rho(1)$ であり，前段の結果と合わせて $\|\rho\| = \rho(1)$ を得る． □

例 8.5　X をコンパクト分離空間とする．命題 8.4 より，$C(X)$ 上の正値線型形式は自動的に連続である．このことは，積分論的には次のように説明できる．2 種類の Riesz の表現定理より，$C(X)$ 上の正値線型形式は X 上の正則な正値 Borel 測度と対応し，一方で $C(X)$ 上の正値連続線型形式は X 上の正則な有限正値 Borel 測度と対応する．ところが，コンパクト分離空間上の正則 Borel 測度は自動的に有限だから，$C(X)$ 上の正値線型形式は自動的に連続である．

8.2　Gelfand–Naimark–Segal 構成

単位的 C* 代数の表現とそれに関連する概念を定義する．

定義 8.6（表現，ユニタリ同値，巡回ベクトル）　A を単位的 C* 代数とする．

(1) E が Hilbert 空間，$\pi\colon A \to \mathscr{L}(E)$ が単位的対合準同型であるとき，π は A の E 上の**表現**である，あるいは (π, E) は A の**表現**であるという．[*10]

(2) (π, E), (π', E') を A の表現とする．ユニタリ作用素 $U\colon E \to E'$ であって，任意の $x \in A$ に対して $U\pi(x) = \pi'(x)U$ を満たすものを，表現 (π, E) から (π', E') への**ユニタリ同値**という．

(3) (π, E) を A の表現とする．$\xi \in E$ であって $\pi(A)\xi = \{\pi(x)\xi \mid x \in A\}$ が E において稠密であるようなものを，表現 (π, E) に対する**巡回ベクトル**という．

A を単位的 C* 代数とする．A の表現 (π, E) と $\xi \in E$ に対して，A 上の線型形式 ρ を

$$\rho(x) = \langle \xi | \pi(x)\xi \rangle \qquad (x \in A)$$

と定めると，ρ は正値である．実際，$x \in A$ を正元とすると，ある $y \in A$ が存在して $x = y^*y$ と書けるから（定理 7.12），

$$\rho(x) = \langle \xi | \pi(y^*y)\xi \rangle = \langle \pi(y)\xi | \pi(y)\xi \rangle = \|\pi(y)\xi\|^2 \geq 0$$

を得る．実は，これの逆にあたる次の定理が成り立つ．

[*10] 単位的とは限らない C* 代数を扱う場合には，単位的対合準同型の代わりに対合準同型を表現という．本稿では単位的でない場合は考えないから，定義に乗法単位元を保つことを含めることにした．

定理 8.7（Gelfand–Naimark–Segal 構成） A を単位的 C* 代数とし，ρ を A 上の正値線型形式とする．

(1) A の表現 (π, E) とそれに対する巡回ベクトル $\xi \in E$ であって, 任意の $x \in A$ に対して $\rho(x) = \langle \xi | \pi(x) \xi \rangle$ が成り立つようなものが存在する．

(2) (1) の条件を満たす組 (π, E, ξ) は，ユニタリ同値を除いて一意である．すなわち，(π, E, ξ), (π', E', ξ') がともに (1) の条件を満たすならば，(π, E) から (π', E') へのユニタリ同値 U であって，$U\xi = \xi'$ を満たすものが存在する．

証明 (1) $(x, y) \mapsto \rho(y^*x)$ は A 上の正値 Hermite 形式だった（命題 8.2）．この正値 Hermite 形式の退化部分線型空間を N と置く．すなわち，

$$\begin{aligned} N &= \{x \in A \mid \text{任意の } y \in A \text{ に対して } \rho(y^*x) = 0\} \\ &= \{x \in A \mid \text{任意の } y \in A \text{ に対して } \rho(x^*y) = 0\} \end{aligned}$$

と置く．すると，N は A の左イデアルであり，$(x, y) \mapsto \rho(x^*y)$ は A/N 上に非退化な正値 Hermite 形式を誘導する．以下，これによって A/N を分離前 Hilbert 空間とみなしたものを E_0 と置き，自然な全射 $A \to A/N = E_0$ による $x \in A$ の像を $\overline{x}$ と書く．

N が A の左イデアルであることより，$x \in A$ に対して，A 上の線型作用素 $y \mapsto xy$ は E_0 上の線型作用素 $\pi_0(x)\colon E_0 \to E_0$, $\overline{y} \mapsto \overline{xy}$ を誘導する．この π_0 は，A から「E_0 上の線型作用素全体のなす単位的代数」への単位的代数の準同型である．また，任意の $x \in A$ と $\overline{y}, \overline{z} \in E_0$（$y$, $z \in A$）に対して，

$$\begin{aligned} \langle \overline{y} | \pi_0(x) \overline{z} \rangle_{E_0} &= \langle \overline{y} | \overline{xz} \rangle_{E_0} = \rho(y^*xz) \\ &= \rho((x^*y)^*z) = \langle \overline{x^*y} | \overline{z} \rangle_{E_0} = \langle \pi_0(x^*) \overline{y} | \overline{z} \rangle_{E_0} \end{aligned} \tag{$*$}$$

が成り立つ．さらに，任意の $x \in A$ に対して，$\pi_0(x)\colon E_0 \to E_0$ が連続であることを示す．π_0 の線型性より，$\|x\| \leq 1$ のときだけを考えればよい．$\overline{y} \in E_0$（$y \in A$）に対して，

$$\|\pi_0(x)\overline{y}\|_{E_0}^2 = \langle \overline{xy} | \overline{xy} \rangle_{E_0} = \rho(y^*x^*xy) \tag{$**$}$$

である．一方で，$\|x\| \leq 1$ より x^*x はノルム 1 以下の Hermite 元だから，$x^*x \leq 1$ であり（命題 7.3 (2)），したがって $y^*x^*xy \leq y^*y$ だから（系 7.13），

$$\rho(y^*x^*xy) \leq \rho(y^*y) = \|\overline{y}\|_{E_0}^2 \tag{$***$}$$

である．($**$), ($***$) より，$\|\pi_0(x)\overline{y}\|_{E_0} \leq \|\overline{y}\|_{E_0}$ を得る．よって，π_0 は連続である．

E_0 の完備化を E と置く．また，各 $x \in A$ に対して，E_0 上の連続線型作用素 $\pi_0(x)$ が誘導する E 上の連続線型作用素を $\pi(x)$ と置く．すると，π_0 が単位的代数の準同型であることより，π も単位的代数の準同型である．また，($*$) より，π が対合を保つこともわかる．よって，(π, E) は A の表現である．

$\xi = \overline{1} \in E$ と置く．$\pi(A)\xi = \{\overline{x} \mid x \in A\} = E_0$ は E において稠密だから，ξ は (π, E) に対する巡回ベクトルである．また，任意の $x \in E$ に対して，

$$\langle \xi | \pi(x) \xi \rangle_E = \langle \overline{1} | \overline{x} \rangle_E = \rho(1^*x) = \rho(x)$$

が成り立つ．よって，(π, E, ξ) は条件を満たす．

(2) (π, E, ξ), (π', E', ξ') がともに (1) の条件を満たすとする．すると，任意の $x \in A$ に対して

$$\|\pi(x)\xi\|_E^2 = \langle \xi | \pi(x^*x) \xi \rangle_E = \rho(x^*x) = \langle \xi' | \pi'(x^*x) \xi' \rangle_{E'} = \|\pi'(x)\xi'\|_{E'}^2$$

であり，したがって $\|\pi(x)\xi\|_E = \|\pi'(x)\xi'\|_{E'}$ である．よって，等長線型作用素 $U_0\colon \pi(A)\xi \to \pi'(A)\xi'$, $\pi(x)\xi \mapsto \pi'(x)\xi'$ が矛盾なく定まる．E, E' はそれぞれ $\pi(A)\xi$, $\pi'(A)\xi'$ を稠密に含む Hilbert 空間だから，U_0 はユニタリ作用素 $U\colon E \to E'$ に延長される．

このU が条件を満たすことを示す．$x \in A$ とすると，任意の $\pi(y)\xi \in \pi(A)\xi$（$y \in A$）に対して

$$\pi'(x)U\pi(y)\xi = \pi'(x)\pi'(y)\xi' = \pi'(xy)\xi' = U\pi(xy)\xi = U\pi(x)\pi(y)\xi$$

だから，$\pi(A)\xi$ が E において稠密であることと等式延長原理より，$U\pi(x) = \pi'(x)U$ である．また，

$$U\xi = U\pi(1)\xi = \pi'(1)\xi' = \xi'$$

である．これで示された． □

注意 8.8 一般の対合代数 A 上の線型形式 ρ が正値であることを，任意の $x \in A$ に対して $\rho(x^*x) \geq 0$ が成り立つことと定義する．この定義の下で，命題 8.2 と系 8.3 は対合代数に対しても成り立ち，命題 8.4 は $\|1\| = 1$ を満たす単位的対合 Banach 代数に対しても成り立ち，定理 8.7 は単位的対合 Banach 代数に対しても成り立つ．証明はほとんど変更なく通用するが，命題 8.4 および定理 8.7 の証明で命題 7.3 (2) を用いている部分だけは，少し工夫を要する．詳しくは，Arveson [2, sec. 4.7] を参照のこと．

8.3 状態の存在定理と表現の存在定理

定義 8.9（状態） 単位的 C* 代数 A 上の状態とは，A 上の正値線型形式 ρ であって，$\rho(1) = 1$ を満たすものをいう．

例 8.10 X をコンパクト分離空間とする．Riesz の表現定理より，$C(X)$ 上の状態は，X 上の正則な確率 Borel 測度と自然に一対一に対応する．

命題 8.11 A を単位的 C* 代数とする．A 上の線型形式 ρ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) ρ は状態である．
(b) ρ は連続であり，$\|\rho\| = 1$ かつ $\rho(1) = 1$ を満たす．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 状態の定義と命題 8.4 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a) ρ が連続であり，$\|\rho\| = 1$ かつ $\rho(1) = 1$ を満たすとする．ρ が正値であることを示したい．正元 $x \in A$ を任意にとる．$\mathrm{Sp}_A(x)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に含まれるコンパクト集合だから（命題 2.3），$\rho(x) \geq 0$ を示すためには，$\mathrm{Sp}_A(x)$ を含む任意の閉円板が $\rho(x)$ を含むことをいえばよい．$\lambda \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \geq 0$ の閉円板が $\mathrm{Sp}_A(x)$ を含むとする．すると，$\lambda - x$ は正規であり，$\mathrm{Sp}_A(\lambda - x)$ は 0 を中心とする半径 r の閉円板に含まれるから，定理 5.11 より

$$\|\lambda - x\| = \|\lambda - x\|_{\mathrm{Sp}} \leq r$$

である．したがって，$\|\rho\| = 1$ および $\rho(1) = 1$ より，

$$|\lambda - \rho(x)| = |\rho(\lambda - x)| \leq \|\lambda - x\| \leq r$$

が成り立つ．すなわち，$\rho(x)$ は λ を中心とする半径 r の閉円板に含まれる．これで示された． □

注意 8.12 Hahn–Banach の分離定理より，コンパクト集合 $S \subseteq \mathbb{C}$ の凸閉包が「S を含む閉円板全体の交叉」に等しいことがわかる．このことに注意すると，単位的 C* 代数 A 上の状態 ρ について，命題 8.11 の (b) $\Longrightarrow$ (a) の証明と同じ議論により，任意の正規元 $x \in A$ に対して $\rho(x)$ が $\mathrm{Sp}_A(x)$ の凸閉包に含まれることがわかる．

次の定理は，状態が十分に存在することを保証する．証明には，Hahn–Banach の拡張定理（事実 2.5）を用いる．

定理 8.13（状態の存在定理） A を単位的 C* 代数とする．任意の正規元 $x \in A \setminus \{0\}$ に対して，A 上の状態 ρ であって，$|\rho(x)| = \|x\|$ を満たすものが存在する．

証明 $x \in A \setminus \{0\}$ を正規元とし，x が生成する A の部分単位的 C* 代数を A_x と書く（これは可換である）．A_x 上の Gelfand 変換による $x \in A_x$ の像 $\widehat{x} \in C(\mathsf{X}(A_x))$ を考えると，Gelfand–Naimark の定理（定理 5.17）より $\|\widehat{x}\|_{C(\mathsf{X}(A_x))} = \|x\|$ だから，ある $\chi \in \mathsf{X}(A_x)$ が存在して $|\chi(x)| = |\widehat{x}(\chi)| = \|x\|$ となる．

$x \neq 0$ より $A_x \neq 0$ だから，命題 3.3 より，χ の作用素ノルムは 1 である．したがって，Hahn–Banach の拡張定理（事実 2.5）より，χ の拡張であるような E 上の連続線型形式 ρ であって，作用素ノルムが 1 であるようなものがとれる．この ρ は，$\rho(1) = \chi(1) = 1$ を満たすから，命題 8.11 より A 上の状態である．さらに，$|\rho(x)| = |\chi(x)| = \|x\|$ である．よって，ρ は条件を満たす． □

状態の存在定理（定理 8.13）と Gelfand–Naimark–Segal 構成（定理 8.7）から，表現の存在定理が証明できる．

定理 8.14（表現の存在定理） A を単位的 C* 代数とする．任意の $x \in A \setminus \{0\}$ に対して，A の表現 (π, E) であって，$\|\pi(x)\|_{\mathscr{L}(E)} = \|x\|$ を満たすものが存在する．

証明 $x \in A \setminus \{0\}$ を任意にとる．状態の存在定理（定理 8.13）より，A 上の状態 ρ であって，$\rho(x^*x) = |\rho(x^*x)| = \|x^*x\| = \|x\|^2$ を満たすものがとれる．この ρ から Gelfand–Naimark–Segal 構成（定理 8.7）によって得られる組を (π, E, ξ) とする．(π, E) は A の表現で，$\xi \in E$ であり，

$$\rho(y) = \langle \xi | \pi(y)\xi \rangle \qquad (y \in A) \tag{$*$}$$

を満たす．

この表現 (π, E) が条件を満たすことを示す．まず，定理 5.12 より π はノルム減少だから，$\|\pi(x)\|_{\mathscr{L}(E)} \leq \|x\|$ である．次に，$\|\pi(x)\|_{\mathscr{L}(E)} \geq \|x\|$ を示す．($*$) で $y = 1$ と置くと，ρ が状態であることと合わせて，

$$\|\xi\|^2 = \langle \xi | \pi(1)\xi \rangle = \rho(1) = 1,$$

すなわち $\|\xi\| = 1$ を得る．一方で，($*$) で $y = x^*x$ と置くと，$\rho(x^*x) = \|x\|^2$ と合わせて，

$$\|\pi(x)\xi\|^2 = \langle \pi(x)\xi | \pi(x)\xi \rangle = \langle \xi | \pi(x^*x)\xi \rangle = \rho(x^*x) = \|x\|^2,$$

すなわち $\|\pi(x)\| = \|x\|^2$ を得る．よって，$\|\pi(x)\|_{\mathscr{L}(E)} \geq \|\pi(x)\xi\|/\|\xi\| = \|x\|$ である．以上より，(π, E) は条件を満たす． □

系 8.15 任意の単位的 C* 代数 A は，ある Hilbert 空間 E 上の連続線型作用素全体のなす単位的 C* 代数 $\mathscr{L}(E)$ のある部分単位的 C* 代数に同型である．[*11]

[*11] 系 8.15 を Gelfand–Naimark の定理と呼ぶこともある [2].

証明　A を単位的 C* 代数とする．表現の存在定理（定理 8.14）より，各 $x \in A \setminus \{0\}$ に対して，A の表現 (π_x, E_x) であって $\|\pi_x(x)\|_{\mathscr{L}(E_x)} = \|x\|$ を満たすものが存在する．$E = \widehat{\bigoplus}_{x \in E \setminus \{0\}} E_x$（Hilbert 直和）と置く．また，各 $y \in E$ について，任意の $x \in E \setminus \{0\}$ に対して $\|\pi_x(y)\|_{\mathscr{L}(E_x)} \leq \|y\|$ だから（定理 5.12），$\pi(y) = \widehat{\bigoplus}_{x \in E \setminus \{0\}} \pi_x(y) \in \mathscr{L}(E)$ が定義できる．これによって $\pi\colon A \to \mathscr{L}(E)$ を定めると，容易にわかるように，(π, E) は A の表現である．さらに，任意の $x \in E \setminus \{0\}$ に対して，$\|\pi_x(x)\| = \|x\| > 0$ より $\pi(x) \neq 0$ だから，π は単射である．単位的 C* 代数の間の単射な単位的対合準同型は単位的 C* 代数の埋め込みだから（定理 6.8），A は $\mathscr{L}(E)$ の部分単位的 C* 代数 $\pi(A)$ に同型である．　$\square$

注意 8.16　A を単位的 C* 代数とする．

命題 8.11 より，A 上の状態全体の集合 S は，A の位相的双対の単位球面に含まれる．S の極点を，A 上の**純粋状態**という．定理 8.13 において，ρ を純粋状態にとれることが知られている [1, Thm. 1.7.2].

(π, E) を 0 でない A の表現とする．$\pi(A)$-安定な E の閉部分線型空間が 0 と E のみであるとき，表現 (π, E) は**既約**であるという．ρ を A 上の状態とし，ρ から Gelfand–Naimark–Segal 構成（定理 8.7）によって得られる組を (π, E, ξ) とすると，ρ が純粋状態であることと，(π, E) が既約であることとは同値であることが知られている [1, Thm. 1.6.6].

これらの事実に注意すれば，定理 8.14 の証明の議論により，定理 8.14 において (π, E) を既約表現にとれることがわかる．

参考文献

全体を通して，Arveson [2] と Bourbaki [3] を参考にした．定理 5.11 の証明は，Lurie [4] を参考にした．

本稿では，単位的とは限らない場合の Gelfand 理論については何も触れなかった．これについては，たとえば Bourbaki [3] に完全な記述がある．

[1] W. Arveson, *An Invitation to C*-Algebras*, Springer, 1976.

[2] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Théories spectrales: Chapitres 1 et 2*, 2ème édition, Springer, 2019.

[4] J. Lurie, “Math 261y: von Neumann Algebras”, Lecture 2, 2011.（2020 年 1 月 31 日アクセス）
http://people.math.harvard.edu/~lurie/261y.html

[5] G. J. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[6] 宮島 静雄,『関数解析』, 横浜図書, 2005.

[7] 箱,「Fourier 級数のノート」, 2020.
https://o-ccah.github.io