位相空間論の鳥瞰

箱（@o_ccah）

2021 年 1 月 1 日

最終的にとどまっているその公理系は，過度の一般化に陥ることなくまた目標を失うことなく，解析学の現実の要求をみたす感性に支えられている．

N. Bourbaki, *Éléments de mathématique* [16]

そして，それ以後は，まるで「位相」の定義などは千年も前から決まっていたかのようにだれもが思っていて，疑いもしない．じつはその方が問題かもしれない．

森 毅，「位相構造批判」 [28]

序

内容

本稿では，位相空間論の基礎からやや発展的な事項までを，できるだけ網羅的かつ自己完結的に，系統立てて解説する．

前提知識

前提知識として，集合と写像の（素朴な）扱いに慣れていることを仮定する．具体的には，集合の交叉と合併，像と逆像，積（直積）と和（直和），Zorn の補題や整列可能定理は既知とする．また，第 5 章以降では，$\mathbb{R}$ の位相的性質に関する簡単な事実を断りなく用いる（この点だけは自己完結的になっていない）．加えて，本稿では諸概念の「モチベーション」はまったく説明されない．そのため，読者はすでに位相空間論の基礎に触れていることが望ましい．以上の前提知識は，おおむね，内田『集合と位相』[24] を読めば身に付けることができると思う．

記号と用語

■resp. 記号について　隅付き括弧【 】を resp. 記号として用いる．たとえば，「x【y, z】は有理数【実数，複素数】である」は「x は有理数であり，y は実数であり，z は複素数である」という意味である．

■数の集合について　$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は，それぞれ自然数，整数，有理数，実数，複素数全体の集合を表す．0 は自然数に含める．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．$\mathbb{N}_{>0}$, $\mathbb{Q}_{>0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ は，それぞれ 0 より大きい自然数，0 より大きい有理数，0 以上の実数，0 以上の拡張実数（0 以上の実数および ∞）全体の集合を表す．$[a,b]$, (a,b) はそれぞれ開区間，閉区間を表し，半開区間はそれぞれ $[a,b)$, $(a,b]$ と表す．

■集合について　「$A_0, \ldots, A_{n-1}$」などと書いた場合，特に断らなければ，$n \in \mathbb{N}$ であるとする（$n = 0$ の場合を除外しない）．集合 X の部分集合を考えているとき，空な交叉は X，空な合併は $\emptyset$ であると約束する．

A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$ と書き，A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ と書く．

集合 X の部分集合全体の集合を $\mathfrak{P}(X)$ と書き，X の有限部分集合全体の集合を $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ と書く．

■集合族について　「集合族」という語は，「集合を元とする集合」を指す場合と，「添字付けられた集合のあつまり（厳密には，集合を値にとる写像）」を指す場合がある[*1]．前者を念頭に置く場合には「集合族 $\mathfrak{A}$」などと書き，後者を念頭に置く場合には「集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$」などと書く．ただし，これら 2 つを区別する必要がな

[*1] もちろん，公理的集合論の観点からすればすべての数学的オブジェクトは集合だから，すべての集合は「集合を元とする集合」であり，すべての写像は「集合を値にとる写像」である．しかし，本稿では「集合」という語を「与えられた状況において素朴な意味で〈元のあつまり〉とみなすべきもの」程度の意味で用いており，公理的集合論に基づく数学的オブジェクトの形式的な内実を指して「集合」といっているわけではない．

い状況も多い．そのような状況では，「集合族 $\mathfrak{A}=\{A_i\}_{i\in I}$」などとも書く．

X の部分集合族 $\mathfrak{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ と $X'\subseteq X$ に対して，$\mathfrak{A}|_{X'}=\{A_i\cap X'\}_{i\in I}$ と書く．

■部分集合について　集合 X とその部分集合 A に対して，自然な単射 $\iota\colon A\to X$ を包含写像という．

■同値関係と商集合について　集合 X とその商集合 X/R（R は X 上の同値関係とする）に対して，自然な全射 $\pi\colon X\to X/R$ を等化写像という．

X を集合，R を X 上の同値関係，$\pi\colon X\to X/R$ を等化写像とする．X の部分集合 A が R に関して充満しているとは，$A=\pi^{-1}(\pi(A))$ であることをいう．

集合 X 上の同値関係 R, S について，「任意の $x, y\in X$ に対して $x\mathrel{R}y$ ならば $x\mathrel{S}y$」であるとき，S は R よりも粗い，あるいは R は S よりも細かいという．S が R よりも粗いとき，商集合 X/R 上の関係 S/R を

$$[x]\mathrel{S/R}[y] \iff x\mathrel{S}y$$

と定義する（ここで，$[-]$ は R による同値類を表す）．すると，S/R は X/R 上の同値関係であり，X/S と $(X/R)/(S/R)$ は自然な全単射によって同一視される．これによって，X/S を X/R の商集合とみなせる．

X を集合，R を X 上の同値関係とし，A を X の部分集合とする．R を $A\times A$ に制限して得られる A 上の同値関係を，$R|_A$ と書く．

X, Y を集合とし，$f\colon X\to Y$ を写像とする．f から，X 上の同値関係 $\sim_f$ が

$$x\sim_f y \iff f(x)=f(y)$$

として定まる．この同値関係による商集合 $X/{\sim_f}$ を，X/f と書く．

■集合の積と和について　集合族 $\{X_i\}_{i\in I}$ の積を $\prod_{i\in I}X_i$ で，和を $\coprod_{i\in I}X_i$ で表す．積から i-成分への射影を pr_i，i-成分から和への入射を in_i などと表す．

写像族 $\{f_i\colon Y\to X_i\}_{i\in I}$ に対して，i-成分が f_i で与えられる（積の普遍性で誘導される）写像を $(f_i)_{i\in I}\colon Y\to\prod_{i\in I}X_i$ と書く．写像族 $\{g_i\colon X_i\to Y\}_{i\in I}$ に対して，X_i 上での値が g_i で与えられる（和の普遍性で誘導される）写像を $[g_i]_{i\in I}\colon\coprod_{i\in I}X_i\to Y$ と書く．

$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族とする．各集合 X_i 上に同値関係 R_i が与えられているとき，和集合 $X=\coprod_{i\in I}X_i$ 上の関係 R を

$$x\mathrel{R}y \iff \text{ある } i\in I \text{ が存在して } x, y\in X_i \text{ かつ } x\mathrel{R_i}y$$

と定めると，これは X 上の同値関係となる．これを $\{R_i\}_{i\in I}$ の和といい，$R=\coprod_{i\in I}R_i$ と書く．

$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族とする．各集合 X_i 上に同値関係 R_i が与えられているとき，積集合 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 上の関係 R を，X の 2 元 $x=(x_i)_{i\in I}$，$y=(y_i)_{i\in I}$ に対して

$$x\mathrel{R}y \iff \text{任意の } i\in I \text{ に対して } x_i\mathrel{R_i}y_i$$

と定めると，これは X 上の同値関係となる．これを $\{R_i\}_{i\in I}$ の積といい，$R=\prod_{i\in I}R_i$ と書く．

■グラフについて　写像 f や関係 R のグラフを，それぞれ $\mathrm{gr}(f)$, $\mathrm{gr}(R)$ と表す．すなわち，写像 $f\colon X\to Y$ に対しては

$$\mathrm{gr}(f)=\{(x,y)\in X\times Y \mid f(x)=y\}$$

とし，X 上の関係 R に対しては

$$\mathrm{gr}(R)=\{(x,y)\in X\times X \mid x\mathrel{R}y\}$$

とする．

目次

第 I 部

フィルタ

第 1 章

フィルタ

1.1 フィルタの定義

定義 1.1（フィルタ） 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{F}$ が次の条件を満たすとき，$\mathfrak{F}$ は X 上の**フィルタ**であるといい，これらの組 $(X, \mathfrak{F})$ を**フィルタ付き集合**という．

(F1) $F \in \mathfrak{F}$ かつ $F \subseteq F' \subseteq X$ ならば $F' \in \mathfrak{F}$ である．
(F2) $F_0, \ldots, F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ ならば $F_0 \cap \cdots \cap F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ である（特に，$X \in \mathfrak{F}$ である）．

$\mathfrak{P}(X)$ を X 上の**自明なフィルタ**という．自明でないフィルタを**真フィルタ**という．

容易にわかるように，集合 X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ が真フィルタであるための必要十分条件は，$\emptyset \notin \mathfrak{F}$ である．また，真フィルタは有限交叉性をもつ．

命題 1.2 X を集合, $\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．X の部分集合 $A_0, \ldots, A_{n-1}$ に対して, $A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \in \mathfrak{F}$ であることと，すべての A_i が $\mathfrak{F}$ に属することとは同値である． □

定義 1.3（フィルタの比較） 集合 X 上のフィルタ全体の集合を，包含関係によって順序集合とみなす．より詳しくは，集合 X 上のフィルタ $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ に対して，$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ であるとき，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{F}$ よりも**細かい**，$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{G}$ よりも**粗い**という．より強く $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ であるとき，それぞれ**真に細かい**，**真に粗い**という．

1.2 準フィルタ基とフィルタ基

定義 1.4（準フィルタ基，フィルタ基） X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$\mathfrak{B}$ を X の部分集合族とする．

(1) $\mathfrak{B}$ の元の有限交叉の拡大として表せる集合全体が $\mathfrak{F}$ と一致するとき，すなわち

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{有限個の元 } B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \subseteq F\} \tag{$*$}$$

であるとき，$\mathfrak{B}$ はフィルタ $\mathfrak{F}$ の**準フィルタ基**である，あるいは $\mathfrak{B}$ はフィルタ $\mathfrak{F}$ を**生成する**という．

(2) $\mathfrak{B}$ の元の拡大として表せる集合全体が $\mathfrak{F}$ と一致するとき，すなわち

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$$

であるとき，$\mathfrak{B}$ はフィルタ $\mathfrak{F}$ の**フィルタ基**であるという．$\mathfrak{B}$ が集合 X 上のあるフィルタのフィルタ基であるとき，単に $\mathfrak{B}$ は X 上の**フィルタ基**であるといい，$\mathfrak{B}$ が X 上のある真フィルタのフィルタ基であるとき，$\mathfrak{B}$ は X 上の**真フィルタ基**であるという．

容易にわかるように，集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ に対して，$(*)$ の右辺は常に X 上のフィルタとなっている．さらに，これは $\mathfrak{B}$ を含む X 上のフィルタの中で最小のものである．したがって，$\mathfrak{B}$ が生成するフィルタとは，$\mathfrak{B}$ を含むような最小のフィルタのことに他ならない．

命題 1.5　X を集合とし，$\mathfrak{B}$ を X の部分集合族とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が X 上のある真フィルタの準フィルタ基である（すなわち，$\mathfrak{B}$ が真フィルタを生成する）ための必要十分条件は，$\mathfrak{B}$ が有限交叉性をもつことである．
(2) $\mathfrak{B}$ が X 上のフィルタ基であるための必要十分条件は，「$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ ならば，ある集合 $B \in \mathfrak{B}$ が存在して $B \subseteq B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1}$ となる」ことである．
(3) $\mathfrak{B}$ が X 上の真フィルタ基であるための必要十分条件は，(2) の条件に加えて $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ が成り立つことである．

証明　(1)　$\mathfrak{B}$ が有限交叉性をもたなければ，$\mathfrak{B}$ の元の有限交叉として $\emptyset$ が得られるから，$\mathfrak{B}$ は自明なフィルタを生成する．逆に，$\mathfrak{B}$ が有限交叉性をもてば，$\mathfrak{B}$ の有限交叉の拡大全体は $\emptyset$ を含まないから，$\mathfrak{B}$ は真フィルタを生成する．

(2)　必要性を示す．$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$ がフィルタであるとする．$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ とすると，フィルタの定義より $B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \in \mathfrak{F}$ だから，$\mathfrak{F}$ の定義より $B \subseteq B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1}$ なる $B \in \mathfrak{B}$ が存在する．よって，条件は必要である．

十分性を示す．件の条件が成り立つとする．$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \text{ある } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在して } B \subseteq F\}$ と置くと，(F1) は明らかに成り立ち，仮定より (F2) も成り立つ．よって，条件は十分である．

(3)　$\mathfrak{B}$ が X 上の真フィルタ基であるための必要十分条件は「(1) かつ (2)」だが，容易にわかるように，(2) の条件の下で (1) の条件は $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ と同値だから，主張が従う．　□

容易にわかるように，フィルタが可算フィルタ基をもつことと，可算準フィルタ基をもつこととは同値である．

命題 1.6　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタであって可算フィルタ基をもつものとする．このとき，$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{F}$ の可算フィルタ基を含む．

証明　$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{F}$ の可算フィルタ基，$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{F}$ のフィルタ基とする．任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $B_A \subseteq A$ なる $B_A \in \mathfrak{B}$ をとり，その全体を $\mathfrak{B}'$ と置くと，$\mathfrak{B}'$ は $\mathfrak{B}$ に含まれる $\mathfrak{F}$ の可算フィルタ基である．　□

1.3　極大フィルタ

定義 1.7（極大フィルタ）　集合 X 上の真フィルタのうち包含関係に関して極大であるものを，X 上の**極大フィルタ**という．

命題 1.8　集合 X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{A}$ は X 上の極大フィルタである．
(b) $\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもち，かつ任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{M}$ または $X \setminus A \in \mathfrak{M}$ が成り立つ．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{A}$ が X 上の極大フィルタであるとする．まず，$\mathfrak{A}$ は真フィルタだから，有限交叉性をもつ．次に，ある $A \subseteq X$ に対して $A, X \setminus A \notin \mathfrak{A}$ と仮定する．$X \setminus A \notin \mathfrak{A}$ だから，$\mathfrak{A}$ は $X \setminus A$ の部分集合を含まない．すなわち，$\mathfrak{A}$ のすべての元は A と交わる．したがって，$\mathfrak{A} \cup \{A\}$ はまた有限交叉性をもつ．

$\mathfrak{A} \cup \{A\}$ が生成する真フィルタは $\mathfrak{A}$ よりも真に細かいが，これは $\mathfrak{A}$ の極大性に矛盾する．よって，任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{A}$ または $X \setminus A \in \mathfrak{A}$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\mathfrak{A}$ が (b) の条件を満たすとする．まず，$\mathfrak{A}$ が真フィルタであることを示す．$A \in \mathfrak{A}$ かつ $A \subseteq A' \subseteq X$ とすると，$\mathfrak{A}$ の有限交叉性より $X \setminus A' \notin \mathfrak{A}$ だから，$A' \in \mathfrak{A}$ である．また，$A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ とすると，$A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap (X \setminus (A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})) = \emptyset$ だから，$\mathfrak{A}$ の有限交叉性より $X \setminus (A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \notin \mathfrak{A}$ であり，したがって $A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ である．さらに，$\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもつから，$\emptyset \notin \mathfrak{A}$ である．よって，$\mathfrak{A}$ は真フィルタである．

次に，$\mathfrak{A}$ が極大フィルタであることを示す．$A \notin \mathfrak{A}$ とすると，$X \setminus A \in \mathfrak{A}$ である．$A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ だから，$\mathfrak{A} \cup \{A\}$ を含む真フィルタは存在しない．よって，$\mathfrak{A}$ は極大フィルタである．□

命題 1.9　X を集合，$\mathfrak{M}$ を X 上の極大フィルタとする．X の部分集合 $A_0, \ldots, A_{n-1}$ に対して，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \mathfrak{M}$ であることと，ある A_i が $\mathfrak{M}$ に属することとは同値である．特に，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} = X$ ならば，ある A_i が $\mathfrak{M}$ に属する．

証明　命題 1.8 より，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \mathfrak{M}$ は「$(X \setminus A_0) \cap \cdots \cap (X \setminus A_{n-1}) \in \mathfrak{M}$」の否定と同値であり，ある A_i が $\mathfrak{M}$ に属することは「すべての $X \setminus A_i$ が $\mathfrak{M}$ に属する」ことの否定と同値である．鉤括弧で囲った 2 つの条件は同値だから（命題 1.2），主張が従う．□

定理 1.10　集合 X 上の任意の真フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$\mathfrak{F}$ よりも細かい極大フィルタが存在する．

証明　真フィルタ $\mathfrak{F}$ よりも細かい真フィルタの全体に Zorn の補題を適用して，結論を得る．□

1.4　フィルタ射

定義 1.11（フィルタ射）　$(X, \mathfrak{F})$, $(Y, \mathfrak{G})$ をフィルタ付き集合とする．写像 $f \colon X \to Y$ が $(X, \mathfrak{F})$ から $(Y, \mathfrak{G})$ への**フィルタ射**であるとは，任意の $G \in \mathfrak{G}$ に対して $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$ であることをいう．

命題 1.12　フィルタ付き集合 $(X, \mathfrak{F})$, $(Y, \mathfrak{G})$, $(Z, \mathfrak{H})$ の間の写像 $f \colon X \to Y$，$g \colon Y \to Z$ について，f と g がフィルタ射ならば，$g \circ f$ もフィルタ射である．□

命題 1.13　$(X, \mathfrak{F})$, $(Y, \mathfrak{G})$ をフィルタ付き集合，$f \colon X \to Y$ を写像とする．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{G}$ の準フィルタ基であるとき，f がフィルタ射であるための必要十分条件は，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ となることである．

証明　必要性は明らかだから，十分性を示す．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{G}$ の準フィルタ基であり，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ が成り立つとする．任意に $G \in \mathfrak{G}$ をとると，準フィルタ基の定義より，$B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \subseteq G$ を満たす $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ が存在する．このとき

$$f^{-1}(B_0) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_{n-1}) = f^{-1}(B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \subseteq f^{-1}(G)$$

が成り立つ．条件より $f^{-1}(B_0), \ldots, f^{-1}(B_{n-1}) \in \mathfrak{F}$ だから，フィルタの性質より $f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$ である．よって，f はフィルタ射である．□

1.5　フィルタの誘導

1.5.1　始フィルタと終フィルタ

定義 1.14（始フィルタ，終フィルタ）　X を集合，$\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族とする．

(1) 写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ に対して，すべての ϕ_i がフィルタ射となるような X 上の最小のフィルタ構造を，$\{((Y_i, \mathfrak{G}_i), \phi_i)\}_{i \in I}$（あるいは単に $\{\phi_i\}_{i \in I}$）が誘導する X 上の**始フィルタ**という．

(2) 写像族 $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ に対して，すべての σ_i がフィルタ射となるような X 上の最大のフィルタ構造を，$\{((Y_i, \mathfrak{G}_i), \sigma_i)\}_{i \in I}$（あるいは単に $\{\sigma_i\}_{i \in I}$）が誘導する X 上の**終フィルタ**という．

容易にわかるように，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタは，

$$\{F \subseteq X \mid \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(F) \in \mathfrak{G}_i\}$$

で与えられる．

$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとするとき，$\phi_i \colon X \to Y_i$ が $(X, \mathfrak{F})$ から $(Y_i, \mathfrak{G}_i)$ へのフィルタ射であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が $\phi_i^{-1}(G)$（$G \in \mathfrak{G}_i$）という形の集合をすべて含むことである．よって，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは，$\phi_i^{-1}(G)$（$i \in I$，$G \in \mathfrak{G}_i$）という形の集合全体が生成するフィルタに他ならない．より詳しく，次の命題が成り立つ．

命題 1.15　X を集合，$\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族，$\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が $\mathfrak{G}_i$ の準フィルタ基ならば，

$$\mathfrak{B}' = \{\phi_i^{-1}(C) \mid i \in I,\ C \in \mathfrak{C}_i\}$$

は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタの準フィルタ基である．

(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が $\mathfrak{G}_i$ のフィルタ基ならば，

$$\mathfrak{B} = \{\phi_{i_0}^{-1}(C_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ i_0, \ldots, i_{n-1} \in I \text{ は相異なる},\ C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}\}$$

は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタのフィルタ基である．

証明　(1)　$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとするとき，命題 1.13 より，$\phi_i \colon X \to Y_i$ が $(X, \mathfrak{F})$ から $(Y_i, \mathfrak{G}_i)$ へのフィルタ射であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が $\phi_i^{-1}(C)$（$C \in \mathfrak{C}_i$）という形の集合をすべて含むことである．よって，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは，$\phi_i^{-1}(C)$（$i \in I$，$C \in \mathfrak{C}_i$）という形の集合全体が生成するフィルタに他ならない．これは，$\mathfrak{B}'$ がその始フィルタの準フィルタ基であることを示している．

(2)　(1) より，$\phi_i^{-1}(C)$（$i \in I$，$C \in \mathfrak{C}_i$）の全体は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタの準フィルタ基だから，その有限交叉の全体

$$\mathfrak{B}'' = \{\phi_{i_0}^{-1}(C_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ i_0, \ldots, i_{n-1} \in I,\ C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}\}$$

はその始フィルタのフィルタ基である．そこで，$\mathfrak{B}''$ の元の拡大全体と $\mathfrak{B}$ の元の拡大全体とが等しいことを示せばよい．明らかに $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}''$ だから，任意の $B'' \in \mathfrak{B}''$ が $\mathfrak{B}$ のある元の拡大になっていることをいえば十分である．B'' は，異なる $i_0, \ldots, i_{n-1} \in I$ と，各 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ごとに有限個の $C_{k,0}, \ldots, C_{k,m_k-1} \in \mathfrak{C}_{i_k}$（$m_k \in \mathbb{N}$）を用いて

$$B'' = \bigcap_{k=0}^{n-1} (\phi_{i_k}^{-1}(C_{k,0}) \cap \cdots \cap \phi_{i_k}^{-1}(C_{k,m_k-1}))$$

と書ける．ここで，$\mathfrak{C}_{i_k}$ はフィルタ基だから，$C_k \subseteq C_{k,0} \cap \cdots \cap C_{k,m_k-1}$ を満たす $C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}$ がとれる（命題 1.5 (2)）．そこで $B = \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi_{i_k}^{-1}(C_k)$ と置くと，これは $\mathfrak{B}$ の元であり，$B \subseteq B''$ を満たす．これで示された． □

系 1.16　X を集合，$\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合の可算族，$\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{G}_i$ が可算フィルタ基をもてば，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上のフィルタも可算フィルタ基をもつ． □

命題 1.15 で $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{G}_i$ と置いたときの $\mathfrak{B}'$ と $\mathfrak{B}$ を，それぞれ始フィルタの**標準準フィルタ基**・**標準フィルタ基**という．標準フィルタ基は，標準準フィルタ基の元の有限交叉の全体に等しい．

命題 1.17（始フィルタ・終フィルタの特徴付け）　X を集合，$\{(Y_i, \mathfrak{G}_i)\}_{i \in I}$ をフィルタ付き集合族とする．

(1) 写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタは，次の性質をもつ唯一の X 上のフィルタである．

　任意のフィルタ付き集合 $(Z, \mathfrak{H})$ と写像 $f \colon Z \to X$ について，f がフィルタ射であることと，任意の $i \in I$ に対して $\phi_i \circ f$ がフィルタ射であることとは同値である．

(2) 写像族 $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタは，次の性質をもつ唯一の X 上のフィルタである．

　任意のフィルタ付き集合 $(Z, \mathfrak{H})$ と写像 $g \colon X \to Z$ について，g がフィルタ射であることと，任意の $i \in I$ に対して $g \circ \sigma_i$ がフィルタ射であることとは同値である．

証明　(1)　$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始フィルタを $\mathfrak{F}_{\mathrm{i}}$ とする．このとき，フィルタ付き集合 Z と写像 $f \colon Z \to X$ に対して，次の同値関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\text{任意の } i \in I \text{ に対して } \phi_i \circ f \text{ がフィルタ射} \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ と } G \in \mathfrak{G}_i \text{ に対して } f^{-1}(\phi_i^{-1}(G)) \in \mathfrak{H} \\
&\iff \mathfrak{F}_{\mathrm{i}} \text{ の標準準フィルタ基の任意の元 } B \text{ に対して } f^{-1}(B) \in \mathfrak{H} \\
&\iff \text{任意の } F \in \mathfrak{F}_{\mathrm{i}} \text{ に対して } f^{-1}(F) \in \mathfrak{H}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

一方で，X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ によって X をフィルタ付き集合とみなすとき，f がフィルタ射であることは，次のようにいいかえられる：

$$\text{任意の } F \in \mathfrak{F} \text{ に対して } f^{-1}(F) \in \mathfrak{H}. \qquad (**)$$

任意のフィルタ付き集合 $(Z, \mathfrak{H})$ と写像 $f \colon Z \to X$ に対して $(*) \iff (**)$ であることは，$\mathfrak{F}_{\mathrm{i}} = \mathfrak{F}$ であることに他ならない．

(2)　$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終フィルタを $\mathfrak{F}_{\mathrm{f}}$ とする．このとき，フィルタ付き集合 Z と写像 $g \colon X \to Z$ に対して，次の同値関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\text{任意の } i \in I \text{ に対して } g \circ \sigma_i \text{ がフィルタ射} \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ と } H \in \mathfrak{H} \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(g^{-1}(H)) \in \mathfrak{G}_i \\
&\iff \text{任意の } H \in \mathfrak{H} \text{ に対して } g^{-1}(H) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{f}}. \qquad (***)
\end{aligned}$$

一方で，X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ によって X をフィルタ付き集合とみなすとき，g がフィルタ射であることは，次のようにいいかえられる：

$$\text{任意の } H \in \mathfrak{H} \text{ に対して } g^{-1}(H) \in \mathfrak{F}. \qquad (****)$$

任意のフィルタ付き集合 $(Z, \mathfrak{H})$ と写像 $g \colon X \to Z$ に対して $(***) \iff (****)$ であることは，$\mathfrak{F}_{\mathrm{f}} = \mathfrak{F}$ であることに他ならない． □

命題 1.18（始フィルタ・終フィルタの推移性） X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を集合族，$\{(Z_{i,j},\mathfrak{H}_{i,j})\}_{i\in I,\,j\in J_i}$（$J_i$ は各 $i\in I$ に対して定まる添字集合）をフィルタ付き集合族とする．

(1) $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$, $\{\psi_{i,j}\colon Y_i\to Z_{i,j}\}_{i\in I,\,j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\psi_{i,j}\circ\phi_i\}_{i\in I,\,j\in J_i}$ が誘導する X 上の始フィルタと，「各 Y_i を $\{\psi_{i,j}\}_{j\in J_i}$ が誘導する始フィルタによってフィルタ付き集合とみなすときの，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始フィルタ」とは一致する．
(2) $\{\sigma_i\colon Y_i\to X\}_{i\in I}$, $\{\tau_{i,j}\colon Z_{i,j}\to Y_i\}_{i\in I,\,j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\sigma_i\circ\tau_{i,j}\}_{i\in I,\,j\in J_i}$ が誘導する X 上の終フィルタと，「各 Y_i を $\{\tau_{i,j}\}_{j\in J_i}$ が誘導する終フィルタによってフィルタ付き集合とみなすときの，$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終フィルタ」とは一致する．

証明 (1)　始フィルタの特徴付け（命題 1.17 (1)）より，ϕ_i がフィルタ射であることと，任意の $j\in J_i$ に対して $\psi_{i,j}\circ\phi_i$ がフィルタ射であることとは同値である．ここから主張が従う．

(2)　終フィルタの特徴付け（命題 1.17 (2)）より，σ_i がフィルタ射であることと，任意の $j\in J_i$ に対して $\sigma_i\circ\tau_{i,j}$ がフィルタ射であることとは同値である．ここから主張が従う．□

1.5.2　逆像フィルタと像フィルタ

定義 1.19（逆像フィルタ，像フィルタ） X, Y を集合，$f\colon X\to Y$ を写像とする．

(1) Y をフィルタ構造 $\mathfrak{G}$ によってフィルタ付き集合とみなすとき，f が誘導する X 上の始フィルタを，$\mathfrak{G}$ の f による**逆像フィルタ**といい，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ と書く．
(2) X をフィルタ構造 $\mathfrak{F}$ によってフィルタ付き集合とみなすとき，f が誘導する Y 上の終フィルタを，$\mathfrak{F}$ の f による**像フィルタ**といい，$f(\mathfrak{F})$ と書く．

逆像フィルタ $f^{-1}(\mathfrak{G})$，像フィルタ $f(\mathfrak{F})$ を具体的に書けば，

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathfrak{G}) &= \{A\subseteq X \mid \text{ある } G\in\mathfrak{F} \text{ が存在して } f^{-1}(G)\subseteq A\},\\ f(\mathfrak{F}) &= \{B\subseteq Y \mid f^{-1}(B)\in\mathfrak{F}\} \end{aligned}$$

となる．

命題 1.20 X, Y を集合，$\mathfrak{G}$ を Y 上のフィルタ，$f\colon X\to Y$ を写像とする．

(1) $\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{G}$ の準フィルタ基ならば，$\mathfrak{B}=\{f^{-1}(C)\mid C\in\mathfrak{C}\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ の準フィルタ基である．
(2) $\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{G}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{B}=\{f^{-1}(C)\mid C\in\mathfrak{C}\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基である．

証明 (1)　命題 1.15 (1) から従う．

(2)　命題 1.15 (2) より，$\mathfrak{B}\cup\{X\}$ は $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基である．$\mathfrak{C}$ はフィルタ基だから $\mathfrak{C}\neq\emptyset$，したがって $\mathfrak{B}\neq\emptyset$ であることと合わせて，$\mathfrak{B}$ が $f^{-1}(\mathfrak{G})$ のフィルタ基であることを得る．□

命題 1.21 X, Y を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$f\colon X\to Y$ を写像とする．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{C}=\{f(B)\mid B\in\mathfrak{B}\}$ は $f(\mathfrak{F})$ のフィルタ基である．

証明 一般に $B\subseteq X$ に対して $f^{-1}(f(B))\supseteq B$ だから，$B\in\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{F}$ ならば $f^{-1}(f(B))\in\mathfrak{F}$，したがって $f(B)\in f(\mathfrak{F})$ である．よって，$\mathfrak{C}\subseteq f(\mathfrak{F})$ である．一方で，$G\in f(\mathfrak{F})$ ならば $f^{-1}(G)\in\mathfrak{F}$，したがってある $B\in\mathfrak{B}$ が存在して $B\subseteq f^{-1}(G)$ となる．このとき $f(B)\in\mathfrak{C}$ であり，$f(B)\subseteq G$ が成り立つ．よって，$\mathfrak{C}$ は $f(\mathfrak{F})$ のフィルタ基である．□

命題 1.22　X, Y, Z を集合，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を写像とする．

(1) Z 上のフィルタ $\mathfrak{H}$ に対して，$f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{H})) = (g \circ f)^{-1}(\mathfrak{H})$ である．
(2) X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$g(f(\mathfrak{F})) = g \circ f(\mathfrak{F})$ である．

証明　始フィルタ・終フィルタの推移性（命題 1.18）から従う． □

命題 1.23　X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像，$\mathfrak{G}$ を Y 上のフィルタとする．$f^{-1}(\mathfrak{G})$ が真フィルタであるための必要十分条件は，任意の $G \in \mathfrak{G}$ が $f(X)$ と交わることである．特に，f が全射で $\mathfrak{G}$ が真フィルタならば，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ も真フィルタである．

証明　$f^{-1}(\mathfrak{G})$ が真フィルタであるための必要十分条件は，$\emptyset \notin f^{-1}(\mathfrak{G})$ であること，すなわち，任意の $G \in \mathfrak{G}$ に対して $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ であることである．これは，任意の $G \in \mathfrak{G}$ が $f(X)$ と交わることと同値である． □

命題 1.24　X, Y を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) $\mathfrak{F}$ が真フィルタならば，$f(\mathfrak{F})$ も真フィルタである．
(2) $\mathfrak{F}$ が極大フィルタならば，$f(\mathfrak{F})$ も極大フィルタである．

証明　(1)　明らかである．

(2)　命題 1.8 より，$\mathfrak{F}$ が極大フィルタであることは任意の $A \subseteq X$ に対して $A \in \mathfrak{F}$ または $X \setminus A \in \mathfrak{F}$ が成り立つことと同値であり，$f(\mathfrak{F})$ が極大フィルタであることは任意の $B \subseteq Y$ に対して $B \in f(\mathfrak{F})$ または $Y \setminus B \in f(\mathfrak{F})$ が成り立つことと同値である．$A = f^{-1}(B)$ と置けばわかるように，後者は前者から従うから，$\mathfrak{F}$ が極大フィルタならば $f(\mathfrak{F})$ も極大フィルタである． □

命題 1.25　X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) X 上のフィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}$ である．
(2) Y 上のフィルタ $\mathfrak{G}$ に対して，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である．$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ であるための必要十分条件は，$f(X) \in \mathfrak{G}$ である．

証明　(1)　f は $(X, \mathfrak{F})$ から $(Y, f(\mathfrak{F}))$ へのフィルタ射であり，$(X, f^{-1}(f(\mathfrak{F})))$ から $(X, f(\mathfrak{F}))$ へのフィルタ射でもある．よって，始フィルタの最小性より，$f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}$ である．

(2)　f は $(X, f^{-1}(\mathfrak{G}))$ から $(Y, \mathfrak{G})$ へのフィルタ射であり，$(X, f^{-1}(\mathfrak{G}))$ から $(Y, f(f^{-1}(\mathfrak{G})))$ へのフィルタ射でもある．よって，終フィルタの最大性より，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ である．

後半の主張を示す．$f(X) \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ だから，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ ならば $f(X) \in \mathfrak{G}$ である．逆に，$f(X) \in \mathfrak{G}$ とする．$B \in f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ を任意にとると，$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathfrak{G})$ だから，ある $G \in \mathfrak{G}$ が存在して $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(B)$ となる．このとき $G \cap f(X) = f(f^{-1}(G)) \subseteq B$ であり，仮定より $G, f(X) \in \mathfrak{G}$ だから，$B \in \mathfrak{G}$ である．よって，$f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \subseteq \mathfrak{G}$ であり，前半の結論と合わせて $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ を得る． □

1.5.3　相対フィルタ

定義 1.26（相対フィルタ）　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X' \subseteq X$ とする．X を $\mathfrak{F}$ によってフィルタ付き集合とみなすときの，包含写像 $\iota\colon X' \to X$ が誘導する X' 上の始フィルタ（すなわち，ι による $\mathfrak{F}$ の逆像フィルタ）を，$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の**相対フィルタ**という．

$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタは，具体的には，$\mathfrak{F}$ の X' への制限 $\mathfrak{F}|_{X'} = \{F \cap X' \mid F \in \mathfrak{F}\}$ に一致

する．

命題 1.27　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X' \subseteq X$ とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ の準フィルタ基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は $\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタの準フィルタ基である．
(2) $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{F}$ のフィルタ基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は $\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタのフィルタ基である．

証明　命題 1.20 から従う．□

命題 1.28　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X'' \subseteq X' \subseteq X$ とする．このとき，$\mathfrak{F}$ が誘導する X'' 上の相対フィルタと，「$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタ」が誘導する X'' 上の相対フィルタとは一致する．

証明　命題 1.22 (1) から従う．□

命題 1.29　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$X' \subseteq X$ とする．$\mathfrak{F}$ が誘導する X' 上の相対フィルタが真フィルタであるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ の任意の元が X' と交わることである．

証明　命題 1.23 から従う．□

1.5.4　積フィルタ

定義 1.30（積フィルタ）　$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族，$X = \prod_{i\in I} X_i$ とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．各 X_i を $\mathfrak{F}_i$ によってフィルタ付き集合とみなすときの，射影 $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ の全体が誘導する X 上の始フィルタを，$\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ の**積フィルタ**といい，$\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ と書く．$\mathfrak{F}_0, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ の積フィルタを，$\mathfrak{F}_0 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{n-1}$ とも書く．

命題 1.31　$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとし，$\mathfrak{F} = \prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ と置く．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が $\mathfrak{F}_i$ の準フィルタ基ならば，

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; 1 \text{ つの } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は $\mathfrak{F}$ の準フィルタ基である．

(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が $\mathfrak{F}_i$ のフィルタ基ならば，

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は $\mathfrak{F}$ のフィルタ基である．

証明　命題 1.15 から従う．□

積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ の標準準フィルタ基・標準フィルタ基は，それぞれ

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} F_i \;\middle|\; 1 \text{ つの } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } F_i = X_i \right\},$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} F_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } F_i = X_i \right\}$$

である．

命題 1.32　$\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ が真フィルタであるための必要十分条件は，すべての $\mathfrak{F}_i$ が真フィルタであることである．

証明　積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ の標準フィルタ基は

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i \in I} F_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } F_i = X_i \right\}$$

であった．$\mathfrak{F}$ が真フィルタであることは $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ と同値であり，これはすべての $\mathfrak{F}_i$ が真フィルタであることと同値である．□

命題 1.33　$\{X_{i,j}\}_{i \in I,\, j \in J_i}$（$J_i$ は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）を集合族とし，各 $i \in I$，$j \in J_i$ に対して $\mathfrak{F}_{i,j}$ を $X_{i,j}$ 上のフィルタとする．このとき，積フィルタ $\prod_{i \in I,\, j \in J_i} \mathfrak{F}_{i,j}$ と，積フィルタの族の積フィルタ $\prod_{i \in I} \prod_{j \in J_i} \mathfrak{F}_{i,j}$ とは等しい．

証明　始フィルタの推移性（命題 1.18 (1)）から従う．□

命題 1.34　$\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族，$X = \prod_{i \in I} X_i$ とし，各 $i \in I$ に対して $X'_i \subseteq X_i$，$X' = \prod_{i \in I} X'_i$ とする．また，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}_i$ が誘導する X'_i 上の相対フィルタを $\mathfrak{F}'_i$，$\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ が誘導する X' 上の相対フィルタを $\mathfrak{F}'$ とするとき，$\mathfrak{F}' = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}'_i$ が成り立つ．

証明　$\mathrm{pr}_i \colon X \to X_i$ および $\mathrm{pr}'_i \colon X' \to X'_i$ を射影，$\iota \colon X' \to X$ および $\iota_i \colon X'_i \to X_i$ を包含写像とする．フィルタ $\mathfrak{F}'$ は，始フィルタの推移性（命題 1.18 (1)）より，$\{\mathrm{pr}_i \circ \iota\}_{i \in I}$ が誘導する始フィルタに等しい．一方で，積フィルタ $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}'_i$ は，始フィルタの推移性（命題 1.18 (1)）より，$\{\iota_i \circ \mathrm{pr}'_i\}_{i \in I}$ が誘導する始フィルタに等しい．ところが $\mathrm{pr}_i \circ \iota = \iota_i \circ \mathrm{pr}'_i$ だから，これらのフィルタは等しい．□

命題 1.35　$\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上の真フィルタとする．$X = \prod_{i \in I} X_i$，$\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ と置く．このとき，各 $i \in I$ に対して，$\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_i$ が成り立つ．

証明　積フィルタ $\mathfrak{F} = \prod \mathfrak{F}_i$ の標準フィルタ基は

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i \in I} F_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } F_i \in \mathfrak{F}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } F_i = X_i \right\}$$

だったから，命題 1.21 より，$\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F})$ のフィルタ基として $\mathfrak{B}_i = \{\mathrm{pr}_i(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ がとれる．ここで，各 $\mathfrak{F}_i$ が真フィルタであり，したがって空集合を含まないことに注意すると，$\mathfrak{B}_i$ が $\mathfrak{F}_i$ に等しいことがわかる．よって，$\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_i$ である．□

1.6　イデアル

第 18 章で用語だけ必要になるので，フィルタの双対概念であるイデアルを定義しておく．

定義 1.36（イデアル）　集合 X の部分集合族 $\mathfrak{I}$ が次の条件を満たすとき，$\mathfrak{I}$ は X 上の**イデアル**であるといい，これらの組 $(X, \mathfrak{I})$ を**イデアル付き集合**という．

(I1)　$I \in \mathfrak{I}$ かつ $I' \subseteq I$ ならば $I' \in \mathfrak{I}$ である．
(I2)　$I_0, \ldots, I_{n-1} \in \mathfrak{I}$ ならば $I_0 \cup \cdots \cup I_{n-1} \in \mathfrak{I}$ である（特に，$\emptyset \in \mathfrak{I}$ である）．

$\mathfrak{P}(X)$ を X 上の**自明な**イデアルという．自明でないイデアルを**真イデアル**という．

明らかに，集合 X の部分集合族 $\mathfrak{I}$ がイデアルであるための必要十分条件は，$\{X \setminus I \mid I \in \mathfrak{I}\}$ がフィルタであることである．

フィルタの場合と同様に，集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ に対して，$\mathfrak{B}$ を含む最小のイデアルが存在する．これを，$\mathfrak{B}$ が生成するイデアルという．

第 II 部

位相空間論

第 2 章

位相空間

2.1 位相空間の定義

定義 2.1（位相空間） 集合 X とその部分集合族 $\mathfrak{O}$ が次の 2 条件を満たすとき，$\mathfrak{O}$ は X 上の**位相**を定めるといい，$(X, \mathfrak{O})$ を**位相空間**という．また，$\mathfrak{O}$ を位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の**位相**という．

(O1) $\{O_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{O}$ ならば $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathfrak{O}$ である（特に，$\emptyset \in \mathfrak{O}$ である）．
(O2) $O_0, \ldots, O_{n-1} \in \mathfrak{O}$ ならば $O_0 \cap \cdots \cap O_{n-1} \in \mathfrak{O}$ である（特に，$X \in \mathfrak{O}$ である）．

考えている位相 $\mathfrak{O}$ を明示する必要がない場合には，単に「位相空間 X」などともいう．

定義 2.2（位相の比較） 集合 X 上の位相全体の集合を，包含関係によって順序集合とみなす．より詳しくは，集合 X 上の位相 $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}_1$ について，$\mathfrak{O}_0 \subseteq \mathfrak{O}_1$ であるとき，$\mathfrak{O}_1$ は $\mathfrak{O}_0$ よりも**細かい**，$\mathfrak{O}_0$ は $\mathfrak{O}_1$ よりも**粗い**という[*1]．より強く $\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1$ であるとき，それぞれ**真に細かい**，**真に粗い**という．

明らかに，X 上の最大の（最も細かい）位相は $\mathfrak{P}(X)$ であり，最小の（最も粗い）位相は $\{\emptyset, X\}$ である．最大の位相をもつ位相空間を**離散空間**，最小の位相をもつ位相空間を**密着空間**という．

2.2 開集合と閉集合，内部と閉包，近傍

2.2.1 開集合と閉集合

定義 2.3（開集合，閉集合） 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ について，$\mathfrak{O}$ の元をこの位相空間の**開集合**という．また，X の部分集合であってその補集合が開集合になるようなものを，この位相空間の**閉集合**という．位相空間の開集合全体のなす集合を**開集合系**といい，閉集合全体のなす集合を**閉集合系**という．

位相空間において，可算個の開集合の交叉として表される集合を δ-**開集合**，可算個の閉集合の合併として表される集合を σ-**閉集合**という[*2]．

命題 2.4 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{C} = \{C \subseteq X \mid X \setminus C \in \mathfrak{O}\}$ は，次の性質を満たす．

(C1) $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{C}$ ならば $\bigcap_{i \in I} C_i \in \mathfrak{C}$ である（特に，$X \in \mathfrak{C}$ である）．

---

*1 「細かい」と「粗い」はともに「等しい」を含む．

*2 「δ-開集合」および「σ-開集合」は，本稿だけの用語である．これらはそれぞれ「G_δ 集合」，「F_σ 集合」と呼ばれることが多い．なお，“G” は Gebiet（独：開集合），“δ” は Durchschnitt（独：交叉），“F” は fermé（仏：閉），“σ” は somme（仏：合併）に由来する．

(C2) $C_0, \ldots, C_{n-1} \in \mathfrak{C}$ ならば $C_0 \cup \cdots \cup C_{n-1} \in \mathfrak{C}$ である（特に，$\emptyset \in \mathfrak{C}$ である）． □

2.2.2 内部と閉包

定義 2.5（内部，閉包） X を位相空間とする．

(1) 部分集合 $A \subseteq X$ に対して，A に含まれる最大の開集合を A の（X における）**内部**といい，A°，$\mathrm{int}(A)$ あるいは $\mathrm{int}_X(A)$ と書く．A° の点を，A の（X における）**内点**という．$A \in \mathfrak{P}(X)$ に $A^\circ \in \mathfrak{P}(X)$ を対応させる写像を，位相空間 X の**内部作用素**という．

(2) 部分集合 $A \subseteq X$ に対して，A を含む最小の閉集合を A の（X における）**閉包**といい，$\overline{A}$，$\mathrm{cl}(A)$ あるいは $\mathrm{cl}_X(A)$ と書く．$\overline{A}$ の点を，A の（X における）**接触点**という．$A \in \mathfrak{P}(X)$ に $\overline{A} \in \mathfrak{P}(X)$ を対応させる写像を，位相空間 X の**閉包作用素**という．

具体的には，A の内部は A に含まれるすべての開集合の合併として，A の閉包は A を含む全ての閉集合の交叉として得られる．この合併が開集合であることは (O1) から，この交叉が閉集合であることは (C1) の結果である．

明らかに，$A \subseteq X$ が開集合であることと $A = A^\circ$ とは同値であり，A が閉集合であることと $A = \overline{A}$ とは同値である．また，開集合と閉集合の関係から，$X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$，$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ が成り立つ．

位相空間の部分集合族 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ の元の内部・閉包全体を，それぞれ $\mathfrak{A}^\circ$, $\overline{\mathfrak{A}}$ と書く．すなわち，$\mathfrak{A}^\circ = \{A^\circ \mid A \in \mathfrak{A}\}$，$\overline{\mathfrak{A}} = \{\overline{A} \mid A \in \mathfrak{A}\}$ である．

命題 2.6 X を位相空間とする．

(1) 内部作用素は，次の性質を満たす．
  (o1) $A \subseteq X$ に対して，$A^\circ \subseteq A$ である．
  (o2) $A \subseteq X$ に対して，$A^{\circ\circ} = A^\circ$ である．
  (o3) $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq X$ に対して，$(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^\circ = A_0^\circ \cap \cdots \cap A_{n-1}^\circ$ である（特に，$X^\circ = X$ である）．

(2) 閉包作用素は，次の性質を満たす．
  (c1) $A \subseteq X$ に対して，$\overline{A} \supseteq A$.
  (c2) $A \subseteq X$ に対して，$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
  (c3) $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq X$ に対して，$\overline{A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}} = \overline{A_0} \cup \cdots \cup \overline{A_{n-1}}$ である（特に，$\overline{\emptyset} = \emptyset$ である）．

証明 証明はどちらもほとんど同様だから，(1) のみ示す．

(o1) 明らかである．

(o2) $A \subseteq X$ に対して，A° は開集合だから，$A^{\circ\circ} = A^\circ$ である．

(o3) $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq X$ とする．(o1) と (O2) より，$A_0^\circ \cap \cdots \cap A_{n-1}^\circ$ は $A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ に含まれる開集合だから，$(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^\circ \supseteq A_0^\circ \cap \cdots \cap A_{n-1}^\circ$ である．一方で，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subseteq A_i$ だから，定義より $(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^\circ \subseteq A_i^\circ$ である．したがって，$(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^\circ \subseteq A_0^\circ \cap \cdots \cap A_{n-1}^\circ$ である．よって，$(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})^\circ = A_0^\circ \cap \cdots \cap A_{n-1}^\circ$ が成り立つ． □

命題 2.7 X を位相空間とする．

(1) $A \subseteq B \subseteq X$ ならば，$A^\circ \subseteq B^\circ$，$\overline{A} \subseteq \overline{B}$ である．

(2) X の部分集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ に対して，次が成り立つ．

(a) $\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ$.
(b) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.
(c) $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.
(d) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

証明　証明はどちらもほとんど同様だから，内部作用素についてのみ示す．

(1)　内部の定義から明らかだが，次のようにしてもわかる．$A \subseteq B$ ならば $A = A \cap B$ だから，(o3) より $A^\circ = (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ である．よって，$A^\circ \subseteq B^\circ$ が成り立つ．

(2)　証明はどれもほとんど同様だから，(a) のみ示す．$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して $A_i \subseteq A$ だから，(1) より $A_i^\circ \subseteq A^\circ$ である．よって，$\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq A^\circ$ が成り立つ．□

証明からわかるように，命題 2.7 の性質は，内部作用素の性質 (o3)，閉包作用素の性質 (c3) のみから導かれることである．したがって，命題 2.7 は (o3) あるいは (c3) を満たすようなすべての作用素について成り立つ．このことは，後に定理 2.12 の証明で用いられる．

X を位相空間とする．部分集合 $A \subseteq X$ が $\overline{A} = X$ を満たすとき，A は（X において）**稠密**であるという．A が稠密であることは，任意の空でない開集合が A と交わることと同値である．

命題 2.8　位相空間 X の開集合 O と部分集合 A について，$O \cap \overline{A} \subseteq \overline{O \cap A}$ である．特に，A が X において稠密ならば，$O \subseteq \overline{O \cap A}$ である．

証明　$x \in O \cap \overline{A}$ とする．x を含む開集合 U を任意にとる．$U \cap O$ も x を含む開集合だから，$x \in \overline{A}$ より $U \cap O$ は A と交わり，したがって U は常に $O \cap A$ と交わるから，$x \in \overline{O \cap A}$ である．よって，$O \cap \overline{A} \subseteq \overline{O \cap A}$ が成り立つ．□

2.2.3　近傍

定義 2.9（近傍）　X を位相空間とする．部分集合 $U \subseteq X$ が点 $x \in X$ を内点にもつとき，U は x の**近傍**であるという．x の近傍全体のなす集合族を x の**近傍フィルタ**といい，$\mathfrak{N}_X(x)$ あるいは単に $\mathfrak{N}(x)$ と書く．各点 $x \in X$ に対してその近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ を与える写像を，位相空間 X の**近傍作用素**という．

開集合・閉集合であって点 x の近傍であるものを，それぞれ x の**開近傍**・**閉近傍**という．x を含む開集合は，常に x の開近傍である．

位相空間の部分集合 U, A について，U が A の各点を内点にもつ（すなわち，$A \subseteq U^\circ$ である）とき，U は A の**近傍**であるという．

命題 2.10　X を位相空間とする．近傍作用素は，次の性質を満たす．

(N1) 任意の $x \in X$ に対して，$\mathfrak{N}(x)$ は X 上のフィルタである．
(N2) 任意の $x \in X$ と $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対して，$x \in U$ である．
(N3) 任意の $x \in X$ と $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対してある $V \in \mathfrak{N}(x)$ が存在し，任意の $y \in V$ に対して $U \in \mathfrak{N}(y)$ となる．

証明　(N1)　$U \in \mathfrak{N}(x)$ かつ $U \subseteq U' \subseteq X$ ならば，$x \in U^\circ \subseteq U'^\circ$ だから $U' \in \mathfrak{N}(x)$ である．また，U_0, ..., $U_{n-1} \in \mathfrak{N}(x)$ ならば，$x \in U_0^\circ \cap \cdots \cap U_{n-1}^\circ = (U_0 \cap \cdots \cap U_{n-1})^\circ$ だから $U_0 \cap \cdots \cap U_{n-1} \in \mathfrak{N}(x)$ である（(o3) を用いた）．よって，$\mathfrak{N}(x)$ は X 上のフィルタである．

(N2)　明らかである．

(N3)　$U \in \mathfrak{N}(x)$ に対して，$V = U^\circ$ と置けば，$V \in \mathfrak{N}(x)$ であり，任意の $y \in V$ に対して $U \in \mathfrak{N}(y)$ となる． □

(N1), (N2) より，$\mathfrak{N}(x)$ は X 上の真フィルタである．

命題 2.11　X を位相空間とし，$A \subseteq X$，$x \in X$ とする．

(1) $x \in A^\circ$ であるための必要十分条件は，ある $U \in \mathfrak{N}(x)$ が存在して $U \subseteq A$ となることである．
(2) $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は，任意の $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対して $U \cap A \neq \emptyset$ となることである．

証明　(1)　$x \in A^\circ$ ならば，$U = A^\circ$ と置けば $U \in \mathfrak{N}(x)$ かつ $U \subseteq A$ である．逆に，ある近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ が存在して $U \subseteq A$ となっていれば，$x \in U^\circ \subseteq A^\circ$ となる．

(2)　$x \in \overline{A}$ は $x \notin (X \setminus A)^\circ$ と同値であり，$U \cap A \neq \emptyset$ は $U \subseteq X \setminus A$ と同値だから，結論は (1) から従う． □

2.2.4　位相の特徴付け

位相は，開集合系によって定義された．次の命題は，閉集合系，内部作用素・閉包作用素，あるいは各点の近傍フィルタによっても位相を特徴付けられることを示している．

定理 2.12　X を集合とする．

(1) 部分集合族 $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{P}(X)$ であって (C1), (C2)（において $\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{C}'$ に置き換えたもの）を満たすものが与えられたとする．このとき，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ であって，位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の閉集合系 $\mathfrak{C}$ が $\mathfrak{C}'$ に一致するようなものが一意に存在する．
(2) 写像 $\mathrm{int}' \colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ であって (o1), (o2), (o3)（において A° を $\mathrm{int}'(A)$ で置き換えたもの）を満たすものが与えられたとする．このとき，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ であって，位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の内部作用素 int が int' に一致するようなものが一意に存在する．
(3) 写像 $\mathrm{cl}' \colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ であって (c1), (c2), (c3)（において $\overline{A}$ を $\mathrm{cl}'(A)$ で置き換えたもの）を満たすものが与えられたとする．このとき，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ であって，位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の閉包作用素 cl が cl' に一致するようなものが一意に存在する．
(4) 写像 $\mathfrak{N}' \colon X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ であって (N1), (N2), (N3)（において $\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{N}'$ に置き換えたもの）を満たすものが与えられたとする．このとき，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ であって，位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の近傍作用素 $\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{N}'$ に一致するようなものが一意に存在する．

証明　(1) については，明らかに $\mathfrak{O} = \{X \setminus C \mid C \in \mathfrak{C}'\}$ が条件を満たす唯一の位相となる．また (3) については，$\mathrm{int}'(A) = X \setminus \mathrm{cl}'(X \setminus A)$ によって int' を定義することで，(2) に帰着する．あとは，(2) と (4) を示せばよい．(2) の証明にあたっては，命題 2.7 の後に注意したことから，int' に関して命題 2.7（の内部作用素に関する部分）が援用できることに注意する．

(2)　条件を満たす位相が存在するとすれば，それは

$$\mathfrak{O} = \{A \subseteq X \mid \mathrm{int}'(A) = A\}$$

を満たさなければならない．これは $\mathfrak{O}$ の一意性を示している．次に，このように与えられる $\mathfrak{O}$ が位相の条件 (O1), (O2) を満たすことを示す．

(O1)　$\{A_i\}_{i\in I}\subseteq\mathfrak{O}$，すなわち各 $i\in I$ に対して $\mathrm{int}'(A_i)=A_i$ とすると，命題 2.7 (2) より $\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}\mathrm{int}'(A_i)\subseteq\mathrm{int}'\bigl(\bigcap_{i\in I}A_i\bigr)$ であり，一方で (o1) より $\bigcap_{i\in I}A_i\supseteq\mathrm{int}'\bigl(\bigcap_{i\in I}A_i\bigr)$ だから，$\bigcap_{i\in I}A_i=\mathrm{int}'\bigl(\bigcap_{i\in I}A_i\bigr)$ である．すなわち，$\bigcap_{i\in I}A_i\in\mathfrak{O}$ となる．よって，(O1) は成り立つ．

(O2)　$A_0,\ \dots,\ A_{n-1}\in\mathfrak{O}$ とすると，(o3) より $\mathrm{int}'(A_0\cap\cdots\cap A_{n-1})=\mathrm{int}'(A_0)\cap\cdots\cap\mathrm{int}'(A_{n-1})=A_0\cap\cdots\cap A_{n-1}$ だから $A_0\cap\cdots\cap A_{n-1}\in\mathfrak{O}$ である．よって，(O2) は成り立つ．

最後に，位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ における閉包作用素 int が int′ と一致することを示す．$A\subseteq X$ に対して $\mathrm{int}(A)$ は，定義より，条件

$$A \text{ に含まれ，かつ } \mathrm{int}' \text{ によって自分自身にうつされる} \tag{$*$}$$

を満たす集合のうち最大のものである．(o1), (o2) より $\mathrm{int}'(A)$ は ($*$) を満たす．また，B も ($*$) を満たすとすると，$B\subseteq A$ だから命題 2.7 (1) より $\mathrm{int}'(B)\subseteq\mathrm{int}'(A)$ であり，したがって $B=\mathrm{int}'(B)\subseteq\mathrm{int}'(A)$ となる．すなわち $\mathrm{int}'(A)$ は最大性を満たすから，$\mathrm{int}(A)=\mathrm{int}'(A)$ である．よって，$\mathrm{int}=\mathrm{int}'$ が成り立つ．

(4)　条件を満たす位相が存在するとすれば，それは

$$\mathfrak{O}=\{A\subseteq X\mid \text{任意の } x\in A \text{ に対して } A\in\mathfrak{N}'(x)\}$$

を満たさなければならない．これは $\mathfrak{O}$ の一意性を示している．次に，このように与えられる $\mathfrak{O}$ が位相の条件 (O1), (O2) を満たすことを示す．

(O1)　$\{A_i\}_{i\in I}\subseteq\mathfrak{O}$ とし，点 $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ を任意にとる．$x\in A_i$ とすると，$A_i\in\mathfrak{N}'(x)$ だから (N1) より $\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathfrak{N}'(x)$ であり，したがって $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq\mathfrak{O}$ である．よって，(O1) は成り立つ．

(O2)　$A_0,\dots,A_{n-1}\in\mathfrak{O}$ とし，点 $x\in A_0\cap\cdots\cap A_{n-1}$ を任意にとる．すると，$A_0,\ \dots,\ A_{n-1}\in\mathfrak{N}'(x)$ だから (N1) より $A_0\cap\dots A_{n-1}\in\mathfrak{N}'(x)$ であり，したがって $A_0\cap\cdots\cap A_{n-1}\in\mathfrak{O}$ である．よって，(O2) は成り立つ．

最後に，位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ における近傍作用素 $\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{N}'$ と一致することを示す．$U\in\mathfrak{N}(x)$ とすると，ある $O\in\mathfrak{O}$ が存在して $x\in O\subseteq U$ を満たす．$\mathfrak{O}$ の定義より，特に $O\in\mathfrak{N}'(x)$ である．$O\subseteq U$ だから，(N1) より $U\in\mathfrak{N}'(x)$ である．逆に，$U\in\mathfrak{N}'(x)$ とする．

$$O=\{y\in X\mid U\in\mathfrak{N}'(y)\}$$

と置き，$x\in O\subseteq U$ かつ $O\in\mathfrak{O}$ をいえばよい．定義より $x\in O$ であり，(N2) より $y\in O$ ならば $y\in U$，すなわち $O\subseteq U$ である．最後に，$O\in\mathfrak{O}$，すなわち任意の $y\in O$ に対して $O\in\mathfrak{N}'(y)$ であることを示す．(N3) より，$V\in\mathfrak{N}'(y)$ が存在して，

$$\text{任意の } z\in V \text{ に対して } U\in\mathfrak{N}'(z) \tag{$**$}$$

となる．条件 ($**$) は $V\subseteq O$ と同値である．このような V の存在から，(N1) より $O\in\mathfrak{N}'(y)$ が従う．　□

2.3　準開基と開基，準近傍基と近傍基

2.3.1　準開基と開基

定義 2.13（準開基，開基）　$(X,\mathfrak{O})$ を位相空間とし，$\mathfrak{B}$ を X の部分集合系とする．

(1) $\mathfrak{B}$ の元の有限交叉の合併として表せる集合全体が $\mathfrak{O}$ と一致するとき，すなわち

$$\mathfrak{O}=\left\{\bigcup_{i\in I}(B_{i,0}\cap\cdots\cap B_{i,n_i-1})\ \middle|\ \{B_{i,k}\}_{i\in I,\,0\le k<n_i}\subseteq\mathfrak{B}\right\} \tag{$*$}$$

であるとき，$\mathfrak{B}$ は位相空間 $(X, \mathfrak{O})$（あるいは位相 $\mathfrak{O}$）の**準開基**である，あるいは $\mathfrak{B}$ は位相 $\mathfrak{O}$ を**生成する**という．

(2) $\mathfrak{B}$ の元の合併として表せる集合全体が $\mathfrak{O}$ と一致するとき，すなわち

$$\mathfrak{O} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \;\middle|\; \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{B} \right\}$$

であるとき，$\mathfrak{B}$ は位相空間 $(X, \mathfrak{O})$（あるいは位相 $\mathfrak{O}$）の**開基**であるという．$\mathfrak{B}$ が集合 X 上のある位相の開基であるとき，単に $\mathfrak{B}$ は X 上の**開基**であるという．

容易にわかるように，集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ に対して，($*$) の右辺は常に X 上の位相となっている．さらに，これは $\mathfrak{B}$ を含む X 上の位相の中で最小のものである．したがって，$\mathfrak{B}$ が生成する位相とは，$\mathfrak{B}$ を含むような最小の位相のことに他ならない．

命題 2.14　X を位相空間とし，$\mathfrak{B}$ を X の部分集合族とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が X の準開基であるための必要十分条件は，$\mathfrak{B}$ の元がすべて開集合であり，「任意の開集合 $O \subseteq X$ と点 $x \in O$ に対して有限個の元 $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ が存在し，$x \in B_0 \cap \dots \cap B_{n-1} \subseteq O$ となる」ことである．

(2) $\mathfrak{B}$ が X の開基であるための必要十分条件は，$\mathfrak{B}$ の元がすべて開集合であり，「任意の開集合 $O \subseteq X$ と点 $x \in O$ に対してある $B \in \mathfrak{B}$ が存在し，$x \in B \subseteq O$ となる」ことである．　□

命題 2.15　X を集合とし，$\mathfrak{B}$ を X の部分集合族とする．$\mathfrak{B}$ が X 上の（ある位相の）開基であるための必要十分条件は，次の条件を満たすことである．

(OB) 任意の $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ と $x \in B_0 \cap \dots \cap B_{n-1}$ に対してある $B \in \mathfrak{B}$ が存在し，$x \in B \subseteq B_0 \cap \dots \cap B_{n-1}$ となる．

証明　$\mathfrak{O}$ を $\mathfrak{B}$ の元の合併として表せる集合の全体とする．$\mathfrak{O}$ は常に (O1) を満たすから，$\mathfrak{B}$ が X 上の開基であるための必要十分条件は，$\mathfrak{O}$ が (O2) を満たすことである．$\mathfrak{O}$ が (O2) を満たすとは，「$\mathfrak{B}$ の元の合併として表せる集合」の有限交叉がふたたび $\mathfrak{B}$ の元の合併として表せるということだが，「$\mathfrak{B}$ の元の合併として表せる集合」の有限交叉は「$\mathfrak{B}$ の元の有限交叉」の合併として表せるから，これは結局，$\mathfrak{B}$ の元の有限交叉が $\mathfrak{B}$ の元の合併として表せることと同値である．さらに，これは (OB) と同値である．　□

2.3.2　準近傍基と近傍基

定義 2.16（準近傍基，近傍基）　X を位相空間とし，$x \in X$ とする．近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x)$ の準フィルタ基・フィルタ基を，それぞれ x の（X における）**準近傍基・近傍基**という．

明らかに，位相空間の各点において，その開近傍全体の集合はその点の近傍基をなす．

命題 2.17　X を位相空間とし，$x \in X$ とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が X の準開基ならば，$\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathfrak{B} \mid x \in B\}$ は x の準近傍基である．

(2) $\mathfrak{B}$ が X の開基ならば，$\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathfrak{B} \mid x \in B\}$ は x の近傍基である．

証明　(1)　$\mathfrak{B}$ を X の準開基とする．明らかに，$\mathfrak{B}_x$ の元はすべて x の近傍である．また，準開基の定義より，x の任意の近傍 U に対して $x \in B_0 \cap \dots \cap B_{n-1} \subseteq U^\circ$ を満たす $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}_x$ が存在する．よっ

て，$\mathfrak{B}_x$ は x の準近傍基である．

(2)　$\mathfrak{B}$ を X の開基とする．明らかに，$\mathfrak{B}_x$ の元はすべて x の近傍である．また，開基の定義より，x の任意の近傍 U に対して $x \in B \subseteq U^\circ$ を満たす $B \in \mathfrak{B}_x$ が存在する．よって，$\mathfrak{B}_x$ は x の近傍基である．□

命題 2.18　X を位相空間とする．

(1) 各点 $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}_x$ が x における準近傍基ならば，$\bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x^\circ = \{B^\circ \mid x \in X,\ B \in \mathfrak{B}_x\}$ は X の準開基である．
(2) 各点 $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}_x$ が x における近傍基ならば，$\bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x^\circ = \{B^\circ \mid x \in X,\ B \in \mathfrak{B}_x\}$ は X の開基である．

証明　(1)　各点 $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}_x$ が x における準近傍基であるとする．$\mathfrak{B} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x^\circ$ と置く．$\mathfrak{B}$ が命題 2.14 (1) の条件を満たすことを確かめればよい．明らかに，$\mathfrak{B}$ の元はすべて開集合である．また，開集合 $O \subseteq X$ と点 $x \in O$ を任意にとると，準近傍基の性質より，有限個の元 $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}_x$ が存在し，$x \in B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \subseteq O$ となる．このとき，$B_0^\circ, \ldots, B_{n-1}^\circ \in \mathfrak{B}$ であり，$x \in B_0^\circ \cap \cdots \cap B_{n-1}^\circ \subseteq O$ が成り立つ．これで，$\mathfrak{B}$ が命題 2.14 (1) の条件を満たすことが確かめられた．

(2)　各点 $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}_x$ が x における近傍基であるとする．$\mathfrak{B} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x^\circ$ と置く．$\mathfrak{B}$ が命題 2.14 (2) の条件を満たすことを確かめればよい．明らかに，$\mathfrak{B}$ の元はすべて開集合である．また，開集合 $O \subseteq X$ と点 $x \in O$ を任意にとると，近傍基の性質より，ある $B \in \mathfrak{B}_x$ が存在し，$x \in B \subseteq O$ となる．このとき，$B^\circ \in \mathfrak{B}$ であり，$x \in B^\circ \subseteq O$ が成り立つ．これで，$\mathfrak{B}$ が命題 2.14 (2) の条件を満たすことが確かめられた．□

命題 2.19　X を集合とし，各 $x \in X$ に対して X の部分集合族 $\mathfrak{B}_x$ が与えられているとする．X 上の位相であって，各点 $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}_x$ が x の近傍基であるようなものが存在するための必要十分条件は，次の 3 条件を満たすことである．

(NB1) 任意の $x \in X$ に対して，$\mathfrak{B}_x$ は X 上のフィルタ基である．
(NB2) 任意の $x \in X$ と $B \in \mathfrak{B}_x$ に対して，$x \in B$ である．
(NB3) 任意の $x \in X$ と $B \in \mathfrak{B}_x$ に対してある $C \in \mathfrak{B}_x$ が存在し，任意の $y \in C$ に対して C に含まれる $\mathfrak{B}_y$ の元が存在する．

さらに，これらの条件が成り立つとき，上のような X 上の位相は一意に定まる．

証明　X 上の位相 $\mathfrak{O}$ について，各点 $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}_x$ が $\mathfrak{O}$ に関する x の近傍基だとすれば，$\mathfrak{O}$ に関する x の近傍フィルタは $\mathfrak{F}_x = \{F \subseteq X \mid ある\ B \in \mathfrak{B}_x\ が存在して\ B \subseteq F\}$ でなければならない．定理 2.12 (4) より，このような位相 $\mathfrak{O}$ はたかだか一意であり，これが存在するための必要十分条件は，$x \mapsto \mathfrak{F}_x$ が (N1), (N2), (N3) を満たすことである．ところが，容易にわかるように，これは $x \mapsto \mathfrak{B}_x$ が (NB1), (NB2), (NB3) を満たすことと同値である．これで示された．□

2.4　連続写像，開写像と閉写像

2.4.1　連続写像

定義 2.20（連続写像）　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が点 $x \in X$ において連続であるとは，f がフィルタ付き空間 $(X, \mathfrak{N}(x))$ から $(Y, \mathfrak{N}(f(x)))$ へのフィルタ射であることをいう．f が X の各点

で連続ならば，単に f は連続であるという．

すなわち，位相空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が点 $x \in X$ において連続であるとは，$f(x)$ の任意の近傍 V に対して $f^{-1}(V)$ が x の近傍であることをいう．

連続写像による像を連続像という．

命題 2.21　X, Y, Z を位相空間，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を写像とする．f が $x \in X$ において連続であり，g が $f(x)$ において連続であれば，$g \circ f\colon X \to Z$ は x において連続である．特に，f と g が連続ならば，その合成 $g \circ f$ も連続である．

証明　フィルタ射の合成がフィルタ射であること（命題 1.12）から従う．□

上の定義では写像の連続性を近傍によって特徴付けたが，これを開集合・閉集合あるいは内部・閉包によって特徴づけることもできる．

命題 2.22　X, Y を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ に対して，次の 6 条件は同値である．

(a) f は連続である．
(b) Y の任意の開集合の f による逆像は，X の開集合である．
(c) Y の任意の閉集合の f による逆像は，X の閉集合である．
(d) 任意の $B \subseteq Y$ に対して，$f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ$ である．
(e) 任意の $B \subseteq Y$ に対して，$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ である．
(f) 任意の $A \subseteq X$ に対して，$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　(a) が成り立つとする．開集合 $O \subseteq Y$ を任意にとる．任意の $x \in f^{-1}(O)$ に対して $f(x) \in O$，したがって O は $f(x)$ の近傍だから，(a) より $f^{-1}(O)$ は x の近傍である．$x \in f^{-1}(O)$ は任意だったから，$f^{-1}(O)$ は開集合である．よって，(b) が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．点 $x \in X$ を任意にとり，U を $f(x)$ の近傍とする．近傍の定義より $f(x) \in U^\circ$ だから $x \in f^{-1}(U^\circ)$ である．したがって $x \in f^{-1}(U^\circ) \subseteq f^{-1}(U)$ だが，(b) より $f^{-1}(U^\circ)$ は開集合だから，$f^{-1}(U)$ は x の近傍である．よって，(a) が成り立つ．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　逆像をとる操作と補集合をとる操作とが可換であることから従う．

(b) $\Longrightarrow$ (d)　(b) が成り立つとする．部分集合 $B \subseteq Y$ を任意にとる．$f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)$ であり，(b) より $f^{-1}(B^\circ)$ は開集合なので，$f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ$ が成り立つ．よって，(d) が成り立つ．

(d) $\Longrightarrow$ (b)　(d) が成り立つとする．開集合 $O \subseteq Y$ を任意にとる．$f^{-1}(O) \supseteq f^{-1}(O)^\circ$ であり，一方で (d) より $f^{-1}(O) = f^{-1}(O^\circ) \subseteq f^{-1}(O)^\circ$ となるので，$f^{-1}(O) = f^{-1}(O)^\circ$，すなわち $f^{-1}(O)$ は開集合である．よって，(b) が成り立つ．

(d) $\Longleftrightarrow$ (e)　$f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ \iff X \setminus f^{-1}(B^\circ) \supseteq X \setminus f^{-1}(B)^\circ \iff f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \supseteq \overline{f^{-1}(Y \setminus B)}$ からわかる．

(e) $\Longleftrightarrow$ (f)　(e) は「$A \subseteq f^{-1}(B)$ ならば $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$」といいかえられる．同様に，(f) は「$f(A) \subseteq B$ ならば $f(\overline{A}) \subseteq \overline{B}$」といいかえられる．両者を比べると，「ならば」の前後がそれぞれ同値だから，(e) と (f) は同値である．□

命題 2.23　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) $x \in X$ とし，$\mathfrak{B}$ が $f(x)$ の準近傍基であるとする．このとき，f が x において連続であるための必要十分条件は，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B)$ が x の近傍であることである．

(2) $\mathfrak{B}$ が Y の準開基であるとする．このとき，f が連続であるための必要十分条件は，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B)$ が X の開集合であることである．

証明　(1)　命題 1.13 から従う．

(2)　必要性は明らかだから，十分性を示す．$\mathfrak{B}$ が Y の準開基であり，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $f^{-1}(B)$ が X の開集合であるとする．任意に Y の開集合 O をとると，準開基の定義より，$\{B_{i,k}\}_{i\in I,\, 0\leq k<n_i} \subseteq \mathfrak{B}$ が存在して

$$O = \bigcup_{i\in I}(B_{i,0} \cap \cdots \cap B_{i,n_i-1})$$

と書ける．このとき，

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I}(f^{-1}(B_{i,0}) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_{i,n_i-1}))$$

である．条件よりすべての $f^{-1}(B_{i,k})$ は X の開集合だから，$f^{-1}(O)$ も X の開集合である．よって，f は連続である． □

定義 2.24（同相）　X, Y を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であり，f と f^{-1} がともに連続であるとき，f は X から Y への**同相写像**であるという．位相空間 X, Y の間に同相写像が存在するとき，X と Y は**同相**であるという．

X, Y, Z を位相空間とする．明らかに，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は同相写像であり，$f\colon X \to Y$ が同相写像ならば $f^{-1}\colon Y \to X$ も同相写像である．また，命題 2.21 より，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ が同相写像ならば，$g \circ f\colon X \to Z$ も同相写像である．

2.4.2　開写像と閉写像

定義 2.25（開写像，閉写像）　位相空間から位相空間への写像であって，開集合の像が常に開集合であるものを**開写像**，閉集合の像が常に閉集合であるものを**閉写像**という．

開連続写像・閉連続写像による像を，それぞれ**開連続像**・**閉連続像**という．

命題 2.26　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(a) f が開写像であるための必要十分条件は，任意の $A \subseteq X$ に対して $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$ が成り立つことである．

(b) f が閉写像であるための必要十分条件は，任意の $A \subseteq X$ に対して $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ が成り立つことである．

証明　(1)　f が開写像であれば，任意の $A \subseteq X$ に対して $f(A^\circ)$ は開集合だから，$f(A^\circ) = f(A^\circ)^\circ \subseteq f(A)^\circ$ が成り立つ．逆に，任意の $A \subseteq X$ に対して $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$ が成り立つとする．開集合 $O \subseteq X$ を任意にとって $A = O$ と置くと，$f(O) = f(O^\circ) \subseteq f(O)^\circ$，したがって $f(O) = f(O)^\circ$ を得る．よって，f は開写像である．

(2)　f が閉写像であれば，任意の $A \subseteq X$ に対して $f(\overline{A})$ は閉集合だから，$f(\overline{A}) = \overline{f(\overline{A})} \supseteq \overline{f(A)}$ が成り立つ．逆に，任意の $A \subseteq X$ に対して $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ が成り立つとする．閉集合 $C \subseteq X$ を任意にとって $A = C$ と置くと，$f(C) = f(\overline{C}) \supseteq \overline{f(C)}$，したがって $f(C) = \overline{f(C)}$ を得る．よって，f は閉写像である． □

系 2.27　位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ が閉連続写像であるための必要十分条件は，任意の $A \subseteq X$ に対して $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ が成り立つことである．

証明　命題 2.26 と命題 2.22 から従う．□

命題 2.28　X, Y, Z を位相空間，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を写像とする．

(1) f と g が開写像【閉写像】ならば，$g \circ f$ も開写像【閉写像】である．
(2) $g \circ f$ が開写像【閉写像】かつ f が連続全射ならば，g は開写像【閉写像】である．
(3) $g \circ f$ が開写像【閉写像】かつ g が連続単射ならば，f は開写像【閉写像】である．

証明　証明はどちらもほとんど同様だから，開写像についてのみ示す．

(1)　明らかである．

(2)　開集合 $O \subseteq Y$ を任意にとる．f の連続性より $f^{-1}(O)$ は X の開集合であり，f の全射性より $O = f(f^{-1}(O))$ である．$g \circ f$ は開写像だから，$g(O) = g(f(f^{-1}(O))) = (g \circ f) \circ f^{-1}(O)$ は Z の開集合である．よって，g は開写像である．

(3)　開集合 $O \subseteq X$ を任意にとる．$g \circ f$ は開写像だから，$g(f(O))$ は Z の開集合である．g の連続性より $g^{-1}(g(f(O)))$ は Y の開集合であり，g の単射性より $g(g^{-1}(f(O))) = f(O)$ であるから，$f(O)$ は Y の開集合である．よって，f は開写像である．□

命題 2.29　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とし，A を X の部分集合とする．

(1) f が開写像であり，A が X の開集合ならば，$f|_A\colon A \to Y$ も開写像である．
(2) f が閉写像であり，A が X の閉集合ならば，$f|_A\colon A \to Y$ も閉写像である．□

命題 2.30　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とし，B を Y の部分集合とする．

(1) f が開写像ならば，f を $f^{-1}(B)$ から B への写像とみなしたものも開写像である．
(2) f が閉写像ならば，f を $f^{-1}(B)$ から B への写像とみなしたものも閉写像である．

証明　X の部分集合 A に対して $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ であることからわかる．□

X を位相空間，X' を X の部分集合とする．X の位相 $\mathfrak{O}$ に対して，

$$\mathfrak{O}|_{X'} = \{O \cap X' \mid O \in \mathfrak{O}\}$$

は X' 上の位相をなす．これを $\mathfrak{O}$ が誘導する X' 上の**相対位相**といい，相対位相によって X' を位相空間とみなすとき，X' を X の**部分空間**という．特に断らなければ，位相空間の部分集合は部分空間とみなす．*3

命題 2.31　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を開連続写像とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が点 $x \in X$ の近傍基ならば，$f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は Y における $f(x)$ の近傍基である．
(2) $\mathfrak{B}$ が X の開基ならば，$f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は（Y の部分空間としての）像 $f(X)$ の開基である．

証明　(1)　f が開写像であることより，$f(\mathfrak{B})$ の各元はすべて $f(x)$ の近傍である．Y における $f(x)$ の近傍 U を任意にとると，f の連続性より，$f^{-1}(U)$ は x の近傍である．$\mathfrak{B}$ が x の近傍基であることから，$x \in B \subseteq f^{-1}(U)$ を満たす $B \in \mathfrak{B}$ がとれる．このとき，$f(B) \in f(\mathfrak{B})$ は $f(x) \in f(B) \subseteq U$ を満たす．よって，$f(\mathfrak{B})$ は $f(x)$ の近傍基である．

(2)　f が開写像であることより，$f(\mathfrak{B})$ の各元はすべて Y の開集合であり，したがって $f(X)$ の開集合である．$f(X)$ の開集合 O と点 $y \in O$ を任意にとる．O は Y の開集合であり，y はある $x \in X$ によって

*3 部分空間については，3.2 節で改めて詳しく解説する．ここで定義を述べたのは，部分空間の概念が，命題 2.31 (2) の主張を述べるために必要だからである．

$y = f(x)$ と表せる．f の連続性より，$f^{-1}(O)$ は X の開集合で，x を含む．$\mathfrak{B}$ が X の開基であることから，$x \in B \subseteq f^{-1}(O)$ を満たす $B \in \mathfrak{B}$ がとれる．このとき，$f(B) \in f(\mathfrak{B})$ は $y = f(x) \in f(B) \subseteq O$ を満たす．よって，$f(\mathfrak{B})$ は $f(X)$ の開基である．□

2.5　位相空間の部分集合族の性質

定義 2.32（被覆）　X を集合，S を X の部分集合とし，$\mathfrak{A}$ を X の部分集合族とする．$S \subseteq \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ であるとき，$\mathfrak{A}$ は S を**被覆する**，あるいは $\mathfrak{A}$ は S の（X における）**被覆**であるという．$\mathfrak{A}$ が何らかの被覆であり，その部分族 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ がなお被覆であるとき，$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}$ の**部分被覆**という．

X が位相空間のとき，被覆であって開集合・閉集合のみからなるものを，それぞれ**開被覆**・**閉被覆**という．

定義 2.33（細分）　X を集合とする．

(1) X の部分集合族 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ について，任意の $B \in \mathfrak{B}$ に対してある $A \in \mathfrak{A}$ が存在して $B \subseteq A$ となるとき，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ を**細分する**，あるいは $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の**細分**であるという．
(2) 同じ添字集合をもつ X の部分集合族 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ について，任意の $i \in I$ に対して $B_i \subseteq A_i$ であるとき，$\{B_i\}_{i \in I}$ は $\{A_i\}_{i \in I}$ を**一対一に細分する**，あるいは $\{B_i\}_{i \in I}$ は $\{A_i\}_{i \in I}$ の**一対一細分**であるという．

定義 2.34（点有限性，局所有限性，星有限性，疎性，閉包保存性）　X を集合とし，$\{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合族とする．

(1) $\{A_i\}_{i \in I}$ が**点有限**であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，$x \in A_i$ なる $i \in I$ が有限個しか存在しないことをいう．
(2) $\{A_i\}_{i \in I}$ が**星有限**であるとは，任意の $i \in I$ に対して，$A_i \cap A_j \neq \emptyset$ なる $j \in I$ が有限個しか存在しないことをいう．

さらに，X が位相空間である場合を考える．

(3) $\{A_i\}_{i \in I}$ が（X において）**局所有限**であるとは，任意の点 $x \in X$ がある近傍 U をもち，$U \cap A_i \neq \emptyset$ を満たす $i \in I$ が有限個しか存在しないことをいう．
(4) $\{A_i\}_{i \in I}$ が（X において）**疎**であるとは，任意の点 $x \in X$ がある近傍 U をもち，$U \cap A_i \neq \emptyset$ を満たす $i \in I$ がたかだか 1 つしか存在しないことをいう．
(5) $\{A_i\}_{i \in I}$ が（X において）**閉包保存**であるとは，その任意の部分族 $\{A_i\}_{i \in I'}$（$I' \subseteq I$）が $\overline{\bigcup_{i \in I'} A_i} = \bigcup_{i \in I'} \overline{A_i}$ を満たすことをいう．
(6) 点有限・局所有限・星有限・疎・閉包保存な部分集合族の可算合併として表せる部分集合族は，それぞれ **σ-点有限**・**σ-局所有限**・**σ-星有限**・**σ-疎**・**σ-閉包保存**であるという．

位相空間の部分集合族は，明らかに，疎ならば局所有限であり，局所有限ならば点有限である．開被覆は，星有限ならば局所有限である．

命題 2.35　位相空間 X の部分集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が局所有限ならば，その元の閉包全体 $\{\overline{A_i}\}_{i \in I}$ も局所有限である．

証明　X の各点において，$\{A_i\}_{i \in I}$ の局所有限性より，その点の開近傍 U であって有限個の A_i（$i \in I$）と

しか交わらないものがとれる．$X \setminus U$ は閉だから，A_i が U と交わらないならば $\overline{A_i}$ も U と交わらない．したがって，U は有限個の $\overline{A_i}$（$i \in I$）としか交わらない．よって，$\{\overline{A_i}\}_{i \in I}$ は局所有限である． □

命題 2.36　位相空間の部分集合族は，局所有限ならば閉包保存である．

証明　$\{A_i\}_{i \in I}$ を位相空間の局所有限な部分集合族，$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ として，$\overline{A} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ を示せば十分である．$\overline{A} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ は一般に成り立つ（命題 2.7 (2)）．逆向きの包含関係を示す．$x \in \overline{A}$ を任意にとる．すると，x の任意の近傍は A と交わる．一方で，$\mathfrak{A}$ の局所有限性より，$\{A_i\}_{i \in I}$ の元のうち有限個（$A_{i_0}, \dots, A_{i_{n-1}}$ とする）としか交わらない x の近傍が存在する．このとき，x の任意の近傍は $A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_{n-1}}$ と交わらなければならないから，

$$x \in \overline{A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_{n-1}}} = \overline{A_{i_0}} \cup \dots \cup \overline{A_{i_{n-1}}} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

である．よって，$\overline{A} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ が成り立つ． □

命題 2.37　X, Y を位相空間，$f \colon X \to Y$ を写像とする．$\mathfrak{A}$ が

(1) X の開被覆
(2) X の局所有限閉被覆

のそれぞれの場合，f が連続であることと，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して制限写像 $f|_A \colon A \to Y$（A は X の部分空間とみなす）が連続であることとは同値である[*4]．

証明　相対位相の定義より，f が連続ならばその制限 $f|_A$ も連続であることは明らかである．したがって，(1), (2) それぞれの場合について，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $f|_A$ が連続ならば f が連続であることを示せばよい．

(1)　$\mathfrak{A}$ が X の開被覆であり，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $f|_A$ が連続であるとする．開集合 $O \subseteq Y$ を任意にとる．すると

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} f|_A^{-1}(O)$$

である．各 $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$f|_A$ の連続性より $f|_A^{-1}(O)$ は A の開集合だから，相対位相の定義より $f|_A^{-1}(O)$ は X の開集合と A との交叉で書ける．ところが，A は X の開集合だから，各 $f|_A^{-1}(O)$ は X の開集合である．したがって，その合併である $f^{-1}(O)$ は X の開集合である．よって，f は連続である．

(2)　$\mathfrak{A}$ が X の局所有限閉被覆であり，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $f|_A$ が連続であるとする．閉集合 $C \subseteq Y$ を任意にとる．すると

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} f|_A^{-1}(C)$$

である．各 $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$f|_A$ の連続性より $f|_A^{-1}(C)$ は A の閉集合だから，相対位相の定義より $f|_A^{-1}(C)$ は X の閉集合と A との交叉で書ける．ところが，A は X の閉集合だから，各 $f|_A^{-1}(C)$ は X の閉集合である．$\mathfrak{A}$ は局所有限性より $\{f|_A^{-1}(C)\}_{A \in \mathfrak{A}}$ は局所有限な閉集合族であり，局所有限な部分集合族は閉包保存だから（命題 2.36），その合併である $f^{-1}(C)$ は X の閉集合である．よって，f は連続である． □

[*4] 結論の部分は，「X の位相が $A \in \mathfrak{A}$ に対する包含写像 $A \to X$ の全体の誘導する終位相に等しい」といいかえられる（定義 3.1 (2)，命題 3.5 (2)）．

第 3 章

位相の誘導

本章では，与えられた位相空間をもとにして，新しく位相空間を定めることを考える（これを位相の誘導という）．まず，始位相・終位相という一般的な誘導位相を定義する．そして，それらの特別な場合として，相対位相（部分空間）と商位相（商空間），積位相（積空間）と和位相（和空間）を定義する．

3.1 始位相と終位相

定義 3.1（始位相，終位相） X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とする．

(1) 写像族 $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ に対して，すべての ϕ_i が連続となるような X 上の最小の位相を，$\{(Y_i,\phi_i)\}_{i\in I}$（あるいは単に $\{\phi_i\}_{i\in I}$）が誘導する X 上の**始位相**という．

(2) 写像族 $\{\sigma_i\colon Y_i\to X\}_{i\in I}$ に対して，すべての σ_i が連続となるような X 上の最大の位相を，$\{(Y_i,\sigma_i)\}_{i\in I}$（あるいは単に $\{\sigma_i\}_{i\in I}$）が誘導する X 上の**終位相**という．

容易にわかるように，$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終位相は，

$$\{O\subseteq X\mid \text{任意の } i\in I \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(O) \text{ は } Y_i \text{ の開集合}\}$$

で与えられる．

X を位相空間とするとき，$\phi_i\colon X\to Y_i$ が連続であるための必要十分条件は，$\phi_i^{-1}(V)$（V は Y_i の開集合）という形の集合がすべて X の開集合であることである．よって，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相は，$\phi_i^{-1}(V)$（$i\in I$，V は Y_i の開集合）という形の集合全体が生成する位相に他ならない．より詳しく，次の命題が成り立つ．

命題 3.2 X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族，$\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ を写像族とする．

(1) 各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が Y_i の準開基ならば，

$$\mathfrak{B}'=\{\phi_i^{-1}(C)\mid i\in I,\ C\in\mathfrak{C}_i\}$$

は $\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相の準開基である．

(2) 各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が Y_i の開基ならば，

$$\mathfrak{B}=\{\phi_{i_0}^{-1}(C_0)\cap\cdots\cap\phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1})\mid n\in\mathbb{N},\ i_0,\ \ldots,\ i_{n-1}\in I \text{ は相異なる},\ C_k\in\mathfrak{C}_{i_k}\}$$

は $\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相の開基である．

証明 (1) X をある位相によって位相空間とみなすとき，命題 2.23 (2) より，$\phi_i\colon X\to Y_i$ が連続であるための必要十分条件は，$\phi_i^{-1}(C)$（$C\in\mathfrak{C}_i$）という形の集合がすべて X の開集合であることである．よって，

$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相は，$\phi_i^{-1}(C)$（$i\in I$，$C\in\mathfrak{C}_i$）という形の集合全体が生成する位相に他ならない．これは，$\mathfrak{B}'$ がその始位相の準開基であることを示している．

(2)　(1) より，$\phi_i^{-1}(C)$（$i\in I$，$C\in\mathfrak{C}_i$）の全体は $\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相の準開基だから，その有限交叉の全体

$$\mathfrak{B}''=\{\phi_{i_0}^{-1}(C_0)\cap\cdots\cap\phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1})\mid n\in\mathbb{N},\ i_0,\ \ldots,\ i_{n-1}\in I,\ C_k\in\mathfrak{C}_{i_k}\}$$

はその始位相の開基である．そこで，$\mathfrak{B}''$ の元の合併全体と $\mathfrak{B}$ の元の合併全体とが等しいことを示せばよい．明らかに $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}''$ だから，任意の $B''\in\mathfrak{B}''$ が $\mathfrak{B}$ の元の合併になっていることをいえば十分である．B'' は，異なる $i_0,\ \ldots,\ i_{n-1}\in I$ と，各 $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ ごとに有限個の $C_{k,0},\ \ldots,\ C_{k,m_k-1}\in\mathfrak{C}_{i_k}$（$m_k\in\mathbb{N}$）を用いて

$$B''=\bigcap_{k=0}^{n-1}(\phi_{i_k}^{-1}(C_{k,0})\cap\cdots\cap\phi_{i_k}^{-1}(C_{k,m_k-1}))$$

と書ける．$x\in B''$ を任意にとると，各 $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ に対して $\phi_{i_k}(x)\in C_{k,0}\cap\cdots\cap C_{k,m_k-1}$ である．ここで，$\mathfrak{C}_{i_k}$ は開基だから，$C_k\subseteq C_{k,0}\cap\cdots\cap C_{k,m_k-1}$ を満たす $C_k\in\mathfrak{C}_{i_k}$ がとれる（命題 2.15）．そこで $B=\bigcap_{k=0}^{n-1}\phi_{i_k}^{-1}(C_k)$ と置くと，これは $\mathfrak{B}$ の元であり，$x\in B\subseteq B''$ を満たす．よって，B'' は $\mathfrak{B}$ の元の合併で書ける．これで示された． □

命題 3.2 で $\mathfrak{C}_i$ を Y_i の開集合系と置いたときの $\mathfrak{B}'$ と $\mathfrak{B}$ を，それぞれ始位相の**標準準開基**・**標準開基**という．標準開基は，標準準開基の元の有限交叉の全体に等しい．

命題 3.3　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．この始位相に関する点 $x\in X$ の近傍フィルタは，「各 Y_i を $\phi_i(x)$ の近傍フィルタによってフィルタ付き集合とみなしたときに，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始フィルタ」に等しい．

証明　X の標準準開基は

$$\mathfrak{B}'=\{\phi_i^{-1}(V)\mid i\in I,\ V\ \text{は}\ Y_i\ \text{の開集合}\}$$

だから，x の準近傍基として

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}'_x&=\{B\in\mathfrak{B}'\mid x\in B\}\\&=\{\phi_i^{-1}(V)\mid i\in I,\ V\ \text{は}\ \phi_i(x)\in Y_i\ \text{の開近傍}\}\end{aligned}$$

がとれる（命題 2.17 (1)）．一方で，$\phi_i(x)$ の開近傍全体は $\phi_i(x)$ の近傍フィルタのフィルタ基だから，$\mathfrak{B}_x$ は「各 Y_i を $\phi_i(x)$ の近傍フィルタによってフィルタ付き集合とみなしたときに，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始フィルタ」の準フィルタ基でもある（命題 1.15）．よって，x の近傍フィルタとこの始フィルタとは一致する． □

命題 3.4　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族，$\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ を写像族とし，$x\in X$ とする．

(1) 各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が $\phi_i(x)\in Y_i$ の準近傍基ならば，

$$\mathfrak{B}'=\{\phi_i^{-1}(C)\mid i\in I,\ C\in\mathfrak{C}_i\}$$

は $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相に関する x の準近傍基である．

(2) 各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が $\phi_i(x)\in Y_i$ の近傍基ならば，

$$\mathfrak{B}=\{\phi_{i_0}^{-1}(C_0)\cap\cdots\cap\phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1})\mid n\in\mathbb{N},\ i_0,\ \ldots,\ i_{n-1}\in I\ \text{は相異なる},\ C_k\in\mathfrak{C}_{i_k}\}$$

は $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相に関する x のフィルタ基である．

証明　始位相に関する各点の近傍フィルタが始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 3.3），始フィルタの一般的な性質（命題 1.15）から従う．□

命題 3.3 で $\mathfrak{C}_i$ を $\phi_i(x)$ の近傍フィルタと置いたときの $\mathfrak{B}'$ と $\mathfrak{B}$ を，それぞれ始位相に関する x の**標準準近傍基・標準近傍基**という．標準準近傍基は，標準近傍基の元の全体に等しい．$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相に関する標準準近傍基・標準近傍基は，それぞれ，$\{((Y_i, \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x))), \phi_i)\}_{i\in I}$ が誘導する始フィルタの標準準フィルタ基・標準フィルタ基ともいえる．

命題 3.5（始位相・終位相の特徴付け）　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とする．

(1) 写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相は，次の性質をもつ唯一の位相である．
　任意の位相空間 Z と写像 $f \colon Z \to X$ について，f が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して $\phi_i \circ f$ が連続であることとは同値である．

(2) 写像族 $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終位相は，次の性質をもつ唯一の位相である．
　任意の位相空間 Z と写像 $g \colon X \to Z$ について，g が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して $g \circ \sigma_i$ が連続であることとは同値である．

証明　(1)　始位相に関する各点の近傍フィルタが始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 3.3），始フィルタの特徴付け（命題 1.17 (1)）から従う．

(2)　$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終位相を $\mathfrak{O}_{\mathrm{f}}$ とする．このとき，位相空間 Z と写像 $g \colon X \to Z$ に対して，次の同値関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\text{任意の } i \in I \text{ に対して } g\circ\sigma_i \text{ が連続} \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ と開集合 } O \subseteq Z \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(g^{-1}(O)) \subseteq Y_i \text{ が開集合} \\
&\iff \text{任意の開集合 } O \subseteq Z \text{ に対して } g^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_{\mathrm{f}}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

一方で，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ によって X を位相空間とみなすとき，g が連続であることは，次のようにいいかえられる：

$$\text{任意の開集合 } O \subseteq Z \text{ に対して } g^{-1}(O) \in \mathfrak{O}. \qquad (**)$$

任意の位相空間 Z と写像 $g \colon X \to Z$ に対して $(*) \iff (**)$ であることは，$\mathfrak{O}_{\mathrm{f}} = \mathfrak{O}$ であることに他ならない．□

命題 3.6（始位相・終位相の推移性）　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を集合族，$\{Z_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$（$J_i$ は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）を位相空間族とする．

(1) $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i\in I}$, $\{\psi_{i,j} \colon Y_i \to Z_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\psi_{i,j}\circ\phi_i\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ が誘導する X 上の始位相と，「各 Y_i を $\{\psi_{i,j}\}_{j\in J_i}$ が誘導する始位相によって位相空間とみなすときの，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相」とは一致する．

(2) $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i\in I}$, $\{\tau_{i,j} \colon Z_{i,j} \to Y_i\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\sigma_i\circ\tau_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ が誘導する X 上の終位相と，「各 Y_i を $\{\tau_{i,j}\}_{j\in J_i}$ が誘導する終位相によって位相空間とみなすときの，$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終位相」とは一致する．

証明　(1)　始位相に関する近傍フィルタが始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 3.3），始フィルタの推移性（命題 1.15 (1)）から従う．

(2)　終位相の特徴付け（命題 3.5 (2)）より，σ_i が連続であることと，任意の $j \in J_i$ に対して $\sigma_i\circ\tau_{i,j}$ が連続であることとは同値である．ここから主張が従う．□

3.2　部分空間と商空間

定義 3.7（部分空間，商空間）　X を位相空間とする．

(1) X の部分集合 X' に対して，包含写像 $\iota\colon X' \to X$ が誘導する X' 上の始位相を，X の位相が誘導する X' 上の**相対位相**という．相対位相によって X' を位相空間とみなすとき，X' を X の**部分空間**という．
(2) X の商集合 $X/{\sim}$ に対して，等化写像 $\pi\colon X \to X/{\sim}$ が誘導する $X/{\sim}$ 上の終位相を，X の位相が誘導する $X/{\sim}$ 上の**商位相**という．商位相によって $X/{\sim}$ を位相空間とみなすとき，$X/{\sim}$ を X の**商空間**という．

以下，特に断らなければ，位相空間の部分集合は部分空間とみなす．

X の位相 $\mathfrak{O}$ が誘導する X' 上の相対位相は，具体的には，$\mathfrak{O}$ の X' への制限

$$\mathfrak{O}|_{X'} = \{O \cap X' \mid O \in \mathfrak{O}\}$$

に一致する．また，X の位相 $\mathfrak{O}$ が誘導する $X/{\sim}$ 上の商位相は，具体的には，

$$\{O \subseteq X/{\sim} \mid \pi^{-1}(O) \in \mathfrak{O}\}$$

に一致する．

X を位相空間とする．X の部分空間であって，X の部分集合として開集合・閉集合であるものを，それぞれ X の**開部分空間・閉部分空間**という．部分空間が開部分空間・閉部分空間になるための条件は，それぞれ包含写像が開写像・閉写像になることである．対応して，位相空間 X 上の同値関係 $\sim$ であって，X から商空間 $X/{\sim}$ への等化写像が開写像・閉写像になるものを，それぞれ X 上の**開同値関係・閉同値関係**という．

X を位相空間，X' を X の部分空間とする．定義より，部分集合 $A \subseteq X'$ が X' の開集合・閉集合であるための必要十分条件は，それぞれ，ある X の開集合・閉集合 B が存在して $A = B \cap X'$ と書けることである．また，部分集合 $A \subseteq X'$ の X' における閉包は，$\mathrm{cl}_{X'}(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap X'$ と表せる．一方で，内部については，$\mathrm{int}_X(A) \cap X' \subseteq \mathrm{int}_{X'}(A)$ だが，この式の等号は一般には成立しない．

X を位相空間，X' を X の部分空間とする．命題 3.3 より，点 $x \in X'$ の X' における近傍フィルタは，x の X における近傍フィルタが誘導する X' 上の相対フィルタに等しい．

命題 3.8　X を集合，Y を位相空間とし，写像 $f\colon X \to Y$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．

(1) $\mathfrak{C}$ が Y の準開基ならば，$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は X の準開基である．
(2) $\mathfrak{C}$ が Y の開基ならば，$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は X の開基である．

$x \in X$ とする．

(3) $\mathfrak{C}$ が $f(x)$ の Y における準近傍基ならば，$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は x の X における準近傍基である．
(4) $\mathfrak{C}$ が $f(x)$ の Y における近傍基ならば，$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$ は x の X における近傍基である．

証明　(1)　命題 3.2 (1) から従う．

(2)　命題 3.2 (2) より，$\mathfrak{B} \cup \{X\}$ は X の開基である．$\mathfrak{C}$ はフィルタ基だから Y を被覆し，したがって $\mathfrak{B}$ が X を被覆することと合わせて，$\mathfrak{B}$ が X の開基であることを得る．

(3), (4)　命題 3.3 に注意すれば，逆像フィルタの一般的な性質（命題 1.20）から従う．　□

系 3.9　X を位相空間，X' を X の部分空間とする．

(1) $\mathfrak{B}$ が X の準開基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は X' の準開基である．
(2) $\mathfrak{B}$ の X の開基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は X' の開基である．

$x \in X'$ とする．

(3) $\mathfrak{B}$ が x の X における準近傍基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は x の X' における準近傍基である．
(4) $\mathfrak{B}$ が x の X における近傍基ならば，$\mathfrak{B}|_{X'}$ は x の X' における近傍基である．　□

命題 3.10　X, Y を位相空間とする．

(1) Y' を Y の部分空間とし，$\iota\colon Y' \to Y$ を包含写像とする．このとき，写像 $f\colon X \to Y'$ が連続であることと，写像 $\iota \circ f\colon X \to Y$ が連続であることとは同値である．
(2) $X/{\sim}$ を X の商空間とし，$\pi\colon X \to X/{\sim}$ を等化写像とする．このとき，写像 $g\colon X/{\sim} \to Y$ が連続であることと，写像 $g \circ \pi\colon X \to Y$ が連続であることとは同値である．

証明　始位相・終位相の特徴付け（命題 3.5）から従う．　□

系 3.11　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) X', Y' はそれぞれ X, Y の部分集合であり，$f(X') \subseteq Y'$ を満たすとする．f が誘導する X' から Y' への写像を f' と書く．このとき，f が連続ならば，f' も連続である．さらに，$X' = X$ ならば，f が連続であることと f' が連続であることとは同値である．
(2) R, S はそれぞれ X, Y 上の同値関係であり，任意の $x, x' \in X$ に対して $x \mathrel{R} x'$ ならば $f(x) \mathrel{S} f(x')$ であるとする．f が誘導する X/R から Y/S への写像を f'' と書く．このとき，f が連続ならば，f'' も連続である．さらに，S が離散関係（すなわち $Y/S = Y$）ならば，f が連続であることと f'' が連続であることとは同値である．

証明　(1)　$\iota_X\colon X' \to X$，$\iota_Y\colon Y' \to Y$ をそれぞれ包含写像とする．f が連続ならば $f \circ \iota_X = \iota_Y \circ f'$ も連続だから，命題 3.10 (1) より，f' は連続である．さらに，$X' = X$ ならば $f = \iota_Y \circ f'$ だから，命題 3.10 (1) より，f が連続であることと f' が連続であることとは同値である．

(2)　$\pi_X\colon X \to X/R$，$\pi_Y\colon Y \to Y/S$ をそれぞれ等化写像とする．f が連続ならば $\pi_Y \circ f = f'' \circ \pi_X$ も連続だから，命題 3.10 (2) より，f'' は連続である．さらに，$Y/S = Y$ ならば $f = f'' \circ \pi_X$ だから，命題 3.10 (2) より，f が連続であることと f'' が連続であることとは同値である．　□

命題 3.12　X を位相空間とする．

(1) $X'' \subseteq X' \subseteq X$ とする．このとき，X の部分空間としての X'' の位相と，「X の部分空間たる X' の部分空間としての X'' の位相」とは一致する．
(2) R, S は X 上の同値関係であり，S は R よりも粗いとする．このとき，X の商空間としての X/S の位相と，「X の商空間たる X/R の商空間としての X/S の位相」とは一致する．

証明　始位相・終位相の推移性（命題 3.6）から従う．　□

3.3　積空間と和空間

定義 3.13（積空間，和空間） $\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とする．

(1) 射影 pr_i の全体が誘導する $\prod_{i\in I} X_i$ 上の始位相を，$\{X_i\}_{i\in I}$ の位相が誘導する**積位相**という．積位相によって $\prod_{i\in I} X_i$ を位相空間とみなすとき，これを $\{X_i\}_{i\in I}$ の**積空間**という．位相空間 X のみからなる族 $\{X\}_{i\in I}$ の積空間を，X^I と書く．
(2) 入射 in_i の全体が誘導する $\coprod_{i\in I} X_i$ 上の終位相を，$\{X_i\}_{i\in I}$ の位相が誘導する**和位相**という．和位相によって $\coprod_{i\in I} X_i$ を位相空間とみなすとき，これを $\{X_i\}_{i\in I}$ の**和空間**という．

以下，特に断らなければ，位相空間族の積・和は積空間・和空間とみなす．

和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ の位相は，

$$\left\{ O \subseteq \coprod_{i\in I} X_i \;\middle|\; \text{任意の } i \in I \text{ に対して } O \cap X_i \text{ は } X_i \text{ の開集合} \right\}$$

となる．

$\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，$X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．命題 3.3 より，点 $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ の近傍フィルタは，$i \in I$ に対する点 $x_i \in X_i$ の近傍フィルタたちの積フィルタに等しい．

命題 3.14 $\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，$X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が X_i の準開基ならば，

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; 1 \text{ つの } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は X の準開基である．
(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が X_i の開基ならば，

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は X の開基である．

$x = (x_i)_{i\in I} \in X$ とする．

(3) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が $x_i \in X_i$ の準近傍基ならば，

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; 1 \text{ つの } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は $x \in X$ の準近傍基である．
(4) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が $x_i \in X_i$ の近傍基ならば，

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } B_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } B_i = X_i \right\}$$

は $x \in X$ の近傍基である．

証明　(1), (2) は命題 3.2 から，(3), (4) は命題 3.4 から従う．　□

積空間 $X = \prod_{i \in I} X_i$ の標準準開基・標準開基は，それぞれ

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \;\middle|\; 1\text{ つの } i \in I \text{ に対して } O_i \text{ は } X_i \text{ の開集合，それ以外の } i \in I \text{ に対して } O_i = X_i \right\},$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } O_i \text{ は } X_i \text{ の開集合，それ以外の } i \in I \text{ に対して } O_i = X_i \right\}$$

である．点 $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ の標準準近傍基・標準近傍基は，それぞれ

$$\mathfrak{B}'(x) = \left\{ \prod_{i \in I} V_i \;\middle|\; 1\text{ つの } i \in I \text{ に対して } V_i \in \mathfrak{N}_{X_i}(x_i)\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } V_i = X_i \right\},$$

$$\mathfrak{B}(x) = \left\{ \prod_{i \in I} V_i \;\middle|\; \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } V_i \in \mathfrak{N}_{X_i}(x_i)\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } V_i = X_i \right\}$$

である．

命題 3.15　X を位相空間，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族する．

(1) 積空間への写像 $f\colon X \to \prod_{i \in I} Y_i$ が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して写像 $\mathrm{pr}_i \circ f\colon X \to Y_i$ が連続であることとは同値である．
(2) 和空間からの写像 $f\colon \coprod_{i \in I} Y_i \to X$ が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して写像 $f \circ \mathrm{in}_i\colon Y_i \to X$ が連続であることとは同値である．

証明　始位相・終位相の特徴付け（命題 3.5）から従う．　□

命題 3.16（積空間・和空間の結合性）　$\{X_{i,j}\}_{i \in I,\, j \in J_i}$（$J_i$ は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）を位相空間族とする．

(1) 積空間 $\prod_{i \in I,\, j \in J_i} X_{i,j}$ と積空間族の積空間 $\prod_{i \in I} \prod_{j \in J_i} X_{i,j}$ とは，自然な全単射により同相となる．
(2) 和空間 $\coprod_{i \in I,\, j \in J_i} X_{i,j}$ と和空間族の和空間 $\coprod_{i \in I} \coprod_{j \in J_i} X_{i,j}$ とは，自然な全単射により同相となる．

証明　始位相・終位相の推移性（命題 3.6）から従う．　□

命題 3.17　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．

(1) 各 $i \in I$ に対して，X'_i を X_i の部分集合とする．このとき，積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ の部分空間 $\prod_{i \in I} X'_i$ と，部分空間族 $\{X'_i\}_{i \in I}$ の積空間 $\prod_{i \in I} X'_i$ とは，自然な全単射により同相となる．
(2) 各 $i \in I$ に対して，X_i/R_i を X_i の商集合とする．このとき，和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ の商空間 $(\coprod_{i \in I} X_i)/(\coprod_{i \in I} R_i)$ と，商空間族 $\{X_i/R_i\}_{i \in I}$ の和空間 $\coprod_{i \in I} X_i/R_i$ とは，自然な全単射により同相となる．

証明　(1)　$X = \prod_{i \in I} X_i$，$X' = \prod_{i \in I} X'_i$ と置き，$\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ および $\mathrm{pr}'_i\colon X' \to X'_i$ を射影，$\iota\colon X' \to X$ および $\iota_i\colon X'_i \to X_i$ を包含写像とする．積空間 X の部分空間としての X' の位相は，始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\{\mathrm{pr}_i \circ \iota\}_{i \in I}$ が誘導する始位相に等しい．一方で，部分空間族 $\{X'_i\}_{i \in I}$ の積空間としての X' の位相は，始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\{\iota_i \circ \mathrm{pr}'_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相に等しい．ここで $\mathrm{pr}_i \circ \iota = \iota_i \circ \mathrm{pr}'_i$ だから，これらの位相は等しい．

(2)　$X = \coprod_{i \in I} X_i$，$X'' = (\coprod_{i \in I} X_i)/(\coprod_{i \in I} R_i) = \coprod_{i \in I} X_i/R_i$ と置き，$\mathrm{in}_i \colon X_i \to X$ および $\mathrm{in}'_i \colon X_i/R_i \to X''$ を入射，$\pi \colon X \to X''$ および $\pi_i \colon X_i \to X_i/R_i$ を等化写像とする．和空間 X の商空間としての X'' の位相は，終位相の推移性（命題 3.6 (2)）より，$\{\mathrm{in}_i \circ \pi\}_{i \in I}$ が誘導する終位相に等しい．一方で，商空間族 $\{X_i/R_i\}_{i \in I}$ の和空間としての X'' の位相は，終位相の推移性（命題 3.6 (2)）より，$\{\pi_i \circ \mathrm{in}'_i\}_{i \in I}$ が誘導する終位相に等しい．ここで $\mathrm{in}_i \circ \pi = \pi_i \circ \mathrm{in}'_i$ だから，これらの位相は等しい．□

命題 3.18　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，各 $i \in I$ に対して $A_i \subseteq X_i$ とする．このとき，

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$$

が成り立つ．

証明　点 $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ が $\overline{\prod_{i \in I} A_i}$ に属するための必要十分条件は，x における任意の標準近傍基が A と交わること，すなわち，各 $i \in I$ に対して x_i の任意の近傍が A_i と交わることである．これは，$x \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ を意味する．よって，$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ が成り立つ．□

3.4　部分空間・積空間と始位相，商空間・和空間と終位相

命題 3.19　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．

(1) $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．各 $i \in I$ に対して Y'_i は Y_i の部分空間であり，$\phi_i(X) \subseteq Y'_i$ を満たすとする．ϕ_i を X から Y'_i への写像とみなしたものを ϕ'_i と書く．このとき，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する始位相と，$\{\phi'_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する始位相とは一致する．

(2) $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ を写像族とする．各 $i \in I$ に対して Y_i/R_i は Y_i の商空間であり，任意の $y, y' \in Y_i$ に対して $y \mathrel{R_i} y'$ ならば $\sigma_i(y) = \sigma_i(y')$ を満たすとする．σ_i を Y_i/R_i から X への写像とみなしたものを σ'_i と書く．このとき，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する終位相と，$\{\sigma'_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する終位相とは一致する．

証明　(1)　各 $i \in I$ に対して，$\iota_i \colon Y'_i \to Y_i$ を包含写像とする．各 $i \in I$ に対して $\phi_i = \iota_i \circ \phi'_i$ だから，始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相と $\{\phi'_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相とは等しい．

(2)　各 $i \in I$ に対して，$\pi_i \colon Y_i \to Y_i/R_i$ を等化写像とする．各 $i \in I$ に対して $\sigma_i = \sigma'_i \circ \pi_i$ だから，終位相の推移性（命題 3.6 (2)）より，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する終位相と $\{\sigma'_i\}_{i \in I}$ が誘導する終位相とは等しい．□

命題 3.20　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．

(1) $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とし，$Y = \prod_{i \in I} Y_i$，$\phi = (\phi_i)_{i \in I} \colon X \to Y$ と置く．このとき，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する始位相と，ϕ が X 上に誘導する始位相とは一致する．

(2) $\{\sigma_i \colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ を写像族とし，$Y = \coprod_{i \in I} Y_i$，$\sigma = [\sigma_i]_{i \in I} \colon Y \to X$ と置く．このとき，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する終位相と，σ が X 上に誘導する終位相とは一致する．

証明　(1)　各 $i \in I$ に対して $\phi_i = \mathrm{pr}_i \circ \phi$ だから，始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相と ϕ が誘導する始位相とは等しい．

(2)　各 $i \in I$ に対して $\sigma_i = \sigma \circ \mathrm{in}_i$ だから，終位相の推移性（命題 3.6 (2)）より，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する終位相と σ が誘導する終位相とは等しい．□

系 3.21　$\{X_i\}_{i \in I}, \{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族，$\{f_i \colon X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．

(1) 各 $i \in I$ に対して，X_i の位相が f_i の誘導する始位相に等しいとする．このとき，$\prod_{i\in I} X_i$ の位相は $\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ の誘導する始位相に等しい．
(2) 各 $i \in I$ に対して，Y_i の位相が f_i の誘導する終位相に等しいとする．このとき，$\coprod_{i\in I} Y_i$ の位相は $\coprod_{i\in I} f_i\colon \coprod_{i\in I} X_i \to \coprod_{i\in I} Y_i$ の誘導する終位相に等しい．

証明　(1)　始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\prod_{i\in I} X_i$ の位相は $\{f_i \circ \mathrm{pr}_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相に等しい．よって，命題 3.20 (1) より，$\prod_{i\in I} X_i$ の位相は $\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ が誘導する始位相に等しい．

(2)　終位相の推移性（命題 3.6 (2)）より，$\coprod_{i\in I} Y_i$ の位相は $\{\mathrm{in}_i \circ f_i\}_{i\in I}$ が誘導する終位相に等しい．よって，命題 3.20 (2) より，$\coprod_{i\in I} Y_i$ の位相は $\coprod_{i\in I} f_i\colon \coprod_{i\in I} X_i \to \coprod_{i\in I} Y_i$ が誘導する終位相に等しい．　□

3.5　埋め込みと沈め込み

3.5.1　埋め込みと沈め込み

定義 3.22（埋め込み，沈め込み）　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) f が**埋め込み**であるとは，f が単射であり，X の位相が f の誘導する始位相に一致することをいう．
(2) f が**沈め込み**あるいは**商写像**であるとは，f が全射であり，Y の位相が f の誘導する終位相に一致することをいう．

次の命題より，X から Y への埋め込みによって X を Y の部分空間とみなすことができ，X から Y への沈め込みによって Y を X の商空間とみなすことができる．

命題 3.23　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) f が埋め込みであるための必要十分条件は，f が X から $f(X)$ への同相写像を与えることである．
(2) f が沈め込みであるための必要十分条件は，f が X/f から Y への同相写像を与えることである．

証明　(1)　2 条件はどちらも f の単射性を導くから，以下では f の単射性を仮定する．f を X から $f(X)$ への写像とみなしたものを $f'\colon X \to f(X)$ と書く．f の単射性より，f' は全単射である．さて，f が単射であるという条件の下で，f が埋め込みであることは「X の位相が f の誘導する始位相に等しい」ことといいかえられ，f' が同相写像であることは「X の位相が f' の誘導する始位相に等しい」ことといいかえられる．よって結局，f が誘導する X 上の始位相と f' が誘導する X 上の始位相とが等しいことをいえばよい．これは，命題 3.19 (1) の結果である．

(2)　2 条件はどちらも f の全射性を導くから，以下では f の全射性を仮定する．f を X/f から Y への写像とみなしたものを $f''\colon X/f \to Y$ と書く．f の全射性より，f'' は全単射である．さて，f が全射であるという条件の下で，f が沈め込みであることは「Y の位相が f の誘導する終位相に等しい」ことといいかえられ，f'' が同相写像であることは「Y の位相が f'' の誘導する終位相に等しい」ことといいかえられる．よって結局，f が誘導する Y 上の終位相と f'' が誘導する Y 上の終位相とが等しいことをいえばよい．これは，命題 3.19 (2) の結果である．　□

開写像・閉写像であるような埋め込みを，それぞれ**開埋め込み**・**閉埋め込み**という．また，像が稠密であるような埋め込みを，**稠密埋め込み**という．X から Y への開・閉・稠密埋め込みが存在すれば，それぞれ，X は Y の開・閉・稠密部分空間とみなすことができる．

命題 3.24　X, Y, Z を位相空間，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を写像とする．

(1) f と g が埋め込みならば，$g \circ f$ も埋め込みである．
(2) f と g が沈め込みならば，$g \circ f$ も沈め込みである．

証明　始位相・終位相の推移性（命題 3.6）と，単射性・全射性がそれぞれ合成で保たれることから従う．□

命題 3.25　X, Y, Z を位相空間，$f \colon X \to Y$，$g \colon Y \to Z$ を連続写像とする．

(1) X の位相が $g \circ f$ の誘導する始位相に等しければ，X の位相は f の誘導する始位相に等しい．
(2) Z の位相が $g \circ f$ の誘導する終位相に等しければ，Z の位相は g の誘導する終位相に等しい．

証明　(1)　X の位相が $g \circ f$ の誘導する始位相に等しいとする．すると，X の開集合はすべて Z の開集合の $g \circ f$ による逆像として書ける．したがって，g の連続性より，X の開集合はすべて Y の開集合の f による逆像として書けることになる．逆に，f の連続性より，Y の開集合の f による逆像は，常に X の開集合である．よって，X の位相は，f の誘導する始位相に等しい．

(2)　Z の位相が $g \circ f$ の誘導する終位相に等しいとする．すると，Z の部分集合は，その $g \circ f$ による逆像が X の開集合ならば，開集合となる．したがって，f の連続性より，Z の部分集合はその g による逆像が Y の開集合ならば開集合となることになる．逆に，g の連続性より，Z の開集合の g による逆像は，常に Y の開集合である．よって，Z の位相は，g の誘導する終位相に等しい．□

系 3.26　X, Y, Z を位相空間，$f \colon X \to Y$，$g \colon Y \to Z$ を連続写像とする．

(1) $g \circ f$ が埋め込みならば，f も埋め込みである．
(2) $g \circ f$ が沈め込みならば，g も沈め込みである．□

命題 3.27　X, Y を位相空間，$f \colon X \to Y$ を写像とする．

(1) f が開または閉な連続単射であれば，f は埋め込みである．
(2) f が開または閉な連続全射であれば，f は沈め込みである．

証明　証明はどちらもほとんど同様だから，f が開写像である場合のみを示す．

(1)　f が開連続単射であるとする．f の連続性より，Y の開集合の f による逆像は常に X の開集合である．逆に，U を X の開集合とすると，f が開写像であることより $f(U)$ は Y の開集合であり，f が単射であることより $U = f^{-1}(f(U))$ である．したがって，X の開集合は必ず Y の開集合の逆像として表せる．よって，X の位相は，f が誘導する始位相に等しい．f の単射性と合わせて，f が埋め込みであることが従う．

(2)　f が開連続全射であるとする．f の連続性より，Y の開集合の f による逆像は常に X の開集合である．逆に，部分集合 $B \subseteq Y$ について，$f^{-1}(B)$ が X の開集合であるとすると，f が開写像であることより $f(f^{-1}(B))$ は Y の開集合であり，f が全射であることより $B = f(f^{-1}(B))$ だから，B は Y の開集合である．よって，Y の位相は，f が誘導する終位相に等しい．f の全射性と合わせて，f が沈め込みであることが従う．□

3.5.2　積空間・和空間に現れる埋め込み・沈め込み

命題 3.28　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，$I' \subseteq I$ とする．各 $i \in I \setminus I'$ に対して点 $x_i \in X_i$ を固定する．このとき，写像 $f \colon \prod_{i \in I'} X_i \to \prod_{i \in I} X_i;\ (x_i)_{i \in I'} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ は埋め込みである．

証明　積空間の結合性（命題 3.16）より，X, Y を位相空間，$x_0 \in X$ として，写像 $f \colon Y \to X \times Y;\ y \mapsto (x_0, y)$

が埋め込みであることを示せば十分である．f が単射であることは明らかだから，X の位相が f の誘導する始位相に等しいことを示す．$X \times Y$ の標準開基は

$$\mathfrak{B} = \{U \times V \mid U, V \text{ はそれぞれ } X, Y \text{ の開集合}\}$$

だから，f が誘導する Y 上の始位相の開基として

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{f^{-1}(U \times V) \mid U, V \text{ はそれぞれ } X, Y \text{ の開集合}\}$$

がとれる（命題 3.8 (2)）．ところが，これは X の位相そのものである．よって，X の位相は f が誘導する始位相に等しい．□

系 3.29　$\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族，Y を位相空間とし，$I' \subseteq I$ とする．各 $i \in I \setminus I'$ に対して点 $x_i \in X_i$ を固定する．写像 $f\colon \prod_{i\in I} X_i \to Y$ が連続ならば，写像 $f'\colon \prod_{i\in I'} X_i \to Y;\ (x_i)_{i\in I'} \mapsto f((x_i)_{i\in I})$ も連続である．

証明　$f'\colon \prod_{i\in I'} X_i \to Y$ は，写像 $g\colon \prod_{i\in I'} X_i \to \prod_{i\in I} X_i;\ (x_i)_{i\in I'} \mapsto (x_i)_{i\in I}$ と $f\colon \prod_{i\in I} X_i \to Y$ との合成である．命題 3.28 より g は連続でだから，f が連続ならば f' も連続である．□

次の命題により，積因子は積空間の商空間とみなすことができ，また和因子は和空間の開かつ閉な部分空間とみなせることがわかる．

命題 3.30　$\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とする．

(1) $X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．射影 $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ は開連続写像である．さらに，どの X_i も空でなければ，pr_i は沈め込みである．
(2) $X = \coprod_{i\in I} X_i$ と置く．入射 $\mathrm{in}_i\colon X_i \to X$ は開かつ閉な埋め込みである．

証明　積空間・和空間の結合性（命題 3.16）より，X, Y を位相空間として，射影 $\mathrm{pr}_Y\colon X \times Y \to Y$ と入射 $\mathrm{in}_Y\colon Y \to X \sqcup Y$ について示せば十分である．

(1)　O を $X \times Y$ の開集合とし，$x \in X$ に対して $O[x] = \{y \in Y \mid (x, y) \in O\}$ と置く．相対位相の定義より $\{x\} \times O[x]$ は $\{x\} \times Y$ の開集合だから，命題 3.28 より $O[x]$ は Y の開集合である．$\mathrm{pr}_Y(O) = \bigcup_{x\in X} O[x]$ だから，$\mathrm{pr}_Y(O)$ は Y の開集合となる．よって，pr_Y は開写像である．すべての因子が空でなければ射影は全射だから，命題 3.27 (2) より，pr_Y は沈め込みである．

(2)　O を Y の開集合とすると，$\mathrm{in}_X^{-1}(\mathrm{in}_Y(O)) = \emptyset$，$\mathrm{in}_Y^{-1}(\mathrm{in}_Y(O)) = O$ はそれぞれ X, Y の開集合だから，和位相の定義より，$\iota(O)$ は $X \sqcup Y$ の開集合である．よって，in_Y は開写像である．同様にして，in_Y が閉写像であることもわかる．入射は単射だから，命題 3.27 (1) より，in_Y は埋め込みである．□

命題 3.31　$\{X_i\}_{i\in I}, \{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族，$\{f_i\colon X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ を写像族とする．

(1) どの X_i も空でないとする．このとき，$\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して f_i が連続であることとは同値である．
(2) $\coprod_{i\in I} f_i\colon \coprod_{i\in I} X_i \to \coprod_{i\in I} Y_i$ が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して f_i が連続であることとは同値である．

証明　(1)　$X = \prod_{i\in I} X_i$，$Y = \prod_{i\in I} Y_i$，$f = \prod_{i\in I} f_i\colon X \to Y$ と置き，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_{X,i}\colon X \to X_i$，$\mathrm{pr}_{Y,i}\colon Y \to Y_i$ を射影とする．f が連続であることは，任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_{Y,i} \circ f$ が連続であることと同値である（命題 3.15 (1)）．一方で，各 $i \in I$ に対して，f_i が連続であることは，$f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ が連続であるこ

とと同値である（命題 3.30 (1)，命題 3.10 (2)）．ここで $\mathrm{pr}_{Y,i} \circ f = f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ だから，これらの 2 条件は同値である．

(2) $X = \coprod_{i \in I} X_i$，$Y = \coprod_{i \in I} Y_i$，$f = \coprod_{i \in I} f_i \colon X \to Y$ と置き，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{in}_{X,i} \colon X_i \to X$，$\mathrm{in}_{Y,i} \colon Y_i \to Y$ を入射とする．f が連続であることは，任意の $i \in I$ に対して $f \circ \mathrm{in}_{X,i}$ が連続であることと同値である（命題 3.15 (1)）．一方で，各 $i \in I$ に対して，f_i が連続であることは，$\mathrm{in}_{Y,i} \circ f_i$ が連続であることと同値である（命題 3.30 (2)，命題 3.10 (1)）．ここで $f \circ \mathrm{in}_{X,i} = \mathrm{in}_{Y,i} \circ f_i$ だから，これらの 2 条件は同値である．□

3.6 商空間に関する補足

3.6.1 商空間と部分空間

命題 3.32 X を位相空間，R を X 上の同値関係，$\pi \colon X \to X/R$ を等化写像，A を X の部分集合とする．次のそれぞれの場合，自然な全単射 $A/R|_A \to \pi(A)$ は同相写像である．

(1) R が開同値関係であり，A が X の開集合である．
(2) R が閉同値関係であり，A が X の閉集合である．
(3) R が開同値関係であり，A が R に関して充満している．
(4) R が閉同値関係であり，A が R に関して充満している．

証明 (1) と (2)，(3) と (4) の証明はそれぞれ同様にできるから，(1) と (3) のみ証明する．自然な全単射 $A/R|_A \to \pi(A)$ が同相写像であることは，π を A から $\pi(A)$ への写像とみなしたものが沈め込みであることと同値だから，これを示せばよい．

(1) R が開同値関係であり，A が X の開集合であるとする．このとき，命題 2.29，命題 2.30 より π を A から $\pi(A)$ への写像とみなしたものも開写像であり，したがって命題 3.27 (2) より沈め込みである．

(3) R が開同値関係であり，A が R に関して充満しているとする．このとき，命題 2.30 より π を $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ から $\pi(A)$ への写像とみなしたものは開写像であり，したがって命題 3.27 (2) より沈め込みである．□

3.6.2 商空間と積空間

命題 3.33 $\{X_i\}_{i \in I}$, $\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，各 $i \in I$ に対して $f_i \colon X_i \to Y_i$ とする．各 f_i が開写像であり，有限個の $i \in I$ を除いて f_i が全射ならば，積写像 $\prod_{i \in I} f_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$ も開写像である．

証明 各 f_i が開写像であり，有限個の $i \in I$ を除いて f_i が全射とする．各 $i \in I$ に対して U_i を X_i の開集合とし，有限個の $i \in I$ を除いては $U_i = X_i$ とする．これらの積 $\prod_{i \in I} U_i$ の $\prod_{i \in I} f_i$ による像は $\prod_{i \in I} f_i(U_i)$ である．仮定より，各 $f_i(U_i)$ は Y_i の開集合であり，有限個の $i \in I$ を除いては $f_i(U_i) = Y_i$ だから，この像は $\prod_{i \in I} Y_i$ の開集合である．このような $\prod_{i \in I} U_i$ の全体は $\prod_{i \in I} X_i$ の開基をなすから，$\prod_{i \in I} f_i$ は開写像である．□

命題 3.34 $\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，各 $i \in I$ に対して R_i を X_i 上の同値関係とする．各 R_i が開同値関係ならば，$\prod_{i \in I} R_i$ も開同値関係であり，自然な全単射 $\prod_{i \in I} X_i / \prod_{i \in I} R_i \to \prod_{i \in I} (X_i / R_i)$ は同相写像である．

証明　各 $i \in I$ に対して，$\pi_i\colon X_i \to X_i/R_i$ を等化写像とする．各 π_i が開写像であるとして，$\prod_{i\in I} \pi_i$ が開写像であることを示せばよいが（命題 3.27 (2)），これは命題 3.33 から従う．　□

第 4 章

可算性

4.1　第一可算空間と第二可算空間

定義 4.1（第一可算空間，第二可算空間）　X を位相空間とする．

(1) X が**第一可算**であるとは，X の各点が可算な近傍基をもつことをいう．
(2) X が**第二可算**であるとは，X が可算な開基をもつことをいう．

容易にわかるように，上の定義の近傍基・開基をそれぞれ準近傍基・準開基に置き換えても，条件は変わらない．

命題 4.2　X を位相空間とする．

(1) 点 $x \in X$ が可算近傍基をもつとする．このとき，$\mathfrak{B}$ が x の近傍基ならば，$\mathfrak{B}$ は x の可算近傍基を含む．
(2) X が第二可算であって，$\mathfrak{B}$ が X の開基ならば，$\mathfrak{B}$ は X の可算開基を含む．

証明　(1)　命題 1.6 から従う．

(2)　$\mathfrak{A}$ を X の可算開基，$\mathfrak{B}$ を X の開基とする．

$$\mathfrak{A}' = \{(A_0, A_1) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \mid A_0 \subseteq B \subseteq A_1 \text{ なる } B \in \mathfrak{B} \text{ が存在する}\}$$

と置き，各 $(A_0, A_1) \in \mathfrak{A}'$ に対して $A_0 \subseteq B_{(A_0,A_1)} \subseteq A_1$ を満たす $B_{(A_0,A_1)} \in \mathfrak{B}$ を 1 つずつ選ぶ．$\mathfrak{B}$ の可算部分族

$$\mathfrak{B}' = \{B_{(A_0,A_1)} \mid (A_0, A_1) \in \mathfrak{A}'\}$$

が開基であることを示す．そのためには，命題 2.14 (2) の条件を確かめればよい．開集合 $U \subseteq X$ と点 $x \in X$ を任意にとる．$\mathfrak{A}$ は X の開基だから，$x \in A_1 \subseteq U$ を満たす $A_1 \in \mathfrak{A}$ がとれる．A_1 は x を含む開集合であり，$\mathfrak{B}$ は X の開基だから，$x \in B \subseteq A_1$ を満たす $B \in \mathfrak{B}$ がとれる．B は x を含む開集合であり，ふたたび $\mathfrak{A}$ は X の開基だから，$x \in A_0 \subseteq B$ を満たす $A_0 \in \mathfrak{A}$ がとれる．すると，$(A_0, A_1) \in \mathfrak{A}'$ だから，対応する $B_{(A_0,A_1)} \in \mathfrak{B}'$ が存在する．$B_{(A_0,A_1)}$ は

$$x \in A_0 \subseteq B_{(A_0,A_1)} \subseteq A_1 \subseteq U$$

を満たす．これで，命題 2.14 (2) の条件が確かめられた．□

命題 4.3　第二可算空間は第一可算である．

証明　開基の部分族として近傍基が得られること（命題 2.17 (2)）から従う．□

命題 4.3 の逆は成り立たない．すなわち，第一可算空間は第二可算とは限らない．

命題 4.4　第一可算空間【第二可算空間】の開連続像は第一可算【第二可算】である．

証明　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を開連続全射とする．

命題 2.31 (1) より，$\mathfrak{B}$ が $x \in X$ の可算近傍基ならば，$f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は $f(x)$ の可算近傍基である．よって，X が第一可算ならば Y も第一可算である．

命題 2.31 (2) より，$\mathfrak{B}$ が X の可算開基ならば，$f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は Y の可算開基である．よって，X が第二可算ならば Y も第二可算である．□

命題 4.5　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間の可算族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，各 Y_i が第一可算【第二可算】ならば，X も第一可算【第二可算】である．

証明　第一可算性については，始位相に関する各点の近傍フィルタが始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 3.3），始フィルタの一般的な性質（系 1.16）から従う．

第二可算性について示す．各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{C}_i$ が Y_i の開基ならば，

$$\mathfrak{B} = \{\phi_{i_0}^{-1}(C_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{-1}(C_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ i_0, \ldots, i_{n-1} \in I \text{ は相異なる},\ C_k \in \mathfrak{C}_{i_k}\}$$

は X の開基である（命題 3.2 (2)）．いま，I は可算だから，各 $\mathfrak{C}_i$ が可算ならば，$\mathfrak{B}$ も可算である．よって，各 Y_i が第二可算ならば，X も第二可算である．□

系 4.6　第一可算空間【第二可算空間】の部分空間は第一可算【第二可算】である．□

系 4.7　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ は第一可算【第二可算】である．
(b) すべての X_i は第一可算【第二可算】であり，かつ可算個の $i \in I$ を除いて X_i は密着空間である．

証明　$X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　射影 pr_i は開写像だから（命題 3.30 (1)），X が第一可算【第二可算】ならば，命題 4.4 より，その開連続像 $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ も第一可算【第二可算】である．

後半を示す．第二可算空間は第一可算だから（命題 4.3），X が第一可算のとき，X_i が密着空間でないような $i \in I$ の全体 I' が可算であることを示せばよい．各 $i \in I'$ に対して X_i の開集合 $O_i \neq \emptyset, X_i$ をとる．点 $x \in \prod_{i\in I'} O_i \times \prod_{i\in I\setminus I'} X_i$ を 1 つ固定する．X は第一可算だから，x の可算近傍基 $\{U_j\}_{j\in J}$ がとれる．積位相の定義より，各 $j \in J$ に対して，$\mathrm{pr}_i(U_j) \neq X_i$ となるような $i \in I$ は有限個である．一方で，各 $i \in I'$ に対して $\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)$ は x の近傍だから，ある $j \in J$ が存在して $U_j \subseteq \mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)$，すなわち $\mathrm{pr}_i(U_j) \subseteq O_i$ となる．よって，I' は可算である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　密着空間は無視できるから，第一可算空間【第二可算空間】の可算族の積が第一可算【第二可算】であることを示せばよいが，これは命題 4.5 から従う．□

命題 4.8　位相空間族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ は第二可算である．
(b) すべての $i \in I$ に対して X_i は第二可算であり，かつ可算個の $i \in I$ を除いて X_i は空である．

証明　$X = \coprod_{i\in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），系 4.6 より，X が第二可算ならば各 X_i も第二可算である．また，$\mathfrak{B}$ を X の開基とすると，$X_i \neq \emptyset$ なる $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}$ は X_i の空でない

開集合を含むから，X が第二可算ならば，そのような $i \in I$ は可算個である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　空な和因子は無視できるから，I は可算であるとしてよい．各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{B}_i$ が X_i の可算開基ならば，和位相の定義より，$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ は X の可算開基である．□

4.2　可分空間

定義 4.9（可分空間）　位相空間 X が**可分**であるとは，X が可算な稠密集合をもつことをいう．

命題 4.10　第二可算空間は可分である．

証明　X を第二可算空間とし，$\mathfrak{B}$ を X の可算開基とする．$\mathfrak{B}$ は空集合を含まないとしてよい．$\mathfrak{B}$ の各元から 1 点ずつ選び，その全体を D とする．すると，開基の定義と D の定め方より，任意の空でない開集合は D と交わるから，D は可算稠密集合である．よって，X は可分である．□

命題 4.10 の逆は成り立たない．すなわち，可分空間は第二可算とは限らない．第一可算かつ可分だが第二可算でない空間が存在する．

命題 4.11　可分空間の開部分空間は可分である．

証明　X を可分空間，D を X の可算稠密集合とする．開部分空間 $X' \subseteq X$ について，命題 2.8 より $X' \subseteq \overline{X' \cap D}$ だから，$X' \cap D$ は X' の可算稠密集合である．よって，X' は可分である．□

可分空間の一般の部分空間は，可分とは限らない．

命題 4.12　可分空間の連続像は可分である．

証明　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．D を X の可算稠密集合とすると，f の連続性より $\overline{f(D)} \supseteq f(\overline{D}) = f(X) = Y$ だから，$f(D)$ は Y の可算稠密集合である．よって，X が可分ならば Y も可分である．□

命題 4.13　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は可分である．
(b) すべての $i \in I$ に対して X_i は可分であり，かつ可算個の $i \in I$ を除いて X_i は空である．

証明　$X = \coprod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の開部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），命題 4.11 より，X が可分ならば各 X_i も可分である．また，D を X の稠密集合とすると，$X_i \neq \emptyset$ なる $i \in I$ に対して D は X_i の点を含むから，X が可分ならば，そのような $i \in I$ は可算個である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　空な和因子は無視できるから，I は可算であるとしてよい．各 $i \in I$ に対して D_i が X_i の可算稠密集合ならば，和位相の定義より，$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ は X の可算稠密集合である．□

命題 4.14　可分空間の有限族の積は可分である．

証明　$D_0, \dots, D_{n-1}$ がそれぞれ位相空間 $X_0, \dots, X_{n-1}$ の可算稠密集合ならば，$D_0 \times \cdots \times D_{n-1}$ は積空間 $X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$ の可算稠密集合である（命題 3.18）．よって，可分空間の有限積は可分である．□

命題 4.14 は，次のように一般化できる．

定理 4.15　位相空間族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に関する次の 2 条件について，(b) $\Longrightarrow$ (a) が成り立つ．さらに，各 X_i が 2 点以上からなる分離空間であるという条件の下で，(a) と (b) は同値となる．[*1]

(a) 積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ は可分である．
(b) すべての $i\in I$ に対して X_i は可分であり，かつ $|I|\le 2^{\aleph_0}$ である．

証明　$X=\prod_{i\in I} X_i$ と置く．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 $i\in I$ に対して，$D_i=\{x_{i,n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ を X_i の可算稠密集合とする．$|I|\le 2^{\aleph_0}$ だから，I を $\mathbb{R}$ あるいはその部分集合と同一視できる．

$k\in\mathbb{N}$，空でなく互いに交わらない有理数を端点とする有界閉区間 $A_0,\dots,A_{k-1}\subseteq\mathbb{R}$，$n_0,\dots,n_{k-1}\in\mathbb{N}$ に対して，点 $x=x(A_0,\dots,A_{k-1};n_0,\dots,n_{k-1})\in X$ を次のように定める（x_i で x の i-成分を表す．$I\subseteq\mathbb{R}$ とみなしていることに注意する）：

$$x_i=\begin{cases} x_{i,n_j} & (i\in A_j)\\ x_{i,0} & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

このような点 $x(A_0,\dots,A_{k-1};n_0,\dots,n_{k-1})$（$k\in\mathbb{N}$）の全体を D とする．

D は明らかに可算である．さらに，D が稠密であることが次のようにわかる．X の標準開基の元 $O=\prod_{i\in I} O_i$ を任意にとる．$i\in I\setminus\{i_0,\dots,i_{k-1}\}$ に対しては $O_i=X_i$ であるとする．空でなく互いに交わらない，有理数を端点とする閉区間 $A_0,\dots,A_{k-1}\subseteq\mathbb{R}$ であって，$0\le j<k$ に対して $i_j\in A_j$ を満たすものがとれる．また，各 D_j は稠密だったから，各 $0\le j<k$ に対して，$n_i\in\mathbb{N}$ であって $x_{i_j,n_j}\in O_{i_j}$ を満たすものがとれる．すると $x(A_0,\dots,A_{k-1};n_0,\dots,n_{k-1})\in O$ だから，$D\cap O\neq\emptyset$ である．よって，X は可分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が可分ならば，命題 4.12 より，その連続像 $\mathrm{pr}_i(X)=X_i$ も可分である．

各 X_i は 2 点以上からなる分離空間であり，X が可分であるとして，$|I|\le 2^{\aleph_0}$ を示す．各 $i\in I$ に対して，互いに交わらない空でない開集合 $U_i,V_i\subseteq X_i$ をとる（X_i が 2 点以上からなる分離空間であることを用いた）．D を X の可算稠密集合とし，$A_i=D\cap\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$ と置く．すると，任意の異なる $i,j\in I$ に対して $A_i\neq A_j$ である．実際，$\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)\cap\mathrm{pr}_j^{-1}(V_j)\cap D\neq\emptyset$ の点は，A_i には属するが A_j には属さない．よって，$|I|\le|\mathfrak{P}(D)|\le 2^{\aleph_0}$ である．□

定理 4.16　可分分離空間の濃度は，$2^{2^{\aleph_0}}$ 以下である．

証明　X を可分分離空間，D を X の可算稠密集合とする．写像 $\Phi\colon X\to\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(D))$ を，

$$\Phi(x)=\{N\cap D\mid N\in\mathfrak{N}(x)\}$$

と定める．Φ の単射性を示せば，$|X|\le|\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(D))|=2^{2^{\aleph_0}}$ がわかる．

異なる 2 点 $x,y\in X$ を任意にとる．X の分離性より，$x\in U$ かつ $y\notin\overline{U}$ を満たす開集合 U がとれる．U は x の近傍だから，$U\cap D$ は $\Phi(x)$ に属する．一方で，D の稠密性と命題 2.8 より，$\Phi(y)=\{N\cap D\mid N\in\mathfrak{N}(y)\}$ の任意の元は，y を接触点にもつ．ところが $y\notin\overline{U\cap D}$ だから，$U\cap D$ は $\Phi(y)$ に属さない．よって，$\Phi(x)\neq\Phi(y)$ である．これで，Φ の単射性が示された．□

[*1] この定理は大きく一般化できる．一般化した形の定理を Hewitt–Marczewski–Pondiczery の定理という．これについては，論文 [2], [3], [7] あるいは解説記事 [38] を参照のこと．

4.3　可算鎖条件

定義 4.17（可算鎖条件）　位相空間 X が**可算鎖条件**を満たすとは，X の空でない開集合の族であってどの異なる 2 つの元も交わらないようなものが常に可算であることをいう．

命題 4.18　可分空間は可算鎖条件を満たす．

証明　X を可分空間，D を X の可算稠密集合とする．X の空でなく互いに交わらない開集合の族 $\mathfrak{U}$ をとると，$\mathfrak{U}$ の各元は必ず D の点を含み，かつ $\mathfrak{U}$ のどの異なる 2 つの元も D の同じ点を含まない．したがって，$\mathfrak{U}$ は可算である．よって，X は可算鎖条件を満たす．□

命題 4.19　可算鎖条件を満たす位相空間の連続像は可算鎖条件を満たす．

証明　対偶を示す．X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．もし Y がどの異なる 2 元も交わらないような空でない開集合の非可算族 $\mathfrak{V}$ をもてば，X も同じ性質を満たす非可算族 $\{f^{-1}(V)\}_{V\in\mathfrak{V}}$ をもつ．よって，Y が可算鎖条件を満たさなければ，X も可算鎖条件を満たさない．□

集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が **Δ-システム**をなすとは，ある集合 R（**根**と呼ばれる）が存在して，任意の異なる $i, j \in I$ に対して $A_i \cap A_j = R$ が成り立つことをいう．

補題 4.20（Δ-システム補題）　有限集合の非可算族は，非可算な Δ-システムを部分族として含む．

証明　$\{A_i\}_{i\in I}$ を有限集合の非可算族とする．このとき，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $|A_i| = n$ なる $i \in I$ が非可算個あるから，はじめからすべての $i \in I$ について $|A_i| = n$ であるとしても一般性を失わない．これが非可算な Δ-システムを含むことを，n に関する帰納法で示す．

$n = 0$ のときは明らかである．n のときに成り立つと仮定して，$n+1$ のときを示す．まず，ある x が存在して $x \in A_i$ なる $i \in I$ が非可算個ある場合を考える．そのような x を 1 つ固定し，$x \in A_i$ を満たす $i \in I$ の全体を I' と置く．すると，帰納法の仮定より，$\{A_i \setminus \{x\}\}_{i\in I'}$ は非可算な Δ-システム $\{A_i \setminus \{x\}\}_{i\in I''}$ を含む．このとき，$\{A_i\}_{i\in I''}$ はもとの集合族に含まれる非可算な Δ-システムである．

次に，どのような x に対しても $x \in A_i$ なる $i \in I$ が可算個しかない場合を考える．このとき，超限帰納法により，$\{A_i\}_{i\in I}$ から互いに交わらない $\aleph_1$ 個の集合を選ぶことができる．実際，超限帰納法の各段階において「これまでに選ばれたある集合に属する点の全体」は可算だから，場合分けの仮定と合わせて「これまでに選ばれたある集合と交わる A_i の個数」も可算であり，したがって A_i をこれまでに選ばれたどの集合とも交わらないように選べる．こうして選んだ部分族は，$\emptyset$ を根とする非可算な Δ-システムをなす．□

定理 4.21　$\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とする．任意の有限部分集合 $I' \subseteq I$ に対して $\prod_{i\in I'} X_i$ が可算鎖条件を満たすならば，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ も可算鎖条件を満たす．

証明　対偶を示す．すなわち，$\prod_{i\in I} X_i$ が可算鎖条件を満たさないならば，$\prod_{i\in I'} X_i$ が可算鎖条件を満たさないような有限部分集合 $I' \subseteq I$ が存在することを示す．

$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\prod_{i\in I} X_i$ の空でなく互いに交わらない開集合の非可算族とする．各 O_λ は標準開基の元

$$O_\lambda = \prod_{i\in I} O_{\lambda,i} \quad (\text{各 } i \in I \text{ に対して，} O_{\lambda,i} \text{ は } X_i \text{ の空でない開集合，有限個の } i \in I \text{ を除いて } O_{\lambda,i} = X_i)$$

であるとしても一般性を失わない．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$O_{\lambda,i} \neq X_i$ なる $i \in I$ の全体を I'_λ と置く．これは有限集合である．

$\{I'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に Δ-システム補題（補題 4.20）を適用して，Δ-システムをなす非可算部分族 $\{I'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を得る．この Δ-システムの根を I'（有限集合）と置く．このとき，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ の $\prod_{i\in I'} X_i$ への射影，すなわち

$$\left\{\prod_{i\in I'} O_{\lambda,i}\right\}_{\lambda\in\Lambda} \tag{$*$}$$

は $\prod_{i\in I'} X_i$ の空でない開集合の非可算族であり，どの異なる 2 元も交わらない．これを示そう．

($*$) が空でない開集合の非可算族であることは明らかだから，異なる 2 元が交わらないことだけを確かめる．異なる $\lambda, \mu \in \Lambda'$ について，$\prod_{i\in I'} O_{\lambda,i}$ と $\prod_{i\in I'} O_{\mu,i}$ が交わると仮定する．このとき，点 $x = (x_i)_{i\in I} \in O_\lambda$ と $y = (y_i)_{i\in I} \in O_\mu$ であって，I'-成分が一致するものが存在する．I'_λ, I'_μ の定義より，x と I'_λ-成分を共有する任意の点はまた O_λ に属し，y と I'_μ-成分を共有する任意の点はまた O_μ に属する．$\lambda, \mu \in \Lambda'$，$\lambda \neq \mu$ より $I'_\lambda \cap I'_\mu = I'$ であることを踏まえて，点 $z = (z_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ を次のように定める：

$$z_i = \begin{cases} x_i = y_i & (i \in I'_\lambda \cap I'_\mu = I') \\ x_i & (i \in I'_\lambda \setminus I'_\mu) \\ y_i & (i \in I'_\mu \setminus I'_\lambda) \\ x_i & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

すると $z \in O_\lambda \cap O_\mu$ となるが，これは $O_\lambda \cap O_\mu = \emptyset$ に矛盾する．よって，背理法より，$\prod_{i\in I'} O_{\lambda,i}$ と $\prod_{i\in I'} O_{\mu,i}$ は交わらない．

以上より，$\prod_{i\in I'} X_i$ は可算鎖条件を満たさない．□

系 4.22　可分空間族の積は可算鎖条件を満たす．

証明　可分空間の有限族の積は可分であり（命題 4.14），したがって可算鎖条件を満たすから（命題 4.18），主張は定理 4.21 から従う．□

可算鎖条件を満たすという性質が積で保たれるかどうかは，ZFC 上独立であることが知られている [20, p. 65].

第 5 章

分離性

本章以降では，$\mathbb{R}$ の位相的性質に関する簡単な事実を断りなく用いる．

5.1 識別と分離

定義 5.1（識別） X を位相空間とし，$x, y \in X$ とする．x と y が（X において）**識別される**とは，x と y のうち一方のみを含む X の開集合 U が存在することをいう．また，このとき，U は x と y を**識別する**という．

命題 5.2 X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，$x, y \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) x と y は識別される．
(b) ある $i \in I$ が存在して，$\phi_i(x)$ と $\phi_i(y)$ は識別される．

証明 次の同値関係から従う：

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\iff \text{ある } i \in I \text{ と } Y_i \text{ の開集合 } V \text{ が存在して，} \phi_i^{-1}(V) \text{ は } x \text{ と } y \text{ のうち一方のみを含む} \qquad (*) \\
&\iff \text{ある } i \in I \text{ と } Y_i \text{ の開集合 } V \text{ が存在して，} V \text{ は } \phi_i(x) \text{ と } \phi_i(y) \text{ のうち一方のみを含む} \\
&\iff \text{(b)}.
\end{aligned}$$

ここで，同値関係 $(*)$ は，$\phi_i^{-1}(V)$（$i \in I$，V は Y_i の開集合）と表される集合全体が X の準開基であることから従う． □

系 5.3 X を位相空間，A を X の部分空間とする．2 点 $x, y \in A$ が A において識別されるための必要十分条件は，これらが X において識別されることである． □

系 5.4 $\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，$X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．X の 2 点 $x = (x_i)_{i\in I}$，$y = (y_i)_{i\in I}$ が識別されるための必要十分条件は，任意の $i \in I$ に対して x_i と y_i が識別されることである． □

命題 5.5 $\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，$X = \coprod_{i\in I} X_i$ と置く．$x, y \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) x と y は X において識別される．
(b) x と y は異なる和因子に属するか，または「x と y は同じ和因子 X_i に属し，かつ x と y は X_i において識別される」．

証明 和位相の定義から明らかである． □

定義 5.6（分離） X を位相空間とし，$A, B \subseteq X$ とする．

(1) A と B が（X において）**開集合で分離される**とは，A, B をそれぞれ含む X の開集合 U, V であって，互いに交わらないものが存在することをいう．また，このとき，U, V は A と B を**分離する**という．
(2) A と B が（X において）**関数で分離される**とは，連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ であって，「$f(A) \subseteq (-\infty, a]$ かつ $f(B) \subseteq [b, \infty)$」または「$f(A) \subseteq [b, \infty)$ かつ $f(B) \subseteq (-\infty, a]$」を満たすものが存在することをいう．また，このとき，f は A と B を**分離する**という．

A と B のうち一方または両方が 1 点集合である場合には，「x と B は開集合で（関数で）分離される」，「x と y は開集合で（関数で）分離される」などともいう．

A と B が関数で分離されるならば，A と B は開集合でも分離される．

A と B が開集合で分離されることは，$A \subseteq U$ かつ $\overline{U} \subseteq X \setminus B$ を満たす開集合 U が存在することと同値である．また，A と B が関数で分離されることは，連続関数 $f\colon X \to [0, 1]$ であって，$f(A) \subseteq \{0\}$ かつ $f(B) \subseteq \{1\}$ を満たすものが存在することと同値である．

5.2　擬 T$_1$ 空間，擬分離空間

定義 5.7（擬 T$_1$ 空間，擬分離空間）　X を位相空間とする．

(1) X が**擬 T$_1$**[*1] あるいは **R$_0$** であるとは，任意の識別される 2 点 $x, y \in X$ に対して，x を含み y を含まない X の開集合が存在することをいう．
(2) X が**擬分離**[*2] あるいは **R$_1$** であるとは，X の任意の識別される 2 点が開集合で分離されることをいう．

明らかに，擬分離空間は擬 T_1 である．

命題 5.8　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，各 Y_i が擬分離【擬 T_1】ならば，X は擬分離【擬 T_1】である．

証明　証明はどちらもほとんど同様だから，擬分離性についてのみ示す．各 Y_i が擬分離であるとする．X の識別される 2 点 $x, y \in X$ を任意にとる．すると，命題 5.2 より，ある $i \in I$ が存在して $\phi_i(x)$ と $\phi_i(y)$ は識別される．この i について，Y_i は擬分離だから，$\phi_i(x)$ と $\phi_i(y)$ を分離する Y_i の開集合 U, V がとれる．このとき，$\phi_i^{-1}(U), \phi_i^{-1}(V)$ は x と y を分離する X の開集合である．よって，X は擬分離である．□

系 5.9　擬分離【擬 T_1】空間の部分空間は，擬分離【擬 T_1】である．□

系 5.10　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は擬分離【擬 T_1】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は擬分離【擬 T_1】である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　積空間の断面は因子空間と同相であり（命題 3.28），各 X_i は空でないから，X_i は X の部分空間とみなせる．よって，主張は系 5.9 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　命題 5.8 から従う．□

命題 5.11　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は擬分離【擬 T_1】である．

*1 「擬 T_1」は，本稿だけの用語である．
*2 「擬分離」は，本稿だけの用語である．

(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は擬分離【擬 T_1】である．

証明　$X = \coprod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），主張は系 5.27 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　証明はどちらもほとんど同様だから，擬分離性についてのみ示す．各 X_i が擬分離であるとする．X の識別される 2 点 $x, y \in X$ を任意にとる．x, y が異なる和因子 X_i, X_j に属するならば，この X_i, X_j が x と y を分離する X の開集合になる．x, y が同じ和因子 X_i に属するとする．X_i は擬分離だから，x と y を分離する X_i の開集合 U, V がとれ，これがそのまま x と y を分離する X の開集合となる．よって，X は擬分離である．□

5.3　T_0 空間，T_1 空間，分離空間

定義 5.12（T_0 空間，T_1 空間，分離空間）　X を位相空間とする．

(1) X が T_0 であるとは，X の異なる 2 点が常に識別されることをいう．
(2) X が T_1 であるとは，任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，x を含み y を含まない X の開集合が存在することをいう．
(3) X が**分離**，T_2 あるいは **Hausdorff** であるとは，X の異なる 2 点が常に開集合で分離されることをいう．

明らかに，分離空間は T_1 であり，T_1 空間は T_0 である．また，位相空間が T_1 であることと擬 T_1 かつ T_0 であることとは同値であり，分離であることと擬分離かつ T_0 であることとは同値である．

命題 5.13　位相空間が T_1 であるための必要十分条件は，その任意の 1 点部分集合が閉であることである．

証明　X を位相空間とする．X が T_1 であるとして，$x \in X$ を任意にとる．すると，$y \in X \setminus \{x\}$ に対して，y の開近傍であって x を含まないものがとれる．よって，$X \setminus \{x\}$ は X の開集合だから，$\{x\}$ は X の閉集合である．逆に，X の任意の 1 点部分集合が閉であるとする．すると，任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，$X \setminus \{y\}$ は y を含まない x の開近傍だから，X は T_1 である．□

系 5.14　T_1 空間の閉連続像は，T_1 である．

証明　「任意の 1 点部分集合が閉」という条件は明らかに閉連続像で保たれるから，主張は命題 5.13 から従う．□

命題 5.15　X を位相空間とする．次の 2 条件は同値である．

(a) X は分離である．
(b) 対角集合 $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ は $X \times X$ において閉である．

証明　$(x, y) \in X \times X$ の近傍基として，x の開近傍 U と y の開近傍 V に対する $U \times V$ の全体がとれる．したがって，$(x, y) \notin \overline{\Delta(X)}$ であるための必要十分条件は，x, y それぞれの開近傍 U, V であって互いに交わらないものが存在することである．よって，(b) は任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ が開集合で分離されることと同値であり，これは分離性そのものである．□

系 5.16（等式延長の原理）　X を位相空間，Y を分離空間とし，$f, g \colon X \to Y$ を連続写像とする．X の稠密集合上で f と g が一致していれば，X 上で常に $f = g$ である．

証明　Y が分離であることより，対角集合 $\Delta(Y) = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合だから（命題 5.15），連続写像 $(f, g)\colon X \to Y \times Y$ による $\Delta(Y)$ の逆像 $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である．よって，A が X において稠密ならば，$A = X$ である．これが示すべきことであった．□

命題 5.17（不等式延長の原理）　X を位相空間とし，f, $g\colon X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．X の稠密集合上で $f \leq g$ ならば，X 上で常に $f \leq g$ である．

証明　$T = \{(s, t) \mid s \leq t\}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の閉集合だから，連続関数 $(f, g)\colon X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ による T の逆像 $A = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ は X の閉集合である．よって，A が X において稠密ならば，$A = X$ である．これが示すべきことであった．□

命題 5.18　分離【T_0，T_1】空間の部分空間は，分離【T_0，T_1】である．

証明　T_0 性については，系 5.3 から従う．分離性【T_1 性】については，T_0 性に関する結果と系 5.9 から従う．□

命題 5.19　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は分離【T_0，T_1】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は分離【T_0，T_1】である．

証明　T_0 性については，系 5.4 から従う．分離性【T_1 性】については，T_0 性に関する結果と系 5.10 から従う．□

命題 5.20　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は分離【T_0，T_1】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は分離【T_0，T_1】である．

証明　T_0 性については，命題 5.5 から従う．分離性【T_1 性】については，T_0 性に関する結果と命題 5.11 から従う．□

命題 5.21　X を位相空間，Y を T_0 空間，$\phi\colon X \to Y$ を写像とし，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しいとする．このとき，X が T_0 であるための必要十分条件は，ϕ が埋め込みであることである．

証明　ϕ が埋め込みならば，X は Y の部分空間とみなせるから，命題 5.18 より，X は T_0 である．逆に，X が T_0 であるとする．このとき，2 点 $x, y \in X$ について，$\phi(x) = \phi(y)$ とすると，始位相の定義より x と y は識別できないから，X が T_0 であることより $x = y$ となる．よって，ϕ は単射であり，したがって埋め込みである．□

5.4　正則空間，完全正則空間

定義 5.22（正則空間，完全正則空間）　X を位相空間とする．

(1) X の 1 点とそれを含まない閉集合が常に開集合で分離されるとき，X は**正則空間**であるという．正則かつ分離な空間を**正則分離空間**あるいは **T_3 空間**という．
(2) X の 1 点とそれを含まない閉集合が常に関数で分離されるとき，X は**完全正則空間**であるという．完

　　全正則かつ分離な空間を**完全正則分離空間**，**$T_{3.5}$ 空間**あるいは **Tychonoff 空間**という．[*3]

明らかに，完全正則空間は正則であり，完全正則分離空間は正則分離である．また，正則空間は擬分離である．

命題 5.23　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) X は正則かつ T_0【完全正則かつ T_0】である．
(b) X は正則かつ T_1【完全正則かつ T_1】である．
(c) X は正則分離【完全正則分離】である．

証明　正則かつ T_0 な空間 X が分離であることを示せば十分である．異なる 2 点 $x, y \in X$ を任意にとる．T_0 性より，x と y を識別する開集合 O がとれる．一般性を失わず，$x \in O$，$y \notin O$ とする．正則性より，x と $X \setminus O$ を分離する開集合 U, V がとれる．このとき，U, V は x と y を分離する．よって，X は分離である．□

命題 5.24　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) X は正則である．
(b) X の各点において，その点の開近傍の閉包全体は近傍基をなす．
(c) X の各点において，その点の閉近傍全体は近傍基をなす．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　点 $x \in X$ とその開近傍 U を任意にとる．X が正則ならば，x と $X \setminus U$ は分離できる．すなわち，$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ を満たす開集合 V が存在する．よって，x の開近傍の閉包全体は近傍基をなす．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　点 $x \in X$ とそれを含まない閉集合 $F \subseteq X$ を任意にとる．このとき $X \setminus F$ は x の開近傍だから，仮定より，x の閉近傍 E であって $E \subseteq X \setminus F$ を満たすものが存在する．このとき，E°, $X \setminus E$ は x と F を分離する開集合である．□

命題 5.25　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) X は完全正則である．
(b) X の位相は，X から $[0,1]$ への連続関数全体が誘導する始位相に一致する．
(c) X の位相は，X から $\mathbb{R}$ への連続関数全体が誘導する始位相に一致する．

証明　$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし，$(X, \mathfrak{O})$ から $[0,1]$ への連続関数全体が誘導する始位相を $\mathfrak{O}'$，$(X, \mathfrak{O})$ から $\mathbb{R}$ への連続関数全体が誘導する始位相を $\mathfrak{O}''$ とする．$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}'' \subseteq \mathfrak{O}$ は明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が完全正則であるとし，$O \in \mathfrak{O}$ と点 $x \in O$ を任意にとる．完全正則性より，$f(x) = 1$ かつ $f(X \setminus O) \subseteq \{0\}$ を満たす連続関数 $f \colon X \to [0,1]$ が存在する．このとき $f^{-1}((0,1]) \in \mathfrak{O}'$ であって $x \in f^{-1}((0,1]) \subseteq O$ となる．これが任意の $x \in O$ に対して成り立つから，$O \in \mathfrak{O}'$ である．よって $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ であり，$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}'' \subseteq \mathfrak{O}$ だから，$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ ならば $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}''$ である．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}''$ であるとし，$O \in \mathfrak{O}$ と点 $x \in O$ を任意にとる．始位相の定義より，連続関数 f_0,

[*3] 正則性や完全正則性の定義に分離性を含めることもある．また，「T_3 空間」で本稿でいう正則空間を，「$\mathrm{T}_{3.5}$ 空間」で本稿でいう完全正則空間を指すこともある．

$\dots$, $f_{n-1}\colon X \to \mathbb{R}$ と開区間 I_0, $\dots$, $I_{n-1} \subseteq \mathbb{R}$ であって，

$$x \in f_0^{-1}(I_0) \cap \dots \cap f_{n-1}^{-1}(I_{n-1}) \subseteq O$$

を満たすものが存在する．必要ならば関数を適当にとりかえることで，$I_i = (-1, 1)$，$f_i(x) = 0$（$i = 0$, $\dots$, $n-1$）としてよい．このとき，関数 $f\colon X \to [0, 1]$ を

$$f(x) = \max\{1 - |f_1(x)|, 0\} \cdots \max\{1 - |f_n(x)|, 0\}$$

と定めると，これは連続であり，$f(x) = 1$ かつ $f(X \setminus O) \subseteq \{0\}$ を満たす．よって，X は完全正則である．

□

命題 5.26 X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，各 Y_i が正則【完全正則】ならば，X は正則【完全正則】である．

証明 正則性について示す．各 Y_i が正則であるとする．点 $x \in X$ とその開近傍 U を任意にとる．始位相の定義より，$x \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi_{i_k}^{-1}(V_k) \subseteq U$ を満たす i_0, $\dots$, $i_{n-1} \in I$ と $V_k \subseteq Y_{i_k}$（$k \in \{0, \dots, n-1\}$）が存在する．さらに Y_{i_k} の正則性より，$\phi_{i_k}(x) \in W_k \subseteq \overline{W_k} \subseteq V_i$ を満たす開集合 $W_k \subseteq Y_{i_k}$ が存在する．ここで

$$W = \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi_{i_k}^{-1}(W_k)$$

と置くと，W は開集合であり，

$$x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi_{i_k}^{-1}(\overline{W_k}) \subseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi_{i_k}^{-1}(V_k) \subseteq U$$

が成り立つ．よって，X は正則である．

完全正則性については，命題 5.25 と始位相の推移性（命題 3.6 (1)）からわかる． □

系 5.27 正則【完全正則】空間の部分空間は，正則【完全正則】である． □

系 5.28 空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は正則【完全正則】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は正則【完全正則】である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 積空間の断面は因子空間と同相であり（命題 3.28），各 X_i は空でないから，X_i は X の部分空間とみなせる．よって，主張は系 5.27 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 命題 5.26 から従う． □

命題 5.29 位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は正則【完全正則】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は正則【完全正則】である．

証明 $X = \coprod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 各 X_i は X の部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），主張は系 5.27 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 正則性について示す．各 X_i が正則であるとして，点 $x \in X$ とそれを含まない閉集合 $F \subseteq X$ を任意にとる．x は和因子 X_i に属するとする．$F \cap X_i$ は X_i の閉集合だから，X_i の正則性より，x と

$F \cap X_i$ を分離する開集合 $U, V \subseteq X_i$ がとれる．このとき，U と $V \cup (X \setminus X_i)$ は x と F を分離する開集合である．よって，X は正則である．

完全正則性について示す．各 X_i が完全正則であるとして，点 $x \in X$ とそれを含まない閉集合 $F \subseteq X$ を任意にとる．x は和因子 X_i に属するとする．$F \cap X_i$ は X_i の閉集合だから，X_i の完全正則性より，x と $F \cap X_i$ を分離する連続関数 $f\colon X_i \to [0,1]$ がとれる．このとき，X_i 上で f に一致し $X \setminus X_i$ 上で常に値 1 をとる関数は，x と F を分離する X 上の連続関数である．よって，X は完全正則である．□

命題 5.30　正則空間 X の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対して，X の開被覆 $\mathfrak{V}$ であって，$\overline{\mathfrak{V}}$ が $\mathfrak{U}$ を細分するものが存在する．

証明　開集合であってその閉包が $\mathfrak{U}$ のある元に含まれるもの全体を $\mathfrak{V}$ とする．このとき，定義より $\overline{\mathfrak{V}}$ は $\mathfrak{U}$ の細分であり，X の正則性より $\mathfrak{V}$ は X の開被覆となっている．□

5.5　正規空間

5.5.1　正規空間の基本的性質

定義 5.31（正規空間）　位相空間 X の互いに交わらない 2 つの閉集合が常に開集合で分離されるとき，X は**正規空間**であるという．正規かつ分離な空間を**正規分離空間**あるいは **T$_4$ 空間**という．[*4]

命題 5.32　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(1) X は正則，正規かつ T_0 である．
(2) X は正規かつ T_1 である．
(3) X は正規分離である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (c)　正則かつ T_0 な空間が分離であること（命題 5.23）からわかる．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　T_1 空間において 1 点集合が閉であること（命題 5.13）からわかる．□

命題 5.33　正規空間の閉部分空間は正規である．

証明　X を正規空間，X' を X の閉部分空間とする．互いに交わらない X' の閉集合 E, F を任意にとる．X' が閉であることから，E, F は X の閉集合でもある．よって，E と F を分離する X の開集合 U, V がとれる．このとき，$U \cap X', V \cap X'$ は E と F を分離する X' の開集合である．よって，X' は正規である．□

より一般に，定理 5.35 が成り立つ．

補題 5.34　X を正規空間，A, B を X の σ-閉集合とする．$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ ならば，A と B は開集合で分離される．

証明　閉集合の増大列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて，$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$，$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ と表す．X の正規性より，開集合の増大列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって，2 条件

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n \cup \overline{U_{n-1}} \subseteq U_n$ かつ $\overline{U_n} \subseteq X \setminus (\overline{B} \cup \overline{V_{n-1}})$ である．
(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$B_n \cup \overline{V_{n-1}} \subseteq V_n$ かつ $\overline{V_n} \subseteq X \setminus (\overline{A} \cup \overline{U_n})$ である．

[*4] 正規性の定義に分離性を含めることもある．また，「T_4 空間」で本稿でいう正規空間を指すこともある．

を満たすものがとれる（ただし，$U_{-1} = V_{-1} = \emptyset$ とみなす）．実際，再帰的に U_n, V_n を定めていくことを考えれば，$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ より，各段階において閉集合 $A_n \cup \overline{U_{n-1}}$ と $\overline{B} \cup \overline{V_{n-1}}$，$B_n \cup \overline{V_{n-1}}$ と $\overline{A} \cup \overline{U_n}$ はそれぞれ互いに交わらないから，正規性より (i), (ii) の式を満たす開集合 U_n, V_n がとれる．このとき，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ は，A と B を分離する開集合である． □

定理 5.35 正規空間の σ-閉部分空間は正規である．[*5]

証明 X を正規空間，A を X の σ-閉部分空間とする．E, F を互いに交わらない A の閉集合とすると，E と F は X の σ-閉集合であり，$E \cap \mathrm{cl}_X(F) = \mathrm{cl}_X(E) \cap F = \emptyset$ を満たす．よって，補題 5.34 より，E と F は X のある開集合 U, V で分離される．このとき，$U \cap A, V \cap A$ は E と F を分離する A の開集合である．よって，A は正規である． □

命題 5.36 位相空間族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ は正規である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は正規である．

証明 $X = \coprod_{i\in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 各 X_i は X の閉部分空間とみなせる（命題 3.30 (2)）から，命題 5.33 より，X が正規ならば各 X_i も正規である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 各 X_i が正規であるとして，交わらない閉集合 $E, F \subseteq X$ を任意にとる．各 $i \in I$ に対して，$E \cap X_i$ と $F \cap X_i$ は X_i の閉集合だから，X_i の正規性より，$E \cap X_i$ と $F \cap X_i$ を分離する X_i の開集合 U_i, V_i がとれる．このとき，$\bigcup_{i\in I} U_i, \bigcup_{i\in I} V_i$ は E と F を分離する X の開集合である．よって，X は正規である． □

命題 5.37 正規空間【正規分離空間】の閉連続像は，正規【正規分離】である．

証明 X を正規空間，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を閉連続全射として，Y が正規であることを示す．互いに交わらない閉集合 $F_0, F_1 \subseteq Y$ を任意にとる．$f^{-1}(F_0)$, $f^{-1}(F_1)$ は互いに交わらない X の閉集合だから，X の正規性より，これを分離する開集合 $U_0, U_1 \subseteq X$ がとれる．$i \in \{0, 1\}$ に対して，$V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i)$ と置く．f が閉写像であることより，V_i は Y の開集合である．f は全射で $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ だから，$f(X \setminus U_0) \cup f(X \setminus U_1) = f(X) = Y$，すなわち $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ となる．さらに，もし $y \in F_i \cap f(X \setminus U_i)$ とすると，$f(x) = y$ なる $x \in X \setminus U_i$ が存在する．このとき $x \in f^{-1}(F_i)$ でもあるが，これは $f^{-1}(F_i) \subseteq U_i$ に矛盾する．したがって $F_i \cap f(X \setminus U_i) = \emptyset$，すなわち $F_i \subseteq V_i$ である．よって，Y は正規である．

正規分離性は正規 T_1 性と同値だから（命題 5.32），正規分離性が閉連続像で保たれることは，正規性と T_1 性がそれぞれ閉連続像で保たれること（系 5.14）から従う． □

正規空間の部分空間は正規とは限らない．正規空間の積は正規とは限らない．

5.5.2 Urysohn の補題

定理 5.38（Urysohn の補題） 位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は正規である．
(b) X の互いに交わらない 2 つの閉集合は，常に関数で分離される．

[*5] 付録 B で，1 の分割を用いた，より見通しのよい証明を与える（定理 B.15）．

証明　(b) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X の互いに交わらない 2 つの閉集合 A, B を任意にとる．

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \ k = 0,\, \ldots,\, 2^n - 1,\, 2^n \right\}$$

と置き，各 $t \in D$ に対して開集合 $U(t) \subseteq X$ を次のように再帰的に定める．

(i) $U(1) = X \setminus B$ とし，$U(0)$ は $A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$ を満たすように定める．

(ii) $U(k/2^n)$ と $U((k+1)/2^n)$ が定まり，$\overline{U(k/2^n)} \subseteq U((k+1)/2^n)$ を満たしているとき，$U((2k+1)/2^{n+1})$ を

$$\overline{U\left(\frac{k}{2^n}\right)} \subseteq U\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

となるように定める．

これは，X の正規性より可能である．このように構成される集合族 $\{U(t)\}t \in D$ は，

$$s, t \in D,\ \ s < t \quad \text{ならば} \quad A \subseteq U(s) \subseteq \overline{U(s)} \subseteq U(t) \subseteq \overline{U(t)} \subseteq X \setminus B$$

を満たす．

関数 $f\colon X \to [0,1]$ を次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \in D \mid x \in U(t)\} & (x \in U(1) = X \setminus B) \\ 1 & (x \notin U(1) = X \setminus B) \end{cases}$$

$f(E) \subseteq \{0\}$ および $f(F) \subseteq \{1\}$ は明らかだから，あとは f の連続性を示せばよい．

点 $x \in X$ と $\epsilon > 0$ を任意にとる．$0 < f(x) < 1$ の場合，$f(x) - \epsilon < s < f(x) < t < f(x) + \epsilon$ を満たす $s, t \in D$ をとると，$x \in U(t) \setminus \overline{U(s)} \subseteq f^{-1}((f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon))$ であって $U(t) \setminus \overline{U(s)}$ は開集合だから，$f^{-1}((f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon))$ は x の近傍である．$f(x) = 0$ の場合は $U(s) = \emptyset$，$f(x) = 1$ の場合は $U(t) = X$ とみなすことで同様の結果が得られる．よって，f は連続である． □

命題 5.39　位相空間の性質について，次が成り立つ．

(1) 正則性，完全正則性，正則正規性の順に弱い性質から強い性質である．

(2) T_0 性，T_1 性，分離性，正則分離性，完全正則分離性，正規分離性の順に弱い性質から強い性質である．

証明　(1)　完全正則空間が正則であることは明らかだから，正則かつ正規な空間 X が完全正則であることを示す．点 $x \in X$ とそれを含まない閉集合 $F \subseteq X$ を任意にとる．正則性より $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus F$ がとれ，正規性と Urysohn の補題（定理 5.38）より $\overline{U}$ と F を分離する連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ がとれる．この f は x と F を分離する．よって，X は完全正則である．

(2)　T_0 性，T_1 性，分離性，正則分離性，完全正則分離性の順に弱い性質から強い性質であることは明らかである．完全正則分離性，正規分離性はそれぞれ完全正則 T_0 性，正則正規 T_0 性と同値だったから（命題 5.23，命題 5.32），(1) と合わせて，正規分離性が完全正則分離性を導くことがわかる． □

5.5.3　Tietze の拡張定理

補題 5.40　X を正規空間，A を X の閉集合とし，$r > 0$ とする．任意の連続関数 $u\colon A \to [-r, r]$ に対して，連続関数 $v\colon X \to [-r/3, r/3]$ であって，任意の $x \in A$ に対して $|u(x) - v(x)| \leq 2r/3$ を満たすものが存在する．

証明　$E = u^{-1}([-r, -r/3])$，$F = u^{-1}([r/3, r])$ は互いに交わらない閉集合だから，Urysohn の補題（定理 5.38）より，$v(E) \subseteq \{-r/3\}$ かつ $v(F) \subseteq \{r/3\}$ を満たす連続関数 $v\colon X \to [-r/3, r/3]$ が存在する．この v は条件を満たす． □

定理 5.41（Tietze の拡張定理）　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) X は正規である．

(b) A を X の閉集合とし，$I \subseteq \mathbb{R}$ を有界閉区間とする．このとき，任意の連続関数 $f\colon A \to I$ は，連続関数 $\widetilde{f}\colon X \to I$ に拡張できる．

(c) A を X の閉集合とし，$I \subseteq \mathbb{R}$ を（空でない，有限または無限，開または閉または半開）区間とする．このとき，任意の連続関数 $f\colon A \to I$ は，連続関数 $\widetilde{f}\colon X \to I$ に拡張できる．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が正規であるとする．連続関数 $f\colon A \to [-1, 1]$ が X 上の $[-1, 1]$ に値をとる連続関数に拡張できることを示せばよい．連続関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，次のように再帰的に定める．

(i) $f_0 = f$ とし，f_0 に対して補題 5.40 の方法で g_0 をとることで，連続写像

$$f_0\colon A \to [-1, 1], \quad g_0\colon X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \quad |f_0 - g_0| \leq \frac{2}{3}$$

を定める．

(ii) 連続写像

$$f_n\colon A \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right], \quad g_n\colon X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right], \quad |f_n - g_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

が定まっているとき，$f_{n+1} = f_n - g_n$ とし，f_{n+1} に対して補題 5.40 の方法で g_{n+1} をとることで，連続写像

$$f_{n+1}\colon A \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right], \quad g_{n+1}\colon X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right], \quad |f_{n+1} - g_{n+1}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

を定める．

$|g_n| \leq (1/3)(2/3)^n$ より級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ は一様収束する．その極限を $\widetilde{f}\colon X \to [-1, 1]$ とすると，$\widetilde{f}$ は連続関数の一様収束極限だから連続であり，$|\widetilde{f}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(1/3)(2/3)^n = 1$ である．さらに，A において

$$f - \widetilde{f} = \lim_{n\to\infty}(f - g_0 - \cdots - g_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

が成り立つから，$\widetilde{f}$ は f の拡張になっている．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．X の互いに交わらない 2 つの閉集合 A, B を任意にとる．関数 $f\colon A \cup B \to [0, 1]$ を $f(A) \subseteq \{0\}$，$f(B) \subseteq \{1\}$ と定めると，これは連続だから，(b) より f の X 上への拡張が存在する．したがって，A と B は関数で分離される．よって，X は正規である．

(a) かつ (b) $\Longrightarrow$ (c)　(a) かつ (b) が成り立つとする．連続関数 $f\colon A \to (-1, 1)$ が X 上の $(-1, 1)$ に値をとる連続関数に拡張できることを示す．(b) より，f を連続関数 $\widetilde{f}\colon X \to [-1, 1]$ に拡張できる．ここで，A と $\widetilde{f}^{-1}(\{\pm 1\})$ は互いに他と交わらない閉集合だから，X の正規性と Urysohn の補題（定理 5.38）より，$k(A) \subseteq \{1\}$ かつ $k(\widetilde{f}^{-1}(\{\pm 1\})) \subseteq \{0\}$ を満たす連続関数 $k\colon X \to [0, 1]$ が存在する．すると，積 $k\widetilde{f}$ は値域が $(-1, 1)$ に含まれ，かつ A において f と一致するから，これが条件を満たす f の拡張になっている．

同様にして，連続関数 $f\colon A \to [-1, 1)$ が X 上の $[-1, 1)$ に値をとる連続関数に拡張できることも示される．すべての区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ は $\{0\}$, $[-1, 1]$, $(-1, 1)$, $[-1, 1)$ のいずれかに同相だから，これで (c) が示された．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである． □

5.6　開被覆の細分に関する性質と分離性

本節では，「開被覆の細分に関する特定の性質を満たす位相空間において，ある分離性が自動的により強い分離性を導く」という形の定理を紹介する．これらの定理の特別な場合として，系 7.10「コンパクト擬分離空間は正則かつ正規である」，命題 7.53「Lindelöf 正則空間は正規である」，命題 8.5「パラコンパクト擬分離空間は正則かつ正規である」，補題 12.18「σ-局所有限な開基をもつ正則空間は正規である」がある．

定理 5.42　「任意の開被覆がある σ-閉包保存な開被覆によって細分される」という性質をもつ位相空間は，正則ならば正規である．

証明　X を上述の性質をもつ正則空間とし，E, F を X の互いに交わらない閉集合とする．閉包が F と交わらないような開集合全体を $\mathfrak{U}$，閉包が E と交わらないような開集合全体を $\mathfrak{V}$ と置く．すなわち，

$$\mathfrak{U} = \{U \subseteq X \mid U \text{ は開集合，} \overline{U} \cap F = \emptyset\},$$
$$\mathfrak{V} = \{V \subseteq X \mid V \text{ は開集合，} \overline{V} \cap E = \emptyset\}$$

である．

X の正則性より $\mathfrak{U}$ は E を被覆するから，$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus E\}$ は X の開被覆である．条件より，$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus E\}$ を細分する σ-閉包保存な X の開被覆がとれる．この開被覆の元のうち $X \setminus E$ に含まれないもの全体を集めれば，$\mathfrak{U}$ を細分する σ-閉包保存な E の開被覆 $\mathfrak{U}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{U}'_n$（各 $\mathfrak{U}'_n$ は閉包保存）が得られる．同様に，$\mathfrak{V}$ を細分する σ-閉包保存な F の開被覆 $\mathfrak{V}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{V}'_n$（各 $\mathfrak{V}'_n$ は閉包保存）が得られる．$\mathfrak{U}'_n$, $\mathfrak{V}'_n$ のすべての元の合併を，それぞれ U_n, V_n とする．

$\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ はそれぞれ E, F の開被覆だったから，

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n, \quad F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

である．また，$\mathfrak{U}$ の各元の閉包は F と交わらず，$\mathfrak{U}'_n$ は $\mathfrak{U}$ の細分だから，$\mathfrak{U}'_n$ の各元の閉包も F と交わらない．$\mathfrak{V}'_n$ についても同様のことがいえる．そして，各 $\mathfrak{U}'_n$, $\mathfrak{V}'_n$ は閉包保存だったから，

$$\overline{U_n} \cap F = \emptyset, \quad \overline{V_n} \cap E = \emptyset$$

が成り立つ．したがって，

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n \setminus (\overline{V_0} \cup \cdots \cup \overline{V_n})), \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus (\overline{U_0} \cup \cdots \cup \overline{U_n}))$$

と定めれば，U, V は E と F を分離する開集合である．よって，X は正規である．　□

定理 5.43　「任意の開被覆がある閉包保存な開被覆によって細分される」という性質をもつ位相空間は，擬分離ならば正則かつ正規である．

証明　X を上述の性質をもつ擬分離空間とする．定理 5.42 より，X の正則性を示せば十分である．点 $x \in X$ とそれを含まない閉集合 F を任意にとる．x と任意の点 $y \in F$ は $X \setminus F$ によって識別されるから，擬分離性より，x と y は開集合で分離されることに注意する．

閉包が x を含まないような開集合全体を $\mathfrak{U}$ と置く．すなわち，

$$\mathfrak{U} = \{U \subseteq X \mid U \text{ は開集合，} x \notin \overline{U}\}$$

である．前述の注意より $\mathfrak{U}$ は F を被覆するから，$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus F\}$ は X の開被覆である．条件より，$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus F\}$ を細分する閉包保存な X の開被覆がとれる．この開被覆の元のうち $X \setminus F$ に含まれないもの全体を集めれば，$\mathfrak{U}$ を細分する閉包保存な F の開被覆 $\mathfrak{V}$ が得られる．

$\mathfrak{U}'$ は F の開被覆だったから $F \subseteq \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} V$ である．また，閉包保存性と $\mathfrak{U}$ の定義より $\overline{\bigcup_{V \in \mathfrak{V}} V} = \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} \overline{V}$ は x を含まない．したがって，x と F は開集合で分離される．よって，X は正則である． □

5.7 商空間の分離性

本小節では，商空間が分離性を満たすための十分条件をいくつか挙げる．

命題 5.44　X を位相空間，R を X 上の同値関係とする．次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，R が開同値関係ならば，2 条件は同値となる．

(a) X/R は分離である．
(b) $\mathrm{gr}(R)$ は $X \times X$ の閉集合である．

証明　$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像とし，$\Delta(X/R) = \{(a,a) \mid a \in X/R\}$ と置く．X/R が分離であることは，$\Delta(X/R)$ が $(X/R) \times (X/R)$ の閉集合であることに同値である（命題 5.15）．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X/R が分離であるとすると，$\Delta(X/R)$ は $(X/R) \times (X/R)$ の閉集合だから（命題 5.15），$\mathrm{gr}(R) = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta(X/R))$ は $X \times X$ の閉集合である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　R が開同値関係であり，$\mathrm{gr}(R)$ が $X \times X$ の閉集合であるとする．このとき，命題 3.34 より，$(X/R) \times (X/R)$ を $(X \times X)/(R \times R)$ と同一視できる．そのため，$\Delta(X/R)$ を $(X \times X)/(R \times R)$ の部分集合と考えたものが閉集合であることを示せばよい．$\Delta(X/R) \subseteq (X \times X)/(R \times R)$ の等化写像による逆像は，$\mathrm{gr}(R)$ である．仮定よりこれは $X \times X$ の閉集合だから，商位相の定義より，$\Delta(X/R)$ は $(X \times X)/(R \times R)$ の閉集合である．これで示された． □

命題 5.45　X が正則分離空間，R が X 上の閉同値関係ならば，$\mathrm{gr}(R)$ は $X \times X$ の閉集合である．

証明　X を正則分離空間，R を X 上の閉同値関係とし，$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像とする．点 $(x,y) \in \overline{\mathrm{gr}(R)}$ を任意にとる．すると，x の任意の閉近傍 F と y の任意の近傍 V に対して，$F \times V$ は $\mathrm{gr}(R)$ と交わる．すなわち，$\pi^{-1}(\pi(F))$ は V と交わる．ここで，V は y の任意の近傍を動き，仮定より $\pi^{-1}(\pi(F))$ は閉集合だから，$y \in \overline{\pi^{-1}(\pi(F))} = \pi^{-1}(\pi(F))$ である．したがって，$\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ と F は交わる．ここで，F は x の任意の閉近傍を動き，仮定より $\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ は閉集合だから，$x \in \overline{\pi^{-1}(\pi(\{y\}))} = \pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ である．これは，$(x,y) \in \mathrm{gr}(R)$ を意味する．よって，$\mathrm{gr}(R)$ は $X \times X$ の閉集合である． □

系 5.46　正則分離空間 X と X 上の開かつ閉な同値関係 R に対して，X/R は分離である．

証明　命題 5.44 と命題 5.45 から従う． □

命題 5.47　X を正則分離空間，F を X の空でない閉集合とし，R を X 上の同値関係であって F を 1 点に潰すものとする（すなわち，R に関する同値類は，F と各 $x \in X \setminus F$ に対する $\{x\}$ である）．このとき，商空間 X/R は分離である．

証明　$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像とする．まず，異なる 2 点 $x, y \in X \setminus F$ を任意にとる．X は分離であり，F は閉集合だから，x の開近傍 U と y の開近傍 V を交わらないように $X \setminus F$ の中にとれる．このとき，$\pi(U), \pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x), \pi(y)$ の開近傍であり，互いに交わらない．次に，$x \in X \setminus F$ を任意にとる．X

は正則であり，F は閉集合だから，x の開近傍 U と F の開近傍 V を交わらないようにとれる．このとき，$\pi(U)$, $\pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x)$, F の開近傍であり，互いに交わらない．よって，X/R は分離である． □

5.8 Kolmogorov 商

定義 5.48（Kolmogorov 商） X を位相空間とする．T_0 空間 X^{k} と連続写像 $k\colon X \to X^{\mathrm{k}}$ との組 (X^{k}, k) であって次の普遍性を満たすものを，X の **Kolmogorov 商**という．

> 任意の分離空間 Z と連続写像 $f\colon X \to Z$ に対して，連続写像 $f^{\mathrm{k}}\colon X^{\mathrm{k}} \to Z$ であって $f = f^{\mathrm{k}} \circ k$ を満たすものが一意に存在する．

定理 5.49（Kolmogorov 商の存在と一意性） 任意の位相空間 X に対して，X の Kolmogorov 商 (X^{k}, k) が存在する．さらに，(X^{k}, k), $(X^{\mathrm{k}\prime}, k')$ がともに X の Kolmogorov 商であれば，同相写像 $\phi\colon X^{\mathrm{k}} \to X^{\mathrm{k}\prime}$ であって，$k' = \phi \circ k$ を満たすものが存在する．

定理 5.50 X, Y を位相空間，$\alpha\colon X \to Y$ を連続写像とする．(Y, α) が X の Kolmogorov 商であるための必要十分条件は，次の 3 条件を満たすことである．

(KQ1) Y は分離である．
(KQ2) α は全射である．
(KQ3) X の位相は，α が誘導する始位相に一致する．

以下，Kolmogorov 商の存在と一意性（定理 5.49）と定理 5.50 をまとめて証明する．

証明 まず Kolmogorov 商の一意性を示し，次に条件 (KQ1)–(KQ3) を満たすものが Kolmogorov 商であることを示し，最後に条件 (KQ1)–(KQ3) を満たすものを構成する．

■Kolmogorov 商が同型を除いてたかだか一意であること (X^{k}, k) と $(X^{\mathrm{k}\prime}, k')$ がともに X の Kolmogorov 商であるとする．Kolmogorov 商の普遍性より，連続写像 $\phi\colon X^{\mathrm{k}} \to X^{\mathrm{k}\prime}$ であって $k' = \phi \circ k$ を満たすもの，および連続写像 $\psi\colon X^{\mathrm{k}\prime} \to X^{\mathrm{k}}$ であって $k = \psi \circ k'$ を満たすものがとれる．すると，$\psi \circ \phi\colon X^{\mathrm{k}} \to X^{\mathrm{k}}$ は $k = (\psi \circ \phi) \circ k$ を満たす連続写像だが，一方で $\mathrm{id}_{X^{\mathrm{k}}}$ も同様の性質を満たす連続写像だから，普遍性が誘導する写像の一意性より，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{X^{\mathrm{k}}}$ が成り立つ．同様に，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{X^{\mathrm{k}\prime}}$ が成り立つ．よって，$\phi\colon X^{\mathrm{k}} \to X^{\mathrm{k}\prime}$ は $k' = \phi \circ k$ を満たす同相写像である．

■条件 (KQ1)–(KQ3) を満たす (Y, α) が X の Kolmogorov 商であること (Y, α) が条件 (KQ1)–(KQ3) を満たすとして，(Y, α) が Kolmogorov 商の普遍性を満たすことを示す．T_0 空間 Z と連続写像 $f\colon X \to Z$ を任意にとる．

まず，写像 $g\colon Y \to Z$ であって $f = g \circ \alpha$ を満たすものが一意に存在することを示す．α は全射だから，そのためには，$x, y \in X$ に対して，$\alpha(x) = \alpha(y)$ ならば $f(x) = f(y)$ であることをいえばよい．対偶を示す．$f(x) \neq f(y)$ とすると，Z が T_0 であることより，$f(x)$ と $f(y)$ の一方のみを含む Z の開集合 W がとれる．一般性を失わず，$f(x) \in W$ かつ $f(y) \notin W$ とする．すると，$f^{-1}(W)$ は x を含み y を含まない X の開集合である．X の位相は α が誘導する始位相に等しいから，Y の開集合 V であって，$\alpha^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ を満たすものが存在する．この V は $\alpha(x)$ を含み $\alpha(y)$ を含まないから，$\alpha(x) \neq \alpha(y)$ である．これで示された．

次に，この写像 $g\colon Y \to Z$ が連続であることを示す．Z の開集合 W を任意にとる $g \circ \alpha = f$ は連続だから，$\alpha^{-1}(g^{-1}(W))$ は X の開集合である．X の位相は α が誘導する始位相に等しいから，Y の開集合 V であっ

て，$\alpha^{-1}(V)=\alpha^{-1}(g^{-1}(W))$ を満たすものが存在する．α が全射であることより，このとき $V=g^{-1}(W)$ が成り立つから，$g^{-1}(W)$ は Y の開集合である．よって，g は連続である．これで，(Y,α) が Kolmogorov 商の普遍性を満たすことが示された．

■条件 (KQ1)–(KQ3) を満たす (X^{k},k) の構成　X 上の同値関係 $\sim$ を，$x,\ y\in X$ に対して

$$x\sim y \iff x \text{ と } y \text{ は識別されない}$$

と定め，この同値関係による X の商空間を X^{k} と置き，$k\colon X\to X^{\mathrm{k}}$ を等化写像とする．以下，この (X^{k},k) が条件 (KQ1)–(KQ3) を満たすことを示す．

(KQ2)　k が全射であることは明らかである．

(KQ3)　X^{k} の開集合系は $\{V\subseteq X^{\mathrm{k}}\mid k^{-1}(V)$ は X の開集合$\}$ だから，$U\subseteq X$ が k の誘導する始位相に関する開集合であるための条件は，U が開集合であり，かつある $V\subseteq X^{\mathrm{k}}$ が存在して $U=k^{-1}(V)$ となることである．ところが，同値関係 $\sim$ の定義より，X の任意の開集合に対して，$U=k^{-1}(k(U))$ が成り立つ．よって，X の位相は，k が誘導する始位相に等しい．

(KQ1)　X^{k} が T_0 であることを示す．異なる 2 点 $u,\ v\in X^{\mathrm{k}}$ を任意にとる．$k(x)=u$，$k(y)=v$ なる x，$y\in X$ をとると，$x\not\sim y$ だから，x と y の一方のみを含む X の開集合 U が存在する．同値関係 $\sim$ の定義より $U=k^{-1}(k(U))$ だから，$k(U)$ は u と v の一方のみを含む X^{k} の開集合である．よって，X は T_0 である．□

Kolmogorov 商は，自然な方法で位相空間の圏から T_0 空間の圏への関手をなし，Kolmogorov 商の普遍性より，この関手は包含関手の左随伴となる．詳細は省略する．

次の命題は，Kolmogorov 商の存在と一意性（定理 5.49）と定理 5.50 の証明中の構成から明らかだが，ここで改めて証明しておく．

命題 5.51　X を位相空間とし，(X^{k},k) を X の Kolmogorov 商とする．2 点 $x,\ y\in X$ が識別されるための必要十分条件は，$k(x)\neq k(y)$ である．

証明　X の位相は k が誘導する始位相に等しいから（定理 5.50），命題 5.2 より，2 点 $x,\ y\in X$ が識別されるための必要十分条件は，$k(x)$ と $k(y)$ が識別されることである．ところが，X^{k} は T_0 だから，これは $k(x)\neq k(y)$ と同値である．□

命題 5.52　X を位相空間とし，(X^{k},k) を X の Kolmogorov 商とする．k が同相写像であるための必要十分条件は，X が T_0 であることである．

証明　X^{k} は T_0 だから，s が同相写像ならば，X も T_0 である．逆に，X が T_0 ならば，(X,id_X) は明らかに X の Kolmogorov 商だから，Kolmogorov 商の一意性（定理 16.50）より，k は id_X と同じく同相写像である．□

命題 5.53　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．各 $i\in I$ に対して，$(Y_i^{\mathrm{k}},k_{Y_i})$ を Y_i の Kolmogorov 商とする．写像 $(k_{Y_i}\circ\phi_i)_{i\in I}\colon X\to\prod_{i\in I}Y_i^{\mathrm{k}}$ による X の像を X^{k} とし，$(k_{Y_i}\circ\phi_i)_{i\in I}$ を X から X^{k} への写像とみなしたものを k_X と書くと，(X^{k},k_X) は X の Kolmogorov 商である．

証明　定理 5.50 より，(X^{k},k_X) が条件 (KQ1)–(KQ3) を満たすことを確かめればよい．X^{k} は T_0 空間族の積の部分空間だから，T_0 である（命題 5.19，命題 5.18）．また，定義から明らかに，$k_X\colon X\to X^{\mathrm{k}}$ は全射である．最後に，X の位相構造が k_X の誘導する始位相に等しいことを示す．X の位相は $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$

が誘導する始位相に等しく，各 $i \in I$ に対して Y_i の位相は s_{Y_i} が誘導する始位相に等しいから（定理 5.50），始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，X の位相は $\{k_{Y_i} \circ \phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相に等しい．命題 3.20 (1) と命題 3.19 (1) より，これはさらに k_X が誘導する始位相に等しい．これで，条件 (KQ1)–(KQ3) が確かめられた． $\square$

系 5.54 X を位相空間，A を X の部分空間とし，(X^{k}, k) を X の Kolmogorov 商とする．$k|_A$ を A から $k(A)$ への写像とみなしたものを k_A と書くと，$(k(A), k_A)$ は A の Kolmogorov 商である． $\square$

系 5.55 $\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，各 $i \in I$ に対して (X_i^{k}, k_i) を X の Kolmogorov 商とする．このとき，$(\prod_{i \in I} X_i^{\mathrm{k}}, \prod_{i \in I} k_i)$ は $\prod_{i \in I} X_i$ の Kolmogorov 商である． $\square$

系 5.56 X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．(X^{k}, k_X) を X の Kolmogorov 商とし，各 $i \in I$ に対して $(Y_i^{\mathrm{k}}, k_{Y_i})$ を Y の Kolmogorov 商とする．また，各 $i \in I$ に対して，連続写像 $k_{Y_i} \circ \phi_i \colon X \to Y_i^{\mathrm{k}}$ から Kolmogorov 商の普遍性によって誘導される連続写像を $\phi_i^{\mathrm{k}} \colon X^{\mathrm{k}} \to Y_i^{\mathrm{k}}$ と書く．このとき，X^{k} の位相は，$\{\phi_i^{\mathrm{k}}\}_{i \in I}$ が誘導する始位相に等しい．

証明 命題 5.53 より，X^{k} は写像 $(k_{Y_i} \circ \phi_i)_{i \in I} \colon X \to \prod_{i \in I} Y_i^{\mathrm{k}}$ による X の像であり，k_X は $(k_{Y_i} \circ \phi_i)_{i \in I}$ を X から X^{k} への写像とみなしたものであるとしてよい．各 $i \in I$ に対して，写像 $\phi_i^{\mathrm{k}} \colon X^{\mathrm{k}} \to Y_i^{\mathrm{k}}$ は $k_{Y_i} \circ \phi_i = \phi_i^{\mathrm{k}} \circ k_X$ を満たす唯一の連続写像だが，包含写像 $X^{\mathrm{k}} \to \prod_{i \in I} Y_i^{\mathrm{k}}$ と i-成分への射影との合成はこの性質をみたすから，ϕ_i^{k} はこの写像と一致する．これと始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，X^{k} の位相は $\{\phi_i^{\mathrm{k}}\}_{i \in I}$ が誘導する始位相に等しい． $\square$

第 6 章

極限

6.1 真フィルタの極限

定義 6.1（真フィルタの極限） X を位相空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとする．

(1) $\mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ の近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x)$ よりも細かいとき，x は $\mathfrak{F}$ の**極限点**である，あるいは $\mathfrak{F}$ は x に**収束する**という．$\mathfrak{F}$ の極限点全体の集合を，$\lim \mathfrak{F}$ と書く．

(2) 任意の元 $F \in \mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ を接触点とする（すなわち，$x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F}$ である）とき，x は $\mathfrak{F}$ の**接触点**であるという．$\mathfrak{F}$ の接触点全体の集合を，$\operatorname{adh} \mathfrak{F}$ と書く．

命題 6.2 X を位相空間とし，$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ を X 上の真フィルタとする．$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ であるとき，次が成り立つ．

(1) $\lim \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{G}$ である．すなわち，$\mathfrak{F}$ の極限点は $\mathfrak{G}$ の極限点でもある．

(2) $\operatorname{adh} \mathfrak{G} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．すなわち，$\mathfrak{G}$ の接触点は $\mathfrak{F}$ の接触点でもある．

証明 極限点・接触点の定義から明らかである． □

命題 6.3 位相空間上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ について，$\lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．すなわち，極限点は常に接触点である．

証明 $x \in \lim \mathfrak{F}$ ならば $\mathfrak{N}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ だから，任意の $U \in \mathfrak{N}(x)$ と任意の $F \in \mathfrak{F}$ は交わりをもつ．すなわち，任意の $F \in \mathfrak{F}$ に対して $x \in \overline{F}$ だから，$x \in \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．よって，$\lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である． □

命題 6.4 位相空間 X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ を接触点にもつための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ よりも細かい真フィルタであって x に収束するものが存在することである．

証明 次の同値関係から従う：

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{adh} \mathfrak{F} &\iff \mathfrak{N}(x) \text{ の任意の元が } \mathfrak{F} \text{ の任意の元と交わる} \\ &\iff \mathfrak{N}(x) \cup \mathfrak{F} \text{ が有限交叉性をもつ} \\ &\iff \mathfrak{N}(x) \cup \mathfrak{F} \text{ を含む真フィルタが存在する} \\ &\iff x \text{ に収束する } \mathfrak{F} \text{ より細かい真フィルタが存在する．} \end{aligned}$$ □

系 6.5 位相空間上の極大フィルタ $\mathfrak{M}$ について，$\lim \mathfrak{M} = \operatorname{adh} \mathfrak{M}$ である． □

命題 6.6 X を位相空間，$A \subseteq X$ とする．点 $x \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $x \in \overline{A}$ である．

(b) X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ であって，A を元にもち，x に収束するものが存在する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$x \in \overline{A}$ ならば，x の任意の近傍は A と交わる．すなわち，$\mathfrak{N}(x) \cup \{A\}$ は有限交叉性をもつ．そこで，$\mathfrak{N}(x) \cup \{A\}$ が生成する真フィルタを考えれば，これは A を元にもち，x に収束する．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$A \in \mathfrak{F}$ かつ $x \in \lim \mathfrak{F}$ ならば，$x \in \lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F} \subseteq \overline{A}$ である（命題 6.3）．　□

命題 6.7　位相空間 X, Y の間の写像 $f \colon X \to Y$ と点 $x \in X$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) f は x において連続である．
(b) $f(\mathfrak{N}(x))$ は $f(x)$ に収束する．
(c) X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ について，$\mathfrak{F}$ が x に収束するならば $f(\mathfrak{F})$ は $f(x)$ に収束する．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　条件 (b) は，任意の $U \in \mathfrak{N}(f(x))$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathfrak{N}(x)$ であることを意味するが，これは f の x における連続性の定義そのものである．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　(b) は $f(\mathfrak{N}(x)) \supseteq \mathfrak{N}(f(x))$ を意味し，(c) は「$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}(x)$ ならば $f(\mathfrak{F}) \supseteq \mathfrak{N}(f(x))$」を意味する．(b) が成り立てば，$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}(x)$ のとき $f(\mathfrak{F}) \supseteq f(\mathfrak{N}(x)) \supseteq \mathfrak{N}(f(x))$ となり，したがって (c) が成り立つ．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　(c) で $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}(x)$ と置けば (b) が従う．　□

命題 6.8　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は x に収束する．
(b) すべての $i \in I$ に対して，$\phi_i(\mathfrak{F})$ は $\phi_i(x)$ に収束する．

証明　次の同値関係から従う：

$$
\begin{aligned}
\text{(a)} &\Longleftrightarrow \text{任意の近傍 } U \in \mathfrak{N}_X(x) \text{ に対して } U \in \mathfrak{F} \\
&\Longleftrightarrow \text{任意の } i \in I \text{ と近傍 } U' \in \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x)) \text{ に対して，} \phi_i^{-1}(U') \in \mathfrak{F} \qquad (*) \\
&\Longleftrightarrow \text{任意の } i \in I \text{ と近傍 } U' \in \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x)) \text{ に対して，} U' \in \phi_i(\mathfrak{F}) \\
&\Longleftrightarrow \text{(b).}
\end{aligned}
$$

ここで，同値関係 ($*$) は，$\phi_i^{-1}(U')$（$i \in I$，$U' \in \mathfrak{N}_{Y_i}(\phi_i(x))$）と表される集合全体が $\mathfrak{N}_X(x)$ の準フィルタ基であることによる（命題 3.4 (1)）．　□

系 6.9　X を位相空間，A を X の部分空間とし，$\iota \colon A \to X$ を包含写像とする．

(1) A 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x \in A$ に対して，$x \in \lim \mathfrak{F}$ であるための必要十分条件は，$x \in \lim \iota(\mathfrak{F})$ である．さらに，A が X の閉部分空間ならば，$\lim \mathfrak{F} = \lim \iota(\mathfrak{F})$ が成り立つ．
(2) X 上の真フィルタ $\mathfrak{G}$ が A 上に相対真フィルタ $\mathfrak{G}|_A$ を誘導するとする．このとき，点 $x \in A$ に対して，$x \in \lim \mathfrak{G}$ ならば $x \in \lim \mathfrak{G}|_A$ である．さらに，A が X の閉部分空間ならば，$\lim \mathfrak{G}|_A \supseteq \lim \mathfrak{G}$ が成り立つ．

証明　(1)　前半は命題 6.8 から従う．前半の結果は $\lim \mathfrak{F} = \lim \iota(\mathfrak{F}) \cap A$ とも書けるので，A が閉部分空間ならば $\lim \iota(\mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{adh} \iota(\mathfrak{F}) \subseteq \overline{A} = A$ であることに注意すれば，後半も従う．

(2)　命題 1.25 より $\iota(\mathfrak{G}|_A) = \iota(\iota^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ であり，したがって命題 6.2 (1) より $\lim \iota(\mathfrak{G}|_A) \supseteq \lim \mathfrak{G}$ であることに注意すれば，(1) から従う．　□

系 6.10　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ に

対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は x に収束する．
(b) すべての $i \in I$ に対して，$\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F})$ は x_i に収束する．

証明　命題 6.8 から従う． □

6.2　写像の極限

定義 6.11（写像の極限）　X を集合，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとする．像フィルタ $f(\mathfrak{F})$ の極限点・接触点を，**f の $\mathfrak{F}$ による極限値・接触値**といい，それら全体の集合をそれぞれ

$$\lim_{\mathfrak{F}} f \quad \text{あるいは} \quad \lim_{y \to \mathfrak{F}} f(y),$$
$$\operatorname*{adh}_{\mathfrak{F}} f \quad \text{あるいは} \quad \operatorname*{adh}_{y \to \mathfrak{F}} f(y)$$

と書く．X が位相空間であるとき，点 $x \in X$ の近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x)$ による f の極限値・接触値を，**f の x における極限値・接触値**といい，それら全体の集合をそれぞれ

$$\lim_{x} f \quad \text{あるいは} \quad \lim_{y \to x} f(y),$$
$$\operatorname*{adh}_{x} f \quad \text{あるいは} \quad \operatorname*{adh}_{y \to x} f(y)$$

と書く．

命題 1.29 から，$\mathfrak{N}_X(x)|_A$ が A 上の相対真フィルタであるための必要十分条件は，$x \in \overline{A}$ である．また，相対位相の定義から容易にわかるように，$x \in A$ ならば $\mathfrak{N}_X(x)|_A = \mathfrak{N}_A(x)$ である．そのため，以下では $\mathfrak{N}_X(x)|_A$ を（$x \notin A$ であっても）単に $\mathfrak{N}_A(x)$ と書く．

X を集合，A を X の部分集合，Y を位相空間とし，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}$ が A 上に相対真フィルタ $\mathfrak{F}|_A$ を誘導するとき，写像 $g\colon A \to Y$ の $\mathfrak{F}|_A$ による極限値・接触値を，単に **f の $\mathfrak{F}$ による極限値・接触値**といい，それら全体の集合をそれぞれ

$$\lim_{\mathfrak{F}} g \quad \text{あるいは} \quad \lim_{y \to \mathfrak{F}} g(y),$$
$$\operatorname*{adh}_{\mathfrak{F}} g \quad \text{あるいは} \quad \operatorname*{adh}_{y \to \mathfrak{F}} g(y)$$

と書く．X が位相空間で $x \in \overline{A}$ であるとき，写像 $g\colon A \to Y$ の $\mathfrak{N}_A(x)$ による極限値・接触値を，単に **f の x における極限値・接触値**といい，それら全体の集合をそれぞれ

$$\lim_{x} g \quad \text{あるいは} \quad \lim_{y \to x} g(y),$$
$$\operatorname*{adh}_{x} g \quad \text{あるいは} \quad \operatorname*{adh}_{y \to x} g(y)$$

と書く．

X を集合，A を X の部分集合，Y を位相空間とし，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}$ が A 上に相対真フィルタ $\mathfrak{F}|_A$ を誘導するとき，写像 $f\colon X \to Y$ に対して，制限された写像 $f|_A\colon A \to Y$ の $\mathfrak{F}|_A$ による極限値・接触値を，**f の $\mathfrak{F}$ による A 内での極限値・接触値**という．X が位相空間で $x \in \overline{A}$ であるとき，制限された写像 $f|_A\colon A \to Y$ の $\mathfrak{N}_A(x)$ による極限値・接触値を，**f の x における A 内での極限値・接触値**という．

命題 6.12　X を集合，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $y \in Y$ について，次が成り立つ．

(1) $y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ であるための必要十分条件は，任意の $V \in \mathfrak{N}(y)$ に対して $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$ となることである．
(2) $y \in \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f$ であるための必要十分条件は，任意の $V \in \mathfrak{N}(y)$ に対して $f^{-1}(V)$ が $\mathfrak{F}$ の任意の元と交わることである．

証明　それぞれ，次の同値関係から従う：

$$\begin{aligned} y \in \lim_{\mathfrak{F}} f &\iff \text{任意の } V \in \mathfrak{N}(y) \text{ に対して } V \in f(\mathfrak{F}) \text{ である} \\ &\iff \text{任意の } V \in \mathfrak{N}(y) \text{ に対して } f^{-1}(V) \in \mathfrak{F} \text{ である，} \\ y \in \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f &\iff \text{任意の } V \in \mathfrak{N}(y) \text{ と } F \in \mathfrak{F} \text{ に対して } V \cap f(F) \neq \emptyset \text{ である} \\ &\iff \text{任意の } V \in \mathfrak{N}(y) \text{ と } F \in \mathfrak{F} \text{ に対して } f^{-1}(V) \cap F \neq \emptyset \text{ である．} \end{aligned}$$

□

命題 6.13　X を集合，Y を位相空間とする．X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$\lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f \subseteq \overline{f(X)}$ が成り立つ．

証明　命題 6.3 より $\lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f$ であり，$f(X) \in f(\mathfrak{F})$ より $\operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f \subseteq \overline{f(X)}$ である．□

命題 6.14　X を集合，$A \subseteq X$，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とする．また，$\mathfrak{F}$ は X 上の真フィルタであって，A 上に相対真フィルタを誘導するとする．

(1) $\lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \lim_{\mathfrak{F}} f|_A$ である．すなわち，X 内での極限値は A 内での極限値でもある．
(2) $\operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f|_A \subseteq \operatorname{adh}_{\mathfrak{F}} f$ である．すなわち，A 内での接触値は X 内での接触値でもある．

(1), (2) ともに，$A \in \mathfrak{F}$ ならば等号が成り立つ．

証明　$\iota\colon A \to X$ を包含写像とする．$f|_A(\mathfrak{F}|_A) = f(\iota(\iota^{-1}(\mathfrak{F}))) \supseteq f(\mathfrak{F})$ だから（命題 1.25 (2)），主張は命題 6.2 から従う．$A \in \mathfrak{F}$ ならば $\iota(\iota^{-1}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{F}$ であり（命題 1.25 (2)），等号が成り立つ．□

X を位相空間とする．点 $x \in X$ が X **孤立点**であるとは，1 点集合 $\{x\}$ が X の開集合であることをいう．

命題 6.15　位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ と点 $x \in X$ について，次の 2 条件 (a), (b) は同値であり，これらの同値な条件から (c) が従う．さらに，x が X の孤立点でなければ，次の 3 条件 (a)–(c) は同値である．

(a) f は x において連続である．
(b) $f(x) \in \lim_x f$ である．
(c) $f(x) \in \lim_x f|_{X \setminus \{x\}}$ である．

証明　(a) $\iff$ (b)　命題 6.7 のいいかえにすぎない．

(b) $\implies$ (c)　命題 6.14 から従う．

x が孤立点でないとして (c) $\implies$ (b) を示す．$f(\mathfrak{N}_{X \setminus \{x\}}(x))$ の各元は，$f(\mathfrak{N}_X(x))$ のある元あるいはそこから 1 点 $f(x)$ を取り除いたものに等しい．一方で，$\mathfrak{N}_Y(f(x))$ の各元は必ず $f(x)$ を含む．したがって，$\mathfrak{N}_Y(f(x)) \subseteq f(\mathfrak{N}_{X \setminus \{x\}}(x))$ ならば $\mathfrak{N}_Y(f(x)) \subseteq f(\mathfrak{N}_X(x))$ である．すなわち，$f(x) \in \lim_x f|_{X \setminus \{x\}}$ ならば $f(x) \in \lim_x f$ である．□

命題 6.16　X を集合，Y, Z を位相空間，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ とし，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとする．$y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ かつ g が y で連続ならば，$g(y) \in \lim_{\mathfrak{F}}(g \circ f)$ である．

証明　$y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ より $\mathfrak{N}(y) \subseteq f(\mathfrak{F})$ であり，したがって $g(\mathfrak{N}(y)) \subseteq g(f(\mathfrak{F}))$ である．一方で，g は y において連続だから $g(y) \in \lim_y g$ であり（命題 6.15），したがって $\mathfrak{N}(g(y)) \subseteq g(\mathfrak{N}(y))$ である．よって，

$\mathfrak{N}(g(y)) \subseteq g(f(\mathfrak{F}))$ だから，$g(y) \in \lim_{\mathfrak{F}}(g \circ f)$ である． □

6.3　フィルタに伴う位相空間

定義 6.17（フィルタに伴う位相空間）　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．$\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$（$\infty$ は X に属さない 1 点）とし，各点 $x \in \widetilde{X}$ に対して $\mathfrak{N}(x)$ を

$$\mathfrak{N}(x) = \{U \subseteq \widetilde{X} \mid x \in U\} \qquad (x \in X),$$
$$\mathfrak{N}(\infty) = \{F \cup \{\infty\} \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

と定める．すると，この $\mathfrak{N}$ は命題 2.19 の条件 (N1)–(N3) を満たすから，これによって $\widetilde{X}$ 上に位相が定まる．この位相空間 $\widetilde{X}$ を，**フィルタ $\mathfrak{F}$ に伴う位相空間**という．

$\mathfrak{F}$ を集合 X 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}$ に伴う位相空間 $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ は，X 上に離散位相を誘導する．点 ∞ の近傍フィルタが誘導する X 上の相対フィルタを考えると，これは $\mathfrak{F}$ に等しい．

命題 6.18　X を集合，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタ，$\widetilde{X}$ を $\mathfrak{F}$ に伴う位相空間とする．X が $\widetilde{X}$ において稠密であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ が真フィルタであることである．

証明　X が $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ において稠密であることは，∞ の任意の近傍が X と交わることと同値である．∞ の近傍フィルタは $\{F \cup \{\infty\} \mid F \in \mathfrak{F}\}$ だから，これは結局 $\mathfrak{F}$ が $\emptyset$ を含まないこと，すなわち $\mathfrak{F}$ が真フィルタであることと同値である． □

命題 6.19　X を集合，Y を位相空間，$f \colon X \to Y$ を写像とする．X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $y \in Y$ について，$y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ に伴う位相空間 $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ から Y への写像

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X) \\ y & (x = \infty) \end{cases}$$

が連続であることである．

証明　X は $\widetilde{X}$ の部分空間として離散だから，$\widetilde{f}$ は X の各点においては常に連続である．一方で，$\widetilde{f}$ が ∞ で連続であるとは，任意の $V \in \mathfrak{N}(y)$ に対して $\widetilde{f}^{-1}(V)$ が ∞ の近傍になること，すなわち $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$ となることである．命題 6.12 より，これは $y \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ と同値である． □

6.4　極限と分離性

定理 6.20（分離空間における極限点の一意性）　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X 上の任意の真フィルタについて，その極限点はたかだか 1 つである．
(b) X は分離である．

証明　$x, y \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
& x \text{ と } y \text{ をともに極限点とする真フィルタは存在しない} \\
\iff & \mathfrak{N}(x) \text{ と } \mathfrak{N}(y) \text{ をともに含む真フィルタは存在しない} \\
\iff & \mathfrak{N}(x) \cup \mathfrak{N}(y) \text{ は有限交叉性をもたない} \\
\iff & U \in \mathfrak{N}(x) \text{ と } V \in \mathfrak{N}(y) \text{ であって互いに交わらないものが存在する} \\
\iff & x \text{ と } y \text{ は開集合で分離される}
\end{aligned}$$

であることから従う．□

このことから，分離空間上の真フィルタの極限点集合や，分離空間への写像の極限値集合は，1 点集合または空集合となる．そのため以下では，分離空間における極限について考える場合，$\lim \mathfrak{F} = \{x\}$ や $\lim_{\mathfrak{F}} f = \{x\}$ の代わりに $\lim \mathfrak{F} = x$ や $\lim_{\mathfrak{F}} f = x$ とも書く．

命題 6.21　X を分離空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタ，$x \in X$ とする．$\mathfrak{F}$ が x に収束するならば，$\mathfrak{F}$ より細かい任意の真フィルタ $\mathfrak{G}$ について，$\lim \mathfrak{G} = x$ である．

証明　$\mathfrak{F}$ が x に収束し，$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ とすると，$x \in \lim \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{G}$ となる（命題 6.2）．ところが，X の分離性より $\mathfrak{G}$ の極限点はたかだか一意だから（定理 6.20），$\lim \mathfrak{G} = x$ を得る．□

系 6.22　分離空間 X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が点 $x \in X$ に収束するならば，x は $\mathfrak{F}$ の唯一の接触点である．

証明　$\mathfrak{F}$ の接触点全体の集合は，$\mathfrak{F}$ よりも細かいある真フィルタの極限点になっているような点全体の集合と一致していた（命題 6.4）．いま，$\mathfrak{F}$ が x に収束するとすると，$\mathfrak{F}$ よりも細かい任意の真フィルタ $\mathfrak{G}$ について $\lim \mathfrak{G} = x$ だから（命題 6.21），x が $\mathfrak{F}$ の唯一の接触点となる．□

命題 6.23　X を集合，$A \subseteq X$，Y を分離空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$\mathfrak{F}$ は X 上の真フィルタであって，A 上の相対真フィルタを誘導するとする．$x \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ ならば，$\lim_{\mathfrak{F}} f|_A = x$ である．

証明　$x \in \lim_{\mathfrak{F}} f$ とすると，$x \in \lim_{\mathfrak{F}} f \subseteq \lim_{\mathfrak{F}} f|_A$ となる（命題 6.14 (1)）．ところが，Y の分離性より極限値 $\lim_{\mathfrak{F}} f|_A$ はたかだか一意だから（定理 6.20），$\lim_{\mathfrak{F}} f|_A = x$ を得る．□

T_1 空間においては，極限は一意性は必ずしも成り立たないが，次のことがいえる．

命題 6.24　X を T_1 空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタ，$x \in X$ とする．任意の $F \in \mathfrak{F}$ が x を含むならば，$\mathfrak{F}$ の極限点としてありうるのは x のみである．

証明　x とは異なる点 $y \in X$ をとると，T_1 性より，x を含まない y の近傍 U がとれる．$U \in \mathfrak{N}(y)$ だが $U \notin \mathfrak{F}$ だから，$\mathfrak{F}$ は y には収束しない．よって，$\mathfrak{F}$ の極限点としてありうるのは x のみである．□

系 6.25　X を位相空間，Y を T_1 空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f の $x \in X$ における極限点としてありうるのは，$f(x)$ のみである．

証明　$f(\mathfrak{N}(x))$ のすべての元は $f(x)$ を含むから，主張は命題 6.24 から従う．□

系 6.26　X を位相空間，Y を T_1 空間，$f\colon X \to Y$，$x \in X$ とする．次の 4 条件は同値である．

(a) f は x において連続である．
(b) $f(x) \in \lim_x f$ である．
(c) $\lim_x f = \{f(x)\}$ である．

(d) f の x における極限値が存在する（すなわち，$\lim_x f \neq \emptyset$ である）．

証明　(a) $\iff$ (b)　命題 6.15 ですでに示した．

(b) $\iff$ (c) $\iff$ (d)　Y の T_1 性より，$\lim_x f$ は空集合か $\{f(x)\}$ かのどちらかである（系 6.25）．ここから同値性が従う．　□

6.5　拡張定理と二重極限定理

定理 6.27（拡張定理）　X を位相空間，A を X の稠密部分集合，Y を正則分離空間とする．このとき，写像 $f\colon A \to Y$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) f の連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が存在する．
(b) 任意の点 $x \in X$ に対して，f の x における極限値が存在する（$\lim_x f \neq \emptyset$ である）．

この条件が満たされるとき，f の連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ は一意であり，任意の $x \in X$ に対して

$$\widetilde{f}(x) = \lim_x f$$

が成り立つ．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\widetilde{f}\colon X \to Y$ が f の連続な拡張であるとする．点 $x \in X$ を任意にとる．$\widetilde{f}$ の連続性と命題 6.15 より $\widetilde{f}(x) \in \lim_x \widetilde{f}$ であり，命題 6.14 (1) より $\lim_x f = \lim_x \widetilde{f}|_A \supseteq \lim_x \widetilde{f}$ だから，極限値 $\lim_x f$ は存在する．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　任意の $x \in X$ に対して極限値 $\lim_x f$ が存在するとする．写像 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ を，$x \in X$ に対して

$$\widetilde{f}(x) = \lim_x f$$

とすることで定める．系 6.26 より $x \in A$ に対しては $\lim_x f = f(x)$ だから，$\widetilde{f}$ は f の拡張である．

このように定めた写像 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が連続であることを示す．正則空間 Y の各点においては「開近傍の閉包」全体が近傍基をなすから（命題 5.24），任意の点 $x \in X$ と開近傍 $V \in \mathfrak{N}_Y(\widetilde{f}(x))$ に対して，$\widetilde{f}^{-1}(\overline{V}) \in \mathfrak{N}_X(x)$ であることを示せば十分である．$\widetilde{f}$ の定義より $V \in \mathfrak{N}_Y(\widetilde{f}(x)) \subseteq f(\mathfrak{N}_A(x))$ だから $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_A(x)$ であり，$U \cap A \subseteq f^{-1}(V)$ を満たす開近傍 $U \in \mathfrak{N}_X(x)$ が存在する．このとき $U \subseteq \widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ であることを示そう．点 $x' \in U$ を任意にとる．$U \cap A \in \mathfrak{N}_A(x')$ だから $f(U \cap A) \in f(\mathfrak{N}_A(x')) = \lim_{x'} f$，したがって $\lim_{x'} f \subseteq \overline{f(U \cap A)}$ である．さらに，$U \cap A \subseteq f^{-1}(V)$ より $f(U \cap A) \subseteq V$ だから，

$$\widetilde{f}(x') \in \lim_{x'} f \subseteq \overline{f(U \cap A)} \subseteq \overline{V},$$

したがって $x' \in \widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ である．よって，$U \subseteq \widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ が成り立つので，$\widetilde{f}^{-1}(\overline{V})$ は x の近傍である．

後半の主張は，等式延長の原理（系 5.16）と上記の $\widetilde{f}$ の構成から従う．　□

定理 6.28（二重極限定理）　X_0, X_1 を集合，Y を正則分離空間，$f\colon X_0 \times X_1 \to Y$ とする．また，$\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ をそれぞれ X_0, X_1 上の真フィルタとする．極限値

- $\lim_{(x_0,x_1)\to\mathfrak{F}_0\times\mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1)$ および
- 任意の $x_0 \in X_0$ に対して $\lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1)$

が存在するとき，極限値 $\lim_{x_0\to\mathfrak{F}_0} \lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1)$ が存在して，

$$\lim_{(x_0,x_1)\to\mathfrak{F}_0\times\mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1) = \lim_{x_0\to\mathfrak{F}_0} \lim_{x_1\to\mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1)$$

が成り立つ．

証明　$\widetilde{X}_0 = X_0 \cup \{\infty_0\}$，$\widetilde{X}_1 = X_1 \cup \{\infty_1\}$ をそれぞれ X_0，X_1 上の真フィルタ $\mathfrak{F}_0$，$\mathfrak{F}_1$ に伴う位相空間とし，$\widetilde{X}_0 \times \widetilde{X}_1$ の部分空間

$$X = (X_0 \times X_1) \cup (X_0 \times \{\infty_1\}) \cup \{(\infty_0, \infty_1)\}$$

を考える．$X_0 \times X_1$ が X において稠密であることに注意する．

フィルタに伴う位相空間の定義より，X の各点の（X における）近傍基として，

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(x_0, x_1) &= \{(x_0, x_1)\} && (x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1), \\ \mathfrak{B}(x_0, \infty_1) &= \{\{x_0\} \times (F_1 \cup \{\infty_1\}) \mid F_1 \in \mathfrak{F}_1\} && (x_0 \in X_0), \\ \mathfrak{B}(\infty_0, \infty_1) &= \{(F_0 \times (F_1 \cup \{\infty_1\})) \cup \{(\infty_0, \infty_1)\} \mid F_0 \in \mathfrak{F}_0,\ F_1 \in \mathfrak{F}_1\} \end{aligned}$$

がとれる．したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{(x_0, x_1)} f &= f(x_0, x_1) && (x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1), \\ \lim_{(x_0, \infty_1)} f &= \lim_{x_1 \to \mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1) && (x_0 \in X_0), \\ \lim_{(\infty_0, \infty_1)} f &= \lim_{(x_0, x_1) \to \mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1) \end{aligned}$$

である．いま，条件によって右辺が存在することは保証されているから，拡張定理（定理 6.27）より，$f\colon X_0 \times X_1 \to Y$ の連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意に存在し，$\widetilde{f}(x) = \lim_x f$（$x \in X$）を満たす．

さて，

$$\lim_{x_1 \to \mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1) = \lim_{(x_0, \infty_1)} f = \widetilde{f}(x_0, \infty_1) \quad (x_0 \in X_0)$$

である．また，点 (∞_0, ∞_1) の近傍フィルタが $X_0 \times \{\infty_1\}$ 上に誘導する相対フィルタは，$X_0 \times \{\infty_1\}$ を X_0 と同一視すれば，真フィルタ $\mathfrak{F}_0$ に等しい．したがって，$\widetilde{f}$ の連続性と命題 6.14 (1) より，

$$\lim_{x_0 \to \mathfrak{F}_0} \widetilde{f}|_{X_0 \times \{\infty_1\}}(x_0, \infty_1) = \lim_{(\infty_0, \infty_1)} \widetilde{f}|_{X_0 \times \{\infty_1\}} = \widetilde{f}(\infty_0, \infty_1)$$

である．以上より，次が成り立つ．

$$\lim_{x_0 \to \mathfrak{F}_0} \lim_{x_1 \to \mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1) = \lim_{x_0 \to \mathfrak{F}_0} \widetilde{f}(x_0, \infty_1) = \widetilde{f}(\infty_0, \infty_1)$$

一方で，

$$\lim_{(x_0, x_1) \to \mathfrak{F}_0 \times \mathfrak{F}_1} f(x_0, x_1) = \lim_{(\infty_0, \infty_1)} f = \widetilde{f}(\infty_0, \infty_1)$$

だから，主張は示された．　□

6.6　点列

6.6.1　点列と点列が定める真フィルタ

定義 6.29（点列）　集合 X 上の点列とは，$\mathbb{N}$ から X への写像のことをいう．各 $n \in \mathbb{N}$ が $x_n \in X$ に対応するような点列を，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と書く．

$\mathbb{N}$ の部分集合であってその補集合が有限であるもの全体は，$\mathbb{N}$ 上の真フィルタをなす．これを，$\mathbb{N}$ 上の**補有限フィルタ**あるいは **Fréchet フィルタ**という．点列は，次のようにフィルタを定める．したがって，点列はフィルタの特別な場合と考えることができる．

定義 6.30（点列が定める フィルタ） X を集合，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の点列とする．$\mathbb{N}$ 上の補有限フィルタの $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ による像として定まる X 上の真フィルタを，**点列** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **が定める真フィルタ**という．

命題 6.31 X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が定める真フィルタの f による像は，Y 上の点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が定める真フィルタに等しい． □

6.6.2 点列の極限

定義 6.32（点列の極限） X を位相空間，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の点列とする．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が定める真フィルタの極限点・接触点を，この点列の（X における）**極限点・接触点**といい，それら全体の集合をそれぞれ $\lim_{n\to\infty} x_n$, $\operatorname{adh}_{x\to\infty} x_n$ と書く．$x \in X$ が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限点であることを，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は（X 上の点列として）x **に収束する**ともいう．

命題 6.33 X を位相空間，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の点列，$x \in X$ とする．

(1) x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限点であるための必要十分条件は，任意の近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在し，$x_n, x_{n+1}, \ldots \in U$ が成り立つことである．

(2) x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であるための必要十分条件は，任意の近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \cap U \neq \emptyset$ が成り立つことである．すなわち，$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$ である．

証明 命題 6.12 から従う． □

命題 6.34 位相空間 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$\lim_{n\to\infty} x_n \subseteq \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n \subseteq \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ が成り立つ．

証明 命題 6.13 から従う． □

命題 6.35 X を位相空間，A を X の部分集合，$x \in X$ とする．

(1) A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって（X 上の点列として）x に収束するものが存在するならば，$x \in \overline{A}$ である．

(2) X が第一可算であれば，$x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は，A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって（X 上の点列として）x に収束するものが存在することである．[*1]

証明 (1) A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって x に収束するものが存在すれば，命題 6.34 より $x \in \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{A}$ が成り立つ．

(2) 十分性は (1) で示されたから，必要性を示す．$x \in \overline{A}$ とする．x の可算近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ をとると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap U_n$ は空でないから，$x_n \in A \cap U_n$（$n \in \mathbb{N}$）を満たす点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．この点列は A の点からなり，x に収束する． □

定義 6.36（点列連続写像） X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が**点** $x \in X$ **において点列連続**であるとは，X 上の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束するならば $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(x)$ に収束することをいう．f が X のすべての点において点列連続であるとき，単に f は**点列連続**であるという．

[*1] 一般に，閉包作用素がこのように特徴付けられる位相空間を，Fréchet–Urysohn 空間という（定義 A.6 (2)）

命題 6.37　X, Y を位相空間，$x \in X$，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) f が x において連続ならば，f は x において点列連続である．

(2) X が第一可算ならば，f が x において連続であることと f が x において点列連続であることとは同値である．[*2]

証明　(1)　命題 6.7 の特別な場合である．

(2)　X を第一可算空間とし，x の可算近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ をとっておく．「連続ならば点列連続である」ことは (1) で示したから，f が x において連続でないとして，f が x において点列連続でないことを示せばよい．f が x において連続でないから，$f(x)$ の近傍 V であって，$f^{-1}(V)$ が x の近傍でないものがとれる．このとき，どの U_n も $f^{-1}(V)$ に含まれない．したがって，X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって $x_n \in U_n \setminus f^{-1}(V)$ を満たすものがとれる．すると，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束するが，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) \notin V$ だから，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束しない．よって，f は x において点列連続でない． □

命題 6.38　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と点 $x \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する．

(b) すべての $i \in I$ に対して，$(\phi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\phi_i(x)$ に収束する．

証明　命題 6.8 の特別な場合である． □

系 6.39　X を位相空間，A を X の部分空間とする．A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が A 上の点列として $x \in A$ に収束するための必要十分条件は，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上の点列として x に収束することである．

証明　命題 6.38 から従う． □

系 6.40　$\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とする．積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$（$x_n = (x_{n,i})_{i\in I}$）と点 $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する．

(b) すべての $i \in I$ に対して，$(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ は x_i に収束する．

証明　命題 6.38 から従う． □

命題 6.41　X を位相空間とする．

(1) X が分離であれば，X 上の任意の点列の極限点はたかだか一意である．

(2) X 上の任意の点列の極限点がたかだか一意であれば，X は T_1 である．

(3) 第一可算空間 X について，その上の任意の点列の極限点がたかだか一意であるための必要十分条件は，X が分離であることである．[*3]

証明　(1)　定理 6.20 の特別な場合である．

(2)　異なる 2 点 $x, y \in X$ を任意にとる．X 上の任意の点列の極限点がたかだか一意であれば，特に，定点列 $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限点は x のみである．したがって，x を含まない y の近傍が存在する．よって，X は T_1

[*2] より一般に，列型空間や Fréchet–Urysohn 空間でも同様なことが成り立つ（命題 A.11）．

[*3] 「任意の点列の極限点がたかだか一意であるための必要十分条件は分離であること」という性質は，列型空間（定義 A.6）ではもはや成り立たない．

である．

(3)　X を第一可算空間とする．十分性は (1) で示したから，必要性を確かめればよい．X が分離でなければ，分離できない異なる 2 点 $x, y \in X$ が存在する．x と y の可算近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$，$V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots$ をそれぞれとる．x と y が分離できないので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して点 $z_n \in U_n \cap V_n$ がとれる．この点列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，x と y の両方を極限点とする．よって，必要性が成り立つ．□

6.6.3　部分列

定義 6.42（部分列）　位相空間 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，狭義単調増加写像 $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を用いて $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ と表せる点列を，もとの点列の**部分列**という．

容易にわかるように，部分列が定める真フィルタは，もとの点列が定める真フィルタよりも細かい．この意味で，「部分列」は「より細かい真フィルタ」の特別な場合と考えることができる．

命題 6.43　X を位相空間，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の点列とする．

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するならば，その任意の部分列も x に収束する．
(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列が点 $x \in X$ を接触点とするならば，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も x を接触点とする．

証明　より細かい真フィルタはより多くの極限点をもつこと，より粗い真フィルタはより多くの接触点をもつこと（命題 6.2）から従う．□

命題 6.44　X を位相空間，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の点列，$x \in X$ とする．

(1) x に収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が存在するならば，x は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点である．
(2) X が第一可算ならば，x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であるための必要十分条件は，x に収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が存在することである．[*4]

証明　(1)　命題 6.43 (2) の特別な場合である．

(2)　X を第一可算空間とする．十分性は (1) で示したから，必要性を確かめればよい．x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であるとする．x における可算近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ をとる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を，「$\phi(0)$, $\ldots$, $\phi(n-1)$ まで定まったとき，$x_{\phi(n)} \in U_n$ かつ $\phi(n) > \phi(i)$（$i = 0, \ldots, n-1$）を満たす最小の値として $\phi(n) \in \mathbb{N}$ を定める」として再帰的に定義する．この定義は，x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であることから可能である．すると，$(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する．□

[*4] より一般に，列型空間で同値性がいえる（命題 A.12）．

第 7 章

コンパクト空間

7.1 コンパクト空間

7.1.1 コンパクト空間の基本的性質

定義 7.1（コンパクト空間） 位相空間 X がコンパクトであるとは，X の任意の開被覆が有限部分被覆を含むことをいう．

$\mathfrak{B}$ が位相空間 X の開基であるとき，X がコンパクトであることを示すためには，$\mathfrak{B}$ の元からなる開被覆が常に有限部分被覆を含むことを見ればよい[*1]．また，位相空間 X とその部分空間 A について，A がコンパクトであることと，A の X における任意の開被覆が有限部分被覆を含むこととは同値である．

命題 7.2 位相空間 X に対して，次の 5 条件は同値である．

(a) X はコンパクトである．
(b) X の任意の閉集合族 $\{F_i\}_{i\in I}$ について，$\{F_i\}_{i\in I}$ が有限交叉性をもつならば $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ である．
(c) X 上の任意の真フィルタは接触点をもつ．
(d) X 上の任意の真フィルタに対して，それよりも細かい真フィルタであって収束するものが存在する．
(e) X 上の任意の極大フィルタは収束する．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) X がコンパクトであるとは，X の任意の開集合族 $\{U_i\}_{i\in I}$ について，$\bigcup_{i\in I} U_i = X$ ならばある有限部分集合 $I' \subseteq I$ が存在して $\bigcup_{i\in I'} U_i = X$ となるということである．補集合をとることにより，これが，X の任意の閉集合族 $\{F_i\}_{i\in I}$ について，$\bigcup_{i\in I} F_i = \emptyset$ ならばある有限部分集合 $I' \subseteq I$ が存在して $\bigcup_{i\in I'} F_i = \emptyset$ となるということに同値であることがわかる．対偶をとることにより，これが (b) と同値であることがわかる．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 接触点をもたないフィルタ $\mathfrak{F}$ が存在すれば，$\overline{\mathfrak{F}}$ が (b) の反例となる．対偶をとれば主張が従う．

(c) $\Longrightarrow$ (b) (c) が成り立つとする．有限交叉性をもつ X の閉集合族 $\{F_i\}_{i\in I}$ を任意にとる．この閉集合族が生成する真フィルタを $\mathfrak{F}$ と置くと，(c) より $\mathfrak{F}$ は接触点 $x \in X$ をもつ．このとき，すべての $i \in I$ に対して $x \in \overline{F_i} = F_i$ となるから，$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ である．

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) x が真フィルタ $\mathfrak{F}$ の接触点であるための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ より細かい真フィルタであって x に収束するものが存在することであった（命題 6.4）．主張はここから従う．

(d) $\Longleftrightarrow$ (e) (d) から (e) が導かれることは明らかである．また，任意の真フィルタがそれよりも細かい極

[*1] 実は，「開基」を「準開基」で置き換えても主張が成り立つ．Alexander の準開基定理（定理 7.18）を参照のこと

大フィルタをもつことより（定理 1.10），(e) から (d) が導かれる． □

命題 7.3　位相空間 X の部分集合 $A_0, \ldots, A_{n-1}$ がコンパクトならば，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ もコンパクトである．

証明　$A_0, \ldots, A_{n-1}$ がコンパクトであるとする．$\mathfrak{U}$ を X における $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ の開被覆とすると，$\mathfrak{U}$ は X における各 A_i の開被覆でもあるから，A_i のコンパクト性より，A_i の被覆としての有限部分被覆 $\mathfrak{U}'_i \subseteq \mathfrak{U}$ がとれる．このとき，$\mathfrak{U}'_0 \cup \cdots \cup \mathfrak{U}'_{n-1}$ は $\mathfrak{U}$ の $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ の被覆としての有限部分被覆である．よって，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ はコンパクトである． □

命題 7.4　コンパクト空間の閉部分空間はコンパクトである．

証明　A をコンパクト空間 X の閉部分空間とする．$\mathfrak{U}$ を A の X における開被覆とすると，$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus A\}$ は X の開被覆だから，コンパクト性より有限部分被覆 $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U} \cup \{X \setminus A\}$ が存在する．このとき，$\mathfrak{U}' \setminus \{X \setminus A\}$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．よって，A はコンパクトである． □

命題 7.5　コンパクト空間の連続像はコンパクトである．

証明　f をコンパクト空間 X から位相空間 Y への連続全射とする．$\{V_i\}_{i \in I}$ を Y の開被覆とすると，$\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ は X の開被覆だから，有限部分被覆 $\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I'}$ が存在する．このとき，$\{V_i\}_{i \in I'}$ はもとの開被覆の有限部分被覆である．よって，Y はコンパクトである． □

7.1.2　コンパクト性と分離性

命題 7.6　X を位相空間，K を X のコンパクト集合，A を X の部分集合とする．

(1) 任意の $x \in K$ に対して x と A が開集合で分離されるならば，K と A は開集合で分離される．
(2) 任意の $x \in K$ に対して x と A が関数で分離されるならば，K と A は関数で分離される．

証明　(1)　X の開集合であって，その閉包が A と交わらないようなもの全体を $\mathfrak{U}$ とする．任意の $x \in K$ に対して x と A が開集合で分離されることより，$\mathfrak{U}$ は K の開被覆となる．よって K のコンパクト性より，（K の開被覆としての $\mathfrak{U}$ の）有限部分被覆 $\{U_0, \ldots, U_{n-1}\}$ がとれる．ここで $U = U_0 \cup \cdots \cup U_{n-1}$ と置くと，U は開集合であって $K \subseteq U$ かつ $\overline{U} = \overline{U_0} \cup \cdots \cup \overline{U_{n-1}} \subseteq X \setminus A$ を満たす．よって，K と A は開集合で分離される．

(2)　$f(A) \subseteq \{1\}$ を満たす連続関数 $f\colon X \to [-1, 1]$ の全体を $\mathcal{F}$ とする．任意の $x \in K$ に対して x と A が関数で分離されることより，$\{f^{-1}([-1, 0))\}_{f \in \mathcal{F}}$ は K の開被覆である．よって K のコンパクト性より，$\mathcal{F}$ の有限部分集合 $\{f_0, \ldots, f_{n-1}\}$ であって，$\{f_0^{-1}([-1, 0)), \ldots, f_{n-1}^{-1}([-1, 0))\}$ が K を被覆するようなものがとれる．関数 $f\colon X \to [0, 1]$ を

$$f = \max\{f_0, 0\} \cdots \max\{f_{n-1}, 0\}$$

と定めると，f は連続であり，$f(K) \subseteq \{0\}$ かつ $f(A) \subseteq \{1\}$ を満たす．よって，K と A は関数で分離される． □

命題 7.7　X を位相空間とする．

(1) X が擬分離であるとき，コンパクト集合 $K, L \subseteq X$ について，K の任意の点と L の任意の点が識別されるならば，K と L は開集合で分離される．

(2) X が分離であるとき，X の互いに交わらない 2 つのコンパクト集合は常に開集合で分離される．
(3) X が正則であるとき，X の互いに交わらないコンパクト集合と閉集合は常に開集合で分離される．
(4) X が完全正則であるとき，X の互いに交わらないコンパクト集合と閉集合は常に関数で分離される．

証明　(1)　X を擬分離空間，K, L を X のコンパクト集合とし，K の任意の点と L の任意の点は識別されるとする．$y \in L$ を固定すると，仮定と擬分離性より任意の $x \in K$ に対して x と y は開集合で分離されるから，命題 7.6 (1) より K と y は開集合で分離される．これが任意の $y \in L$ に対して成り立つから，ふたたび命題 7.6 (1) より，K と L は開集合で分離される．

(2)　(1) から従う．

(3)　X を正則空間，K を X のコンパクト集合，F を X の閉集合とする．正則性より任意の $x \in K$ に対して x と F は開集合で分離されるから，命題 7.6 (1) より K と F は開集合で分離される．

(4)　X を完全正則空間，K を X のコンパクト集合，F を X の閉集合とする．完全正則性より任意の $x \in K$ に対して x と F は関数で分離されるから，命題 7.6 (2) より K と F は関数で分離される．□

系 7.8　X を位相空間とする．

(1) X が擬分離であるとする．このとき，コンパクト集合 $K \subseteq X$ について，その閉包 $\overline{K}$ は「K のある点と識別されない X の点全体」である．さらに，この $\overline{K}$ はコンパクトである．
(2) X が分離であるとする．このとき，X のコンパクト集合は閉である．

証明　(1)　$x \in X$ が $y \in K$ と識別されないとすると，x の任意の近傍は y を含むから，$x \in \overline{K}$ である．逆に，$x \in X$ が K のどの点とも識別されるとすると，命題 7.7 (1) より x と K は開集合で分離されるから，$x \notin \overline{K}$ である．よって，$\overline{K}$ は「K のある点と識別されない X の点全体」に等しい．また，これより，X の開集合族 $\mathfrak{U}$ について，$\mathfrak{U}$ が K を被覆することと $\overline{K}$ を被覆することとは同値だから，K がコンパクトであることより，$\overline{K}$ もコンパクトである．

(2)　(1) から従う．□

系 7.9　コンパクト分離空間の部分空間について，それがコンパクトであることと閉であることとは同値である．

証明　命題 7.4 と系 7.8 (2) から従う．□

次の系は定理 5.43「任意の開被覆が閉包保存な開被覆によって細分されるような位相空間は，擬分離ならば正則かつ正規である」の系だが，ここでは直接の証明を与えておく．

系 7.10　コンパクト擬分離空間は正則かつ正規である．特に，コンパクト分離空間は正規分離であり，コンパクト正則空間は正規である．

証明　コンパクト空間の閉集合がコンパクトであること（命題 7.4），閉集合の点とそれに属さない点が常に識別されることに注意すれば，命題 7.7 (1) からコンパクト擬分離空間が正則であることがわかり，ふたたび命題 7.7 (1) を用いればコンパクト正則空間が正規であることがわかる．

後半の主張は，分離性や正則性が擬分離性を導くことからわかる．□

命題 7.11　コンパクト空間から分離空間への連続写像は，閉写像である．

証明　コンパクト空間の閉集合がコンパクトであること（命題 7.4），コンパクト集合の連続像がコンパクトであること（命題 7.5），分離空間のコンパクト集合が閉集合であること（系 7.8 (2)）から従う．□

系 7.12　コンパクト空間から分離空間への連続全単射は，同相写像である．□

命題 7.13　コンパクト分離空間の閉連続像は，コンパクト分離である．

証明　コンパクト性が連続像で保たれること（命題 7.5），コンパクト分離空間が正規分離であること（系 7.10），正規分離性が閉連続像で保たれること（命題 5.37）から従う．□

命題 7.14　X をコンパクト擬分離空間とする．X の任意の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ に対して，X の開被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ であって，任意の $i \in I$ に対して $\overline{V_i} \subseteq U_i$ が成り立つようなものが存在する．[*2]

証明　X の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を任意にとる．コンパクト擬分離空間は正則だから（系 7.10），X の開被覆 $\mathfrak{V}$ であって，$\overline{\mathfrak{V}}$ が $\mathfrak{U}$ を細分するようなものがとれる（命題 5.30）．X はコンパクトだから，$\mathfrak{V}$ は有限開被覆であるとしてよい．各 $i \in I$ に対して，$\mathfrak{V}$ の元であってその閉包が U_i に含まれるようなもの全体の合併を V_i と置けば，$\{V_i\}_{i \in I}$ は X の開被覆であり，任意の $i \in I$ に対して $\overline{V_i} \subseteq U_i$ が成り立つ．□

7.1.3　Tube Lemma と，射影によるコンパクト性の特徴づけ

定理 7.15（Tube Lemma）　X, Y を位相空間とし，K, L をそれぞれ X, Y のコンパクト集合とする．W が $K \times L$ を含む $X \times Y$ の開集合ならば，K を含む X の開集合 U と L を含む Y の開集合 V が存在して，$U \times V \subseteq W$ が成り立つ．[*3]

証明　まず，$K = \{x\}$ の場合を証明する．$\{x\} \times L$ の各点は開集合 W の点だから，「X の開集合と Y の開集合との直積であって W に含まれるもの」の全体は $\{x\} \times L$ の開被覆となる．$\{x\} \times L$ は L と同相（命題 3.28），したがってコンパクトだから，この開被覆の有限部分被覆 $\{U_0 \times V_0, \dots, U_{n-1} \times V_{n-1}\}$ がとれる．ここで $U = U_0 \cap \dots \cap U_{n-1}$，$V = V_0 \cup \dots \cup V_{n-1}$ と置くと，U は x を含む X の開集合，V は L を含む Y の開集合であり，$U \times V \subseteq W$ が成り立つ．

次に，一般の場合を証明する．「X の開集合と L を含む Y の開集合との直積であって W に含まれるもの」の全体を $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ とすると，前段より，これは $K \times L$ の開被覆である．このとき，$\{U_i\}_{i \in I}$ はコンパクト集合 K の開被覆だから，有限部分被覆 $\{U_{i_0}, \dots, U_{i_{n-1}}\}$ がとれる．ここで $U = U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_{n-1}}$，$V = V_{i_0} \cap \dots \cap V_{i_{n-1}}$ と置くと，U は K を含む X の開集合，V は L を含む Y の開集合であり，$U \times V \subseteq W$ が成り立つ．□

定理 7.16　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X はコンパクトである．
(b) 任意の位相空間 Y に対して，射影 $\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to Y$ は閉写像である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　X をコンパクト空間，Y を位相空間とする．射影 $\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to Y$ が閉写像であることを示すためには，任意の閉集合 $F \subseteq X \times Y$ に対して $Y \setminus \mathrm{pr}_Y(F)$ が開集合であることを見ればよい．$y \in Y \setminus \mathrm{pr}_Y(F)$ を任意にとると，$X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$ である．したがって，Tube Lemma（定理 7.15）より，y を含む開集合 V であって $X \times V \subseteq (X \times Y) \setminus F$，すなわち $(X \times V) \cap F = \emptyset$ を満たすものが存在する．このとき，$V \subseteq Y \setminus \mathrm{pr}_Y(F)$ である．よって，$Y \setminus \mathrm{pr}_Y(F)$ は開集合である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．X がコンパクトであることを示すためには，X 上の任意の真フィル

*2 より一般に，パラコンパクト擬分離空間でも同様なことが成り立つ（定理 B.14）．
*3 Tube Lemma と呼ばれるのは，主に K が 1 点集合の場合である．応用上もこの場合が特に重要である．

タ $\mathfrak{F}$ が接触点をもつことをいえばよい（命題 7.2）．$\mathfrak{F}$ に伴う位相空間を $Y = X \cup \{\infty\}$ とする．$\mathfrak{F}$ は真フィルタだから，Y は（離散空間としての）X を稠密に含むことに注意する（命題 6.18）．

$X \times Y$ の部分集合 Δ を

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

と定める．仮定より，射影 $\mathrm{pr}_Y\colon X \times Y \to Y$ は閉写像だから，$\mathrm{pr}_Y(\mathrm{cl}_{X\times Y}(\Delta)) = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{pr}_Y(\Delta)) = \mathrm{cl}_Y(X) = Y$ である．特に，ある $x \in X$ が存在して $(x, \infty) \in \mathrm{cl}_{X\times Y}(\Delta)$ となる．このとき，(x, ∞) の任意の近傍は Δ と交わる．すなわち，x の（X における）任意の近傍 U と任意の $F \in \mathfrak{F}$ に対して，$(U \times F) \cap \Delta \neq \emptyset$ である．これは，$U \cap F \neq \emptyset$ を意味する．よって，このとき x は $\mathfrak{F}$ の接触点である． □

7.1.4 Tychonoff の定理

定理 7.17（Tychonoff の定理） 空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ はコンパクトである．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i はコンパクトである．

証明 $X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b) X がコンパクトならば，命題 7.5 より，その連続像 $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ もコンパクトである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 「任意の極大フィルタが収束する」という性質が $\{X_i\}_{i\in I}$ から X に遺伝することを示せばよい（命題 7.2）．X 上の極大フィルタ $\mathfrak{M}$ を任意にとると，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_i(\mathfrak{M})$ は X_i 上の極大フィルタである（命題 1.24 (2)）．これらがそれぞれ $x_i \in X_i$ に収束するならば，$\mathfrak{M}$ は $x = (x_i)_{i\in I}$ に収束する（系 6.10）．これで，主張は示された． □

Tychonoff の定理は，次の Alexander の準開基定理を用いることでも証明できる．

定理 7.18（Alexander の準開基定理） X を位相空間とする．X のある準開基 $\mathfrak{B}$ が存在して，$\mathfrak{B}$ の元からなる任意の開被覆が有限部分被覆をもつならば，X はコンパクトである．

証明 X の開集合族であって，その任意の有限部分が X を被覆しないものの全体を $\mathcal{S}$ とする．任意の $\mathfrak{U} \in \mathcal{S}$ が X を被覆しないことを示せばよい．$\mathcal{S}$ は包含関係に関して帰納的だから，Zorn の補題より，$\mathfrak{U}$ を含む $\mathcal{S}$ の極大元 $\mathfrak{M}$ がとれる．$\mathfrak{M}$ が X を被覆しないことを示せば十分である．

次のことを確かめておく．

(1) $U \in \mathfrak{M}$ かつ $U' \subseteq U$ ならば $U' \subseteq \mathfrak{M}$ である．
(2) X の開集合 $U_0, \ldots, U_{n-1}$ について，$U_0 \cap \cdots \cap U_{n-1} \in \mathfrak{M}$ ならばある U_i が $\mathfrak{M}$ に属する．

(1) は，与えられた条件の下で $\mathfrak{M} \cup \{U'\} \in \mathcal{S}$ であることと，$\mathfrak{M}$ の極大性から従う．(2) を示す．帰納法を考えれば，$n = 2$ の場合のみを示せばよい．U, V を開集合，$U, V \notin \mathfrak{M}$ とする．$\mathfrak{M}$ の極大性より $\mathfrak{M} \cup \{U\} \notin \mathcal{S}$ だから，ある $U'_0, \ldots, U'_{p-1} \in \mathfrak{M}$ が存在して $\{U, U'_0, \ldots, U'_{p-1}\}$ が X を被覆する．同様に，ある $V'_0, \ldots, V'_{q-1} \in \mathfrak{M}$ が存在して $\{V, V'_0, \ldots, V'_{q-1}\}$ が X を被覆する．このとき，$\{U \cap V, U'_0, \ldots, U'_{p-1}, V'_0, \ldots, V'_{q-1}\}$ は X を被覆するから，$U \cap V \notin \mathcal{S}$ である．

$U \in \mathfrak{M}$ と $x \in U$ を任意にとる．$\mathfrak{B}$ は準開基だから，$B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}$ であって $x \in B_0 \cap \cdots \cap B_{n-1} \subseteq U$ を満たすものが存在する．このとき，前述の (1), (2) より，ある B_i は $\mathfrak{M}$ に属する．ここから特に，$\mathfrak{M}$ の元全体の合併が $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ の元全体の合併に等しいことがわかる．ところが $\mathcal{S}$ および $\mathfrak{B}$ の定義より，$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{B}$ は X を被覆しないから，$\mathfrak{M}$ も X を被覆しない．これで主張は示された． □

Tychonoff の定理の別証明　(b) $\Longrightarrow$ (a) のみ示す．Alexander の準開基定理（定理 7.18）より，X の標準準開基の元からなる任意の開被覆が有限部分被覆をもつことを示せばよい．$X=\prod_{i\in I}X_i$ と置く．

$\{\mathrm{pr}_i^{-1}(U_{i,j})\}_{i\in I,\,j\in J_i}$（$i\in I$，$j\in J_i$ に対して $U_{i,j}$ は X_i の開集合）が X の開被覆であるとする．このとき，ある $i\in I$ が存在して $\{U_{i,j}\}_{j\in J_i}$ は X_i を被覆する．実際，そうでなければ各 $i\in I$ に対して $x_i\in X_i\setminus\bigcup_{j\in J_i}U_{i,j}$ を選ぶことができるが，このとき $x=(x_i)_{i\in I}$ はどの $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_{i,j})$ にも属さず，仮定に矛盾する．そこで，$\{U_{i,j}\}_{j\in J_i}$ が X_i を被覆するとする．すると，X_i のコンパクト性より，$\{U_{i,j}\}_{j\in J_i}$ の有限部分被覆 $\{U_{i,j_0},\dots,U_{i,j_{n-1}}\}$ が存在する．このとき，$\{\mathrm{pr}_i^{-1}(U_{i,j_0}),\dots,\mathrm{pr}_i^{-1}(U_{i,j_{n-1}})\}$ は最初にとった X の開被覆の有限部分被覆である．よって，X はコンパクトである．□

また，有限積の場合の Tychonoff の定理は，次のように，選択公理を用いずに示せる．

Tychonoff の定理の有限積の場合の別証明　(b) $\Longrightarrow$ (a) のみ示す．有限積のみを考えているので，X,Y がコンパクト空間ならば $X\times Y$ もコンパクトであることを示せば十分である．

$X\times Y$ の開被覆 $\mathfrak{W}$ を任意にとる．各点 $x\in X$ に対して，$\{x\}\times Y$ は Y と同相（命題 3.28），したがってコンパクトだから，$\{x\}\times Y$ はある有限個の元 $W_0,\dots,W_{n-1}\in\mathfrak{W}$ で被覆される．このとき，Tube Lemma（定理 7.15）より，x を含む開集合 U であって $U\times Y\subseteq W_0\cup\dots\cup W_{n-1}$ を満たすものが存在する．すなわち，「X の開集合 U であって，$U\times Y$ が $\mathfrak{W}$ の有限個の元で被覆されるようなもの」の全体を $\mathfrak{U}$ とすると，$\mathfrak{U}$ は X を被覆する．X はコンパクトだから，有限部分被覆 $\{U_0,\dots,U_{n-1}\}\subseteq\mathfrak{U}$ が存在する．このとき，$X\times Y=\bigcup_{i=0}^{n-1}(U_i\times Y)$ であり，各 $U_i\times Y$ は $\mathfrak{W}$ の有限個の元で被覆されるのだったから，$X\times Y$ も $\mathfrak{W}$ の有限個の元で被覆される．よって，$X\times Y$ はコンパクトである．□

定理 7.19　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) 集合 I と写像 $\phi\colon X\to[0,1]^I$ が存在して，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しい【ϕ は埋め込みである】．
(b) コンパクト分離空間 K と写像 $\phi\colon X\to K$ が存在して，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しい【ϕ は埋め込みである】．
(c) X は完全正則【完全正則分離】である．

証明　(a)–(c) のそれぞれにおいて，【 】内の条件は【 】外の条件に T_0 性を加えたものだから（(a), (b) については命題 5.21 からわかる），【 】外の条件の同値性のみを示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　Tychonoff の定理（定理 7.17）より，$[0,1]$ の冪はコンパクト分離だから，(a) から (b) が従う．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　コンパクト分離空間は完全正則であり（系 7.10），完全正則性は始位相に遺伝するから，(b) から (c) が従う．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　X が完全正則ならば，X の位相は X から $[0,1]$ への連続写像全体が誘導する始位相に一致する（命題 5.25）．そこで，I を X から $[0,1]$ への連続写像全体のなす集合とし，$\phi=(f)_{f\in I}\colon X\to[0,1]^I$ と置けば，命題 3.20 (1) より，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しい．□

系 7.20　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 集合 I と写像 $\phi\colon X\to[0,1]^I$ が存在して，ϕ は閉埋め込みである．
(b) X はコンパクト分離である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　Tychonoff の定理（定理 7.17）と命題 7.4 より，$[0,1]$ の冪の閉部分空間はコンパクト分離だから，(a) から (b) が従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　コンパクト分離空間は完全正則分離だから（系 7.10），定理 7.19 より，$[0,1]$ の冪に埋め込める．系 7.8 より，この埋め込みは閉である．□

7.2　局所コンパクト空間

7.2.1　相対コンパクト集合

定義 7.21（相対コンパクト集合，強相対コンパクト集合）　X を位相空間，A を X の部分集合とする．

(1) A が（X において）**相対コンパクト**[*4] であるとは，A を含むコンパクト集合 $K \subseteq X$ が存在することをいう．
(2) A が（X において）**強相対コンパクト**[*5] であるとは，その閉包 $\overline{A}$ がコンパクトであることをいう．

明らかに，強相対コンパクト集合は相対コンパクトである．

相対コンパクト集合・強相対コンパクト集合の部分集合や有限合併はまた相対コンパクト・強相対コンパクトである．すなわち，相対コンパクト集合・強相対コンパクト集合の全体はイデアル（定義 1.36）をなす．また，コンパクト集合の連続像がコンパクトであることより（命題 7.5），相対コンパクト集合の連続像は相対コンパクトである．

命題 7.22　分離空間 X とその部分集合 A に対して，A が相対コンパクトであることと A が強相対コンパクトであることとは同値である．

証明　分離空間 X の相対コンパクト集合 A が，強相対コンパクトであることを示せばよい．A の相対コンパクト性より，A を含むコンパクト集合 $K \subseteq X$ がとれる．X の分離性より K は X の閉集合だから（系 7.8 (2)），$\overline{A} \subseteq K$ である．したがって，$\overline{A}$ はコンパクト空間 K の閉集合だから，コンパクトである（命題 7.4）．よって，A は強相対コンパクトである．□

7.2.2　コンパクトな近傍の存在

命題 7.23　X を位相空間，$x \in X$ とする．9 条件

(a) x はコンパクトな近傍をもつ．
(b) x は相対コンパクトな開近傍をもつ．
(c) x において，その相対コンパクトな開近傍全体は近傍基をなす．
(d) x はコンパクトな閉近傍をもつ．
(e) x は強相対コンパクトな開近傍をもつ．
(f) x において，その強相対コンパクトな開近傍全体は近傍基をなす．
(g) x において，そのコンパクトな近傍全体は近傍基をなす．
(h) x において，そのコンパクトな閉近傍全体は近傍基をなす．
(i) x において，その強相対コンパクトな開近傍の閉包全体は近傍基をなす．

について，次が成り立つ．

[*4] 「相対コンパクト集合」で（本稿でいう）強相対コンパクト集合を指すことも多い．
[*5] 「強相対コンパクト」は本稿だけの用語である．

(1) 3 条件 (a), (b), (c) は同値である．

(2) 3 条件 (d), (e), (f) は同値である．

(3) 2 条件 (h), (i) は同値である．

(4) (3) の 2 条件は (2) の 3 条件と (g) を導き，(2) の 3 条件および (g) は (1) の 3 条件を導く．

(5) X が擬分離ならば，9 条件はすべて同値である．

証明　(1)　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　K が x のコンパクトな近傍ならば，K° が x の相対コンパクトな開近傍となる．逆に，U が x の相対コンパクトな近傍ならば，U を含むコンパクト集合がとれ，これが x のコンパクトな近傍となる．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　(c) から (b) が導かれることは明らかである．一方で，x の相対コンパクトな開近傍 U がとれたとすると，x の任意の開近傍 V に対して $U \cap V$ は x の相対コンパクトな開近傍だから，(b) から (c) が導かれる．

(2)　(d) $\Longleftrightarrow$ (e)　K が x のコンパクトな閉近傍ならば，$\overline{K^\circ}$ は K の閉集合であり，したがってコンパクトだから（命題 7.4），K° が x の強相対コンパクトな開近傍となる．逆に，U が x の強相対コンパクトな開近傍ならば，$\overline{U}$ が x のコンパクトな閉近傍となる．

(e) $\Longleftrightarrow$ (f)　(f) から (e) が導かれることは明らかである．一方で，x の強相対コンパクトな開近傍 U がとれたとすると，x の任意の開近傍 V に対して $U \cap V$ は x の強相対コンパクトな開近傍だから，(e) から (f) が導かれる．

(3)　(h) $\Longrightarrow$ (i)　K が x のコンパクトな閉近傍ならば，$\overline{K^\circ}$ は K の閉集合であり，したがってコンパクトだから（命題 7.4），$\overline{K^\circ}$ が x の「強相対コンパクトな開近傍の閉包」となる．また，このとき $\overline{K^\circ} \subseteq K$ である．よって，(g) から (h) が導かれる．

(i) $\Longrightarrow$ (h)　「強相対コンパクトな開近傍の閉包」はコンパクトな閉近傍だから，(h) から (g) が導かれる．

(4)　(h) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (a) と (h) $\Longrightarrow$ (g) $\Longrightarrow$ (a) を示せばよいが，これは明らかである．

(5)　X が擬分離であるとする．(1) から (4) より，あとは (a) $\Longrightarrow$ (h) を示せばよい．そのために，(a) $\Longrightarrow$ (d) と (d) $\Longrightarrow$ (h) を示す．

(a) $\Longrightarrow$ (d)　K が x のコンパクトな近傍ならば，$\overline{K}$ が x のコンパクトな閉近傍となる（系 7.8 (1)）．

(d) $\Longrightarrow$ (h)　x がコンパクトな閉近傍 K をもつとする．x の開近傍 U を任意にとる．$K \setminus U$ はコンパクト空間 K の閉集合だからコンパクトであり（命題 7.4），x と $K \setminus U$ の各点は U によって識別されるから，$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus (K \setminus U)$ を満たす開集合 V がとれる（命題 7.7 (1)）．このとき，$K \cap \overline{V}$ は x のコンパクトな閉近傍であり（K が閉であることと命題 7.4 からわかる），U に含まれる．よって，x のコンパクトな閉近傍の全体は近傍基をなす．　□

系 7.24　X を位相空間とする．9 条件

(a) X の各点はコンパクトな近傍をもつ．

(b) X の各点は相対コンパクトな開近傍をもつ．

(c) X の各点において，その相対コンパクトな開近傍全体は近傍基をなす．

(d) X の各点はコンパクトな閉近傍をもつ．

(e) X の各点は強相対コンパクトな開近傍をもつ．

(f) X の各点において，その強相対コンパクトな開近傍全体は近傍基をなす．

(g) X の各点において，そのコンパクトな近傍全体は近傍基をなす．

(h) X の各点において，そのコンパクトな閉近傍全体は近傍基をなす．

(i) X の各点において，その強相対コンパクトな開近傍の閉包全体は近傍基をなす．

について，次が成り立つ．

(1) 3 条件 (a), (b), (c) は同値である．
(2) 3 条件 (d), (e), (f) は同値である．
(3) 2 条件 (h), (i) は同値である．
(4) (3) の 2 条件は (2) の 3 条件と (g) を導き，(2) の 3 条件および (g) は (1) の 3 条件を導く．
(5) X が擬分離ならば，9 条件はすべて同値である．

証明　命題 7.23 からただちに従う． □

7.2.3　局所コンパクト空間

定義 7.25（局所コンパクト空間）　X を位相空間とする．

(1) X が**局所コンパクト**[*6] であるとは，X が系 7.24 に挙げた同値な 3 条件 (a), (b), (c) を満たすことをいう．
(2) X が**強局所コンパクト**[*7] であるとは，X が系 7.24 に挙げた同値な 3 条件 (d), (e), (f) を満たすことをいう．
(3) X が**真局所コンパクト**[*8] であるとは，X が系 7.24 に挙げた条件 (g) を満たすことをいう．
(4) X が**強真局所コンパクト**[*9] であるとは，X が 系 7.24 に挙げた同値な 2 条件 (h), (i) を満たすことをいう．

系 7.24 (4) より，強真局所コンパクト空間は強局所コンパクトかつ真局所コンパクトであり，強局所コンパクト空間および真局所コンパクト空間は局所コンパクトだが，これらの逆はどれも成り立たない．しかし，系 7.24 (5) より，擬分離空間については，これらの 4 条件は一致する．また，コンパクト空間は強局所コンパクトだが，真局所コンパクトであるとは限らない．

定理 7.26　局所コンパクト擬分離空間は完全正則である．特に，局所コンパクト分離空間は完全正則分離であり，局所コンパクト正則空間は完全正則である．

証明　X を局所コンパクト擬分離空間とし，点 $x \in X$ とそれを含む開集合 $U \subseteq X$ を任意にとる．U は x の近傍だから，コンパクト閉近傍全体が近傍基をなすことより，$x \in K \subseteq U$ を満たす x のコンパクト閉近傍 K がとれる[*10]．K はコンパクト擬分離だから正則かつ正規であり（系 7.10），特に完全正則だから，$f(x) = 1$ かつ $f(K \setminus K^\circ) \subseteq \{0\}$ を満たす連続関数 $f\colon K \to [0,1]$ が存在する．関数 $\widetilde{f}\colon X \to [0,1]$ を

$$\widetilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & (y \in K) \\ 0 & (y \notin K) \end{cases}$$

と定めると，$\widetilde{f}$ は $K, \overline{X \setminus K}$ のそれぞれの上で連続だから X 上連続であり（命題 2.37 (2)），$f(x) = 1$ かつ $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$ を満たす．よって，X は完全正則である．

後半の主張は，前半の主張および分離性や正則性が擬分離性を導くことからわかる． □

---

*6 「局所コンパクト空間」で本稿でいう強局所コンパクト空間や真局所コンパクト空間を指すこともある．
*7 「強局所コンパクト（strongly locally compact）」という語は，たとえば Steen–Seebach [22, p. 20] で使われている．
*8 「真局所コンパクト」は本稿だけの用語である．
*9 「強真局所コンパクト」は本稿だけの用語である．
*10 $K^\circ, X \setminus K$ は x と $X \setminus U$ を分離する開集合だから，この時点で X の正則性がわかる．

命題 7.27　X を位相空間，K を X のコンパクト集合とする．

(1) X が局所コンパクトならば，K を含む相対コンパクトな開集合が存在する．
(2) X が強局所コンパクトならば，K を含む強相対コンパクトな開集合が存在する．

証明　(1)　X が局所コンパクトであるとする．すると，相対コンパクトな開集合全体は X の開被覆であり，特に K の開被覆でもある．K のコンパクト性より，その有限部分被覆 $\{U_0, \dots, U_{n-1}\}$ がとれる．このとき，$U_0 \cup \dots \cup U_{n-1}$ は K を含む相対コンパクトな開集合である．

(2)　X が強局所コンパクトであるとする．すると，強相対コンパクトな開集合全体は X の開被覆であり，特に K の開被覆でもある．K のコンパクト性より，その有限部分被覆 $\{U_0, \dots, U_{n-1}\}$ がとれる．このとき，$U_0 \cup \dots \cup U_{n-1}$ は K を含む強相対コンパクトな開集合である．□

命題 7.28　X を分離空間，A を X の稠密部分空間とする．A が局所コンパクトならば，A は X の開集合である．

証明　A が局所コンパクトであるとする．点 $x \in A$ を任意にとり，A における x のコンパクト近傍 K をとる．相対位相の定義より，X の開集合 U が存在して $U \cap A \subseteq K$ となる．このとき，A の稠密性と命題 2.8，および K が X の閉集合であることより（系 7.8 (2)），$U \subseteq \overline{U \cap A} \subseteq \overline{K} = K$ が成り立つ．よって，$x \in U \subseteq K \subseteq A$ が成り立つ．U は X の開集合であり，$x \in A$ は任意だったから，A は開集合である．□

命題 7.29　(1) 局所コンパクト空間の閉部分空間は局所コンパクトである．
(2) 強局所コンパクト空間の閉部分空間は強局所コンパクトである．
(3) 真局所コンパクト空間の閉部分空間および開部分空間は真局所コンパクトである．
(4) 強真局所コンパクト空間の閉部分空間および開部分空間は真局所コンパクトである．
(5) 局所コンパクト擬分離空間の閉部分空間および開部分空間は局所コンパクト擬分離である．

証明　(1), (2)　X を局所コンパクト空間【強局所コンパクト空間】，A を X の閉部分空間とし，点 $x \in A$ を任意にとる．X における x のコンパクトな近傍【閉近傍】K をとると，$K \cap A$ は A における x の近傍【閉近傍】であり，さらにこれはコンパクト空間 K の閉集合だからコンパクトである（命題 7.4）．よって，A は局所コンパクト【強局所コンパクト】である．

(3), (4)　X を真局所コンパクト空間【強真局所コンパクト空間】，A を X の部分空間とし，点 $x \in A$ を任意にとる．コンパクト集合【コンパクト閉集合】からなる X における x の近傍基として，$\mathfrak{K}$ がとれるとする．A が X の閉部分空間ならば，$\mathfrak{K}|_A$ は A における x の近傍基であり，その各元は A のコンパクト集合【コンパクト閉集合】である（命題 7.4）．A が X の開部分空間ならば，$\mathfrak{K}$ の元のうち A に含まれるもの全体は A における x の近傍基であり，その各元は A のコンパクト集合【コンパクト閉集合】である．いずれの場合も，A は真局所コンパクト【強真局所コンパクト】である．

(5)　擬分離性のもとで局所コンパクト性は真局所コンパクト性と同値だから，(5) は (3) から従う．□

命題 7.30　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は局所コンパクト【強局所コンパクト，真局所コンパクト，強真局所コンパクト】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は局所コンパクト【強局所コンパクト，真局所コンパクト，強真局所コンパクト】である．

証明　$X = \coprod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の閉部分空間とみなせる（命題 3.30 (2)）から，命題 7.29 より，X が局所コンパクト【強局所コンパクト，真局所コンパクト，強真局所コンパクト】ならば X_i もそうである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i が X の開かつ閉な部分空間とみなせる（命題 3.30 (2)）ことに注意する．$x \in X_i$ の X_i におけるコンパクト近傍【コンパクトな閉近傍，コンパクト集合からなる近傍基，コンパクト閉集合からなる近傍基】がとれたとすると，それがそのまま x の X におけるコンパクト近傍【コンパクトな閉近傍，コンパクト集合からなる近傍基，コンパクト閉集合からなる近傍基】にもなる．よって，各 X_i が局所コンパクト【強局所コンパクト，真局所コンパクト，強真局所コンパクト】ならば，X もそうである．　□

命題 7.31　(1) 局所コンパクト空間の開連続像は局所コンパクトである．

(2) 真局所コンパクト空間の開連続像は真局所コンパクトである．

証明　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を開連続全射とする．

(1)　K が点 $x \in X$ のコンパクト近傍であるとする．このとき，コンパクト空間の連続像がコンパクトであること（命題 7.5），f が開写像であることより，$f(K)$ は $f(x)$ のコンパクト近傍である．よって，X が局所コンパクトならば，Y も局所コンパクトである．

(2)　$\mathfrak{K}$ がコンパクト集合からなる点 $x \in X$ の近傍基であるとする．このとき，コンパクト空間の連続像がコンパクトであること（命題 7.5），f が開写像であること，近傍基の開写像による像はまた近傍基をなすこと（命題 2.31 (2)）より，$f(\mathfrak{K}) = \{f(K) \mid K \in \mathfrak{K}\}$ はコンパクト集合からなる $f(x)$ の近傍基である．よって，X が真局所コンパクトならば，Y も真局所コンパクトである．　□

強局所コンパクト性・強真局所コンパクト性は，開連続像によって保たれない．

補題 7.32　X, Y を位相空間とする．K が $X \times Y$ のコンパクト閉集合ならば，K の Y への射影 $\mathrm{pr}_Y(K)$ は Y のコンパクト閉集合である．

証明　K を $X \times Y$ のコンパクト閉集合とする．コンパクト集合の連続像はコンパクトだから（命題 7.5），$\mathrm{pr}_Y(K)$ は Y のコンパクト閉集合である．$\mathrm{pr}_Y(K)$ が Y の閉集合であることを示す．K の X への射影による像を K_0 とする．K_0 はコンパクトだから（命題 7.5），定理 7.16 より，pr_Y の制限 $\mathrm{pr}_Y|_{K_0 \times Y}\colon K_0 \times Y \to Y$ は閉写像である．K は $X \times Y$ の閉集合であり，したがって $K_0 \times Y$ の閉集合でもあるから，$\mathrm{pr}_Y(K) = \mathrm{pr}_Y|_{K_0 \times Y}(K)$ は Y の閉集合である．これで示された．　□

定理 7.33　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は局所コンパクト【強局所コンパクト，真局所コンパクト，強真局所コンパクト】である．

(b) すべての X_i は局所コンパクト【強局所コンパクト，真局所コンパクト，強真局所コンパクト】であり，かつ有限個を除いてすべてコンパクトである．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　射影 pr_i は開連続写像だから（命題 3.30 (1)），X が局所コンパクト【真局所コンパクト】ならば，命題 7.31 より，その開連続像 $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ も局所コンパクト【真局所コンパクト】である．また，X が強局所コンパクト【強真局所コンパクト】ならば，補題より，その射影による像 $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ も強局所コンパクト【強真局所コンパクト】である（強真局所コンパクト性については，命題 2.31 (2) を用いる）．

X が局所コンパクトであるとして，有限個を除くすべての X_i がコンパクトであることを示す．X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ を選び，x のコンパクトな近傍 K をとる．積位相の定義より，有限個の $i \in I$ を除いて $\mathrm{pr}_i(K) = X_i$ である．コンパクト空間の連続像はコンパクトだから（命題 7.5），X_i は有限個を除いてすべて

コンパクトである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$i \in I \setminus I'$（I' は I の有限部分集合）に対して X_i はコンパクトであるとする．

局所コンパクト性について示す．各 X_i は局所コンパクトであるとし，X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ を任意にとる．各 $i \in I'$ に対して $x_i \in X_i$ のコンパクトな近傍 K_i をとり，$i \in I \setminus I'$ に対しては $K_i = X_i$ と置く．すると，積位相の定義より $K = \prod_{i \in I} K_i$ は x の近傍であり，Tychonoff の定理（定理 7.17）より K はコンパクトである．よって，X は局所コンパクトである．

強局所コンパクト性について示す．各 X_i は強局所コンパクトであるとし，X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ を任意にとる．各 $i \in I'$ に対して $x_i \in X_i$ のコンパクトな閉近傍 K_i をとり，$i \in I \setminus I'$ に対しては $K_i = X_i$ と置く．すると，積位相の定義より $K = \prod_{i \in I} K_i$ は x の近傍であり，Tychonoff の定理（定理 7.17）より K はコンパクトであり，命題 3.18 より K は X の閉集合である．よって，X は強局所コンパクトである．

真局所コンパクト性について示す．各 X_i は真局所コンパクトであるとし，X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ とその標準近傍基の元 $U = \prod_{i \in I} U_i$ を任意にとる．$i \in I \setminus I''$（I'' は有限）に対して $U_i = X_i$ であるとする．各 $i \in I' \cup I''$ に対して U_i に含まれる x_i のコンパクト近傍 K_i をとり，$i \in I \setminus (I' \cup I'')$ に対しては $K_i = X_i$ と置く．すると，積位相の定義より $K = \prod_{i \in I} K_i$ は x の近傍であり，Tychonoff の定理（定理 7.17）より K はコンパクトである．さらに，K は U に含まれる．よって，X は真局所コンパクトである．

強真局所コンパクト性について示す．各 X_i は強真局所コンパクトであるとし，X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ とその標準近傍基の元 $U = \prod_{i \in I} U_i$ を任意にとる．$i \in I \setminus I''$（I'' は有限）に対して $U_i = X_i$ であるとする．各 $i \in I' \cup I''$ に対して U_i に含まれる x_i のコンパクト閉近傍 K_i をとり，$i \in I \setminus (I' \cup I'')$ に対しては $K_i = X_i$ と置く．すると，積位相の定義より $K = \prod_{i \in I} K_i$ は x の近傍であり，Tychonoff の定理（定理 7.17）より K はコンパクトであり，命題 3.18 より K は X の閉集合である．さらに，K は U に含まれる．よって，X は強真局所コンパクトである．　□

7.3　コンパクト化

7.3.1　1 点コンパクト化

定義 7.34（1 点コンパクト化）　X を局所コンパクト分離空間とする．コンパクト分離空間 αX と埋め込み $\iota\colon X \to \alpha X$ との組 $(\alpha X, \iota)$ であって，$\alpha X \setminus \iota(X)$ が 1 点からなるものを，X の **1 点コンパクト化**という．また，$\alpha X \setminus \iota(X)$ の唯一の点を**無限遠点**という．

ι を明示せずに，単に「αX は X の 1 点コンパクト化である」などということもある．

$(\alpha X, \iota)$ が X の 1 点コンパクト化ならば，$\iota\colon X \to \alpha X$ は開埋め込みである．

定理 7.35（1 点コンパクト化の存在と一意性）　任意の局所コンパクト分離空間 X に対して，X の 1 点コンパクト化 $(\alpha X, \iota)$ が存在する．さらに，$(\alpha X, \iota)$, $(\alpha' X, \iota')$ がともに X の 1 点コンパクト化であれば，同相写像 $\phi\colon \alpha X \to \alpha' X$ であって，$\iota' = \phi \circ \iota$ を満たすものが存在する．

証明　まず 1 点コンパクト化の一意性を示し，次に 1 点コンパクト化の存在を示す．X を局所コンパクト分離空間とする．

■1 点コンパクト化が同型を除いてたかだか一意であること　$(\alpha X, \iota)$ と $(\alpha' X, \iota')$ がともに X の 1 点コンパクト化であるとする．$\alpha X \setminus \iota(X) = \{\infty\}$，$\alpha' X \setminus \iota'(X) = \{\infty'\}$ と置く．写像 $\phi\colon \alpha X \to \alpha' X$ を，$\iota' = \phi \circ \iota$ かつ $\phi(\infty) = \infty'$ を満たすように定める．この ϕ が同相写像であることを示せばよい．コンパクト分離空間の間の連続全単射は同相写像だから（系 7.12），そのためには，任意の $y \in \alpha X$ とその開近傍 U に対して，

$f(U)$ が $f(x)$ の近傍であることを示せば十分である．

$y \in \iota(X)$ の場合，$x \in X$ を用いて $y = \iota(x)$ と表すと，$\iota^{-1}(U)$ は x の開近傍である．さらに，ι' は開埋め込みだから，$\iota'(\iota^{-1}(U))$ は $\iota'(x)$ の開近傍である．ここで，$\iota'(x) = \phi(y)$ かつ $\iota'(\iota^{-1}(U)) \subseteq \phi(U)$ だから，$\phi(U)$ は $\phi(y)$ の開近傍である．

$y = \infty$ の場合，$\alpha X \setminus U$ は $\iota(X)$ に含まれるコンパクト集合だから（命題 7.4），ι が埋め込みであることより，$\iota^{-1}(\alpha X \setminus U)$ はコンパクトである．よって，$\iota'(\iota^{-1}(\alpha X \setminus U))$ は $\alpha' X$ のコンパクト集合であり，したがって閉集合である（系 7.8 (2)）．ここで，$\phi(\infty) = \infty'$ かつ $\iota'(\iota^{-1}(\alpha X \setminus U)) = \alpha' X \setminus \phi(U)$ だから，$\phi(U)$ は $\phi(\infty)$ である．これで主張は示された．

■1 点コンパクト化が存在すること　X に属さない 1 点 ∞ をとり，$\alpha X = X \cup \{\infty\}$ と置き，$\iota\colon X \to \alpha X$ を包含写像とする．また，X の開集合系を $\mathfrak{O}$ とし，

$$\alpha\mathfrak{O} = \mathfrak{O} \cup \{\alpha X \setminus K \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクト集合}\}$$

と定める．すると，命題 7.4 と系 7.8 (2) から容易にわかるように，$\alpha\mathfrak{O}$ は αX 上の位相であり，この位相に関して ι は埋め込みとなる．以下，αX を $\alpha\mathfrak{O}$ によって位相空間とみなす．$(\alpha X, \iota)$ が X の 1 点コンパクト化であることを見るためには，あとは，αX がコンパクト分離であることを示せばよい．

αX がコンパクトであることを示す．αX の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとり，点 ∞ を含む $\mathfrak{U}$ の元を 1 つ選んで U とする．すると，$\alpha\mathfrak{O}$ の定義より $\alpha X \setminus U$ はコンパクトだから，$\mathfrak{U}$ の有限部分族 $\mathfrak{U}'$ であって $\alpha X \setminus U$ を被覆するものがとれる．このとき，$\mathfrak{U}' \cup \{U\}$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．よって，αX はコンパクトである．

αX が分離であることを示す．X は αX の開部分空間だから，X の任意の異なる 2 点は αX において開集合で分離できる．また，X は局所コンパクト分離だから，任意の $x \in X$ は X においてコンパクトな近傍 K をもつが，このとき $K^\circ, \alpha X \setminus K$ は x と ∞ を分離する αX の開集合である．よって，αX は分離である．□

命題 7.36　X を局所コンパクト空間とし，$(\alpha X, \iota)$ を X の 1 点コンパクト化とする．$\iota(X)$ が αX において稠密であるための必要十分条件は，X がコンパクトでないことである．

証明　$\alpha X \setminus \iota(X)$ は 1 点集合だから，$\iota(X)$ が αX において稠密であることとは，$\iota(X)$ が αX の閉集合でないことと同値である．αX はコンパクト分離で ι は埋め込みだから，系 7.9 より，これは X がコンパクトでないことと同値である．□

7.3.2　Stone–Čech コンパクト化

定義 7.37（Stone–Čech コンパクト化）　X を位相空間とする．コンパクト分離空間 βX と連続写像 $\iota\colon X \to \beta X$ との組 $(\beta X, \iota)$ であって，次の普遍性を満たすものを，X の Stone–Čech コンパクト化という．

> 任意のコンパクト分離空間 K と連続写像 $f\colon X \to K$ に対して，連続写像 $\beta f\colon \beta X \to K$ であって $f = \beta f \circ \iota$ を満たすものが一意に存在する．

ι を明示せずに，単に「βX は X の Stone–Čech コンパクト化である」などということもある．

定理 7.38（Stone–Čech コンパクト化の存在と一意性）　任意の位相空間 X に対して，X の Stone–Čech コンパクト化 $(\beta X, \iota)$ が存在する．さらに，$(\beta X, \iota), (\beta' X, \iota')$ がともに X の Stone–Čech コンパクト化であれば，同相写像 $\phi\colon \beta X \to \beta' X$ であって，$\iota' = \phi \circ \iota$ を満たすものが存在する．

証明　まず Stone–Čech コンパクト化の一意性を示し，次に Stone–Čech コンパクト化の存在を示す．X を位相空間とする．

■Stone–Čech コンパクト化が同型を除いてたかだか一意であること　$(\beta X, \iota)$ と $(\beta' X, \iota')$ がともに X の Stone–Čech コンパクト化であるとする．Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，連続写像 $\phi\colon \beta X \to \beta' X$ であって $\iota' = \phi \circ \iota$ を満たすもの，および連続写像 $\psi\colon \beta' X \to \beta X$ であって $\iota = \psi \circ \iota'$ を満たすものがとれる．すると，$\psi \circ \phi\colon \beta X \to \beta X$ は $\iota = (\psi \circ \phi) \circ \iota$ を満たす連続写像だが，一方で $\mathrm{id}_{\beta X}$ も同様の性質を満たす連続写像だから，普遍性が誘導する写像の一意性より，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\beta X}$ が成り立つ．同様に，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\beta' X}$ が成り立つ．よって，$\phi\colon \beta X \to \beta' X$ は $\iota' = \phi \circ \iota$ を満たす同相写像である．

■Stone–Čech コンパクト化が存在すること　X から $[0,1]$ への連続関数全体のなす集合を $\mathscr{C}(X;[0,1])$ と書き，連続写像 $\iota\colon X \to [0,1]^{\mathscr{C}(X;[0,1])}$ を

$$\iota(x) = (\phi(x))_{\phi \in \mathscr{C}(X;[0,1])} \quad (x \in X)$$

と定める．$\beta X = \overline{\iota(X)}$ と置き，ι を X から βX への写像とみなしたものをふたたび ι と書く．Tychonoff の定理（定理 7.17）より $[0,1]^{\mathscr{C}(X;[0,1])}$ はコンパクト分離であり，したがってその閉部分空間 βX もコンパクト分離である（命題 7.4）．以下，この $(\beta X, \iota)$ が X の Stone–Čech コンパクト化の普遍性を満たすことを示す．

コンパクト分離空間 K と連続写像 $f\colon X \to K$ を任意にとる．$\iota(X)$ が βX において稠密であることと等式延長の原理（系 5.16）より，連続写像 $\beta f\colon \beta X \to K$ であって $f = \beta f \circ \iota$ を満たすものはたかだか一意である．次に，そのような連続写像 βf の存在を示す．系 7.20 より，K は $[0,1]^I$（I は集合）の閉部分空間であるとしてよい．各 $i \in I$ に対して，包含写像 $K \to [0,1]^I$ と i-成分への射影との合成を $p_i\colon K \to [0,1]$ と書く．各 $i \in I$ に対して $p_i \circ f \in \mathscr{C}(X;[0,1])$ であることに注意して，連続写像 $\widetilde{f}\colon \beta X \to [0,1]^I$ を

$$\widetilde{f}(y) = (y_{p_i \circ f})_{i \in I} \quad (y = (y_\phi)_{\phi \in \mathscr{C}(X;[0,1])} \in \beta X)$$

と定める．すると，$x \in X$ に対して

$$\widetilde{f}(\iota(x)) = \widetilde{f}((\phi(x))_{\phi \in \mathscr{C}(X;[0,1])}) = (p_i(f(x)))_{i \in I} = f(x)$$

が成り立ち，したがってまた

$$\widetilde{f}(\beta X) = \widetilde{f}(\overline{\iota(X)}) \subseteq \overline{\widetilde{f}(\iota(X))} \subseteq \overline{K} = K$$

が成り立つ．そこで，$\widetilde{f}$ を βX から K への写像とみなしたものを $\beta f\colon \beta X \to K$ と書けば，これは $f = \beta f \circ \iota$ を満たす連続写像である．これで，存在が示された．□

Stone–Čech コンパクト化は，自然な方法で位相空間の圏からコンパクト分離空間の圏への関手をなし，Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，この関手は包含関手の左随伴となる．詳細は省略する．

次の命題は，Stone–Čech コンパクト化の存在と一意性（定理 7.38）の証明中の構成から明らかだが，ここでは普遍性のみに基づいた証明を与える．

命題 7.39　X を位相空間とし，$(\beta X, \iota)$ を X の Stone–Čech コンパクト化とする．$\iota(X)$ は βX において稠密である．

証明　$\iota\colon X \to \beta X$ を X から $\overline{\iota(X)}$ への写像とみなしたものを $\iota_0\colon X \to \overline{\iota(X)}$ と書き，$\iota_1\colon \overline{\iota(X)} \to \beta X$ を包含写像とする．$\overline{\iota(X)}$ はコンパクト分離だから，Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，連続写像 $f\colon \beta X \to \overline{\iota(X)}$ であって $\iota_0 = f \circ \iota$ を満たすものが存在する．すると，$\iota_1 \circ f\colon \beta X \to \beta X$ は $(\iota_1 \circ f) \circ \iota = \iota$ を満たす連続写像だが，一方で $\mathrm{id}_{\beta X}$ も同様の性質を満たす連続写像だから，普遍性が誘導する写像の一意性より，$\iota_1 \circ f = \mathrm{id}_{\beta X}$ が成り立つ．特に，包含写像 $\iota_1\colon \overline{\iota(X)} \to \beta X$ が全射だから，$\overline{\iota(X)} = \beta X$ である．□

命題 7.40　X を位相空間とし，$(\beta X, \iota)$ を X の Stone–Čech コンパクト化とする．

(1) X の位相が ι の誘導する始位相に等しいための必要十分条件は，X が完全正則であることである．
(2) ι が埋め込みであるための必要十分条件は，X が完全正則分離であることである．
(3) ι が開埋め込みであるための必要十分条件は，X が局所コンパクト分離であることである．
(4) ι が同相写像であるための必要十分条件は，X がコンパクト分離であることである．

証明　(1)　βX はコンパクト分離だから完全正則であり（系 7.10），完全正則性は始位相に遺伝するから，X の位相が ι の誘導する始位相に等しければ，X は完全正則である．逆に，X が完全正則であるとする．このとき，X からコンパクト分離空間 K への写像 $\phi\colon X \to K$ であって，X の位相が ϕ の誘導する始位相に等しいようなものが存在する（定理 7.19）．これに対して，Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，連続写像 $\beta\phi\colon \beta X \to K$ であって $\phi = \beta\phi \circ \iota$ を満たすものが存在する．X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しいから，命題 3.25 より，X の位相は ι が誘導する始位相にも等しい．

(2)　βX はコンパクト分離だから完全正則分離であり（系 7.10），完全正則分離性は部分空間に遺伝するから，ι が埋め込みならば，X は完全正則分離である．逆に，X が完全正則分離であるとする．このとき，X からコンパクト分離空間への埋め込み $\phi\colon X \to K$ が存在する（定理 7.19）．これに対して，Stone–Čech コンパクト化の普遍性より，連続写像 $\beta\phi\colon \beta X \to K$ であって $\phi = \beta\phi \circ \iota$ を満たすものが存在する．f は埋め込みだから，系 3.26 より，ι も埋め込みである．

(3)　コンパクト分離空間の稠密開部分空間は局所コンパクト分離だから（命題 7.29 (4)），ι が開埋め込みならば，X は局所コンパクト分離である．逆に，X が局所コンパクト分離であるとする．すると，(2) より ι は埋め込みである．また，$\iota(X)$ は βX において稠密だから（命題 7.39），命題 7.28 より，$\iota(X)$ は βX の開部分空間である．

(4)　βX はコンパクト分離だから，ι が同相写像ならば，X もコンパクト分離である．逆に，X がコンパクト分離ならば，(X, id_X) は明らかに X の Stone–Čech コンパクト化だから，Stone–Čech コンパクト化の一意性より（定理 7.38），ι は id_X と同じく同相写像である．　□

7.4　σ-コンパクト空間

定義 7.41（σ-コンパクト空間）　コンパクト集合の可算合併として表せる位相空間を，**σ-コンパクト空間**という．

明らかに，コンパクト空間は σ-コンパクトである．また，コンパクト集合の有限合併はコンパクトだから（命題 7.3），X が σ-コンパクトならば，X のコンパクト集合の増大列 $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots$ であって $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ を満たすものがとれる．

命題 7.42　位相空間 X の可算部分集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ について，各 A_i が σ-コンパクトならば，$\bigcup_{i\in I} A_i$ も σ-コンパクトである．　□

命題 7.43　σ-コンパクト空間の閉部分空間は σ-コンパクトである．

証明　コンパクト空間の閉部分空間がコンパクトであること（命題 7.4）から従う．　□

命題 7.44　σ-コンパクト空間の連続像は σ-コンパクトである．

証明　コンパクト空間の連続像がコンパクトであること（命題 7.5）から従う．　□

定理 7.45　σ-コンパクト空間の有限積は σ-コンパクトである．

証明　$X_0, \ldots, X_{n-1}$ を σ-コンパクト空間とし，各 X_k は可算個のコンパクト集合 $K_{k,i}$（$i \in I_k$）の合併として書けるとする．このとき，積空間 $X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$ は可算個の部分集合 $K_{0,i_0} \times \cdots \times K_{n-1,i_{n-1}}$（各 k に対して $i_k \in I_k$）の合併として書くことができ，Tychonoff の定理（定理 7.17）よりこれらはコンパクトである．よって，$X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$ は σ-コンパクトである．□

7.5　Lindelöf 空間

定義 7.46（Lindelöf 空間）　位相空間 X について，X の任意の開被覆が可算部分被覆を含むとき，X は Lindelöf であるという．

明らかに，コンパクト空間は Lindeöf である．また，位相空間 X とその部分空間 $A \subseteq X$ について，A が Lindelöf であることと，A の X における任意の開被覆が可算部分被覆を含むこととは同値である．

命題 7.47　Lindelöf 空間の閉部分空間は Lindelöf である．

証明　A を Lindelöf 空間 X の閉部分空間とする．$\mathfrak{U}$ を A の X における開被覆とすると，$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus A\}$ は X の開被覆だから，Lindelöf 性より可算部分被覆 $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U} \cup \{X \setminus A\}$ が存在する．このとき，$\mathfrak{U}' \setminus \{X \setminus A\}$ は $\mathfrak{U}$ の可算部分被覆である．よって，A は Lindelöf である．□

命題 7.48　Lindelöf 空間の連続像は Lindelöf である．

証明　f を Lindelöf 空間 X から位相空間 Y への連続全射とする．$\{V_i\}_{i \in I}$ を Y の開被覆とすると，$\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ は X の開被覆だから，可算部分被覆 $\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I'}$ が存在する．このとき，$\{V_i\}_{i \in I'}$ はもとの開被覆の可算部分被覆である．よって，Y は Lindelöf である．□

命題 7.49　位相空間 X の可算部分集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ について，各 A_i が Lindelöf ならば，$\bigcup_{i \in I} A_i$ も Lindelöf である．

証明　各 A_i が Lindelöf であるとする．$\mathfrak{U}$ を X における $\bigcup_{i \in I} A_i$ の開被覆とすると，$\mathfrak{U}$ は X における各 A_i の開被覆でもあるから，A_i の Lindelöf 性より，A_i の被覆としての可算部分被覆 $\mathfrak{U}'_i \subseteq \mathfrak{U}$ がとれる．このとき，$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{U}'_i$ は $\mathfrak{U}$ の $\bigcup_{i \in I} A_i$ の被覆としての可算部分被覆である．よって，$\bigcup_{i \in I} A_i$ は Lindelöf である．□

命題 7.50　第二可算空間は Lindelöf である．

証明　X を第二可算空間とし，X の可算開基 $\mathfrak{B}$ をとる．X の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．$\mathfrak{B}$ の元のうち，$\mathfrak{U}$ のある元に含まれるものの全体を $\mathfrak{B}'$ とする．各 $B \in \mathfrak{B}'$ に対して $B \subseteq U_B$ となる $U_B \in \mathfrak{U}$ を選び，その全体を $\mathfrak{U}'$ とする．$\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ は可算部分集合だから，$\mathfrak{U}'$ が X を被覆していることを示せば定理は示される．任意に $x \in X$ をとると，$\mathfrak{U}$ は X の被覆だから，$x \in U$ となる $U \in \mathfrak{U}$ が存在する．$\mathfrak{B}$ は開基だから，$x \in B \subseteq U$ となる $B \in \mathfrak{B}$ が存在する．このとき $\mathfrak{B}'$ の定義より $B \in \mathfrak{B}'$ であり，$x \in B \subseteq U_B \in \mathfrak{U}'$ となるから，$\mathfrak{U}'$ は X の被覆である．□

命題 7.51　(1) σ-コンパクト空間は Lindelöf である．
(2) Lindelöf かつ局所コンパクトな空間は σ-コンパクトである．

証明　(1)　Lindelöf な部分集合の可算合併が Lindelöf であること（命題 7.49）から従う．

(2)　X を Lindelöf かつ局所コンパクトな空間とする．X の局所コンパクト性より相対コンパクトな開集合全体 $\mathfrak{U}$ は X の開被覆をなすから，X の Lindelöf 性より $\mathfrak{U}$ の可算部分被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ がとれる．各 $i \in I$ に対して U_i を含むコンパクト集合 K_i をとると，$X = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} K_i$ と書ける．よって，X は σ-コンパクトである． □

定理 7.52　Lindelöf 空間とコンパクト空間との積空間は Lindelöf である．

証明　X を Lindelöf 空間，Y をコンパクト空間とする．$X \times Y$ の開被覆 $\mathfrak{W}$ を任意にとる．各点 $x \in X$ に対して，$\{x\} \times Y$ は Y と同相（命題 3.28），したがってコンパクトだから，$\{x\} \times Y$ はある有限個の元 $W_0, \dots, W_{n-1} \in \mathfrak{W}$ で被覆される．このとき，Tube Lemma（定理 7.15）より，x を含む開集合 U であって $U \times Y \subseteq W_0 \cup \dots \cup W_{n-1}$ を満たすものが存在する．すなわち，「X の開集合 U であって，$U \times Y$ が $\mathfrak{W}$ の有限個の元で被覆されるようなもの」の全体を $\mathfrak{U}$ とすると，$\mathfrak{U}$ は X を被覆する．X は Lindelöf だから，可算部分被覆 $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{U}$ が存在する．このとき，$X \times Y = \bigcup_{i\in I}(U_i \times Y)$ であり，各 $U_i \times Y$ は $\mathfrak{W}$ の有限個の元で被覆されるのだったから，$X \times Y$ は $\mathfrak{W}$ の可算個の元で被覆される．よって，$X \times Y$ は Lindelöf である． □

次の命題は定理 5.42「任意の開被覆が σ-閉包保存な開被覆によって細分されるような位相空間は，正則ならば正規である」の系だが，ここでは直接の証明を与えておく．

命題 7.53　Lindelöf 正則空間は正規である．

証明　X を正則 Lindelöf 空間とし，$A, B \subseteq X$ を互いに交わらない閉集合とする．A, B は Lindelöf 空間 X の閉部分空間だから Lindelöf である（命題 7.47）．開集合であってその閉包が B と交わらないもの全体を $\mathfrak{U}$ とすると，正則性より $\mathfrak{U}$ は A の開被覆だから，A の Lindelöf 性より可算部分被覆 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．同様に，開集合であってその閉包が A と交わらないもの全体を $\mathfrak{V}$ とすると，$\mathfrak{V}$ は B の開被覆であり，可算部分被覆 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．そして，

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus (\overline{V_0} \cup \dots \cup \overline{V_n})), \quad V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_n \setminus (\overline{U_0} \cup \dots \cup \overline{U_n}))$$

と置けば，U, V は A と B を分離する開集合である． □

系 7.54　第二可算な正則空間は正規である．

証明　第二可算空間は Lindelöf（命題 7.50）だから，命題 7.53 から従う． □

7.6　可算コンパクト空間と点列コンパクト空間

7.6.1　可算コンパクト空間と点列コンパクト空間の基本的性質

定義 7.55（可算コンパクト空間，点列コンパクト空間）　X を位相空間とする．

(1) X の任意の可算開被覆が有限部分被覆をもつとき，X は**可算コンパクト**であるという．
(2) X 上の任意の点列が収束部分列をもつとき，X は**点列コンパクト**であるという．

明らかに，コンパクト空間は可算コンパクトであり，Lindelöf かつ可算コンパクトな空間はコンパクトである．ところが，コンパクト空間が点列コンパクトであるとは限らないし，点列コンパクト空間がコンパクトであるとは限らない．

明らかに，位相空間 X とその部分空間 $A \subseteq X$ について，A が可算コンパクトであることと，A の X における任意の可算開被覆が有限部分被覆を含むことは同値である．

X を位相空間とし，$x \in X$，$A \subseteq X$ とする．x が A の**集積点**であるとは，x の任意の近傍 U に対して，$U \setminus \{x\}$ が A の点を含むことをいう．これは，$x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ と同値である．x が A の **ω-集積点**であるとは，x の任意の近傍 U が A の点を無限個含むことをいう．明らかに，x が A の ω-集積点ならば，x は A の集積点である．

補題 7.56　X を T_1 空間とし，$x \in X$，$A \subseteq X$ とする．x が A の集積点であることと，x が A の集積点であることとは同値である．

証明　x が A の ω-集積点でないとすると，A の点を有限個しか含まない x の近傍 U がとれる．すると，$V = (U \setminus A) \cup \{x\}$ は U から x とは異なる有限個の点を除いたものだから，X が T_1 であることより，V は x の開近傍である．さらに，$V \setminus \{x\}$ は A の点を含まない．よって，x は A の集積点ではない．これで，同値性が示された．□

命題 7.57　位相空間 X に対して，次の 4 条件 (a)–(d) は同値であり，これらの同値な条件から (e) が従う．さらに，X が T_1 ならば，次の 5 条件 (a)–(e) は同値である．

(a) X は可算コンパクトである．
(b) X の任意の可算閉集合族 $\{F_i\}_{i \in I}$ について，$\{F_i\}_{i \in I}$ が有限交叉性をもつならば $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ である．
(c) X 上の任意の点列が接触点をもつ．
(d) X の任意の無限部分集合が ω-集積点をもつ．
(e) X の任意の無限部分集合が集積点をもつ．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b)　X が可算コンパクトであるとは，X の任意の可算開集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ について，$\bigcup_{i \in I} U_i = X$ ならばある有限部分集合 $I' \subseteq I$ が存在して $\bigcup_{i \in I'} U_i = X$ となるということである．補集合をとることにより，これが，X の任意の可算閉集合族 $\{F_i\}_{i \in I}$ について，$\bigcup_{i \in I} F_i = \emptyset$ ならばある有限部分集合 $I' \subseteq I$ が存在して $\bigcup_{i \in I'} F_i = \emptyset$ となるということに同値であることがわかる．対偶をとることにより，これが (b) と同値であることがわかる．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　接触点をもたない点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在すれば，$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ が (b) の反例となる．対偶をとれば主張が従う．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　(c) が成り立つとする．有限交叉性をもつ X の可算閉集合族 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を任意にとる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in F_0 \cap \dots \cap F_{n-1}$ を満たす X 上の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をとる．(c) より，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は接触点をもつ．すなわち，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}} \neq \emptyset$ である．一方で，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の定義より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subseteq F_n$ が成り立つから，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{F_n} \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ である．よって，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　A を X の無限部分集合とする．A の点からなる点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を，どの項も異なるようにとる．$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が接触点 $x \in X$ をもてば，x は A の ω-集積点である．

(d) $\Longrightarrow$ (c)　(d) が成り立つとする．X の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を任意にとる．集合 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有限ならば，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ には同じ項が無限回現れ，したがって $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は接触点をもつ．A が無限ならば，(d) より A は ω-集積点 $x \in X$ をもち，これが $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の接触点となる．

(d) $\Longrightarrow$ (e)　一般に ω-集積点が集積点であることから明らかである．

T_1 空間において集積点と ω-集積点は同じだから（補題 7.56），X が T_1 ならば，(d) $\Longleftrightarrow$ (e) である．□

命題 7.58　(1) 点列コンパクト空間は可算コンパクトである．

(2) 第一可算空間について，点列コンパクト性と可算コンパクト性は同値である[*11]．

(3) 第二可算空間について，コンパクト性，点列コンパクト性，可算コンパクト性は同値である．

証明　(1), (2)　可算コンパクト性は，任意の点列が接触点をもつことと同値であった（命題 7.57）．収束部分列をもつ点列は接触点をもち，第一可算空間ではその逆も成り立つことから（命題 6.44），主張が従う．

(3)　第二可算空間は Lindelöf（命題 7.50）だからコンパクト性と可算コンパクト性とは同値であり，また，第二可算空間は第一可算（命題 4.3）だから (2) より点列コンパクト性と可算コンパクト性とは同値である．

□

命題 7.59　可算コンパクト空間【点列コンパクト空間】の閉部分空間は可算コンパクト【点列コンパクト】である．

証明　X を位相空間，A を X の閉部分空間とする．

可算コンパクト性について示す．X を可算コンパクトとし，A の X における可算開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．$\mathfrak{U} \cup \{X \setminus A\}$ は X の可算開被覆だから，X の可算コンパクト性より有限部分被覆 $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U} \cup \{X \setminus A\}$ が存在する．このとき，$\mathfrak{U}' \setminus \{X \setminus A\}$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．よって，A は可算コンパクトである．

点列コンパクト性について示す．X を点列コンパクトとし，A 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．これを X 上の点列とみなすと，X の点列コンパクト性より（X の点列としての）収束部分列 $(x_n)_{n\in S}$ がとれる．この部分列の極限点 $x \in X$ をとると，$x \in \overline{A} = A$ だから（命題 6.35 (1)），$(x_n)_{n\in S}$ は A 上の点列としても x に収束する（系 6.39）．よって，A は点列コンパクトである．□

命題 7.60　可算コンパクト空間【点列コンパクト空間】の連続像は可算コンパクト【点列コンパクト】である．

証明　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．

可算コンパクト性について示す．X が可算コンパクトであるとし，Y の可算開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ を任意にとる．すると $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ は X の可算開被覆だから，X の可算コンパクト性より有限部分被覆 $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I'}$ が存在する．このとき，$\{V_i\}_{i\in I'}$ はもとの開被覆の有限部分被覆である．よって，Y は可算コンパクトである．

点列コンパクト性について示す．X が点列コンパクトであるとし，Y 上の点列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x_n) = y_n$ なる $x_n \in X$ をとる．X の点列コンパクト性より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列 $(x_n)_{n\in S}$ がとれる．f は連続だから，$(x_n)_{n\in S}$ が $x \in X$ に収束するとすると，$(y_n)_{n\in S}$ は $f(x) \in Y$ に収束する．よって，Y は点列コンパクトである．□

命題 7.61　位相空間 X の部分集合 $A_0, \dots, A_{n-1}$ が可算コンパクト【点列コンパクト】ならば，$A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ も可算コンパクト【点列コンパクト】である．

証明　可算コンパクト性について示す．$A_0, \dots, A_{n-1}$ が可算コンパクトであるとする．$\mathfrak{U}$ を X における $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ の可算開被覆とすると，$\mathfrak{U}$ は X における各 A_i の可算開被覆でもあるから，A_i の可算コンパクト性より，A_i の被覆としての有限部分被覆 $\mathfrak{U}'_i \subseteq \mathfrak{U}$ がとれる．このとき，$\mathfrak{U}'_0 \cup \dots \cup \mathfrak{U}'_{n-1}$ は $\mathfrak{U}$ の $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ の被覆としての有限部分被覆である．よって，$A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ は可算コンパクトである．

点列コンパクト性について示す．$A_0, \dots, A_{n-1}$ が点列コンパクトであるとする．X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．すると，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含む A_i が存在するから，このような A_i をとり，A_i に含まれる項だけを取り出した部分列 $(x_n)_{n\in S}$ を考える．これを A_i 上の点列と考えると，A_i の点列コンパクト性より，収束部分列 $(x_n)_{n\in T}$（$T \subseteq S$）がとれる．これは，もとの点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列にもなっている

[*11] より一般に，列型空間で同値性がいえる（系 A.13）．

（系 6.39）．よって，X は点列コンパクトである． □

定理 7.62 第一可算な可算コンパクト擬分離空間は正則である．特に，第一可算な可算コンパクト分離空間は正則分離である．

証明 X を第一可算な可算コンパクト擬分離空間とし，点 $x \in X$ とそれを含まない閉集合 $F \subseteq X$ を任意にとる．X の第一可算性より，x の可算開近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ がとれる．X が擬分離であることより，x と F の各点が開集合で分離されることに注意すると，$\{X \setminus \overline{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が F の X における開被覆であることがわかる．命題 7.59 より F は可算コンパクトだから，$\{X \setminus \overline{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の有限部分被覆 $\{X \setminus \overline{U_n}\}_{n \in S}$ がとれる．このとき，$U = \bigcap_{n \in S} U_n$ は x の開近傍であり，その閉包 $\overline{U} = \bigcap_{n \in S} \overline{U_n}$ は F と交わらない．これにより，x と F は開集合で分離される．よって，X は正則である．

後半の主張は，分離性が擬分離性を導くことからわかる． □

7.6.2 可算コンパクト空間において，点可算開被覆が有限部分被覆をもつこと

集合の部分集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が**点可算**であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，$x \in A_i$ なる $i \in I$ が可算個しか存在しないことをいう．位相空間 X が**メタ Lindelöf** であるとは，X の任意の開被覆が，ある点可算開被覆によって細分されることをいう．

定理 7.63（concious4410） 可算コンパクト空間の点可算開被覆は，有限部分被覆をもつ．

証明 X を可算コンパクト空間とし，$\mathfrak{U}$ を X の点可算開被覆とする．X の部分集合族 $\mathfrak{A}$ を，

$$\mathfrak{A} = \{A \subseteq X \mid \text{任意の } U \in \mathfrak{U} \text{ は } A \text{ とたかだか } 1 \text{ 点でしか交わらない}\}$$

と定める．各元 $A \in \mathfrak{A}$ は有限である．実際，任意の $x \in X$ について，x を含む $U \in \mathfrak{U}$ をとると，U は x の近傍であって A とたかだか 1 点でしか交わらないから，x は A の ω-集積点ではありえない．すなわち，A は ω-集積点をもたない．可算コンパクト空間の無限部分集合は常に ω-集積点をもつから（命題 7.57），A は有限である．

$\mathfrak{A}$ は包含関係に関して帰納的だから，Zorn の補題より，極大元 $M \in \mathfrak{A}$ がとれる．M の極大性より，

$$\mathfrak{V} = \{V \in \mathfrak{U} \mid V \cap M \neq \emptyset\}$$

は X を被覆する．一方で，$\mathfrak{U}$ の点可算性と M の有限性より $\mathfrak{V}$ は可算だから，X の可算コンパクト性より，$\mathfrak{V}$ の有限部分被覆 $\mathfrak{W}$ が存在する．この $\mathfrak{W}$ は，$\mathfrak{U}$ の有限部分被覆でもある． □

系 7.64 メタ Lindelöf な可算コンパクト空間は，コンパクトである．

証明 X をメタ Lindelöf な可算コンパクト空間とし，その開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．メタ Lindelöf 性より $\mathfrak{U}$ を細分する点可算開被覆 $\mathfrak{V}$ がとれ，定理 7.63 より $\mathfrak{V}$ の有限部分被覆 $\{V_0, \ldots, V_{n-1}\}$ がとれる．各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，V_i を含む $U_i \in \mathfrak{U}$ を 1 つずつとると，$\{U_0, \ldots, U_{n-1}\}$ は $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆である．よって，X はコンパクトである． □

可算コンパクト性からコンパクト性が従う空間のクラスとして，Lindelöf 空間（明らか）や擬距離化可能空間（定義 12.1）があるが，系 7.64 はその両方を含んでいる．実際，Lindelöf 空間は明らかにメタ Lindelöf であり，一方で Stone の定理（定理 10.27）より擬距離化可能空間はパラコンパクトだからメタ Lindelöf である．

7.6.3　可算コンパクト性・点列コンパクト性と積空間

定理 7.65　(1) 可算コンパクト空間とコンパクト空間との積は，可算コンパクトである．

(2) 可算コンパクト空間と点列コンパクト空間との積は，可算コンパクトである．

証明　(1)　X を可算コンパクト空間，Y をコンパクト空間とし，$X \times Y$ の可算開被覆 $\{W_i\}_{i \in I}$ を任意にとる．有限部分集合 $S \subseteq I$ に対して，X の部分集合 U_S を，

$$U_S = \left\{ x \in X \;\middle|\; \{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in S} W_i \right\}$$

と定める．U_S は，射影 $\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to Y$ を用いて

$$U_S = X \setminus \mathrm{pr}_Y \left((X \times Y) \setminus \bigcup_{i \in S} W_i \right)$$

とも書ける．Y のコンパクト性より pr_Y は閉写像だから（定理 7.16），U_S は X の開集合である．また，各点 $x \in X$ に対して $\{x\} \times Y$ はコンパクトだから，$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in S} W_i$ を満たす有限集合 $S \subseteq I$ は常に存在する．よって，$\{U_S\}_{S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)}$ は X の可算開被覆である．X は可算コンパクトだから，これは有限部分被覆 $\{U_{S_0}, \dots, U_{S_{n-1}}\}$ をもつ．$S = S_0 \cup \cdots \cup S_{n-1}$ と置く．

すると，$\{W_i\}_{i \in S}$ はもとの可算開被覆 $\{W_i\}_{i \in I}$ の有限部分被覆である．実際，$\{U_{S_0}, \dots, U_{S_{n-1}}\}$ は X を被覆するから $X \times Y = \bigcup_{k=0}^{n-1} (U_{S_k} \times Y)$ であり，$k = 0, \dots, n-1$ に対して $U_{S_k} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in S_k} W_i$ が成り立つから，$\{W_i\}_{i \in S_0 \cup \cdots \cup S_{n-1}}$ は $X \times Y$ を被覆する．よって，$X \times Y$ は可算コンパクトである．

(2)　X を可算コンパクト空間，Y を点列コンパクト空間とする．命題 7.57 より，$X \times Y$ 上の任意の点列 $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ が接触点をもつことを示せばよい．Y は点列コンパクトだから，$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列 $(y_n)_{n \in S}$ であって，ある点 $y \in Y$ に収束するものがとれる．X は可算コンパクトだから，対応する部分列 $(x_n)_{n \in S}$ はある接触点 $x \in X$ をもつ（命題 7.57）．

このとき，(x, y) は点列 $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ の接触点であり，したがってもとの点列 $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ の接触点でもある（命題 6.43 (2)）．このことを確かめよう．x の近傍 U と y の近傍 V を任意にとる．$(y_n)_{n \in S}$ は y に収束するから，十分大きい任意の $n \in S$ に対して $y_n \in V$ である．$(x_n)_{n \in S}$ は x を接触点とするから，いくらでも大きい $n \in S$ が存在して $x_n \in U$ を満たす．したがって，いくらでも大きい $n \in S$ が存在して $(x_n, y_n) \in U \times V$ となるから，(x, y) は $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ の接触点である．よって，$X \times Y$ は可算コンパクトである．□

定理 7.66　点列コンパクト空間の可算族の積は，点列コンパクトである．

証明　$\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を点列コンパクト空間の可算族とし，$X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$ と置く．

X 上の点列 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を任意にとる．これに対して，X 上の点列の列 $\boldsymbol{x}^m = (x^m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ を次のように再帰的に定める．

(i) $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}$ とする．

(ii) $\boldsymbol{x}^m$ が定まったとする．X_m は点列コンパクトだから，$\boldsymbol{x}^m$ の m-成分への射影 $\mathrm{pr}_m(\boldsymbol{x}^m) = (\mathrm{pr}_m(x^m_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は収束部分列をもつ．これに対応する $\boldsymbol{x}^m$ の部分列を $\boldsymbol{x}^{m+1}$ と定める．

このとき，X 上の点列 $\boldsymbol{x}' = (x^n_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は，もとの点列 $\boldsymbol{x}$ の部分列である．さらに，この点列の m-成分への射影 $\mathrm{pr}_m(\boldsymbol{x}')$ の第 $m+1$ 項以降は収束列 $\mathrm{pr}_m(\boldsymbol{x}^{m+1})$ の部分列だから，$\mathrm{pr}_m(\boldsymbol{x}')$ は収束する（命題 6.43 (1)）．よって，$\boldsymbol{x}'$ は収束する（系 6.10）．以上より，X は点列コンパクトである．□

最小の非可算基数を $\aleph_1$ と書き，それに対応する順序数を ω_1 と書く．

定理 7.67（Scarborough–Stone）　たかだか ω_1 個の点列コンパクト空間からなる族の積は，可算コンパクトである．

証明　$\{X_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ を点列コンパクト空間の族とし，$X=\prod_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$ と置く．X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとり，この点列が接触点をもつことを示せばよい（命題 7.57）．以下，点 x_n の α-成分を $x_{n,\alpha}$ と書く．

各 $\alpha<\omega_1$ に対して無限部分集合 $S_\alpha\subseteq\mathbb{N}$ をとり，次の条件が満たされるようにする．

(i) X_α 上の点列 $(x_{n,\alpha})_{n\in S_\alpha}$ は収束する．
(ii) 任意の $\beta<\alpha$ に対して，$S_\alpha\setminus S_\beta$ は有限集合である．

以下，超限再帰によってこのような S_α を構成する．

$\alpha=0$ のとき，X_0 の点列コンパクト性を用いて，$(x_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列 $(x_{n,0})_{n\in S_0}$ をとることによって S_0 を定める．

α が後続型順序数のとき，X_α の点列コンパクト性を用いて，$(x_{n,\alpha})_{n\in S_{\alpha-1}}$ の収束部分列 $(x_{n,\alpha})_{n\in S_\alpha}$（$S_\alpha$ は $S_{\alpha-1}$ の無限部分集合）をとることによって S_α を定める．このように定めた S_α は，明らかに (i) を満たす．また，再帰の仮定 (ii) より，任意の $\beta<\alpha$ に対して $S_{\alpha-1}\setminus S_\beta$ は有限だから，$S_\alpha\setminus S_\beta$ も有限である．よって，(ii) も満たされる．

α が極限順序数のときを考える．順序数の狭義単調増加列 $\beta_0<\beta_1<\cdots$ を，$\sup_{k\in\mathbb{N}}\beta_k=\alpha$ となるようにとる．狭義単調増加関数 $\phi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\phi(n)\in S_{\beta_0}\cap\cdots\cap S_{\beta_n}\tag{$*$}$$

が成り立つようにとる．これは，再帰の仮定 (ii) より，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$S_{\beta_0}\cap\cdots\cap S_{\beta_n}=S_{\beta_n}\setminus\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}(S_{\beta_n}\setminus S_{\beta_i})\right)\tag{$**$}$$

が無限集合であることから可能である．X_α の点列コンパクト性を用いて，$(x_{\phi(n),\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列 $(x_{n,\alpha})_{n\in S_\alpha}$（$S_\alpha$ は $\phi(\mathbb{N})$ の無限部分集合）をとることによって S_α を定める．このように定めた S_α は，明らかに (i) を満たす．(ii) を確かめる．$\beta<\alpha$ を任意にとり，$\beta\le\beta_k$ を満たす $k\in\mathbb{N}$ をとる．S_α の任意の元は $\phi(n)$ という形に表せるが，($*$) より $n\ge k$ ならば $\phi(n)\in S_{\beta_k}$ だから，$S_\alpha\setminus S_{\beta_k}$ は有限である．再帰の仮定 (ii) より $S_{\beta_k}\setminus S_\beta$ も有限だから，$S_\alpha\setminus S_\beta$ も有限となり，(ii) は満たされる．

以上で，各 $\alpha<\omega_1$ に対して条件 (i), (ii) を満たす無限部分集合 $S_\alpha\subseteq\mathbb{N}$ が構成できた．(ii) より，任意の有限個の $\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-1}\in\omega_1$ に対して，$S_{\alpha_0}\cap\cdots\cap S_{\alpha_{k-1}}$ が無限集合であることに注意する（($**$) と同様の議論によりわかる）．

各 $\alpha<\omega_1$ に対して点列 $(x_{n,\alpha})_{n\in S_\alpha}$ の極限点を 1 つ選び，y_α とする（(i) より可能である）．すると，点 $y=(y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ はもとの点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点である．これを見るために，y の標準近傍基の元 $U=\prod_{\alpha<\omega_1}U_\alpha$ を任意にとり，α_0, …, α_{k-1} を除く $\alpha<\omega_1$ に対しては $U_\alpha=X_\alpha$ であるとする．各 $i\in\{0,\ldots,k-1\}$ に対して $(x_{n,\alpha_i})_{n\in S_{\alpha_i}}$ は y_α に収束するから，十分大きい任意の $n\in S_{\alpha_0}\cap\cdots\cap S_{\alpha_{k-1}}$ に対して $x_{n,\alpha_i}\in U_{\alpha_i}$（$i\in\{0,\ldots,k-1\}$）であり，したがって $x_n\in U$ である．よって，y は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点である．□

第 8 章

パラコンパクト空間

8.1　パラコンパクト空間

定義 8.1（パラコンパクト空間）　X を位相空間とする．

(1) X が**メタコンパクト**であるとは，X の任意の開被覆がある点有限開被覆によって細分されることをいう．
(2) X が**パラコンパクト**であるとは，X の任意の開被覆がある局所有限開被覆によって細分されることをいう．
(3) X が**強パラコンパクト**であるとは，X の任意の開被覆がある星有限開被覆によって細分されることをいう．

明らかに，コンパクト空間は強パラコンパクトであり，強パラコンパクト空間はパラコンパクトであり，パラコンパクト空間はメタコンパクトである．また，$\mathfrak{B}$ が位相空間 X の開基であるとき，X がメタコンパクト・パラコンパクト・強パラコンパクトであることを示すためには，$\mathfrak{B}$ の元からなる開被覆が常に局所有限・星有限開被覆によって細分されることを見ればよい．これは，開基の性質から容易にわかる．位相空間 X とその部分空間 A について，もし任意の A の X における開被覆がある A の X における点有限・局所有限・星有限開被覆によって細分されるならば，A はそれぞれメタコンパクト・パラコンパクト・強パラコンパクトである．

位相空間 X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を細分する局所有限開被覆 $\{V_j\}_{j\in J}$ が存在すれば，それから $\{U_i\}_{i\in I}$ を一対一細分する局所有限開被覆 $\{W_i\}_{i\in I}$ が構成できる．具体的には，各 $j\in J$ に対して $V_j\subseteq U_{\phi(i)}$ となるような写像 $\phi\colon J\to I$ をとり，

$$W_i=\bigcup_{j\in\phi^{-1}(\{i\})}V_j$$

と定めればよい．したがって，X がパラコンパクトならば，X の任意の開被覆はある局所有限開被覆によって一対一細分されることになる．

命題 8.2　X をパラコンパクト空間【メタコンパクト空間，強パラコンパクト空間】，A を X の閉部分空間とする．このとき，任意の A の X における開被覆に対して，それを細分する A の X における局所有限【点有限，星有限】開被覆が存在する．特に，A はパラコンパクト【メタコンパクト，強パラコンパクト】である．

証明　$\mathfrak{U}$ を X における A の開被覆とすると，$\mathfrak{U}\cup\{X\setminus A\}$ は X の開被覆だから，与えられた条件より，$\mathfrak{U}\cup\{X\setminus A\}$ を細分する X の局所有限【点有限，星有限】開被覆 $\mathfrak{V}$ が存在する．$\mathfrak{V}$ の元のうち $X\setminus A$ に含まれないものの全体は，$\mathfrak{U}$ を細分する，A の X における局所有限【点有限，星有限】開被覆である．　□

命題 8.3　位相空間族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ はパラコンパクト【メタコンパクト，強パラコンパクト】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i はパラコンパクト【メタコンパクト，強パラコンパクト】である．

証明　証明はどれもほとんど同様だから，パラコンパクト性についてのみ示す．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の閉部分空間とみなせる（命題 3.30 (2)）から，命題 8.2 より，X がパラコンパクトならば各 X_i もパラコンパクトである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i はパラコンパクトであるとする．X の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．各 $i \in I$ に対して，$\{U \cap X_i\}_{U\in\mathfrak{U}}$ は X_i の開被覆だから，これを細分する X_i の局所有限開被覆 $\mathfrak{V}_i$ がとれる．このとき，$\bigcup_{i\in I} \mathfrak{V}_i$ は $\mathfrak{U}$ を細分する X の局所有限開被覆である．よって，X はパラコンパクトである．□

補題 8.4　X をパラコンパクト空間，F を X の閉集合，A を X の部分集合とする．任意の点 $x \in F$ に対して x と A が開集合で分離されるならば，F と A は開集合で分離される．

証明　X の開集合であってその閉包が A と交わらないようなもの全体を $\mathfrak{U}$ とすると，任意の $x \in F$ に対して x と A が開集合で分離されることより，$\mathfrak{U}$ は F の X における開被覆である．よって，命題 8.2 より，$\mathfrak{U}$ を細分する F の X における局所有限開被覆 $\mathfrak{V}$ がとれる．局所有限な部分集合族が閉包保存であること（命題 2.36）より $\overline{\bigcup_{V\in\mathfrak{V}} V} = \bigcup_{V\in\mathfrak{V}} \overline{V} \subseteq X \setminus A$ だから，開集合 $\bigcup_{V\in\mathfrak{V}} V$, $X \setminus \overline{\bigcup_{V\in\mathfrak{V}} V}$ は F と A を分離する．□

次の命題は定理 5.43「任意の開被覆が閉包保存な開被覆によって細分されるような位相空間は，擬分離ならば正則かつ正規である」の系だが，ここでは直接の証明を与えておく．

命題 8.5　パラコンパクト擬分離空間は正則かつ正規である．特に，パラコンパクト分離空間は正規分離であり，パラコンパクト正則空間は正規である．

証明　閉集合の点とそれに属さない点が常に識別されることに注意すれば，正則性・正規性ともに補題 8.4 からパラコンパクト擬分離空間が正則であることがわかり，ふたたび補題 8.4 を用いればパラコンパクト正則空間が正規であることがわかる．

後半の主張は，分離性や正則性が擬分離性を導くことからわかる．□

8.2　Michael の定理

補題 8.6　X を位相空間，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ を X の部分集合族とする．$\mathfrak{A}$ が X の局所有限な被覆であり，$\mathfrak{A}$ の各元が $\mathfrak{B}$ の有限個の元としか交わらないならば，$\mathfrak{B}$ は局所有限である．

証明　任意にとった点 $x \in X$ に対して，$\mathfrak{A}$ の元のうち有限個（$A_0, \ldots, A_{n-1}$ とする）としか交わらない x の近傍 U をとる．$B \in \mathfrak{B}$ が U と交わるとすると，$\mathfrak{A}$ が X の被覆であることより，$U \cap B \cap A_i \neq \emptyset$ なる $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ がとれる．ここで，もし U と交わる $\mathfrak{B}$ の元が無限個あるとすると，ある $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ については無限個の $B \in \mathfrak{B}$ に対して $U \cap B \cap A_i \neq \emptyset$ でなければならないが，これは $\mathfrak{A}$ の各元が $\mathfrak{B}$ の元のうち有限個としか交わらないという仮定に矛盾する．したがって，U と交わる $\mathfrak{B}$ の元は有限個しかない．よって，$\mathfrak{B}$ は局所有限である．□

補題 8.7　位相空間 X の任意の可算開被覆 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，X の局所有限な可算被覆 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を一対一に細分するものが存在する．

証明 $A_n = (U_0 \cup \cdots \cup U_{n-1} \cup U_n) \setminus (U_0 \cup \cdots \cup U_{n-1})$ と置けばよい． □

定理 8.8（Michael の定理） 正則空間 X に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) X はパラコンパクトである．
(b) X の任意の開被覆は，σ-局所有限な開被覆によって細分される．
(c) X の任意の開被覆は，局所有限な被覆によって細分される．
(d) X の任意の開被覆は，局所有限な閉被覆によって細分される．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (c) (b) が成り立つとして，X の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．(b) より，$\mathfrak{U}$ を細分する σ-局所有限な開被覆 $\mathfrak{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{V}_n$（各 $\mathfrak{V}_n$ は局所有限）がとれる．$\mathfrak{V}_n$ のすべての元の合併を V_n とすると，補題 8.7 より，X の局所有限な被覆 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を一対一に細分するものがとれる．ここで

$$\mathfrak{B} = \{V \cap A_n \mid n \in \mathbb{N},\ V \in \mathfrak{V}_n\}$$

と置けば，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{U}$ を細分する局所有限な被覆である．よって，(c) が成り立つ．

(c) $\Longrightarrow$ (d) (c) が成り立つとして，X の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．X は正則だから，命題 5.30 より，X の開被覆 $\mathfrak{V}$ であって $\overline{\mathfrak{V}}$ が $\mathfrak{U}$ を細分するものがとれる．さらに (c) より，$\mathfrak{V}$ を細分する局所有限な被覆 $\mathfrak{A}$ がとれる．このとき，$\overline{\mathfrak{A}}$ は $\mathfrak{U}$ を細分する局所有限な閉被覆になっている（局所有限性については命題 2.35 を用いた）．よって，(d) が成り立つ．

(d) $\Longrightarrow$ (a) (d) が成り立つとして，X の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．(d) より，$\mathfrak{U}$ を細分する局所有限な被覆 $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i\in I}$（これは閉である必要はない）がとれる．$\mathfrak{A}$ は局所有限だから，「$\mathfrak{A}$ の元のうち有限個としか交わらない開集合の全体」は X の開被覆をなす．よって，ふたたび (d) より，その開被覆を細分する局所有限な閉被覆 $\mathfrak{F}$ がとれる．すると，$\mathfrak{F}$ の各元は，$\mathfrak{A}$ の元のうち有限個としか交わらない．

各 $i \in I$ に対して

$$\mathfrak{F}_i = \{F \in \mathfrak{F} \mid F \cap A_i = \emptyset\}$$

と置き，$\mathfrak{F}_i$ のすべての元の合併を F_i とする．$\mathfrak{F}$ が局所有限だから $\mathfrak{F}_i$ も局所有限，したがって閉包保存なので（命題 2.36），F_i は閉集合である．また，定義より $F_i \cap A_i = \emptyset$ である．

各 $i \in I$ に対して，A_i を含む $\mathfrak{U}$ の元を 1 つ選んで U_i と置く．このとき，$\mathfrak{U}' = \{U_i \setminus F_i\}_{i\in I}$ が $\mathfrak{U}$ を細分する局所有限な開被覆であることを示そう．$\mathfrak{U}'$ が $\mathfrak{U}$ を細分すること，$\mathfrak{U}'$ の各元が開集合であることは明らかである．$\mathfrak{U}'$ が X を被覆することは，$\mathfrak{A}$ は X を被覆し，$A_i \subseteq U_i \setminus F_i$ であることからわかる．最後に，$\mathfrak{U}'$ の局所有限性を示す．$F \in \mathfrak{F}$ が $U_i \setminus F_i$ と交わるためには，F は A_i と交わらなければならない．$\mathfrak{F}$ の各元は $\mathfrak{A}$ の元のうち有限個としか交わらないのだったから，$\mathfrak{F}$ の各元は $\mathfrak{U}'$ の元のうち有限個としか交わらない．$\mathfrak{F}$ は局所有限な被覆だったから，補題 8.6 より $\mathfrak{U}'$ も局所有限である．以上より，$\mathfrak{U}'$ は $\mathfrak{U}$ を細分する局所有限な開被覆である．よって，(a) が成り立つ． □

系 8.9 パラコンパクト擬分離空間の σ-閉部分空間はパラコンパクト擬分離である．[*1]

証明 X をパラコンパクト擬分離空間とし，その σ-閉部分空間 $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$（各 F_n は閉集合）がパラコンパクトであることを示す．命題 8.5 より X は正則，したがって A も正則だから，Michael の定理（定理 8.8）より，A の任意の開被覆が σ-局所有限な開被覆をもつことを示せばよい．

X における A の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．命題 8.2 (1) より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathfrak{U}$ を細分する F_n の（X

[*1] 付録 B で，1 の分割を用いた，より見通しのよい証明を与える（定理 B.16）．

における）局所有限開被覆 $\mathfrak{V}_n$ が存在する．このとき，$\mathfrak{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{V}_n$ は $\mathfrak{U}$ を細分する σ-局所有限な A の開被覆である．□

8.3　パラコンパクト性を導く条件

定理 8.10（森田の定理） Lindelöf 正則空間は強パラコンパクトである．[*2]

証明　X を Lindelöf 正則空間とし，$\mathfrak{U}$ を X の開被覆とする．命題 5.30 より，X の開被覆 $\mathfrak{U}'$ であって $\overline{\mathfrak{U}'}$ が $\mathfrak{U}$ を細分するようなものがとれる．X の Lindelöf 性より可算部分被覆 $\{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{U}'$ がとれ，定義より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n \in \mathfrak{U}$ であって $\overline{U'_n} \subseteq U_n$ を満たすものがとれる．さらに，Lindelöf 正則空間は正規（命題 7.53）だから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，開集合列 $\{V_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ であって

$$\overline{U'_n} \subseteq V_{n,0} \subseteq \overline{V_{n,0}} \subseteq V_{n,1} \subseteq \overline{V_{n,1}} \subseteq \cdots \subseteq U_n$$

を満たすものがとれる．

さて，開集合列 $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を

$$W_k = \bigcup_{n=0}^{k-1} V_{n,k}$$

と定めると，$\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は増大列であり，その合併は X である．さらに，開集合族 $\mathfrak{V} = \{V'_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N},\, n<k}$ を

$$V'_{n,k} = V_{n,k} \cap (W_k \setminus \overline{W_{k-2}})$$

と定める（ただし，$W_{-1} = W_{-2} = \emptyset$ とみなす）．このとき，$\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ を細分する星有限な開被覆であることを示す．$\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ を細分することは明らかである．また，定義より $|i-j| \geq 2$ ならば任意の $m < i$，$n < j$ に対して $V'_{m,i} \cap V'_{n,j} = \emptyset$ だから，$\mathfrak{V}$ は星有限である．最後に，$\mathfrak{V}$ が X を被覆することを見る．点 $x \in X$ にとると，$x \in W_k \setminus W_{k-1} \subseteq W_k \setminus \overline{W_{k-2}}$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ がとれる．このとき $x \in W_k = \bigcup_{n=0}^{k-1} V_{n,k}$ だから，$x \in V_{n,k}$ を満たす $n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ がとれる．すると $x \in V'_{n,k}$ だから，$\mathfrak{V}$ は X を被覆する．以上より，X は強パラコンパクトである．□

定理 8.11　Lindelöf な強局所コンパクト空間は強パラコンパクトである．

証明　X を Lindelöf な強局所コンパクト空間とする．命題 7.51 (2) より X は σ-コンパクトだから，X のコンパクト集合の増大列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ となるものがとれる．

次に，X の開集合の増大列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，次のように再帰的に定める（これは，命題 7.27 (2) より可能である）：

> V_{n-1} が定まったとき，$K_n \cup \overline{V_{n-1}}$ を含む強相対コンパクトな開集合を 1 つとり，V_n とする（ただし，$V_{-1} = \emptyset$ とみなす）．

定義より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $K_n \subseteq V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq V_{n+1}$ が成り立つ．特に，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = X$ である．さらに，X の部分集合列 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$L_n = \overline{V_n} \setminus V_{n-1}, \quad W_n = V_{n+1} \setminus \overline{V_{n-2}}$$

[*2] 「Lindelöf 正則空間はパラコンパクトである」ことならば，Michael の定理から簡単に従う：X を Lindelöf 正則空間とする．Lindelöf 性より，X の任意の開被覆は可算部分被覆をもつ．可算部分被覆は明らかにもとの被覆の σ-局所有限な細分になっているから，X の正則性と Michael の定理（定理 8.8）より，X はパラコンパクトである．

と定める（ただし，$V_{-1} = V_{-2} = \emptyset$ とみなす）．L_n がコンパクト，W_n が開集合であり，$L_n \subseteq W_n$，$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n = X$，$|m-n| \geq 3$ ならば $W_m \cap W_n = \emptyset$ であることが容易に確かめられる．

さて，$\mathfrak{U}$ を X の任意の開被覆とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{U \cap W_n\}_{U \in \mathfrak{U}}$ はコンパクト集合 L_n の開被覆だから，有限部分被覆 $\mathfrak{U}'_n$ がとれる．このとき，$\mathfrak{U}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{U}'_n$ は $\mathfrak{U}$ を細分する星有限開被覆である．よって，X は強パラコンパクトである．□

系 8.12　Lindelöf な局所コンパクト擬分離空間は強パラコンパクトである．

証明　局所コンパクト擬分離空間は強局所コンパクトだから，主張は定理 8.11 に帰着される．局所コンパクト擬分離空間は完全正則であり（定理 7.26），特に正則だから，森田の定理（定理 8.10）に帰着させることもできる．□

補題 8.13　コンパクト空間の空でない集合からなる局所有限開被覆は，有限である．

証明　X をコンパクト空間とし，$\mathfrak{U}$ を X の空でない集合からなる局所有限開被覆とする．X の開集合であって $\mathfrak{U}$ の有限個の元としか交わらないようなもの全体を $\mathfrak{V}$ とすると，$\mathfrak{U}$ の局所有限性より，$\mathfrak{V}$ は X を被覆する．よって，X のコンパクト性より，$\mathfrak{V}$ の有限部分被覆 $\{V_0, \ldots, V_{n-1}\}$ が存在する．$\mathfrak{U}$ の各元は空でないからいずれかの V_i と交わるが，一方で各 V_i が交わる $\mathfrak{U}$ の元は有限個だから，$\mathfrak{U}$ は有限である．□

定理 8.14　強局所コンパクト空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) X は σ-コンパクト空間の族の和空間として表せる．
(b) X は強パラコンパクトである．
(c) X はパラコンパクトである．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$X = \coprod_{i \in I} X_i$ であり，各 X_i は σ-コンパクトであるとする．各 X_i は Lindelöf でもある（命題 7.51）．また，各 X_i は強局所コンパクト空間の閉部分空間だから，強局所コンパクトである（命題 7.29 (2)）．よって，定理 8.11 より各 X_i は強パラコンパクトであり，したがってその和空間 X も強パラコンパクトである（命題 8.3）．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　X がパラコンパクトな強局所コンパクト空間であるとする．強局所コンパクト性より，X の強相対コンパクトな開集合全体は X の開被覆である．パラコンパクト性より，これを細分する局所有限開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ がとれる．このとき，各 U_i はすべて強相対コンパクトな開集合である．

集合の列 $A_0, \ldots, A_n$ が鎖であるとは，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ であることをいう．I 上の同値関係 $\sim$ を，

$$i \sim j \iff i = i_0,\ \ldots,\ i_n = j \in I \text{ であって，} U_{i_0},\ \ldots,\ U_{i_n} \text{ が鎖をなすものが存在する}$$

と定める．各同値類 $S \in I/{\sim}$ に対して $X_S = \bigcup_{i \in S} U_i$ と置くと，分解 $X = \coprod_{S \in I/\sim} X_S$ が得られる．

各 X_S が σ-コンパクトであることを示そう．$\mathfrak{U}$ の局所有限性と補題 8.13 より，各 U_i に対して，コンパクト集合 $\overline{U_i}$ と交わる $\mathfrak{U}$ の元は有限個である．よって帰納法により，同値類 S は可算であることがわかる．$X_S = \bigcup_{i \in S} U_i = \bigcup_{i \in S} \overline{U_i}$ であり，各 U_i は強相対コンパクトだったから，X_S は σ-コンパクトである．□

定理 8.15　σ-コンパクト擬分離空間はメタコンパクトである．

証明　X を σ-コンパクト擬分離空間とする．X のコンパクト集合の増大列 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = X$ を満たすものをとっておく．擬分離空間においてコンパクト集合の閉包はコンパクトだから（系 7.8 (1)），必要ならば K_n をその閉包で置き換えて，K_n は閉集合であるとしてよい．

X の開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．各 K_n はコンパクトだから，$\mathfrak{U}$ の（X における）K_n の開被覆としての有限部分被覆 $\mathfrak{U}_n \subseteq \mathfrak{U}$ がとれる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathfrak{V}_n = \{U \setminus K_{n-1}\}_{U \in \mathfrak{U}_n}$$

と置く（ただし $K_{-1} = \emptyset$ とする）．K_{n-1} は閉集合としたから，$\mathfrak{V}_n$ の各元は開集合である．$\mathfrak{V}_n$ は（X における）$K_n \setminus K_{n-1}$ の開被覆であり，$\mathfrak{U}_n$ を細分する．したがって，$\mathfrak{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{V}_n$ は X の開被覆であり，$\mathfrak{U}$ を細分する．$\mathfrak{V}$ が点有限であることを示そう．$x \in X$ を任意にとると，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in K_n$ となる．すると，$\mathfrak{V}$ の元のうち x を含みうるのは，$\mathfrak{V}_0, \dots, \mathfrak{V}_n$ の元のみであり，これは有限個しかない．よって，$\mathfrak{V}$ は点有限である．以上より，X はメタコンパクトである． □

8.4　パラコンパクト性と積空間

定理 8.16　パラコンパクト空間とコンパクト空間との積は，パラコンパクトである．

証明　X をパラコンパクト空間，Y をコンパクト空間とする．$X \times Y$ のパラコンパクト性を示すためには，$\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$（$U_i$, V_i はそれぞれ X, Y の開集合）という形の $X \times Y$ の開被覆が，常に局所有限開被覆によって細分されることを示せば十分である．

有限部分集合 $S \subseteq I$ に対して，X の部分集合 U_S を，

$$U_S = \left\{ x \in X \,\middle|\, \{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in S} (U_i \times V_i) \right\}$$

と定める．U_S は，射影 $\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to X$ を用いて

$$U_S = X \setminus p\left((X \times Y) \setminus \bigcup_{i \in S} (U_i \times V_i) \right)$$

とも書ける．Y のコンパクト性より pr_Y は閉写像だから（定理 7.16），U_S は X の開集合である．また，各点 $x \in X$ に対して $\{x\} \times Y$ はコンパクトだから，$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in S} (U_i \times V_i)$ を満たす有限集合 $S \subseteq I$ は常に存在する．よって，$\{U_S\}_{S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)}$ は X の開被覆である．X はパラコンパクトだから，これを一対一細分する局所有限開被覆 $\{U'_S\}_{S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)}$ がとれる[*3]．

以上の準備のもとで，$X \times Y$ の開集合族

$$\mathfrak{W} = \{U'_S \times V_i\}_{S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I),\, i \in S}$$

を考える．これは，$\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ を細分する $X \times Y$ の局所有限開被覆である．このことを示そう．まず，$\{U'_S\}_{S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)}$ は X を被覆し，各 $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して $\{V_i\}_{i \in S}$ は Y を被覆するので，$\mathfrak{W}$ は $X \times Y$ を被覆する．次に，任意の $S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ と $i \in S$ との組に対して $U'_S \times V_i \subseteq U_S \times V_i \subseteq U_i \times V_i$ だから，$\mathfrak{W}$ は $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ を細分する．最後に，$\{U'_S\}_{S \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)}$ は局所有限であり，S は有限集合のみを動くので，$\mathfrak{W}$ は局所有限である． □

定理 8.17　パラコンパクト空間と強局所コンパクトなパラコンパクト空間との積は，パラコンパクトである．

証明　X をパラコンパクト空間，Y を強局所コンパクトなパラコンパクト空間とする．$X \times Y$ の開被覆 $\mathfrak{W}$ を任意にとり，これを細分する局所有限開被覆が存在することを示す．Y の強局所コンパクト性とパラコンパクト性を用いて，強相対コンパクトな開集合からなる Y の局所有限開被覆 $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ をとっておく．

[*3] 「一対一」細分がとれることについては，定義 8.1 の後の注意書きを参照のこと．

定理 8.16 より，各 $X \times \overline{V_i}$ はパラコンパクトである．よって，$X \times \overline{V_i}$ の局所有限開被覆 $\mathfrak{W}'_i$ であって，$\mathfrak{W}$ を細分するものが存在する（$\mathfrak{W}'_i$ の各元は $X \times \overline{V_i}$ の開集合だが，$X \times Y$ の開集合とは限らないことに注意する）．ここで

$$\mathfrak{W}' = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{W}'_i$$

と置くと，集合族 $\mathfrak{W}'$ は $X \times Y$ において局所有限である．このことを見ておく．$(x, y) \in X \times Y$ を任意にとる．まず，$\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ は局所有限だから，y の近傍 N であって有限個の V_i（$i = i_0, \ldots, i_{n-1}$ とする）としか交わらないものがとれる．次に，各 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，(x, y) の近傍 M_k であって $\mathfrak{W}'_{i_k}$ の元のうち有限個としか交わらないものをとる．これは可能である．実際，$y \in \overline{V_{i_k}}$ ならば $\mathfrak{W}'_{i_k}$ の局所有限性を用いればよく，$y \notin \overline{V_{i_k}}$ ならば $M_i = X \times (Y \setminus \overline{V_{i_k}})$ とすればよい．このとき，$(X \times N) \cap M_0 \cap \cdots \cap M_{n-1}$ は (x, y) の近傍であり，$\mathfrak{W}'$ の元のうち有限個としか交わらない．

以上の準備のもとで，X の集合族 $\mathfrak{W}''$ を

$$\mathfrak{W}'' = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{W}'_i|_{X \times V_i} = \{W \cap (X \times V_i)\}_{i \in I,\, W \in \mathfrak{W}'_i}$$

と定めると，$\mathfrak{W}''$ は $\mathfrak{W}$ を細分する局所有限開被覆である． □

定理 8.18　パラコンパクト分離空間と σ-コンパクト正則分離空間との積は，パラコンパクト分離である．

証明　X をパラコンパクト分離空間，Y を σ-コンパクト正則分離空間として，$X \times Y$ がパラコンパクト分離であることを示す．σ-コンパクト空間は Lindelöf であり（命題 7.51），正則 Lindelöf 空間は正規だから（命題 7.53），Y は完全正則分離である．よって，Y はあるコンパクト分離空間 K に埋め込める（定理 7.19）．パラコンパクト空間とコンパクト空間との積はパラコンパクトだから（定理 8.16），$X \times K$ はパラコンパクト分離である．また，Y は σ-コンパクトだから K の σ-閉集合であり，したがって $X \times Y$ は $X \times K$ の σ-閉集合である．よって，系 8.9 より，$X \times Y$ はパラコンパクト分離である． □

8.5　パラコンパクト性と可算性

7.6.2 節で述べた定義の繰り返しになるが，メタ Lindelöf 空間の定義を思い出しておく．集合の部分集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が**点可算**であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，$x \in A_i$ なる $i \in I$ が可算個しか存在しないことをいう．位相空間 X が**メタ Lindelöf** であるとは，X の任意の開被覆が，ある点可算開被覆によって細分されることをいう．

命題 8.19　可分空間において，空集合を含まない点可算開被覆は常に可算である．

証明　X を可分空間とし，X の可算稠密集合 D をとっておく．空集合を含まない X の点可算開被覆 $\mathfrak{U}$ を任意にとる．$\mathfrak{U}$ の各元は必ず D の点を含み，かつ D の各点は $\mathfrak{U}$ の元のうち可算個にしか含まれないから，$\mathfrak{U}$ は可算である． □

系 8.20　可分メタ Lindelöf 空間は Lindelöf である． □

命題 8.21　可算鎖条件を満たす位相空間において，空集合を含まない局所有限開被覆は常に可算である．

証明　位相空間 X は可算鎖条件を満たすとし，空集合を含まない X の局所有限開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を任意にとる．$\mathfrak{U}$ の局所有限性より，各 $i \in I$ に対して，空でない開集合 $V_i \subseteq U_i$ であって有限個の $\mathfrak{U}$ の元としか交わらないものがとれる．$\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ と置く．

集合の列 $A_0, \ldots, A_n$ が鎖であるとは，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ であることをいう．I 上の同値関係 $\sim$ を，

$$i \sim j \iff i = i_0, \ldots, i_n = j \in I \text{ であって，} V_{i_0}, \ldots, V_{i_n} \text{ が鎖をなすものが存在する}$$

と定める．各 V_i は有限個の $\mathfrak{U}$ の元としか交わらず，したがって有限個の $\mathfrak{V}$ の元としか交わらない．よって，帰納法により，各同値類 $S \in I/{\sim}$ が可算であることがわかる．一方で，$\{\bigcup_{i \in S} V_i\}_{S \in I/\sim}$ は互いに交わらない空でない開集合の族だから，可算鎖条件より $I/{\sim}$ は可算である．よって，I は可算である． □

系 8.22　可算鎖条件を満たすパラコンパクト空間は Lindelöf である． □

第 9 章

連結空間

9.1 連結空間

定義 9.1（連結空間） 位相空間 X が連結であるとは，X が空でなく，かつ X が空でない 2 つの交わらない開集合の合併として書けないことをいう．

連結性の定義は，「空でなく，空でない 2 つの交わらない閉集合の合併として書けない」あるいは「空でなく，開かつ閉な部分空間が $\emptyset$ と X しか存在しない」ともいいかえられる．

命題 9.2 連結空間の連続像は連結である．

証明 X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．$Y = \emptyset$ ならば $X = \emptyset$ である．また，Y が空でない 2 つの交わらない開集合 O_0, O_1 の合併として書けたとすると，X は空でない 2 つの交わらない開集合 $f^{-1}(O_0), f^{-1}(O_1)$ の合併として書けることになる．すなわち，Y が連結でなければ X も連結でない．対偶をとれば主張が従う． □

命題 9.3 位相空間 X の連結部分集合 A に対して，$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ を満たす部分集合 $B \subseteq X$ は連結である．特に，連結集合の閉包は連結である．

証明 $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ であるとき，B が連結でなければ A も連結でないことを示す．$B = \emptyset$ ならば $A = \emptyset$ である．また，B が連結でなければ，空でない 2 つの交わらない B の開集合 O_0, O_1 が存在して $B = O_0 \cup O_1$ と書ける．このとき，$O_0 \cap A$, $O_1 \cap A$ は 2 つの交わらない A の開集合である．さらに，$A \subseteq B$ より $(O_1 \cap A) \cup (O_2 \cap A) = A$ であり，$B \subseteq \overline{A}$ より $O_1 \cap A$ と $O_2 \cap A$ は空でないから，A は連結ではない． □

命題 9.4 X を位相空間とする．

(1) X の部分集合の空でない族 $\{A_i\}_{i\in I}$ について，各 A_i が連結かつ任意の $i, j \in I$ に対して $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ならば，$\bigcup_{i\in I} A_i$ も連結である．

(2) X の部分集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，各 A_n が連結かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ ならば，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ も連結である．

証明 (1) I と各 A_i は空でないので，$A = \bigcup_{i\in I} A_i$ も空でない．次に，A が空でない 2 つの交わらない開集合の合併として $A = O_0 \cup O_1$ と書けたとすると，ある A_i が空でない 2 つの交わらない開集合の合併として書けることを示す．このとき，O_0 と O_1 の双方と交わる A_i が存在する．実際，そのようなものが存在しないとすると，I を空でない 2 つの部分 I_0 と I_1 に分割でき，$O_0 = \bigcup_{i\in I_0} A_i$，$O_1 = \bigcup_{i\in I_1} A_i$ と書ける．しかし，これは任意の $i, j \in I$ に対して $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ であるという仮定に反する．さて，O_0 と O_1 の双方と交

わる A_i をとると，$O_0 \cap A_i$, $O_1 \cap A_i$ は空でない A_i の開集合であり，A_i を分割している．

(2)　(1) を再帰的に用いることで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ が連結であることがわかる．さらに $\{A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ に対してふたたび (1) を用いることで，$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の連結性がわかる．□

定義 9.5（連結成分，連結類）　位相空間 X の**連結成分**とは，X の極大な連結部分集合のことをいう．X の連結成分のうち点 $x \in X$ を含むものを，x の（X における）**連結類**[*1] といい，$C_X(x)$ あるいは単に $C(x)$ と書く．

X を位相空間，x を X の点とする．x を含む X の連結集合すべての合併を考えると，命題 9.4 (1) よりこれは連結だから，明らかにこれが x の一意な連結類 $C(x)$ となる．$C(x)$ は x を含む（極大なだけでなく）最大の連結集合である．また，ふたたび命題 9.4 (1) より，X の 2 つの連結成分は，一致するか互いに交わらないかのどちらかである．したがって，連結成分全体は X の分割を与え，X 上の関係

$$x \sim y \iff C(x) = C(y)$$

は同値関係である．

X が連結であるとは，X の連結成分がちょうど 1 つであることと同値である．したがって，X が連結であることを示すためには，X が空でなく，任意の 2 点 $x, y \in X$ に対してそれを含む連結集合が存在することを示せばよい（一方の点 x は固定してもよい）．

命題 9.6　X を位相空間，$x \in X$ とする．A が X の開かつ閉な集合で，x を含むならば，$C(x) \subseteq A$ である．

証明　$C(x) \cap A$ と $C(x) \setminus A$ は $C(x)$ の開集合であり，$C(x)$ の分割を与える．よって，$C(x)$ の連結性より，$C(x) \cap A$ と $C(x) \setminus A$ のどちらかは空である．$x \in C(x) \cap A$ より $C(x) \cap A$ は空でないから，$C(x) \setminus A = \emptyset$，すなわち $C(x) \subseteq A$ である．□

命題 9.7　位相空間の任意の連結成分は閉集合である．

証明　位相空間 X の連結成分 C について，命題 9.3 より $\overline{C}$ も X の連結部分集合となるので，連結成分の極大性より $\overline{C} \subseteq C$ でなければならない．よって，C は閉集合である．□

定理 9.8　位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は連結である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は連結である．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が連結ならば X は空でないから，各 X_i も空でない．したがって $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ だから，連結空間の連続像が連結である（命題 9.2）ことより，各 X_i は連結である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i は連結とする．各 X_i は空でないから，X も空でない．1 点 $a \in X$ を固定し，a とたかだか有限個の成分を除いて一致する X の点全体の集合を A とする．A が連結であることと A が X において稠密であることを示せば，命題 9.3 から X の連結性が従う．

A の連結性を示す．そのためには，任意の点 $x \in A$ に対して，a と x を含む A の連結部分集合があることを示せばよい．$a = x$ ならば明らかだから，$a \neq x$ とする．a と x は，$i_0, \ldots, i_{n-1}$-成分のみが異なり，他の成分は一致するとする．$k \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$i_0, \ldots, i_{k-1}$-成分が x と一致し，$i_0, \ldots, i_k$ 以外の成分が a と一致する X の点全体の集合を A_k とする．すると，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} \subseteq A$ である．また，各 A_k

*1 「連結類」は本稿だけの用語である．多くの場合，連結成分と連結類は用語上区別されずにどちらも「連結成分」と呼ばれる．

は X_{i_k} と同相（命題 3.28）だから連結であり，加えて $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ である．よって，命題 9.4 (2) より，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ は連結である．

A の稠密性を示す．X の標準開基の空でない元 $U = \prod_{i \in I} U_i$ を任意にとる．$i \in I \setminus \{i_0, \ldots, i_{n-1}\}$ に対して $U_i = X_i$ であるとする．このとき「i_0, ..., i_{n-1}-成分が x と一致し，それ以外の成分が a と一致する点」は A と U の両方に含まれるから，$A \cap U \neq \emptyset$ である．よって，A は X において稠密である．□

系 9.9　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．積空間の点 $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ の連結類は，

$$C(x) = \prod_{i \in I} C(x_i)$$

と表せる．

証明　定理 9.8 より，$\prod_{i \in I} C(x_i)$ は x を含む連結集合である．一方で，C が x を含む連結集合であれば，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_i(C)$ は x_i を含む連結集合であり（命題 9.2），したがって $\mathrm{pr}_i(C) \subseteq C(x_i)$ だから，$C \subseteq \prod_{i \in I} C(x_i)$ である．よって，$\prod_{i \in I} C(x_i)$ は x を含む最大の連結集合であり，$C(x)$ に等しい．□

9.2　局所連結空間

定義 9.10（局所連結空間）　位相空間 X が**局所連結**であるとは，各点 $x \in X$ に対して，x の連結近傍全体が x における近傍基をなすことをいう．

X が連結であっても局所連結であるとは限らないし，また局所連結であっても連結であるとは限らない．

命題 9.11　X を位相空間とする．

(1) X の各点が連結近傍をもつための必要十分条件は，X の各連結成分が開集合であることである．

(2) X が局所連結であるための必要十分条件は，X の任意の開部分空間の各連結成分が X の開集合であることである．

証明　(1)　点 $x \in X$ が連結近傍をもつことと $C(x)$ が x の近傍であることとは同値だから，X の各点が連結近傍をもつことと任意の $x \in X$ に対して $C(x)$ が x の近傍であることとは同値である．これは，X の各連結成分が開集合であることを意味する．

(2)　X が局所連結であるとは，任意の点 $x \in X$ とそれを含む開集合 U に対して，x の U における連結近傍が存在するということに他ならない．(1) より，これは X の任意の開部分空間の各連結成分が X の開集合であるということと同値である．□

系 9.12　位相空間 X が局所連結であれば，各点 $x \in X$ に対して，x の連結開近傍全体が x における近傍基をなす．

証明　命題 9.11 (2) より，局所連結空間 X の任意の点 x とその開近傍 U に対して，x を含む U の連結成分は x の開近傍となる．□

命題 9.13　局所連結空間の開部分空間は局所連結である．

証明　X を局所連結空間，A を X の開部分空間とし，点 $x \in A$ を任意にとる．連結集合からなる X における x の近傍基として $\mathfrak{C}$ がとれるとする．A は X の開部分空間だから，$\mathfrak{C}$ の元のうち A に含まれるもの全体は，A における x の近傍基をなす．よって，A は局所連結である．□

命題 9.14　位相空間族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ は局所連結である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は局所連結である．

証明　$X = \coprod_{i\in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の開部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），命題 9.13 より，X が局所連結ならば各 X_i も局所連結である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i が X の開部分空間とみなせること（命題 3.30 (2)）に注意する．$x \in X_i$ の X_i における連結集合からなる近傍基がとれたとすると，それがそのまま x の X における連結集合からなる近傍基にもなる．よって，各 X_i が局所連結ならば，X も局所連結である．□

補題 9.15　位相空間 X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ と Y の連結成分 D について，逆像 $f^{-1}(D)$ は，X のいくつかの連結成分の合併として書ける．

証明　点 $x \in f^{-1}(D)$ を任意にとり，その連結類 $C(x)$ を考える．$f(x) \in D$ だから，D は $f(x)$ の連結類である．一方で，$f(C(x))$ は $f(x)$ を含む連結集合だから，連結類の最大性より $f(C(x)) \subseteq D$，したがって $C(x) \subseteq f^{-1}(D)$ でなければならない．よって，$f^{-1}(D) = \bigcup_{x\in f^{-1}(D)} C(x)$ と書ける．□

命題 9.16　局所連結空間の商は局所連結である．特に，局所連結空間の開連続像および閉連続像は局所連結である．

証明　X を局所連結空間, $X/{\sim}$ を X の商空間とし, $\pi\colon X \to X/{\sim}$ を等化写像とする．命題 9.11 (2) より, 任意の開部分空間 $V \subseteq X/{\sim}$ の連結成分 D が $X/{\sim}$ の開集合であることを示せばよい．$\pi|_{\pi^{-1}(V)}\colon \pi^{-1}(V) \to V$ に対して補題 9.15 を用いることで，$\pi^{-1}(D)$ が $\pi^{-1}(V)$ のいくつかの連結成分の合併であることがわかる．$\pi^{-1}(V)$ は局所連結空間 X の開集合だから，命題 9.11 (2) より $\pi^{-1}(D)$ も X の開集合となる．よって，商位相の定義より，D は $X/{\sim}$ の開集合である．

後半の主張は，開連続全射および閉連続全射が沈め込みである（命題 3.27 (2)）ことから従う．□

定理 9.17　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ は局所連結である．
(b) すべての X_i は局所連結であり，かつ有限個を除いてすべて連結である．

証明　$X = \prod_{i\in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　射影 pr_i は開写像であった（命題 3.30 (1)）．よって，X が局所連結ならば，命題 9.16 より，その開連続像 $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ も局所連結である．

X が局所連結であるとして，有限個を除くすべての X_i が連結であることを示す．X の点 $x = (x_i)_{i\in I}$ を選び，x の連結近傍 C をとる．積位相の定義より，有限個の $i \in I$ を除いて $\mathrm{pr}_i(C) = X_i$ である．連結空間の連続像は連結（命題 9.2）だから，このとき，X_i は有限個を除いてすべて連結である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i は局所連結であるとし，さらに $i \in I \setminus I'$（I' は有限）に対して X_i は連結であるとする．X の点 $x = (x_i)_{i\in I}$ とその標準近傍基の元 $U = \prod_{i\in I} U_i$ を任意にとる．$i \in I \setminus I''$（I'' は有限）に対して $U_i = X_i$ であるとする．各 $i \in I' \cup I''$ に対して U_i に含まれる x_i の連結近傍 C_i をとり，$i \in I \setminus (I' \cup I'')$ に対しては $C_i = X_i$ と置く．すると，積位相の定義より $C = \prod_{i\in I} C_i$ は x の近傍であり，定理 9.8 より C は連結である．さらに，C は U に含まれる．よって，X は局所連結である．□

9.3　弧状連結空間

X を位相空間とする．X 上の**曲線**とは，連続写像 $\phi\colon [0,1] \to X$ のことをいう．点 $\phi(0), \phi(1)$ を，この曲線の**端点**という．曲線の 2 端点が x と y であるとき，この曲線は x と y を**結ぶ**という．

定義 9.18（弧状連結空間）　位相空間 X が**弧状連結**であるとは，X が空でなく，かつ任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して x と y を結ぶ X 上の曲線が存在することをいう．

命題 9.19　弧状連結空間は連結である．

証明　空でない，という条件については明らかである．弧状連結空間 X の任意の 2 点 $x, y \in X$ をとる．x と y を結ぶ曲線 ϕ をとると，$\phi([0,1])$ は連結空間の連続像だから連結であり（命題 9.2），さらに x と y を含む．よって，X は連結である．　□

命題 9.19 の逆は成り立たない．すなわち，連結空間が弧状連結であるとは限らない．

命題 9.20　弧状連結空間の連続像は弧状連結である．

証明　f を弧状連結空間 X から位相空間 Y への連続全射とする．$X \neq \emptyset$ より $Y \neq \emptyset$ である．次に，任意の 2 点 $y_0, y_1 \in Y$ と，$f(x_0) = y_0$，$f(x_1) = y_1$ なる点 $x_0, x_1 \in X$ をとる．X の弧状連結性より，x_0 と x_1 を結ぶ曲線 ϕ が存在する．このとき，$f \circ \phi$ は y_0 と y_1 を結ぶ曲線である．よって，Y は弧状連結である．　□

命題 9.21　X を位相空間とする．

(1) X の部分集合の空でない族 $\{A_i\}_{i \in I}$ について，各 A_i が弧状連結かつ任意の $i, j \in I$ に対して $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ならば，$\bigcup_{i \in I} A_i$ も弧状連結である．

(2) X の部分集合族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について，各 A_n が弧状連結かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ ならば，$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ も弧状連結である．

証明　(1)　I と各 A_i は空でないので，$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ も空でない．次に，点 $x \in A_i$，$y \in A_j$（$i, j \in I$）を任意にとる．仮定より，点 $z \in A_i \cap A_j$ がとれる．A_i, A_j の弧状連結性より，x と y を結ぶ A_i 上の曲線 ϕ，y と z を結ぶ A_j 上の曲線 ψ が存在する．このとき，ϕ と ψ を繋げたものは，x と y を結ぶ $\bigcup_{i \in I} A_i$ 上の曲線となる．よって，$\bigcup_{i \in I} A_i$ は弧状連結である．

(2)　(1) を再帰的に用いることで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ が弧状連結であることがわかる．さらに $\{A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ に対して (1) を用いることで，$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の弧状連結性がわかる．　□

定義 9.22（弧状連結成分）　位相空間 X の**弧状連結成分**とは，X の極大な弧状連結部分集合のことをいう．X の弧状連結成分のうち点 $x \in X$ を含むものを，x の（X における）**弧状連結類**[*2] といい，$\widetilde{C}_X(x)$ あるいは単に $\widetilde{C}(x)$ と書く．

X を位相空間，x を X の点とする．x を含む X の弧状連結集合すべての合併を考えると，命題 9.21 (1) よりこれは弧状連結だから，明らかにこれが x の一意な弧状連結類 $\widetilde{C}(x)$ となる．$\widetilde{C}(x)$ は x を含む（極大なだけでなく）最大の弧状連結集合である．また，ふたたび命題 9.4 (1) より，X の 2 つの弧状連結成分は，一致するか互いに交わらないかのどちらかである．したがって，弧状連結成分全体は X の分割を与え，X 上

[*2] 「弧状連結類」は本稿だけの用語である．多くの場合，弧状連結成分と弧状連結類は用語上区別されずにどちらも「弧状連結成分」と呼ばれる．

の関係

$$x \sim y \iff \widetilde{C}(x) = \widetilde{C}(y)$$

は同値関係である．

X が弧状連結であるとは，X の弧状連結成分が 1 つであること，すなわち，X が空でなく，かつ X の任意の 2 点の弧状連結類が一致することと同値である．したがって，X が弧状連結であることを示すためには，X が空でなく，任意の 2 点 $x, y \in X$ に対してそれを含む弧状連結集合が存在することを示せばよい（一方の点 x は固定してもよい）．

命題 9.23　X を位相空間，$x \in X$ とする．x の弧状連結類 $\widetilde{C}(x)$ は，x の連結類 $C(x)$ に含まれる．

証明　$\widetilde{C}(x)$ は弧状連結，したがって連結でもあるから（命題 9.19），連結類の最大性より，$\widetilde{C}(x) \subseteq C(x)$ である． □

命題 9.24　位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は弧状連結である．
(b) 任意の $i \in I$ に対して，X_i は弧状連結である．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が弧状連結ならば X は空でないから，各 X_i も空でない．したがって $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ だから，弧状連結空間の連続像が弧状連結である（命題 9.20）ことより，各 X_i は弧状連結である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i は弧状連結であるとする．各 X_i は空でないから，X も空でない．X の 2 点 $x = (x_i)_{i \in I} \in X$，$y = (y_i)_{i \in I} \in X$ を任意にとると，各 $i \in I$ に対して X_i の弧状連結性より x_i と y_i を結ぶ曲線 ϕ_i が存在する．このとき，$(\phi_i)_{i \in I} \colon [0,1] \to X$ は x と y を結ぶ曲線である．よって，X は弧状連結である． □

系 9.25　$\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．積空間の点 $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ の弧状連結類は，

$$\widetilde{C}(x) = \prod_{i \in I} \widetilde{C}(x_i)$$

と表せる．

証明　定理 9.17 より，$\prod_{i \in I} \widetilde{C}(x_i)$ は x を含む弧状連結集合である．一方で，C が x を含む弧状連結集合であれば，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_i(C)$ は x_i を含む弧状連結集合であり（命題 9.20），したがって $\mathrm{pr}_i(C) \subseteq \widetilde{C}(x_i)$ だから，$C \subseteq \prod_{i \in I} \widetilde{C}(x_i)$ である．よって，$\prod_{i \in I} \widetilde{C}(x_i)$ は x を含む最大の弧状連結集合であり，$\widetilde{C}(x)$ に等しい． □

9.4 局所弧状連結空間

定義 9.26（局所弧状連結空間）　位相空間 X が局所弧状連結であるとは，各点 $x \in X$ に対して，x の弧状連結近傍全体が x における近傍基をなすことをいう．

X が弧状連結であっても局所弧状連結であるとは限らないし，また局所弧状連結であっても弧状連結であるとは限らない．

命題 9.27　局所弧状連結空間は局所連結である．

証明　弧状連結空間が連結である（命題 9.19）ことから従う．　□

命題 9.28　X を位相空間とする．X が連結であり，各点 $x \in X$ が弧状連結近傍をもつとき，X は弧状連結である．特に，連結かつ局所弧状連結な空間は弧状連結である．

証明　X が連結かつ X の各点が弧状連結近傍をもつとする．連結性の定義より，X は空でない．また，X の各点が弧状連結近傍をもつことから，各点 $x \in X$ に対して $\widetilde{C}(x)$ はその点の近傍であり，したがって X の各弧状連結成分は開集合となる．よって，X の連結性より，X の弧状連結成分はただ 1 つである．これは，X が弧状連結であることを意味する．　□

命題 9.29　X を位相空間とする．

(1) X の各点が弧状連結近傍をもつための必要十分条件は，X の各弧状連結成分が開集合であることである．
(2) X が局所弧状連結であるための必要十分条件は，X の任意の開部分空間の各弧状連結成分が X の開集合であることである．

証明　(1)　点 $x \in X$ が弧状連結近傍をもつことと $\widetilde{C}(x)$ が x の近傍であることとは同値だから，X の各点が弧状連結成分をもつことと任意の $x \in X$ に対して $\widetilde{C}(x)$ が x の近傍であることは同値である．これは，X の各弧状連結成分が開集合であることを意味する．

(2)　X が局所弧状連結であるとは，任意の点 $x \in X$ とそれを含む開集合 U に対して，x の U における連結近傍が存在するということにほかならない．(1) より，これは X の任意の開部分空間の各弧状連結成分が開集合であることと同値である．　□

系 9.30　位相空間 X が局所弧状連結であれば，各点 $x \in X$ に対して，x の弧状連結開近傍全体が x における近傍基をなす．

証明　命題 9.29 より，局所弧状連結空間 X の任意の点 x とその開近傍 U に対して，x を含む U の弧状連結成分は x の開近傍となる．　□

命題 9.31　局所弧状連結空間の開部分空間は局所弧状連結である．

証明　X を局所弧状連結空間，A を X の開部分空間とし，点 $x \in A$ を任意にとる．弧状連結集合からなる X における x の近傍基として $\mathfrak{C}$ がとれるとする．A が開部分空間なので，$\mathfrak{C}$ の元のうち A に含まれるもの全体は，A における x の近傍基をなす．よって，A は局所弧状連結である．　□

命題 9.32　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は局所弧状連結である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は局所弧状連結である．

証明　$X = \coprod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の開部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），命題 9.31 より，X が局所弧状連結ならば各 X_i も局所弧状連結である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i が X の開部分空間とみなせること（命題 3.30 (2)）に注意する．$x \in X_i$ の X_i における弧状連結近傍がとれたとすると，それがそのまま x の X における弧状連結近傍にもなる．よって，各 X_i が局所弧状連結ならば，X も局所弧状連結である．　□

補題 9.33　位相空間 X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ と Y の弧状連結成分 D について，逆像 $f^{-1}(D)$ は，X のいくつかの弧状連結成分の合併として書ける．

証明　点 $x \in f^{-1}(D)$ を任意にとり，その弧状連結類 $\widetilde{C}(x)$ を考える．$f(x) \in D$ だから，D は $f(x)$ の連結類である．一方で，$f(\widetilde{C}(x))$ は $f(x)$ を含む連結集合だから，連結類の最大性より $f(\widetilde{C}(x)) \subseteq D$，したがって $\widetilde{C}(x) \subseteq f^{-1}(D)$ でなければならない．よって，$f^{-1}(D) = \bigcup_{x \in f^{-1}(D)} \widetilde{C}(x)$ と書ける．　□

命題 9.34　局所弧状連結空間の商は局所弧状連結である．特に，局所弧状連結空間の開連続像および閉連続像は局所弧状連結である．

証明　X を局所弧状連結空間，$X/{\sim}$ を X の商空間とし，$\pi\colon X \to X/{\sim}$ を等化写像とする．命題 9.29 (2) より，任意の開部分空間 $V \subseteq X/{\sim}$ の弧状連結成分 $\widetilde{C}$ が $X/{\sim}$ の開集合であることを示せばよい．$\pi|_{\pi^{-1}(V)}\colon \pi^{-1}(V) \to V$ に対して補題 9.33 を用いることで，$\pi^{-1}(\widetilde{C})$ が $\pi^{-1}(U)$ のいくつかの連結成分の合併であることがわかる．$\pi^{-1}(V)$ は局所連結空間 X の開集合だから，命題 9.29 より $\pi^{-1}(\widetilde{C})$ も X の開集合となる．よって，商位相の定義より，$\widetilde{C}$ は開集合である．

開連続全射および閉連続全射は沈め込みだった（命題 3.27 (2)）から，後半の主張は前半から従う．　□

定理 9.35　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は局所弧状連結である．
(b) すべての X_i は局所弧状連結であり，かつ有限個を除いてすべて弧状連結である．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　射影 pr_i は開写像であった（命題 3.30 (1)）．よって，X が局所弧状連結ならば，命題 9.34 より，その開連続像 $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ も局所弧状連結である．

X が局所弧状連結であるとして，有限個を除くすべての X_i が連結であることを示す．X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ を選び，x の弧状連結近傍 C をとる．積位相の定義より，有限個の $i \in I$ を除いて $\mathrm{pr}_i(C) = X_i$ である．弧状連結空間の連続像は弧状連結（命題 9.20）だから，このとき，X_i は有限個を除いてすべて弧状連結である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i は局所弧状連結であるとし，さらに $i \in I \setminus I'$（I' は有限）に対して X_i は弧状連結であるとする．X の点 $x = (x_i)_{i \in I}$ とその標準近傍基の元 $U = \prod_{i \in I} U_i$ を任意にとる．$i \in I \setminus I''$（I'' は有限）に対して $U_i = X_i$ であるとする．各 $i \in I' \cup I''$ に対して U_i に含まれる x_i の弧状連結近傍 C_i をとり，$i \in I \setminus (I' \cup I'')$ に対しては $C_i = X_i$ と置く．すると，積位相の定義より $C = \prod_{i \in I} C_i$ は x の近傍であり，定理 9.17 より C は弧状連結である．さらに，C は U に含まれる．よって，X は局所弧状連結である．　□

第 10 章

擬距離空間

10.1　擬距離空間と距離空間

定義 10.1（擬距離空間，距離空間） X を集合とする．関数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が次の 3 条件 (D1)–(D3) を満たすとき，d を X 上の**擬距離**という．加えて条件 (D4) も満たすとき，d を X 上の**距離**という．

(D1) 任意の $x,\, y \in X$ に対して，$d(x, y) = d(y, x)$ である（対称性）．
(D2) 任意の $x,\, y,\, z \in X$ に対して，$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ である（三角不等式）．
(D3) 任意の $x \in X$ に対して，$d(x, x) = 0$ である．
(D4) 任意の $x,\, y \in X$ に対して，$d(x, y) = 0$ ならば $x = y$ である（非退化性）．

集合 X とその上の擬距離 d との組 (X, d) を，**擬距離空間**という．d が距離ならば，(X, d) を**距離空間**という．

考えている擬距離 d を明示する必要がない場合には，単に「擬距離空間 X」などともいう．
X を集合，d を X 上の擬距離とする．部分集合 $A,\, B \subseteq X$ に対して，A と B の**距離**を

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} d(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

（ただし，A または B が空ならば $d(A, B) = \infty$ とする）と定める．$d(\{x\}, A)$ を単に $d(x, A)$ と書く．$d(\{x\}, \{y\})$ は $d(x, y)$ に等しい．また，$A \subseteq X$ の d に関する**直径**を

$$\operatorname{diam}_d(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

（ただし，A が空ならば $\operatorname{diam}_d(A) = 0$ とする）と定める．擬距離 d を明示せずに，単に $\operatorname{diam}(A)$ とも書く．$\operatorname{diam}_d(A) < \infty$ であるとき，A は d に関して**有界**であるという．

定義 10.2（閉球，開球） X を集合，d を X 上の擬距離とする．点 $x \in X$ と $r > 0$ に対して，d に関する x を中心とする半径 r の**閉球**・**開球**を，それぞれ

$$B_d(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\},$$
$$B^\circ_d(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

と定める[*1]．擬距離 d を明示せずに，単に $B(x; r)$, $B^\circ(x; r)$ と書くこともある．

[*1] $B_d(x; r)$, $B^\circ_d(x; r)$ という記号ではあるが，d が定める位相（定義 10.4）に関して，半径 r の閉球の内部が半径 r の開球に一致するとは限らない．

命題 10.3　X を集合，d を X 上の擬距離とする．X 上の位相であって，各点 $x \in X$ に対して x を中心とする閉球の全体 $\{B_d(x;r) \mid r > 0\}$ が x の近傍基となるものが一意に存在する．

証明　命題 2.19 より，次の 3 条件を確かめればよい．

(NB1) 任意の $x \in X$ に対して，$\{B_d(x;r) \mid r > 0\}$ は X 上のフィルタ基である．
(NB2) 任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対して，$x \in B_d(x;r)$ である．
(NB3) 任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対してある $s > 0$ が存在し，任意の $y \in B_d(x;s)$ に対して $B_d(x;r)$ はある $B_d(y;t)$（$t > 0$）を含む．

(NB1)　$\{B_d(x;r) \mid r > 0\}$ が命題 1.5 (2) の条件を満たすことを確かめればよいが，これは明らかである．
(NB2)　明らかである．
(NB3)　任意の $x \in X$ と $r > 0$，および $y \in B_d(x;r/2)$ に対して，三角不等式より $B_d(y;r/2) \subseteq B_d(x;r)$ である．ここから従う．□

定義 10.4（擬距離が定める位相）　X を集合，d を X 上の擬距離とする．X 上の位相であって，各点 $x \in X$ に対して x を中心とする閉球の全体 $\{B_d(x;r) \mid r > 0\}$ が x の近傍基となるもの（命題 10.3 より，このような位相は一意に存在する）を，**d が定める位相**という．擬距離空間 (X,d) は，d が定める位相を考えることで，自然に位相空間とみなせる．

以下，特に断らなくても，擬距離空間は常にこの位相を備えているものとして扱う．

X を集合，d を X 上の擬距離とし，d が定める位相によって X を位相空間とみなす．定義より，点 $x \in X$ を中心とする閉球の全体は x の近傍基をなすが，容易にわかるように，x を中心とする開球の全体も x の近傍基をなす．また，容易にわかるように，開球の全体 $\{B_d^\circ(x;r) \mid x \in X,\ r > 0\}$ は X の開基をなす．

10.2　写像が誘導する擬距離

定義 10.5（写像が誘導する擬距離）　X を集合，(Y,d_Y) を擬距離空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．関数 $d_X\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，$x,\ y \in X$ に対して

$$d_X(x,y) = d_Y(f(x),f(y))$$

と定めると，d_X は X 上の擬距離である．この d_X を，**f が誘導する X 上の擬距離**という．

命題 10.6　X を集合，(Y,d_Y) を擬距離空間，$f\colon X \to Y$ を写像とし，f が誘導する擬距離 d_X によって X を擬距離空間とみなす．このとき，X の位相は，f が誘導する X 上の始位相に一致する．

証明　点 $x \in X$ の準近傍基として

$$\mathfrak{B}' = \{B_{d_X}(x;r) \mid r > 0\}$$

がとれる．一方で，f が誘導する X 上の始位相に関する x の準近傍基として

$$\mathfrak{B}'' = \{f^{-1}(B_{d_Y}(f(x);r)) \mid r > 0\}$$

がとれる（命題 3.8 (3)）．ところが，$r > 0$ に対して $B_{d_X}(x;r) = f^{-1}(B_{d_Y}(f(x);r))$ だから，$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''$ である．よって，X の位相は f が誘導する X 上の始位相に一致する．□

定義 10.7（部分擬距離空間）　(X,d) を擬距離空間，X' を X の部分集合とする．包含写像 $\iota\colon X' \to X$ が誘導する X' 上の擬距離によって X' を擬距離空間とみなすとき，X' を (X,d) の**部分擬距離空間**という．また，d が距離ならば ι が誘導する X' 上の擬距離も距離であり，このとき X' を (X,d) の**部分距離空間**という．

以下，特に断らなくても，擬距離空間の部分集合は部分擬距離空間とみなす．

命題 10.8　(X,d) を擬距離空間，A を X の部分集合とする．(X,d) の部分擬距離空間としての A の位相と，(X,d) が定める位相空間 X の部分空間としての A の位相とは一致する．

証明　命題 10.6 から従う． □

10.3　一様連続写像と等長写像

定義 10.9（一様連続写像）　(X,d_X), (Y,d_Y) を擬距離空間，$f\colon X\to Y$ を写像とする．f が**一様連続**であるとは，「任意の $\epsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して，任意の x, $x'\in X$ に対して，$d_X(x,x')\le\delta$ ならば $d_Y(f(x),f(x'))\le\epsilon$ が成り立つ」ことをいう．

定義 10.10（等長写像）　(X,d_X), (Y,d_Y) を擬距離空間，$f\colon X\to Y$ を写像とする．f が**等長**であるとは，任意の x, $y\in X$ に対して $d_X(f(x),f(y))=d_Y(x,y)$ が成り立つことをいう．

明らかに，擬距離空間の間の写像 $f\colon X\to Y$ が等長であるための必要十分条件は，X の擬距離が f の誘導する擬距離と一致することである．また，距離空間から擬距離空間への等長写像は常に単射である．

命題 10.11　擬距離空間 X, Y の間の写像 $f\colon X\to Y$ は，等長ならば一様連続であり，一様連続ならば連続である． □

命題 10.12　(X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) を擬距離空間，$f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$ を写像とする．f と g が一様連続【等長】ならば，$g\circ f$ も一様連続【等長】である．

証明　等長性については明らかだから，一様連続性についてのみ示す．f と g が一様連続であるとする．$\epsilon>0$ を任意にとると，g の一様連続性より，ある $\delta'>0$ が存在して，任意の y, $y'\in Y$ に対して

$$d_Y(y,y')\le\delta' \implies d_Z(g(y),g(y'))\le\epsilon$$

となる．さらに，f の一様連続性より，ある $\delta>0$ が存在して，任意の x, $x'\in X$ に対して

$$d_X(x,x')\le\delta \implies d_Y(f(x),f(x'))\le\delta'$$

となる．このとき，任意の x, $x'\in X$ に対して

$$d_X(x,x')\le\delta \implies d_Z(g\circ f(x),g\circ f(x'))\le\epsilon$$

が成り立つ．よって，$g\circ f$ は一様連続である． □

命題 10.13　(X,d) を擬距離空間とする．

(1) 関数 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\ge0}$ は連続である．
(2) 空でない部分集合 $A\subseteq X$ に対して，関数 $d(-,A)\colon X\to\mathbb{R}_{\ge0};\ x\mapsto d(x,A)$ は一様連続である．

証明　(1)　三角不等式より $|d(x,y)-d(x',y')|\le d(x,x')+d(y,y')$ であることから従う．

(2)　任意に 2 点 x, $y\in X$ をとる．任意の $z\in A$ に対して $d(x,A)-d(y,z)\le d(x,z)-d(y,z)\le d(x,y)$ であり，したがって $d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y)$ が成り立つ．同様に $d(y,A)-d(x,A)\le d(x,y)$ も成り立つから，結局 $|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$ が成り立つ．よって，$d(-,A)$ は一様連続である． □

定理 10.14　(X,d_X), (Y,d_Y) を擬距離空間，$f\colon X\to Y$ を連続写像とする．

(1) ある稠密集合 $A \subseteq X$ への f の制限 $f|_A \colon A \to Y$ が一様連続ならば，f も一様連続である．
(2) ある稠密集合 $A \subseteq X$ への f の制限 $f|_A \colon A \to Y$ が等長ならば，f も等長である．

証明　(1)　稠密集合 $A \subseteq X$ への f の制限 $f|_A \colon A \to Y$ が一様連続であるとする．$\epsilon > 0$ を任意にとると，$f|_A$ の一様連続性より，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $a, a' \in A$ に対して

$$d_X(a, a') \leq 3\delta \implies d_Y(f(a), f(a')) \leq \epsilon$$

となる．このとき，任意の $x, x' \in X$ に対して

$$d_X(x, x') \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) \leq 3\epsilon$$

が成り立つことを示す．$d_X(x, x') \leq \delta$ を満たす $x, x' \in X$ を任意にとる．f の連続性より，$r > 0$ を十分小さくとれば，$f(B_{d_X}(x; r)) \subseteq B_{d_Y}(f(x); \epsilon)$ かつ $f(B_{d_X}(x'; r)) \subseteq B_{d_Y}(f(x); \epsilon)$ が成り立つ．$r \leq \delta$ としてよい．A は X において稠密だから，点 $a \in B_{d_X}(x; r) \cap A$ および $a' \in B_{d_X}(x'; r) \cap A$ がとれる．すると

$$d_X(a, a') \leq d_X(a, x) + d_X(x, x') + d_X(x', a') \leq \delta + \delta + \delta = 3\delta$$

だから，δ のとり方より $d_Y(f(a), f(a')) \leq \epsilon$ である．よって，

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(f(a), f(a')) + d_Y(f(a'), f(x)) \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

が成り立つ．

(2)　稠密集合 $A \subseteq X$ への f の制限 $f|_A \colon A \to Y$ が等長であるとする．このとき，$X \times X$ から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への関数 d_X と $d_Y(f(-), f(-))$ は，$X \times X$ の稠密集合 $A \times A$ 上で一致する連続関数だから（命題 10.13 (1)），等式延長の原理（系 5.16）より，これらは $X \times X$ 上で一致する．すなわち，f は等長である．　□

定義 10.15（一様同型）　X, Y を擬距離空間とする．写像 $f \colon X \to Y$ が全単射であり，f と f^{-1} がともに一様連続であるとき，f は X から Y への**一様同型写像**であるという．擬距離空間 X と Y の間に一様同型写像が存在するとき，X と Y は**一様同型**であるという．また，集合 X 上の 2 つの擬距離 d_0, d_1 について，恒等写像 id_X が (X, d_0) から (X, d_1) への一様同型写像になるとき，d_0 と d_1 は**一様同型**であるという．

定義 10.16（等長同型）　X, Y を擬距離空間とする．写像 $f \colon X \to Y$ が全単射であり，f と f^{-1} がともに等長であるとき，f は X から Y への**等長同型写像**であるという．擬距離空間 X と Y の間に等長同型写像が存在するとき，X と Y は**等長同型**であるという．

命題 10.11 より，等長同型写像は一様同型写像である．また，容易にわかるように，全単射等長写像は常に等長同型写像である．

X, Y, Z を擬距離空間とする．明らかに，恒等写像 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ は等長同型写像（したがって一様同型写像）であり，$f \colon X \to Y$ が一様同型写像【等長同型写像】ならば $f^{-1} \colon Y \to X$ も一様同型写像【等長写像】である．また，命題 10.12 より，$f \colon X \to Y$，$g \colon Y \to Z$ が一様同型写像【等長写像】ならば，$g \circ f \colon X \to Z$ も一様同型写像【等長写像】である．

擬距離空間のあいだの写像 $f \colon X \to Y$ が X から $f(X)$ への一様同型写像【等長同型写像】を与えているとき，f を**一様埋め込み【等長埋め込み】**という．距離空間から擬距離空間への等長写像は，常に等長埋め込みである．

10.4　擬距離が定める位相の基本的性質

命題 10.17　集合 X 上の擬距離 d が定める位相は，関数 $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が連続となるような X 上の位相のうち最小のものである．

証明　命題 10.13 (1) より，d が定める位相に関して関数 d は連続である．逆に，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ に関して d が連続であるとする．このとき，各点 $x \in X$ と $r > 0$ に対して，$B_d(x;r)$ は関数 $d(x,-)\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ による $[0,r]$ の逆像であり，$d(x,-)$ は d が定める位相に関して連続だから（命題 10.13 (1)），$B_d(x;r)$ は $\mathfrak{O}$ に関する x の近傍である．よって，$\mathfrak{O}$ は d が定める位相よりも細かい．以上より，d が定める位相は，d が連続となるような最小の位相である．□

命題 10.18　(X,d) を擬距離空間とする．$x \in X$ と $A \subseteq X$ に対して，$x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は，$d(x,A) = 0$ である．

証明　$x \in \overline{A}$ は，任意の $r > 0$ に対して $A \cap B_d(x;r) \neq \emptyset$ であることと同値であり，これは「任意の $r > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して $d(x,y) \leq r$ である」こと，すなわち $d(x,A) = 0$ と同値である．□

系 10.19　(X,d) を擬距離空間とする．$A \subseteq X$ に対して，$\operatorname{diam}_d(\overline{A}) = \operatorname{diam}_d(A)$ である．

証明　$A \subseteq \overline{A}$ より $\operatorname{diam}_d(A) \leq \operatorname{diam}_d(\overline{A})$ である．$\operatorname{diam}_d(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}_d(A)$ を示す．$x,\ y \in \overline{A}$ と $\epsilon > 0$ を任意にとる．命題 10.18 より $d(x,A) = d(y,A) = 0$ だから，$x',\ y' \in A$ を $d(x,x') \leq \epsilon$ かつ $d(y,y') \leq \epsilon$ となるようにとれる．これより，

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \leq \operatorname{diam}_d(A) + 2\epsilon$$

である．任意の $\epsilon > 0$ に対してこれが成り立つから，$d(x,y) \leq \operatorname{diam}_d(A)$ である．よって，$\operatorname{diam}_d(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}_d(A)$ が成り立つ．□

命題 10.20　(X,d) を擬距離空間とする．2 点 $x,\ y \in X$ が識別されるための必要十分条件は，$d(x,y) > 0$ である．□

命題 10.21　擬距離空間【距離空間】は正則かつ正規【正規分離】である．

証明　(X,d) を擬距離空間とする．点 $x_0 \in X$ とその開近傍 U に対して，$B_d(x_0;r) \subseteq U$ を満たす $r > 0$ をとると，関数 $f = \max\{1 - d(-,x_0)/r, 0\}\colon X \to \mathbb{R}$ は連続であり（命題 10.13 (1)），$f(x_0) = 1$ かつ $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$ を満たす．よって，X は完全正則である．また，互いに交わらない空でない閉集合 A, $B \subseteq X$ に対して，関数 $g = d(-,A) - d(-,B)\colon X \to \mathbb{R}$ は連続であり（命題 10.13 (2)），命題 10.18 より $g(A) \subseteq (-\infty,0)$ かつ $g(B) \subseteq (0,\infty)$ を満たすから，$g^{-1}((-\infty,0))$, $g^{-1}((0,\infty))$ は A と B を分離する開集合である．よって，X は正規である．以上より，擬距離空間は正則かつ正規である．

d が距離ならば，異なる 2 点 $x,\ y \in X$ に対して，$r = d(x,y)/2 > 0$ と置くと $B^\circ_d(x;r)$, $B^\circ_d(x;r)$ は x と y を分離する開集合だから，X は分離である．擬距離空間に関する結果と合わせて，距離空間が正規分離であることを得る．□

系 10.22　X を集合とする．X 上の擬距離 d に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) d が定める位相は T_0 である．
(b) d が定める位相は分離である．
(c) d が定める位相は正規分離である．
(d) d は距離である．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)　擬距離の定める位相が正則かつ正規であること（命題 10.21）から従う．

(a) $\Longleftrightarrow$ (d)　命題 10.20 から従う．□

命題 10.23　擬距離空間において，すべての閉集合は δ-開集合であり，すべての開集合は σ-閉集合である．

証明　(X,d) を擬距離空間とし，F を X の閉集合とする．$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$G_n=\{x\in X\mid d(x,F)<2^{-n}\}$$

と置くと，$d(-,F)$ の連続性（命題 10.13 (2)）より G_n は開集合であり，命題 10.18 より $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$ だから，F は δ-開集合である．よって，X の閉集合は δ-開集合である．補集合を考えれば，X の開集合が σ-閉集合であることもわかる．□

命題 10.24　擬距離空間は第一可算である．

証明　擬距離空間 X の点 x に対して，$\{B(x;r)\}_{r\in\mathbb{Q}_{>0}}$ は x の可算近傍基となる．よって，擬距離空間は第一可算である．□

命題 10.25　擬距離空間 X に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) X は第二可算である．
(b) X は可分である．
(c) X は可算鎖条件を満たす．
(d) X は Lindelöf である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b) は命題 4.3 で，(a) $\Longrightarrow$ (d) は命題 7.50 で，(b) $\Longrightarrow$ (c) は命題 4.18 で，すでに一般の位相空間に対して示されている．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$D\subseteq X$ を可算稠密集合とすると，$\{B^\circ(x;r)\}_{x\in D,\,r\in\mathbb{Q}_{>0}}$ は X の可算開基を与える．実際，任意の点 $x\in X$ と $r>0$ に対して，D の稠密性より点 $y\in D\cap B^\circ(x;r/2)$ がとれ，ここで $d(x,y)<r'\leq r/2$ を満たす $r'\in\mathbb{Q}_{>0}$ をとれば，$x\in B^\circ(y;r')\subseteq B^\circ(x;r)$ が成り立つ．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　$r\in\mathbb{Q}_{>0}$ に対して $\{B^\circ(x;r)\}_{x\in X}$ は X の開被覆だから，X が Lindelöf であるとすると，可算部分被覆 $\{B^\circ(x_{r,i};r)\}_{i\in I_r}$ がとれる．このとき，$\{B^\circ(x_{r,i};r)\}_{r\in\mathbb{Q}_{>0},\,i\in I_r}$ は X の可算開基を与える．実際，任意の $x\in X$ と $r>0$ に対して，$r'\leq r/2$ を満たす $r'\in\mathbb{Q}_{>0}$ と $x\in B^\circ(x_{r',i};r')$ なる $i\in I_r$ をとれば，$x\in B^\circ(x_{r',i};r')\subseteq B^\circ(x;r)$ が成り立つ．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　X が可算鎖条件を満たすとする．$r>0$ に対して

$$\mathfrak{A}_r=\{A\subseteq X\mid \text{任意の異なる 2 点 } x,\,y\in A \text{ に対して } d(x,y)\geq r\}$$

と置く．$A\in\mathfrak{A}_r$ とすると，$\{B^\circ(x;r/2)\}_{x\in A}$ は互いに交わらない空でない開集合の族だから，X が可算鎖条件を満たすことより，A は可算である．さて，Zorn の補題より，各 $\mathfrak{A}_r$ は包含関係に関して極大元をもつから，極大元 $A_r\in\mathfrak{A}_r$ がとれる．このとき，$D=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_{>0}}A_r$ は X の可算稠密集合である．実際，任意の $x\in X$ と $r\in\mathbb{Q}_{>0}$ に対して，A_r の極大性より，$B^\circ(x;r)$ は A_r と交わる．よって，X は可分である．□

10.5　距離空間に対する拡張定理

擬距離空間の間の写像については，拡張定理（定理 6.27）の条件を次のように（見かけ上）緩められる．

定理 10.26（距離空間に対する拡張定理）　(X,d_X) を擬距離空間，A を X の稠密集合，(Y,d_Y) を距離空間とする．このとき，写像 $f\colon A\to Y$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) f の連続な延長 $\widetilde{f}\colon X\to Y$ が存在する．
(b) 任意の点 $x\in X$ に対して，極限値 $\lim_x f$ が存在する．

(c) A の点からなる任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上の点列として収束するならば，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Y 上の点列として収束する．

この条件が満たされるとき，f の連続な延長 $\widetilde{f}\colon X\to Y$ は一意であり，任意の $x\in X$ に対して

$$\widetilde{f}(x)=\lim_{x} f$$

が成り立つ．

証明 距離空間は正則分離だから（命題 10.21），(a) $\Longleftrightarrow$ (b) および後半の主張は，拡張定理（定理 6.27）から従う[*2]．

(a) $\Longrightarrow$ (c) $\widetilde{f}\colon X\to Y$ が f の連続な拡張であるとする．点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x\in X$ に収束すれば，命題 6.37 (1) より，点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}=(\widetilde{f}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\widetilde{f}(x)$ に収束する．

(c) $\Longrightarrow$ (a) (c) が成り立つとする．各点 $x\in X=\overline{A}$ に対して，X の第一可算性（命題 10.24）と命題 6.35 より，x に収束する点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ がとれる．このときの $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ の極限点を $\widetilde{f}(x)$ と定めることで，写像 $\widetilde{f}\colon X\to Y$ を定義する．

$\widetilde{f}(x)$ が x に収束する点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ のとり方によらないことを確かめる．A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がともに x に収束するとする．(c) より $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ と $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので，その極限点をそれぞれ y, y' とする．ここで，偶数項が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，奇数項が $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ からなる点列 $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えよう．$(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束するから，(c) より，$(f(x''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ はある点に収束する．そのためには，$y=y'$ でなければならない（命題 6.43 (1)）．よって，$\widetilde{f}(x)$ は x に収束する点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ のとり方によらない．

このように定めた写像 $\widetilde{f}\colon X\to Y$ が連続であることを示す．X は第一可算だから（命題 10.24），X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x\in X$ に収束するとして，Y 上の点列 $(\widetilde{f}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $\widetilde{f}(x)$ に収束することを示せばよい（命題 6.37 (2)）．$\widetilde{f}$ の定義より，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して点 $x'_n\in A$ を x_n の十分近くにとり，$d_X(x_n,x'_n)<2^{-n}$ かつ $d_Y(\widetilde{f}(x_n),\widetilde{f}(x'_n))<2^{-n}$ が成り立つようにできる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束し，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $d_X(x_n,x'_n)<2^{-n}$ が成り立つから，$(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も x に収束する．よって，$\widetilde{f}$ の定義より，$(\widetilde{f}(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}=(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\widetilde{f}(x)$ に収束する．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $d_Y(\widetilde{f}(x_n),\widetilde{f}(x'_n))<2^{-n}$ が成り立つから，$(\widetilde{f}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ も $\widetilde{f}(x)$ に収束する．これで，$\widetilde{f}$ の連続性が示された． □

10.6 Stone の定理

定理 10.27（Stone の定理） 擬距離空間の任意の開被覆は，局所有限かつ σ-疎な開被覆によって細分される．特に，擬距離空間はパラコンパクトである．

証明（Rudin） (X,d) を擬距離空間とし，X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を任意にとる．整列可能定理によって，I を整列集合とみなす．

開集合族 $\{V_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},\, i\in I}$ を，次のように n に関して再帰的に定義する：

$$V_{n,i}=\bigcup_{x\in X_{n,i}} B^\circ_d(x;2^{-n}).$$

ただし，$X_{n,i}$ は次の 3 条件を満たす点 $x\in X$ の全体の集合とする．

(i) i は $x\in U_j$ となるような $j\in I$ の中で最小のものである．

[*2] もっとも，拡張定理（定理 6.27）を参照するまでもなく，(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) は容易に示されるから，下に述べる (c) $\Longrightarrow$ (a) と合わせて，3 条件の同値性がわかる．また，f の連続な拡張の一意性は，等式延長の原理（系 5.16）の帰結である．

(ii) 任意の $l < n$ と $j \in I$ に対して，$x \notin V_{l,j}$ である．
(iii) $B_d^\circ(x; 4 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_i$ である．

すると，$\{V_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},\, i\in I}$ は X の開被覆であり，$\{U_i\}_{i\in I}$ を細分する．

$\{V_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},\, i\in I}$ が局所有限かつ σ-疎であることを示す．任意に $x \in X$ をとり，$x \in V_{n,i}$ となる $(n,i) \in \mathbb{N}\times I$ を，i が最小となるようにとる．また，$l \in \mathbb{N}$ を $B_d^\circ(x; 2^{-l}) \subseteq V_{n,i}$ となるようにとる．次の 2 つの主張を示せばよい．

(1) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$B_d^\circ(x; 2^{-m}) \cap V_{m,j} \neq \emptyset$ となる $j \in I$ はたかだか 1 つである．
(2) 任意の $m \geq \max\{n+1, l+1\}$ と $j \in I$ に対して，$B_d^\circ(x; 2^{-l-1}) \cap V_{m,j} = \emptyset$ である．

(1)　$m \in \mathbb{N}$ を任意にとる．任意の $u \in V_{m,j}$，$v \in V_{m,k}$（$j,\, k \in I$，$j < k$）に対して $d(u,v) \geq 2^{-m+1}$ となることを示せば十分である．$V_{m,j}$, $V_{m,k}$ の定義より，$u \in B_d^\circ(y; 2^{-m})$，$v \in B_d^\circ(z; 2^{-m})$ を満たす点 $y \in X_{m,j}$，$z \in X_{m,k}$ が存在する．$X_{m,j}$ の定義 (iii) より $B_d^\circ(y; 4\cdot 2^{-l}) \subseteq U_j$ であり，$X_{m,k}$ の定義 (i) より $z \notin U_j$ だから，$d(y,z) \geq 4 \cdot 2^{-m}$ となる．よって，

$$d(u,v) \geq d(y,z) - d(u,y) - d(v,z) > 4\cdot 2^{-m} - 2^{-m} - 2^{-m} = 2^{-m+1}$$

である．

(2)　$m \geq \max\{n+1, l+1\}$ と $j \in I$ を任意にとる．任意に $y \in X_{m,j}$ をとる．$m \geq n+1$ だから，$x \in V_{n,i}$ と $X_{n,i}$ の定義 (ii) より $y \notin V_{n,i}$ である．一方で，l は $B_d^\circ(x; 2^{-l}) \subseteq V_{n,i}$ となるようにとったのだった．これら 2 つより，$d(x,y) \geq 2^{-l}$ である．$m \geq l+1$ より $2^{-l-1} + 2^{-m} \leq 2^{-l-1} + 2^{-l-1} = 2^{-l}$ であることに注意して，$B_d^\circ(x; 2^{-l-1}) \cap B_d^\circ(y; 2^{-m}) = \emptyset$ を得る．$y \in X_{m,j}$ は任意だったから，これで $B_d^\circ(x; 2^{-l-1}) \cap V_{m,j} = \emptyset$ が示された．□

第 11 章

完備擬距離空間と全有界擬距離空間

11.1 Cauchy 列

定義 11.1（Cauchy 列） 擬距離空間 (X,d) 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは，「任意の $\epsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $m, n \geq n_0$ に対して $d(x_m, x_n) \leq \epsilon$ が成り立つ」ことをいう．より詳しく，擬距離 d を明示して，d に関する Cauchy 列ということもある．

命題 11.2 擬距離空間において，収束する点列は Cauchy である．

証明 (X,d) を擬距離空間とし，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するとする．$\epsilon > 0$ を任意にとる．極限点の定義より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $d(x_n, x) \leq \epsilon$ となる．このとき，任意の $m,\ n \geq n_0$ に対して

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

が成り立つ．よって，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy である． □

命題 11.3 X を擬距離空間，A を X の部分擬距離空間とし，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を A の点からなる点列とする．このとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上の点列として Cauchy であることと，A 上の点列として Cauchy であることとは同値である． □

命題 11.4 (X, d_X), (Y, d_Y) を擬距離空間，$f\colon X \to Y$ を一様連続写像とする．X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy であれば，Y 上の点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy である．

証明 $\epsilon > 0$ を任意にとる．f は一様連続だから，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x,\ x' \in X$ に対して $d(x, x') \leq \delta$ ならば $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ となる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy だから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m,\ n \geq n_0$ に対して $d(x_m, x_n) \leq \delta$ となる．このとき，任意の $m,\ n \geq n_0$ に対して $d(f(x_m), f(x_n)) \leq \epsilon$ が成り立つ．よって，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy である． □

命題 11.5 (X,d) を擬距離空間とし，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の Cauchy 列とする．点 $x \in X$ に対して，x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限点であることと，x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であることとは同値である．

証明 極限点が接触点であることはすでに一般の点列について示したから（命題 6.34），Cauchy 列の接触点が極限点であることを示せばよい．点 $x \in X$ を Cauchy 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点とする．

$\epsilon > 0$ を任意にとる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列だから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m,\ n \geq n_0$ に対して $d(x_m, x_n) \leq \epsilon$ となる．x は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点だから，$n_1 \geq n_0$ であって $d(x_{n_1}, x) \leq \epsilon$ を満たすものが

存在する．このとき，任意の $n \geq n_1$ に対して

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

が成り立つ．よって，x は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限点である． □

11.2　完備擬距離空間

定義 11.6（完備擬距離空間） 擬距離空間 X が完備であるとは，X 上の任意の Cauchy 列が収束することをいう．

集合 X が擬距離 d に関してなす擬距離空間が完備であることを，単に d は完備であるともいう．

命題 11.7 擬距離空間 X と Y が一様同型であれば，X が完備であることと Y が完備であることとは同値である．

証明 $f\colon X \to Y$ を一様同型写像として，Y が完備ならば X も完備であることを示せばよい．Y が完備であるとして，X 上の Cauchy 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．f は一様連続だから，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Y 上の Cauchy 列である（命題 11.4）．Y は完備だから，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ はある点 $y \in Y$ に収束する．f^{-1} は連続だから，このとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^{-1}(f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f^{-1}(y)$ に収束する（命題 6.37 (1)）．よって，X は完備である． □

命題 11.8 擬距離空間 (X, d) に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) (X, d) は完備である．
(b) (X, d) の閉集合の列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，これが有限交叉性をもち，$\mathrm{diam}_d(F_n)$ が 0 に収束するならば，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b)　X が完備であるとする．$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の閉集合の列であって，有限交叉性をもち，$\mathrm{diam}_d(F_n)$ が 0 に収束するものとする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して点 $x_n \in F_0 \cap \cdots \cap F_n$ をとり，点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．すると，固定した $n_0 \in \mathbb{N}$ について，任意の $m, n \geq n_0$ に対して $x_m, x_n \in F_{n_0}$ となり，したがって $d(x_m, x_n) \leq \mathrm{diam}_d(F_{n_0})$ が成り立つ．いま，$\mathrm{diam}_d(F_{n_0})$ は 0 に収束するから，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy である．よって，X の完備性より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は極限点 $x \in X$ をもつ．このとき $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ である．実際，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，x は閉集合 F_n の点からなる点列 $(x_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$ の極限点でもあるから，命題 6.35 (1) より，$x \in F_n$ である．よって，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．X 上の Cauchy 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ と置くと，$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有限交叉性をもつ閉集合の列である．さらに，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy であることより，$\mathrm{diam}_d(F_n)$ は 0 に収束する．よって，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ は空でない．すなわち，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は接触点をもつ．Cauchy 列に関して極限点と接触点は同じだから（命題 11.5），$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．よって，X は完備である． □

命題 11.9 (1) 完備擬距離空間の閉部分擬距離空間は完備である．
(2) 距離空間の部分距離空間は，完備ならば閉である．
(3) 完備距離空間の部分距離空間について，それが完備であることと閉であることとは同値である．

証明 (1)　X を完備擬距離空間，A を X の閉部分擬距離空間とする．A 上の Cauchy 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の点列としても Cauchy だから（命題 11.3），X の完備性より，ある点 $x \in X$ に収束する．命題 6.35 (1) より $x \in \overline{A} = A$ である．このとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の点列としても $x \in A$ に収束す

る（系 6.39）．よって，A は完備である．

(2)　X を距離空間，A を X の完備部分距離空間とする．X は第一可算だから（命題 10.24），$x \in \overline{A}$ を任意にとると，A の点からなる X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，x に収束するものが存在する（命題 6.35 (2)）．命題 11.2 より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の Cauchy 列であり，したがって A 上の Cauchy 列である．よって，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の点列としてある点 $x' \in A$ に収束する．このとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の点列としても x' に収束する（系 6.39）．分離空間における点列の極限の一意性（命題 6.41 (1)）より $x = x'$ であり，$x' \in A$ だったから，$x \in A$ がわかる．よって $\overline{A} = A$ であり，A は閉である．

(3)　(1), (2) から従う．□

11.3　完備距離空間に対する拡張定理

定理 11.10（完備距離空間に対する拡張定理）　X を擬距離空間，Y を完備距離空間，A を X の稠密集合とする．

(1) 一様連続写像 $f\colon A \to Y$ に対して，その一様連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意に存在する．
(2) 等長写像 $f\colon A \to Y$ に対して，その等長な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意に存在する．

証明　まず，一様連続写像 $f\colon A \to Y$ に対して，その連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意に存在することを示す．距離空間に対する拡張定理（定理 10.26）より，そのためには，A の点からなる X 上の収束する点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することを示せばよい．

A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，X 上の点列として収束するとする．すると，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の Cauchy 列だから（命題 11.2），A 上の Cauchy 列でもある（命題 11.3）．したがって，その一様連続写像 f による像 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Y 上の Cauchy 列である（命題 11.4）．Y は完備だから，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．これで，f の連続な拡張 $\widetilde{f}$ の存在と一意性が示された．

さて，一様連続写像【等長写像】$f\colon A \to Y$ に対して，上のように連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ をとる．すると，$\widetilde{f}$ の稠密集合 A への制限 $\widetilde{f}|_A = f$ は一様連続【等長】だから，定理 10.14 より $\widetilde{f}$ は一様連続【等長】である．これで，主張は示された．□

系 11.11　X, Y を完備距離空間，A, B をそれぞれ X, Y の稠密集合とする．

(1) 一様同型写像 $f\colon A \to B$ は，一様同型写像 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ に一意に拡張できる．
(2) 等長同型写像 $f\colon A \to B$ は，等長同型写像 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ に一意に拡張できる．

証明　証明はどちらもほとんど同様だから，(1) のみ示す．$f\colon A \to B$ と $g\colon B \to A$ を，互いに他の逆写像であるような一様同型写像とする．f を A から Y への一様連続写像とみなすと，定理 11.10 (1) より，その一様連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意にとれる．同様に，g の一様連続な拡張 $\widetilde{g}\colon Y \to X$ がとれる．一様連続写像 $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}\colon X \to X$ は A 上では $g \circ f = \mathrm{id}_A$ に一致するから，A の稠密性と等式延長の原理（系 5.16）より，$\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_X$ が成り立つ．同様に $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \mathrm{id}_Y$ も成り立つから，$\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ は互いに他の逆写像であり，X と Y の間の一様同型写像を与えている．□

11.4　全有界擬距離空間

定義 11.12（全有界擬距離空間）　擬距離空間 X が**全有界**あるいは**先コンパクト**であるとは，任意の $r > 0$ に対して，直径 r 以下の集合からなる X の有限被覆が存在することをいう．

容易にわかるように，擬距離空間 X が全有界であることは，「任意の $r > 0$ に対して有限個の点 $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ が存在し，$\{B(x_0; r), \ldots, B(x_{n-1}; r)\}$ が X を被覆する」ことと同値である．

明らかに，擬距離空間 X とその部分擬距離空間 $A \subseteq X$ について，A が全有界であることと，「任意の $r > 0$ に対して，直径 r 以下の集合からなる A の X における有限被覆が存在すること」とは同値である．

集合 X が擬距離 d に関してなす擬距離空間が全有界であることを，単に d は全有界であるともいう．

命題 11.13　擬距離空間 (X, d) が全有界ならば，擬距離 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は有界である．

証明　(X, d) が全有界であるとすると，直径 1 以下の集合からなる X の有限被覆 $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ がとれる．どの A_i も空でないとしてよい．各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して点 $a_i \in A_i$ を 1 つずつとり，$d(a_i, a_j)$ の最大値を M と置く．任意に 2 点 $x, y \in X$ をとると，ある $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ が存在して $x \in A_i$，$y \in A_j$ となり，したがって $d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y) \leq M + 2$ が成り立つ．よって，d は有界である．□

命題 11.14　全有界擬距離空間は第二可算，可分かつ Lindelöf であり，可算鎖条件を満たす．

証明　擬距離空間について第二可算性，可分性，Lindelöf 性，可算鎖条件を満たすことはすべて同値だから（命題 10.25），可分性のみを示せば十分である．X を全有界擬距離空間とする．全有界性より，任意の $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して有限個の点 $x_{r,0}, \ldots, x_{r,n_r-1} \in X$ が存在し，$\{B(x_{r,0}; r), \ldots, B(x_{r,n_r-1}; r)\}$ は X を被覆する．このとき，$\{x_{r,i}\}_{r \in \mathbb{Q}_{>0},\, 0 \leq i < n_r}$ は X の可算稠密集合である．実際，任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対して，$r' \leq r$ を満たす $r' \in \mathbb{Q}_{>0}$ をとれば，$x \in B^\circ(c_{r',i}; r') \subseteq B(x_{r',i}; r)$ を満たす $i \in \{0, \ldots, n_{r'} - 1\}$ が存在する．よって，X は可分である．□

命題 11.15　X を擬距離空間とする．

(1) $A \subseteq X$ が全有界で $A' \subseteq A$ ならば，A' も全有界である．
(2) $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq X$ が全有界ならば，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ も全有界である．
(3) $A \subseteq X$ が全有界ならば，$\overline{A}$ も全有界である．

証明　(1)　明らかである．

(2)　$A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq X$ が全有界であるとする．$r > 0$ を任意にとると，各 A_i の全有界性より，直径 r 以下の集合からなる A_i の有限被覆 $\{B_{i,0}, \ldots, B_{i,k_i-1}\}$ がとれる．このとき，$\{B_{i,j}\}_{i \in \{0,\ldots,n-1\},\, j \in \{0,\ldots,k_i-1\}}$ は直径 r 以下の集合からなる $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ の有限被覆である．よって，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ は全有界である．

(3)　$A \subseteq X$ が全有界であるとする．$r > 0$ を任意にとると，A の全有界性より，直径 r 以下の集合からなる A の有限被覆 $\{B_0, \ldots, B_{n-1}\}$ がとれる．閉包をとっても直径は真に大きくはならないから（系 10.19），このとき，$\{\overline{B_0}, \ldots, \overline{B_{n-1}}\}$ は直径 r 以下の集合からなる $\overline{A}$ の有限被覆である．よって，$\overline{A}$ は全有界である．□

命題 11.16　X, Y を擬距離空間，$f\colon X \to Y$ を一様連続写像とする．$A \subseteq X$ が全有界ならば，$f(A)$ も全有界である．

証明　$A \subseteq X$ が全有界であるとする．$r > 0$ を任意にとると，f の一様連続性より，ある $r' > 0$ が存在して，直径 r' 以下の集合の f による像は直径 r 以下になる．X の全有界性より，直径 r' 以下の集合からなる X の有限被覆 $\{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ がとれる．このとき，$\{f(A_0), \dots, f(A_{n-1})\}$ は直径 r 以下の集合からなる Y の有限被覆である．よって，Y は全有界である．□

命題 11.17　X を集合，Y を擬距離空間とし，写像 $f\colon X \to Y$ が誘導する擬距離によって X を擬距離空間とみなす．$A \subseteq X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) A は全有界である．
(b) $f(A)$ は全有界である．

特に，Y が全有界ならば，X も全有界である．

証明　このとき f は等長だから，$r > 0$ と x_0, …, $x_{n-1} \in X$ に対して，$\{B(x_0; r), \dots, B(x_{n-1}; r)\}$ が A を被覆することと，$\{B(f(x_0); r), \dots, B(f(x_{n-1}); r)\}$ が A を被覆することとは同値である．よって，A が全有界であることと $f(A)$ が全有界であることとは同値である．□

定理 11.18　擬距離空間 (X, d) に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) (X, d) は全有界である．
(b) (X, d) 上の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，Cauchy 部分列をもつ．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　(X, d) が全有界であるとする．X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．X の部分集合の列 $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を，2 条件

(i) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{diam}_d(A_k) \leq 2^{-k}$ である．
(ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$A_0 \cap \dots \cap A_{k-1}$ は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含む．

を満たすように再帰的に定義できる．実際，A_0, …, A_{k-1} が条件を満たすように定まったとき，X の全有界性から，直径 2^{-k} 以下の集合からなる X の有限被覆 $\mathfrak{A}$ をとり，$\mathfrak{A}$ の中から適当に A_k を選んで $A_0 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k$ が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含むようにすればよい．すると，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $y_k \in A_0 \cap \dots \cap A_k$ が成り立つように選べる．$k_0 \in \mathbb{N}$ を固定すると，任意の k, $l \geq k_0$ に対して $d(x_k, x_l) \leq 2^{-k_0}$ が成り立つから，$(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．X が全有界でないとすれば，ある $r > 0$ が存在し，半径 r の閉球をどのように有限個とっても X を被覆できない．そこで，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \notin B_d(x_0; r) \cup \dots \cup B_d(x_{n-1}; r))$ を満たすように再帰的に定める．すると，任意の $m, n \in \mathbb{N}$，$m \neq n$ に対して $d(x_m, x_n) \geq r$ だから，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 部分列をもたない．□

11.5　コンパクト擬距離空間

定理 11.19　擬距離空間 (X, d) に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) (X, d) はコンパクトである．
(b) (X, d) は完備かつ全有界である．
(c) (X, d) は点列コンパクトである．
(d) (X, d) は可算コンパクトである．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)[*1]　X がコンパクトであるとする．

X が完備であることを示す．X 上の Cauchy 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x\in X$ に収束しないとすると，ある $r>0$ が存在して，$x_n\notin B_d(x;r)$ なる $n\in\mathbb{N}$ が無限個存在する．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy だから，任意の $m,n\geq n_0$ に対して $d(x_m,x_n)\leq r/2$ となるような $n_0\in\mathbb{N}$ がとれる．$n_1\in\mathbb{N}$ を，$n_1\geq n_0$ かつ $x_{n_1}\notin B_d(x;r)$ となるようにとる．すると，任意の $n\geq n_1$ に対して

$$d(x,x_n)\geq d(x,x_{n_1})-d(x_{n_1},x_n)\geq\frac{r}{2}$$

だから，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の項を有限個しか含まない x の開近傍として $B^\circ(x;r/2)$ がとれることになる．したがって，もし $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しなければ，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の項を有限個しか含まない開集合全体は X を被覆する．X のコンパクト性より，その有限部分被覆がとれるが，これは明らかに矛盾である．よって，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．これで，X の完備性が示された．

X が全有界であることを示す．任意に $r>0$ をとる．半径 r の開球全体は X の開被覆だから，X のコンパクト性より，その有限部分被覆がとれる．よって，半径 r の開球からなる X の有限被覆が存在する．これで，X の全有界性が示された．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X が完備かつ全有界であるとする．X がコンパクトでないとして矛盾を導く．X の開被覆 $\mathfrak{U}$ が有限部分被覆をもたないと仮定する．すると，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，2 条件

(i) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$B_d(x_n;2^{-n})$ は $\mathfrak{U}$ のどんな有限部分族でも被覆されない．
(ii) 任意の $n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して，$x_n\in B_d(x_{n-1};2^{-n+1})$ である．

を満たすものが再帰的にとれる．これを確かめる．$x_0,\ \dots,\ x_{n-1}$ が条件を満たすように定まったとする．再帰の仮定より，$B_d(x_{n-1};2^{-n+1})$（$n=0$ のときは X とみなす．以下同様とする）は $\mathfrak{U}$ のどんな有限部分族でも被覆されない．一方で，$B_d(x_{n-1};2^{-n+1})$ は全有界だから（命題 11.15 (1)），$B_d(x_{n-1};2^{-n+1})$ は有限個の半径 2^{-n} の閉球で被覆される．よって，ある $x_n\in B_d(x_{n-1};2^{-n+1})$ が存在して，$B_d(x_n;2^{-n})$ は $\mathfrak{U}$ のどんな有限部分族でも被覆されない．これで，(i), (ii) を満たす点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を再帰的に構成できることが確かめられた．

この点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，任意の $n,p\in\mathbb{N}$ に対して

$$d(x_n,x_{n+p})\leq d(x_n,x_{n+1})+\cdots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\leq 2^{-n}+\cdots+2^{-n-p+1}\leq 2^{-n+1}$$

だから，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である．よって，X の完備性より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある点 $x\in X$ に収束する．$\mathfrak{U}$ は X の開被覆だったから，$U\in\mathfrak{U}$ と $r>0$ が存在して，$B_d(x;r)\subseteq U$ となる．ここで，n を十分大きくとって，$d(x,x_n)\leq r/2$ かつ $2^{-n}\leq r/2$ となるようにする．すると，任意の $y\in B_d(x_n;2^{-n})$ に対して

$$d(x,y)\leq d(x,x_n)+d(x_n,y)\leq\frac{r}{2}+2^{-n}\leq\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

となるから，$B_d(x_n;2^{-n})\subseteq B_d(x;r)\subseteq U$ である．これは，$B_d(x_n;2^{-n})$ が $\mathfrak{U}$ のどんな有限部分族でも被覆されないという条件に反する．これで，矛盾が導かれた．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　全有界擬距離空間の任意の点列は Cauchy 部分列をもち（定理 11.18），完備擬距離空間の任意の Cauchy 列は収束するから，完備かつ全有界な擬距離空間は点列コンパクトである．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　対偶を示す．

[*1] (a) $\Longrightarrow$ (d) は自明だから，(a) $\Longrightarrow$ (b) を示さなくても，定理 11.19 の証明は完結している．しかし，「コンパクトならば完備かつ全有界」を直接示すことには意味があると考え，その証明を載せることにした．

X が完備でないとし，X 上の収束しない Cauchy 列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．Cauchy 列に関して極限点と接触点は同じだから（命題 11.5），この Cauchy 列は接触点ももたない．部分列の極限点はもとの点列の接触点になるから（命題 6.44 (1)），$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列は収束しない．よって，X は点列コンパクトでない．

X が全有界でないとすると，定理 11.18 より，Cauchy 部分列をもたない X 上の点列が存在する．収束する点列は Cauchy だから（命題 11.2），この点列は収束部分列をもたない．よって，X は点列コンパクトでない．

(c) $\Longleftrightarrow$ (d)　擬距離空間は第一可算であり（命題 10.24），第一可算空間に関して点列コンパクト性と可算コンパクト性は同値である（命題 7.58）． □

定理 11.20（Lebesgue の被覆補題）　(X,d) をコンパクト擬距離空間とし，$\mathfrak{U}$ を X の開被覆とする．このとき，ある $r>0$ が存在し，$\{B_d(x;r)\}_{x\in X}$ は $\mathfrak{U}$ を細分する．

証明　点 $x\in X$ と $s>0$ との組 (x,s) であって，$B_d(x;2s)$ が $\mathfrak{U}$ のある元に含まれるようなものの全体を $\mathcal{S}$ と置く．任意の $x\in X$ に対してある $s>0$ が存在して $(x,s)\in\mathcal{S}$ となるから，$\{B_d^\circ(x;s)\}_{(x,s)\in\mathcal{S}}$ は X の開被覆である．X はコンパクトだから，$\mathcal{S}$ の有限部分集合 $\{(x_0,s_0),\dots,(x_{n-1},s_{n-1})\}$ であって，$\{B_d^\circ(x_0;s_0),\dots,B_d^\circ(x_{n-1};s_{n-1})\}$ が X を被覆するようなものがとれる．

$$r=\min\{s_0,\dots,s_{n-1}\}$$

と置く．

$\{B_d(x;r)\}_{x\in X}$ が $\mathfrak{U}$ を細分することを示す．点 $x\in X$ を任意にとる．$\{B_d^\circ(x_0;s_0),\dots,B_d^\circ(x_{n-1};s_{n-1})\}$ は X の被覆だから，ある $i\in\{0,\dots,n-1\}$ が存在して $x\in B^\circ(x_i;s_i)$ となる．このとき，任意の $y\in B_d(x;r)$ に対して

$$d(x_i,y)\leq d(x_i,x)+d(x,y)\leq s_i+r\leq 2s_i,$$

すなわち $y\in B_d(x_i;2s_i)$ が成り立つ．さらに，$(x_i,s_i)\in\mathcal{S}$ だから，$B_d(x_i;r_{x_i})$ は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる．よって，$\{B_d(x;r)\}_{x\in X}$ は $\mathfrak{U}$ を細分する． □

11.6　擬距離空間の分離化と完備化

11.6.1　擬距離空間の分離化

定義 11.21（擬距離空間の分離化）　X を擬距離空間とする．距離空間 X^{s} と全射等長写像 $s\colon X\to X^{\mathrm{s}}$ との組 (X^{s},s) を，X の分離化という．

定理 11.22（分離化の存在と一意性）　任意の擬距離空間 X に対して，X の分離化 (X^{s},s) が存在する．さらに，(X^{s},s), $(X^{\mathrm{s}\prime},s')$ がともに X の分離化であれば，等長同型写像 $\phi\colon X^{\mathrm{s}}\to X^{\mathrm{s}\prime}$ であって，$s'=\phi\circ s$ を満たすものが存在する．

証明　(X^{s},s) と $(X^{\mathrm{s}\prime},s')$ がともに X の分離化であるとする．各点 $u\in X^{\mathrm{s}}$ に対して，$s(x)=u$ を満たす $x\in X$ をとり（s の全射性を用いる），$\phi(u)=s'(x)$ と定める．$X^{\mathrm{s}\prime}$ が距離空間であることと s の等長性より，$\phi(u)$ は x のとり方によらないから，写像 $\phi\colon X^{\mathrm{s}}\to X^{\mathrm{s}\prime}$ が矛盾なく定まる．定義より，ϕ は $s'=\phi\circ s$ を満たす．また，s と s' はともに等長な全射だから，ϕ は等長な全射である．さらに，X^{s} は距離空間だから，ϕ は単射でもあり，したがって ϕ は等長同型である．

擬距離空間 (X,d) の分離化の存在を示す．X 上の同値関係 $\sim$ を，x, $y\in X$ に対して

$$x\sim y \iff d(x,y)=0$$

と定め，この同値関係による X の商集合を X^{s} と置き，$s\colon X \to X^{\mathrm{s}}$ を等化写像とする．さらに，容易にわかるように，X^{s} 上の擬距離 d^{s} であって，s が (X,d) から $(X^{\mathrm{s}},d^{\mathrm{s}})$ への等長写像になるようなものが一意に存在するから，これをとる．すると，明らかに $(X^{\mathrm{s}},d^{\mathrm{s}})$ は (X,d) の分離化である． □

命題 11.23　X を擬距離空間とする．X の分離化 (X^{s},s) は，X の（位相空間としての）Kolmogorov 商である．

証明　分離化の定義より，X^{s} は T_0 であり，s は一様連続全射である．さらに，s は等長だから X の擬距離は s が誘導する擬距離に等しく，したがって命題 10.6 より，X の位相は s が誘導する始位相に等しい．よって，(X^{s},s) は定理 5.50 の条件 (KQ1)–(KQ3) を満たすから，X の Kolmogorov 商である． □

定理 11.24（分離化の普遍性）　X を擬距離空間とし，(X^{s},s) を X の分離化とする．

(1) 任意の距離空間 Z と一様連続写像 $f\colon X \to Z$ に対して，一様連続写像 $f^{\mathrm{s}}\colon X^{\mathrm{s}} \to Z$ であって $f = f^{\mathrm{s}} \circ s$ を満たすものが一意に存在する．
(2) 任意の距離空間 Z と等長写像 $f\colon X \to Z$ に対して，等長写像 $f^{\mathrm{s}}\colon X^{\mathrm{s}} \to Z$ であって $f = f^{\mathrm{s}} \circ \iota$ を満たすものが一意に存在する．

証明　(X^{s},s) は X の Kolmogorov 商だから（命題 11.23），任意の T_0 空間 Z と連続写像 $f\colon X \to Z$ に対して，連続写像 $f^{\mathrm{s}}\colon X^{\mathrm{s}} \to Z$ であって $f = f^{\mathrm{s}} \circ s$ を満たすものが一意に存在する．さらに，Z が距離空間の構造をもち，f が一様連続【等長】ならば，s が等長な全射であることより，f^{s} も一様連続【等長】である．これで，主張は示された． □

命題 11.25　X を擬距離空間とし，(X^{s},s) を X の分離化とする．

(1) X が完備であることと，X^{s} が完備であることとは同値である．
(2) X が全有界であることと，X^{s} が全有界であることとは同値である．

証明　(1)　s は等長だから，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy であることと，$(s(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy であることとは同値である．また，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と点 $x \in X$ に対して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束することと，$(s(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $s(x)$ に収束することとは同値である．これと s の全射性より，X が完備であることと，X^{s} が完備であることとは同値である．

(2)　命題 11.17 から従う． □

11.6.2　擬距離空間の完備化

定義 11.26（擬距離空間の完備化）　X を擬距離空間とする．完備距離空間 $\widehat{X}$ と等長写像 $\iota\colon X \to \widehat{X}$ との組 $(\widehat{X},\iota)$ であって像 $\iota(X)$ が $\widehat{X}$ で稠密であるものを，X の**完備化**という．

距離空間からの等長写像は常に等長埋め込みだったから，$(\widehat{X},\iota)$ が距離空間 X の完備化ならば，X は $\widehat{X}$ の稠密部分距離空間とみなせる．

命題 11.27　X を擬距離空間とし，$(\widehat{X},\iota)$ を X の完備化とする．ι を X から $\iota(X)$ への写像とみなしたものを $\iota_0\colon X \to \iota(X)$ と書くと，$(\iota(X),\iota_0)$ は X の分離化である．

証明　完備化と分離化の定義から明らかである． □

定理 11.28（完備化の存在と一意性） 任意の擬距離空間 X に対して，X の完備化 $(\widehat{X}, \iota)$ が存在する．さらに，$(\widehat{X}, \iota)$, $(\widehat{X}', \iota')$ がともに X の完備化であれば，等長同型写像 $\phi\colon \widehat{X} \to \widehat{X}'$ であって，$\iota' = \phi \circ \iota$ を満たすものが存在する．

証明 $(\widehat{X}, \iota)$ と $(\widehat{X}', \iota')$ がともに X の完備化であるとする．ι を X から $\iota(X)$ への写像とみなしたものを $\iota_0\colon X \to \iota(X)$，$\iota'$ を X から $\iota'(X)$ への写像とみなしたものを $\iota'_0\colon X \to \iota'(X)$ と書くと，$(\iota(X), \iota_0)$ と $(\iota'(X), \iota'_0)$ はともに X の分離化だから（命題 11.27），分離化の一意性（定理 11.22）より，等長同型写像 $\phi_0\colon \iota(X) \to \iota'(X)$ であって $\iota'_0 = \phi_0 \circ \iota_0$ を満たすものが存在する．$\iota(X)$, $\iota'(X)$ はそれぞれ完備距離空間 $\widehat{X}$, $\widehat{X}'$ において稠密だから，系 11.11 (2) より，ϕ_0 は等長同型写像 $\phi\colon \widehat{X} \to \widehat{X}'$ に延長される．この ϕ は，$\iota' = \phi \circ \iota$ を満たす．

擬距離空間 (X, d) の完備化の存在を示す．X 上の Cauchy 列の全体を $\mathcal{X}$ と置き，関数 $\widetilde{d}\colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，$\mathcal{X}$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$\boldsymbol{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

$$\widetilde{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

と定める．ここで，右辺の極限が常に一意に存在することを確かめておく．$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は完備距離空間だから，そのためには，$\mathcal{X}$ の任意の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$\boldsymbol{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy であることをいえばよい．$\epsilon > 0$ を任意にとる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はともに Cauchy だから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の m, $n \geq n_0$ に対して $d(x_m, x_n) \leq \epsilon$ かつ $d(x_m, x_n) \leq \epsilon$ となる．このとき，

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \leq 2\epsilon$$

が成り立つ．よって，$(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy である．これで，極限が一意に存在することが示された．さらに，d が X 上の擬距離であることから容易にわかるように，$\widetilde{d}$ は $\mathcal{X}$ 上の擬距離である．

擬距離空間 $(\mathcal{X}, \widetilde{d})$ の分離化を $((\widehat{X}, \widehat{d}), s)$ とし，写像 $\iota\colon X \to \widehat{X}$ を

$$\iota(x) = s((x)_{n\in\mathbb{N}})$$

と定める．以下，この $((\widehat{X}, \widehat{d}), \iota)$ が (X, d) の完備化であることを示す．

まず，x, $y \in X$ に対して

$$\widehat{d}(\iota(x), \iota(y)) = \widetilde{d}((x)_{n\in\mathbb{N}}, (y)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

だから，$\iota\colon X \to \widehat{X}$ は等長である．

次に，$\iota(X)$ が $\widehat{X}$ において稠密であることを示す．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ と $\epsilon > 0$ を任意にとる．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy だから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $d(x_n, x_{n_0}) \leq \epsilon$ となる．このとき，

$$\widehat{d}(s((x_n)_{n\in\mathbb{N}}), \iota(x_{n_0})) = \widetilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_{n_0})_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) \leq \epsilon$$

が成り立つ．よって，$\iota(X)$ は $\widehat{X}$ において稠密である．

最後に，$(\widehat{X}, \widehat{d})$ が完備であることを示す．命題 11.25 (1) より，そのためには，$(\mathcal{X}, \widetilde{d})$ が完備であることを示せばよい．$(\mathcal{X}, \widetilde{d})$ 上の Cauchy 列 $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ を任意にとり，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{x}^k = (x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と書く．$k \in \mathbb{N}$ に対して $n_k \in \mathbb{N}$ を，2 条件

(i) $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は狭義単調増加である．
(ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と $n \geq n_k$ に対して，$d(x^k_n, x^k_{n_k}) \leq 2^{-k}$ である．

を満たすようにとる．これは，各 $\boldsymbol{x}^k$ が d に関して Cauchy であることから可能である．

各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $y_k = x^k_{n_k}$ と置き，X 上の点列 $\boldsymbol{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を考える．$(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ が $\widetilde{d}$ に関して Cauchy であることと (ii) より，$\boldsymbol{y}$ は d に関して Cauchy だから，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}$ である．$(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ が $\boldsymbol{y}$ に収束することを示す．$\epsilon > 0$ を任意にとる．$\boldsymbol{y} = (x^k_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は d に関して Cauchy だから，十分大きい任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$l \geq k \implies d(x^k_{n_k}, x^l_{n_l}) \leq \epsilon$$

となる．一方で，(ii) より，十分大きい任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$l \geq n_k \implies d(x^k_l, x^k_{n_k}) \leq \epsilon$$

となる．これら 2 つより，十分大きい任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$l \geq n_k$ ならば

$$d(x^k_l, y_l) \leq d(x^k_l, x^k_{n_k}) + d(x^k_{n_k}, x^l_{n_l}) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

が成り立つ．したがって，十分大きい任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\widetilde{d}(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}) \leq \epsilon$ 成り立つ．よって，$(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ は $\boldsymbol{y}$ に収束する． □

定理 11.29（完備化の普遍性） X を擬距離空間とし，$(\widehat{X}, \iota)$ を X の完備化とする．

(1) 任意の完備距離空間 Z と一様連続写像 $f\colon X \to Z$ に対して，一様連続写像 $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to Z$ であって $f = \widehat{f} \circ \iota$ を満たすものが一意に存在する．
(2) 任意の完備距離空間 Z と等長写像 $f\colon X \to Z$ に対して，等長写像 $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to Z$ であって $f = \widehat{f} \circ \iota$ を満たすものが一意に存在する．

証明 ι を X から $\iota(X)$ への写像とみなしたものを ι_0 と書き，$\iota_1\colon \iota(X) \to \widehat{X}$ を包含写像とする．完備距離空間 Z と一様連続写像【等長写像】$f\colon X \to Z$ を任意にとる．$(\iota(X), \iota_0)$ は X の分離化だから（命題 11.27），分離化の普遍性（定理 11.24）より，一様連続写像【等長写像】$f^{\mathrm{s}}\colon \iota X \to Z$ であって $f = f^{\mathrm{s}} \circ \iota_0$ を満たすものが一意に存在する．さらに，$\iota(X)$ は $\widehat{X}$ において稠密だから，完備距離空間に対する拡張定理（定理 11.10）より，一様連続写像【等長写像】$\widehat{f}\colon \widehat{X} \to Z$ であって $f^{\mathrm{s}} = \widehat{f} \circ \iota_1$ を満たすものが一意に存在する．この $\widehat{f}$ は，$f = \widehat{f} \circ \iota$ を満たす唯一の一様連続写像【等長写像】である． □

命題 11.30 擬距離空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は全有界である．
(b) X の完備化はコンパクトである．

証明 $(\widehat{X}, \iota)$ を X の完備化とする．

(a) $\implies$ (b) X が全有界ならば，その一様連続像の閉包 $\widehat{X} = \overline{\iota(X)}$ も全有界である（命題 11.16，命題 11.15 (3)）．よって，このとき $\widehat{X}$ は完備かつ全有界だから，定理 11.19 よりコンパクトである．

(b) $\implies$ (a) $\widehat{X}$ がコンパクトならば，$\widehat{X}$ は全有界である（定理 11.19）．X の擬距離は $\iota\colon X \to \widehat{X}$ が誘導する擬距離に等しいから，命題 11.17 より，このとき X も全有界である． □

第 12 章

位相空間の擬距離化可能性

12.1　擬距離化可能空間

定義 12.1（擬距離化可能空間）　X を位相空間とする．集合 X 上の擬距離 d が定める位相が X の位相と一致するとき，d は X の位相と**整合する**という．X の位相と整合する擬距離【距離】が存在するとき，X は**擬距離化可能【距離化可能】**であるという．

系 10.22 より，位相空間が距離化可能であること，擬距離化可能かつ T_0 であること，擬距離化可能かつ分離であることはすべて同値である．

第 10 章で示した擬距離空間・距離空間の位相的性質に関する命題は，擬距離化可能空間・距離化可能空間に対しても成り立つことに注意する．以下，特に断らずに，そのような命題を擬距離化可能空間・距離化可能空間に対しても適用する．

命題 12.2　$C > 0$ とする．X を集合，d を X 上の擬距離【距離】とするとき，X 上の擬距離【距離】d' であって，d と一様同型であり，$d' \leq C$ を満たすものが存在する．

証明　$d' = \min\{d, C\}$ と置けばよい．□

定理 12.3　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間の可算族とし，写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，各 Y_i が擬距離化可能ならば，X も擬距離化可能である．

証明　I が有限である場合には 1 点のみからなる空間を補うことによって，$I = \mathbb{N}$ としても一般性を失わない．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，Y_n が擬距離化可能であるとして，Y_n の位相と整合する擬距離 $d_n \leq 1$ をとる（命題 12.2）．関数 $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} d_n(\phi_n(x), \phi_n(y))$$

と定めると，容易にわかるように，d は X 上の擬距離である．以下，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導する始位相を $\mathfrak{O}$，d が定める位相を $\mathfrak{O}'$ とし，$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ を示す．

$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ を示す．d_n は $Y_n \times Y_n$ 上の連続関数であり（命題 10.13），始位相の定義より ϕ_n は $\mathfrak{O}$ に関して連続だから，写像 $(x, y) \mapsto d_n(\phi_n(x), \phi_n(y))$ は $\mathfrak{O}$ に関して連続である．よって，その一様収束極限である d も $\mathfrak{O}$ に関して連続である．$\mathfrak{O}'$ は d が連続になる最小の位相だから（命題 10.17），$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ が成り立つ．

$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ を示す．$x \in X$ を固定すると，

$$\phi_n^{-1}(B_{d_n}(\phi(x); r)) = \{y \in X \mid d_n(\phi_n(x), \phi_n(y)) < r\} \quad (n \in \mathbb{N},\ r > 0)$$

と表される集合全体が $\mathfrak{O}$ に関する x の準近傍基をなすから（命題 3.4 (1)），この形の集合が $\mathfrak{O}'$ に関しても

x の近傍であることを示せばよい．$y \in B_d(x; 2^{-n}r)$ ならば

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} d_n(\phi_n(x), \phi_n(y)) = d(x, y) \leq 2^{-n} r$$

だから，特に $d_n(\phi_n(x), \phi_n(y)) \leq r$，すなわち $y \in \phi_n^{-1}(B_{d_n}(\phi(x); r))$ である．したがって，$B_d(x; 2^{-n}r) \subseteq \phi_n^{-1}(B_{d_n}(\phi(x); r))$ である．よって，$\phi_n^{-1}(B_{d_n}(\phi(x); r))$ は $\mathfrak{O}'$ に関しても x の近傍である．これで，$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ が示された．　□

系 12.4　擬距離化可能【距離化可能】空間の部分空間は擬距離化可能【距離化可能】である．

証明　擬距離化可能性については，定理 12.3 から従う．距離化可能性については，距離化可能であることと擬距離化可能かつ分離であることとの同値性と，分離性が部分空間に遺伝すること（命題 5.18）から従う．　□

系 12.5　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は擬距離化可能【距離化可能】である．
(b) すべての X_i は擬距離化可能【距離化可能】であり，かつ可算個の $i \in I$ を除いて X_i は密着空間である．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．距離化可能であることは擬距離化可能かつ分離であることと同値であり，分離性については命題 5.19 が成立することがわかっているから，擬距離化可能性についてのみ示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が擬距離化可能であるとする．各 X_i は空でなく，積空間の断面は因子空間と同相だから（命題 3.28），X_i は X の部分空間とみなせる．よって，系 12.4 より，各 X_i は擬距離化可能である．また，X が擬距離化可能ならば特に第一可算だから，系 4.7 より，可算個の $i \in I$ を除いて X_i は密着空間でなければならない．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　密着空間は無視できるから，擬距離化可能空間の可算族の積が擬距離化可能であることを示せばよいが，これは定理 12.3 から従う．　□

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を擬距離化可能空間の可算無限族とすると，系 12.5 より，積空間 $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ は擬距離化可能である．定理 12.3 の証明を見直すと，X の位相と整合する擬距離の具体的な構成が得られる：各 $n \in \mathbb{N}$ に対して X_n の位相と整合する擬距離 $d_n \leq 1$ が与えられているとき，X の点 $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$，$y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$$

と定めると，d は X の位相と整合する擬距離である．この具体的な構成は，後に命題 12.25 の証明で用いる．

命題 12.6　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は擬距離化可能【距離化可能】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は擬距離化可能【距離化可能】である．

証明　$X = \coprod_{i \in I} X_i$ と置く．距離化可能であることは擬距離化可能かつ分離であることと同値であり，分離性については命題 5.20 が成立することがわかっているから，擬距離化可能性についてのみ示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　各 X_i は X の部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），主張は系 12.4 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　各 X_i が擬距離化可能であるとし，各 $i \in I$ について，X_i の位相と整合する擬距離 d_i をとる．関数 $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & (x,\ y \in X_i) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めれば，d は X の位相と整合する擬距離である．よって，X は擬距離化可能である．□

12.2　可算型擬距離化可能空間

命題 10.25 より，擬距離化可能空間に関して，第二可算性，可分性，可算鎖条件，Lindelöf 性はすべて同値である．

定義 12.7（可算型擬距離化可能空間）　擬距離可能空間は，第二可算性，可分性，可算鎖条件，Lindelöf 性の同値な 4 条件を満たすとき，**可算型**であるという．

系 10.22 より，位相空間が可算型距離化可能であること，可算型擬距離化可能かつ T_0 であること，可算型擬距離化可能かつ分離であることはすべて同値である．

コンパクト空間は Lindelöf だから，コンパクト擬距離化可能空間は可算型である．

命題 12.8　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間の可算族とし，写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相によって X を位相空間とみなす．このとき，各 Y_i が可算型擬距離化可能ならば，X も可算型擬距離化可能である．

証明　擬距離化可能性と第二可算性に関する対応する命題（定理 12.3，命題 4.5）から従う．□

命題 12.9　可算型擬距離化可能空間【可算型距離化可能空間】の部分空間は，可算型擬距離化可能【可算型距離化可能】である．

証明　擬距離化可能性【距離化可能性】と第二可算性に関する対応する命題（系 12.4，系 4.6）から従う．□

命題 12.10　空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は可算型擬距離化可能【可算型距離化可能】である．
(b) すべての X_i は可算型擬距離化可能【可算型距離化可能】であり，かつ可算個の $i \in I$ を除いて X_i は密着空間である．

証明　擬距離化可能性【距離化可能性】と第二可算性に関する対応する命題（系 12.5，系 4.7）から従う．□

命題 12.11　位相空間族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i \in I} X_i$ は可算型擬距離化可能【可算型距離化可能】である．
(b) すべての $i \in I$ に対して X_i は擬距離化可能【距離化可能】であり，かつ可算個の $i \in I$ を除いて X_i は空である．

証明　擬距離化可能性【距離化可能性】と第二可算性に関する対応する命題（命題 12.6，命題 4.8）から従う．□

命題 12.12　可算型擬距離化可能空間の連続像は，擬距離化可能ならば，可算型である．

証明　可分性が連続像に遺伝すること（命題 4.12）から従う．□

12.3　Urysohn の距離化定理

定理 12.13（Urysohn の距離化定理）　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．[*1]

(a) X は可算型擬距離化可能【可算型距離化可能】である．
(b) X は第二可算かつ正則【第二可算かつ正則分離】である．
(c) 写像 $\phi\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ が存在して，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しい【ϕ は埋め込みである】.

証明　(a)–(c) のそれぞれにおいて，【 】内の条件は【 】外の条件に T_0 性を加えたものだから（(c) については命題 5.21 からわかる），【 】外の条件の同値性のみを示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　擬距離化可能空間が正則であること（命題 10.21）から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　X を第二可算な正則空間とし，$\mathfrak{B}$ を X の可算開基とする．$(U,V) \in \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ であって $\overline{U} \subseteq V$ を満たすもの全体を番号付けして，

$$\{(U_n,V_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(U,V) \in \mathfrak{B}\times\mathfrak{B} \mid \overline{U} \subseteq V\}$$

とする．第二可算な正則空間は正規だから（系 7.54），Urysohn の補題（定理 5.38）より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，連続関数 $\phi_n\colon X \to [0,1]$ であって $\phi_n(\overline{U_n}) \subseteq \{1\}$ かつ $\phi_n(X \setminus V_n) \subseteq \{0\}$ を満たすものがとれる．

このとき，X のもとの位相 $\mathfrak{O}$ と，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導する始位相 $\mathfrak{O}'$ とが一致することを示す．各 ϕ_n はもとの位相 $\mathfrak{O}$ に関して連続だから，始位相の定義より $\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ である．$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ を示すために，点 $x \in X$ とその $\mathfrak{O}$ に関する近傍 W を任意にとる．$\mathfrak{B}$ が位相 $\mathfrak{O}$ の開基であることと位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ が正則であることより，$x \in U_n$ かつ $V_n \subseteq W$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ がとれる．このとき

$$x \in U_n \subseteq \phi_n^{-1}((1/2,1]) \subseteq V_n \subseteq O$$

であり，始位相の定義より $\phi_n^{-1}((1/2,1]) \in \mathfrak{O}'$ だから，位相 $\mathfrak{O}'$ に関しても W は x の近傍である．よって，$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ である．

以上より，X の位相は $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が誘導する始位相に等しい．そこで，$\phi = (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ と置けば，命題 3.20 (1) より，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しい．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$[0,1]$ は可算型距離化可能だから，(c) が成り立てば，命題 12.8 より，X は可算型擬距離化可能である．　□

系 12.14　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X の位相と整合する全有界な擬距離【距離】が存在する．
(b) X は可算型擬距離化可能【可算型距離化可能】である．

証明　(a), (b) のそれぞれにおいて，【 】内の条件は【 】外の条件に T_0 性を加えたものだから，【 】外の条件の同値性のみを示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　全有界擬距離空間が第二可算であること（命題 11.14）から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X が可算型擬距離化可能ならば，Urysohn の距離化定理（定理 12.13）より，写像 $\phi\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ が存在して，X の位相は ϕ が誘導する始位相に等しい．$[0,1]^{\mathbb{N}}$ は距離化可能だから（系 12.5），その位相と整合する距離 d がとれる．Tychonoff の定理（定理 7.17）より $[0,1]^{\mathbb{N}}$ はコンパクトだから，$[0,1]^{\mathbb{N}}$ を

[*1] Urysohn の距離化定理（定理 12.13）の (b) $\Longrightarrow$ (a) は，後述する Bing–長田–Smirnov の距離化定理（定理 12.19）からもただちに従う．

d によって距離空間とみなすと，この距離空間は全有界である（定理 11.19）．ϕ が誘導する X 上の擬距離を考えれば，命題 10.6 と命題 11.17 より，これは X の位相と整合する全有界な擬距離である． □

補題 12.15 コンパクト T_1 かつ第二可算な空間の閉連続像は，コンパクト T_1 かつ第二可算である．

証明 X をコンパクト T_1 かつ第二可算な空間，Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を閉連続全射とする．コンパクト空間の連続像はコンパクトだから（命題 7.5），Y はコンパクトである．T_1 空間の閉連続像は T_1 だから（系 5.14），Y は T_1 である．

Y が第二可算であることを示す．X の可算開基 $\mathfrak{B}$ をとり，Y の可算部分集合族 $\mathfrak{C}$ を

$$\mathfrak{C} = \{Y \setminus f(X \setminus (B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1})) \mid n \in \mathbb{N},\ B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}\}$$

と定める．$\mathfrak{C}$ が Y の開基であることを示そう．まず，f は閉写像だから，$\mathfrak{C}$ の各元は開集合である．次に，開集合 $V \subseteq Y$ と点 $y \in V$ を任意にとる．T_1 性より $\{y\}$ は Y の閉集合だから，$f^{-1}(\{y\})$ はコンパクト空間 X の閉集合であり，したがってコンパクトである．また，$f^{-1}(V)$ は X の閉集合であり，$f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(V)$ を満たす．$\mathfrak{B}$ は X の開基だから，部分族 $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ が存在して，$f^{-1}(V) = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}'} B$ と書ける．$\mathfrak{B}'$ はコンパクト集合 $f^{-1}(\{y\})$ の開被覆をなすので，有限部分被覆 $\{B_0, \ldots, B_{n-1}\} \subseteq \mathfrak{B}'$ がとれる．このとき $f^{-1}(\{y\}) \subseteq B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1} \subseteq f^{-1}(V)$ であり，したがって

$$y \in Y \setminus f(X \setminus (B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1})) \subseteq f(B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \subseteq V$$

が成り立つ．よって，$\mathfrak{C}$ は Y の開基であり，Y は第二可算である． □

定理 12.16 コンパクト距離化可能空間の閉連続像は，コンパクト距離化可能である．

証明 コンパクト距離化可能空間 X は正規分離かつ第二可算である（系 7.10，命題 10.25）．正規分離性は閉連続像で保たれ（命題 5.37），補題 12.15 より「コンパクト T_1 第二可算」性も閉連続像で保たれるから，X の閉連続像はコンパクト，正規分離かつ第二可算である．よって，Urysohn の距離化定理（定理 12.13）より，X の閉連続像はコンパクト距離化可能である． □

系 12.17 コンパクト距離化可能空間の連続像は，分離ならばコンパクト距離化可能である．

証明 コンパクト空間から分離空間への連続写像が閉であることに注意すれば（命題 7.11），定理 12.16 から従う． □

12.4 Bing–長田–Smirnov の距離化定理

次の補題は定理 5.43「任意の開被覆が閉包保存な開被覆によって細分されるような位相空間は，擬分離ならば正則かつ正規である」の系だが，ここでは直接の証明を与えておく．

補題 12.18 σ-局所有限な開基をもつ正則空間は正規である．

証明 X は正則空間であり，σ-局所有限な開基 $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$（各 $\mathfrak{B}_n$ は局所有限）をもつとする．E, F を互いに交わらない X の閉集合とする．

$\mathfrak{B}_n$ の元のうち，その閉包が F と交わらないもの全体を $\mathfrak{U}_n$，その閉包が E と交わらないもの全体を $\mathfrak{V}_n$ とし，$\mathfrak{U}_n, \mathfrak{V}_n$ のすべての元の合併をそれぞれ U_n, V_n とする．X は正則であり $\mathfrak{B}$ は X の開基だから，各点 $x \in E$ に対し $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq X \setminus F$ を満たす $B \in \mathfrak{B}$ が存在する．F の各点についても同様のことがいえる

から，

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n, \qquad F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

である．また，$\mathfrak{B}_n$ は局所有限だから閉包保存であり（命題 2.36），したがって

$$\overline{U_n} \cap F = \left(\bigcup_{B \in \mathfrak{U}_n} \overline{B} \right) \cap F = \emptyset, \qquad \overline{V_n} \cap E = \left(\bigcup_{B \in \mathfrak{V}_n} \overline{B} \right) \cap E = \emptyset$$

が成り立つ．以上より，

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n \setminus (\overline{V_0} \cup \cdots \cup \overline{V_n})), \qquad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus (\overline{U_0} \cup \cdots \cup \overline{U_n}))$$

と定めれば，U, V は E と F を分離する開集合である．よって，X は正規である． □

定理 12.19（Bing–長田–Smirnov の距離化定理）　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) X は擬距離化可能【距離化可能】である．
(b) X は正則【正則分離】であり，σ-疎な開基をもつ．
(c) X は正則【正則分離】であり，σ-局所有限な開基をもつ．

証明　距離化可能であることは擬距離化可能かつ分離であることと同値だから，擬距離化可能性についてのみ示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が擬距離化可能であるとする．命題 10.21 より，X は正則である．また，各 $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して $\mathfrak{U}_r = \{B^\circ(x; r)\}_{x \in X}$ は X の開被覆だから，Stone の定理（定理 10.27）より，$\mathfrak{U}_r$ を細分する σ-疎な開被覆 $\mathfrak{V}_r$ が存在する．このとき，$\mathfrak{V} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathfrak{V}_r$ は σ-疎である．また，$\mathfrak{U} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathfrak{U}_r$ が X の開基であり $\mathfrak{V}$ がその細分であることから，$\mathfrak{V}$ は X の開基である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　σ-疎な部分集合族は σ-局所有限だから，明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　X は正則空間であり，σ-局所有限な開基 $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$（各 $\mathfrak{B}_n$ は局所有限）をもつとする．補題 12.18 より，X は正規である．

まず，X 上の擬距離の可算族 $\{d_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ を構成する．$\mathfrak{B}_n = \{B_{n,i}\}_{i \in I_n}$ と置き，$m, n \in \mathbb{N}$ と $i \in I_n$ に対して，開集合 $U_{m,n,i}$ を

$$U_{m,n,i} = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_m,\ \overline{B} \subseteq B_{n,i}} B$$

と定める．$\mathfrak{B}_m$ は局所有限であり，特に閉包保存だから（命題 2.36），$\overline{U_{m,n,i}} \subseteq B_{n,i}$ である．したがって，X の正規性と Urysohn の補題（定理 5.38）より，$f_{m,n,i}(\overline{U_{m,n,i}}) \subseteq \{1\}$ かつ $f_{m,n,i}(X \setminus B_{n,i}) \subseteq \{0\}$ を満たす連続関数 $f_{m,n,i} \colon X \to [0,1]$ がとれる．これを用いて，関数 $d_{m,n} \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$d_{m,n}(x, y) = \sum_{i \in I_n} |f_{m,n,i}(x) - f_{m,n,i}(y)|$$

と定義する．$\mathfrak{B}_n$ の局所有限性より，$X \times X$ の各点のある近傍において上式の右辺は有限和になるので，この値は有限であり，しかも $d_{m,n}$ は連続である．さらに，容易にわかるように，d は X 上の擬距離となる．

X のもとの位相を $\mathfrak{O}$，擬距離族 $\{d_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ が定める位相の上限を $\mathfrak{O}'$ とする．定理 12.3 より $\mathfrak{O}'$ は擬距離化可能だから，$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ を示せば定理の主張が従う．

$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ を示す．上述のとおり，各 $d_{m,n}$ は積空間 $(X, \mathfrak{O}) \times (X, \mathfrak{O})$ 上で連続である．$\mathfrak{O}'$ は $d_{m,n}$ がすべて連続となるような最小の位相だから（命題 10.17），$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ である．

$\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ を示す．$n \in \mathbb{N}$ と $i \in I_n$，点 $x \in B_{i,n}$ を任意にとる．$(X, \mathfrak{O})$ の正則性と $\mathfrak{B} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_m$ が $\mathfrak{O}$ の開基であることから，$x \in U_{m,n,i}$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる．すると $y \in X$ に対して

$$1 - f_{m,n,i}(y) = |f_{m,n,i}(x) - f_{m,n,i}(y)| \leq d_{m,n}(x, y)$$

だから，$d_{m,n}(x, y) < 1$ ならば $f_{m,n,i}(y) > 0$ である．すなわち，$B^{\circ}_{d_{m,n}}(x; 1) \subseteq B_{n,i}$ が成り立つ．$x \in B_{i,n}$ は任意だから，$B_{i,n} \in \mathfrak{O}'$ である．よって $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{O}'$ であり，したがって $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'$ である． □

12.5　局所擬距離化可能性

定義 12.20（局所擬距離化可能空間）　位相空間は，その各点が部分空間として擬距離化可能な近傍をもつとき，**局所擬距離化可能**であるという．また，その各点が部分空間として距離化可能な近傍をもつとき，**局所距離化可能**であるという．

定理 12.21　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は擬距離化可能【距離化可能】である．
(b) X は局所擬距離化可能かつパラコンパクト擬分離【パラコンパクト分離】である．

証明　距離化可能であることは擬距離化可能かつ分離であることと同値だから，擬距離化可能性についてのみ示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　擬距離化可能空間は明らかに局所擬距離化可能であり，また正則だから特に擬分離である．パラコンパクト性も，Stone の定理（定理 10.27）からわかる．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X を局所擬距離化可能なパラコンパクト擬分離空間とする．パラコンパクト擬分離空間は正則だから（命題 8.5），Bing–長田–Smirnov の距離化定理（定理 12.19）より，X が σ-局所有限な開基をもつことを示せばよい．

X は局所擬距離化可能だから，X の擬距離化可能な開部分空間全体は X を被覆する．X はパラコンパクトだから，ここから，X の擬距離化可能な開部分空間の族であって局所有限なもの $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ が得られる．各 $i \in I$ に対して U_i の位相と整合する擬距離 d_i をとり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathfrak{V}_n = \{B^{\circ}_{d_i}(x; 2^{-n}) \mid i \in I,\ x \in U_i\}$$

と置く．すると，各 $\mathfrak{V}_n$ は X の開被覆だから，X のパラコンパクト性より，$\mathfrak{V}_n$ を細分する局所有限開被覆 $\mathfrak{W}_n$ がとれる．$\mathfrak{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{W}_n$ は σ-局所有限な X の開集合族である．

$\mathfrak{W}$ が X の開基であることを示す．開集合 $V \subseteq X$ と点 $x \in V$ を任意にとる．$\mathfrak{U}$ の局所有限性より，$x \in U_i$ なる $i \in I$ は有限個である．このような i を列挙して $i_0, \ldots, i_{k-1}$ とする．ここで，$n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば，$l \in \{0, \ldots, k-1\}$ に対して $B^{\circ}_{d_{i_l}}(x; 2^{-n+1}) \subseteq V$ が成り立つようにできる．さて，$\mathfrak{W}_n$ は X を被覆するから，x を含む $W \in \mathfrak{W}_n$ がとれる．$\mathfrak{W}_n$ は $\mathfrak{V}_n$ を細分するから，ある $i \in I$ と $y \in U_i$ が存在して $W \subseteq B^{\circ}_{d_i}(y; 2^{-n})$ となる．この i は，$i_0, \ldots, i_{k-1}$ のいずれかである．したがって，$x \in B^{\circ}_{d_i}(y; 2^{-n})$ および n の定め方より，$B^{\circ}_{d_i}(y; 2^{-n}) \subseteq B^{\circ}_{d_i}(x; 2^{-n+1}) \subseteq V$ である．よって，$x \in W \subseteq V$ が成り立つ．以上より，$\mathfrak{W}$ は X の開基である． □

12.6 完備擬距離化可能性

定義 12.22（完備擬距離化可能空間） 位相空間は，その位相と整合する完備な擬距離が存在するとき，**完備擬距離化可能**であるという．また，その位相と整合する完備な距離が存在するとき，**完備距離化可能**であるという．

系 10.22 より，位相空間が完備距離化可能であること，完備擬距離化可能かつ T_0 であること，完備擬距離化可能かつ分離であることはすべて同値である．

命題 12.23 完備擬距離化可能空間【完備距離化可能空間】の閉部分空間は完備擬距離化可能【完備距離化可能】である．

証明 完備擬距離空間の閉部分擬距離空間が完備であること（命題 11.9）から従う． □

命題 12.24 位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 和空間 $\coprod_{i\in I} X_i$ は完備擬距離化可能【完備距離化可能】である．
(b) すべての X_i は完備擬距離化可能【完備距離化可能】である．

証明 $X=\coprod_{i\in I} X_i$ と置く．完備距離化可能であることは完備擬距離化可能かつ分離であることと同値であり，分離性については命題 5.20 が成立することがわかっているから，擬距離化可能性についてのみ示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 各 X_i は X の閉部分空間とみなせるから（命題 3.30 (2)），主張は命題 12.23 から従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 各 X_i が完備擬距離化可能であるとし，各 $i\in I$ について，X_i の位相と整合する完備な擬距離 d_i をとる．関数 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$d(x,y)=\begin{cases} d_i(x,y) & (x,\,y\in X_i) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めれば，d は X の位相と整合する擬距離である．さらに，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を d に関する Cauchy 列とすると，この点列のある項から先は 1 つの X_i に含まれ，それによって得られる X_i 上の点列は d_i に関して Cauchy 列となるから，d_i の完備性より $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．したがって，d は完備である．よって，X は完備擬距離化可能である． □

命題 12.25 空でない位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ は完備擬距離化可能【完備距離化可能】である．
(b) すべての X_i は完備擬距離化可能【完備距離化可能】であり，かつ可算個の $i\in I$ を除いて X_i は密着空間である．

証明 $X=\prod_{i\in I} X_i$ と置く．完備距離化可能であることは完備擬距離化可能かつ分離であることと同値であり，分離性については命題 5.20 が成立することがわかっているから，擬距離化可能性についてのみ示せば十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b) X が完備擬距離化可能であるとして，X の位相と整合する完備な擬距離 d をとる．$i\in I$ を任意にとる．各 $j\in I\setminus\{i\}$ に対して点 $x_j\in X_j$ を固定し（X_j が空でないことを用いる），写像 $g\colon X_i\to X$; $x_i\mapsto(x_j)_{j\in I}$ を考える．g は埋め込みだから（命題 3.28），X を d によって擬距離空間とみなすときに g が誘導する X_i 上の擬距離を d_i とすると，d_i は X_i の位相と整合する（命題 10.6）．

d_i が完備であることを示す．d_i に関する X_k 上の Cauchy 列 $(x_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ を任意にとる．すると，$(g(x_{i,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ は d に関する X 上の Cauchy 列だから，d の完備性より，$(g(x_{i,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ はある点 $x\in X$ に収束する．このとき，$(x_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}=(\mathrm{pr}_i(g(x_{i,k})))_{k\in\mathbb{N}}$ は $\mathrm{pr}_i(x)$ に収束する（命題 6.37 (1)）．よって，d_i は完備である．これで，X_i が完備擬距離化可能であることが示された．

X が擬距離化可能ならば特に第一可算だから，系 4.7 より，可算個の $i\in I$ を除いて X_i は密着空間でなければならない．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　密着空間は無視できるから，完備擬距離化可能空間の可算無限積が完備擬距離化可能であることを示せばよい．$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を完備擬距離化可能空間の可算無限族とし，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して X_n の位相と整合する完備な擬距離 d_n をとる．擬距離は一様同型なまま値域を抑えることができ（命題 12.2），完備性は一様同型に関して不変だから（命題 11.7），$d_n\leq 1$ としてよい．系 12.5 の証明の後に注意したように，このとき，X の点 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

$$d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{-n}d_n(x_n,y_n)$$

と定めると，d は X の位相と整合する擬距離となる．この擬距離 d が完備であることを示せばよい．

$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ を d に関する Cauchy 列とする．以下，一般に，x^k の n-成分を x^k_n と書く．$n\in\mathbb{N}$ を固定すると，任意の k, $l\in\mathbb{N}$ に対して

$$d_n(x^k_n,x^l_n)\leq 2^n d(x^k,x^l)$$

が成り立つから，$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ が d に関して Cauchy であることより，$(x^k_n)_{k\in\mathbb{N}}$ は d_n に関して Cauchy であるとわかる．d_n の完備性より，$(x^k_n)_{k\in\mathbb{N}}$ はある点 $x_n\in X_n$ に収束する．このとき，系 6.40 より，$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ は点 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に収束する．よって，d は完備である．□

命題 12.26　X を分離空間，$\{A_i\}_{i\in I}$ を X の部分集合の空でない可算族とする．各 A_i が完備距離化可能ならば，$\bigcap_{i\in I}A_i$ も完備距離化可能である．

証明　各 A_i が完備距離化可能であるとする．すると，命題 12.25 より，$\prod_{i\in I}A_i$ は完備距離化可能である．また，X が分離であることより $\varDelta=\{(x)_{i\in I}\mid x\in X\}$ は X^I の閉集合だから，$(\prod_{i\in I}A_i)\cap\varDelta$ は $\prod_{i\in I}A_i$ の閉集合であり，したがって命題 12.23 より完備距離化可能である．$x\mapsto(x)_{i\in I}$ は $\bigcap_{i\in I}A_i$ から $(\prod_{i\in I}A_i)\cap\varDelta$ への同相写像を与えるから，これより，$\bigcap_{i\in I}A_i$ は完備距離化可能である．□

命題 12.27　完備擬距離化可能空間【完備距離化可能空間】の δ-開部分空間は完備擬距離化可能【完備距離化可能】である．

証明　一般に，X を位相空間とし，(X^{k},k) を X の Kolmogorov 商とする．$A=\bigcap_{i\in I}U_i$ を X の δ-開部分空間（I は可算，各 U_i は X の開部分空間）とすると，Kolmogorv 商の性質より $k(A)=\bigcap_{i\in I}k(U_i)$ かつ各 $k(U_i)$ は X^{k} の開部分空間だから，$k(A)$ は X^{k} の δ-開部分空間である．さらに，$k|_A$ を A から $k(A)$ への写像とみなしたものを k_A と書くと，$(k(A),k_A)$ は A の Kolmogorov 商である．一方で，命題 11.23 と命題 11.25 (1) より，位相空間が完備擬距離化可能であることと，その Kolmogorov 商が完備距離化可能であることとは同値である．以上より，完備擬距離化可能性に関する主張は，完備距離化可能性に関する主張に帰着される．

完備距離化可能性について示す．命題 12.26 より，完備距離化可能空間 X の開部分空間 U が完備距離化可能であることを示せば十分である．X を完備距離化可能空間，U を X の開部分空間とする．$U=X$ ならば明らかに U は完備距離化可能だから，$U\neq X$ とする．$X\times\mathbb{R}$ の部分集合 F を

$$F=\{(x,t)\in X\times\mathbb{R}\mid td(x,X\setminus U)=1\}$$

と定める．$(x,t) \mapsto td(x, X \setminus U)$ は $X \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続写像だから（命題 10.13），F は $X \times \mathbb{R}$ の閉集合である．X, $\mathbb{R}$ はともに完備距離化可能だから，命題 12.25 より $X \times \mathbb{R}$ も完備距離化可能であり，したがって命題 12.23 より F も完備距離化可能である．ここで，射影 $\mathrm{pr}_X\colon X \times \mathbb{R} \to X$ の F への制限と，U から F への写像 $x \mapsto (x, 1/d(x, X \setminus U))$ とは互いに他の逆を与える連続写像である（命題 10.18，命題 10.13）．よって，U は F に同相であり，したがって完備距離化可能である．□

命題 12.28 (1) 分離空間の稠密部分空間は，完備距離化可能ならば δ-開である．
(2) 距離化可能空間の部分空間は，完備距離化可能ならば δ-開である．

証明 (1) X を分離空間，A を X の完備距離化可能な稠密部分空間とする．A の位相と整合する完備な距離 d を 1 つとっておく．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$U_n = \{x \in X \mid \text{ある } V \in \mathfrak{N}(x) \text{ が存在して } \operatorname{diam}(U \cap A) \leq 2^{-n}\}$$

と置くと，U_n は X の開集合であり，$A \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ である．$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq A$ を示す．

$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ をとると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して x の近傍 V_n が存在して，$\operatorname{diam}(V_n \cap A) \leq 2^{-n}$ が成り立つ．A の稠密性より $V_n \cap A \neq \emptyset$ だから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して点 $x_n \in V_n \cap A$ がとれる．X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，x に収束する．一方で，$\operatorname{diam}(V_n \cap A) \leq 2^{-n}$ より $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は d に関して Cauchy だから，d の完備性より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は A 上の点列としてある点 $x' \in A$ に収束する．このとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の点列としても x' に収束する（命題 11.3）．すると，分離空間における点列の極限の一意性（命題 6.41）より $x = x' \in A$ である．よって，$A \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ である．

(2) X を距離化可能空間，A を X の完備距離化可能な部分空間とする．すると，(1) より A は $\overline{A}$ の δ-開集合であり，命題 10.23 より $\overline{A}$ は X の δ-開集合だから，A は X の δ-開集合である．□

系 12.29 完備距離化可能空間の部分空間について，それが完備距離化可能であることと δ-開であることとは同値である．

証明 命題 12.27 と命題 12.28 (2) から従う．□

12.7 Baire 空間

定義 12.30（希薄集合，濃密集合） X を位相空間，A を X の部分集合とする．

(1) A が X において**希薄**あるいは**全疎**であるとは，$(\overline{A})^\circ = \emptyset$ であることをいう．
(2) A が X において**濃密**[*2] であるとは，$\overline{A^\circ} = X$ であることをいう．

明らかに，希薄集合の補集合は濃密集合であり，その逆も成り立つ．また，希薄閉集合とは内点をもたない閉集合のことであり，濃密開集合とは稠密な開集合のことである．

命題 12.31 X を位相空間とする．

(1) A が X の希薄集合で $B \subseteq A$ ならば，B も X の希薄集合である．
(2) A が X の濃密集合で $A \subseteq B \subseteq X$ ならば，B も X の濃密集合である．
(3) $A_0, \dots, A_{n-1}$ が X の希薄集合ならば，$A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ も X の希薄集合である．
(4) $A_0, \dots, A_{n-1}$ が X の濃密集合ならば，$A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}$ も X の濃密集合である．

[*2] 「濃密」は，本稿だけの用語である．

証明 (1) と (2) は明らかであり，補集合をとることを考えれば (3) は (4) に帰着するから，(4) のみを示す．

内部をとる操作は有限交叉と交換するから，稠密開集合の有限交叉がまた稠密開集合であることを示せば十分である．帰納法を考えることにより，稠密開集合 A, B に対して $A \cap B$ が稠密であることのみを示せばよい．これは，命題 2.8 より $A \subseteq \overline{A \cap B}$ が成り立つことからわかる． □

定義 12.32（Baire 空間） 位相空間 X が Baire であるとは，X の任意の希薄集合の可算族 $\{A_i\}_{i \in I}$ に対して，$\bigcap_{i \in I} A_i$ が内点をもたないことをいう．

命題 12.33 位相空間 X に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) X は Baire である．
(b) X の任意の内点をもたない閉集合の可算合併は，内点をもたない．
(c) X の任意の濃厚集合の可算交叉は，稠密である．
(d) X の任意の稠密開集合の可算交叉は，稠密である．

証明 補集合をとることを考えれば (a) $\Longleftrightarrow$ (c)，(b) $\Longleftrightarrow$ (d) がわかるから，(a) $\Longleftrightarrow$ (b) のみを示す．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 内点をもたない閉集合が希薄であることから明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\{A_i\}_{i \in I}$ を X の希薄集合の可算族とすると，各 $\overline{A_i}$ は内点をもたない閉集合だから，仮定より $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ は内点をもたない．よって，$\bigcup_{i \in I} A_i$ も内点をもたない． □

命題 12.34 (1) Baire 空間の開部分空間は Baire である．
(2) Baire 空間の稠密 δ-開部分空間は Baire である．

証明 (1) X を Baire 空間，A を X の開部分空間とする．A の稠密開集合の可算族 $\{D_i\}_{i \in I}$ をとる．D_i は X の開集合でもあるから，$D'_i = D_i \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X(D_i))$ は X の稠密開集合である．したがって，X が Baire であることより，$\bigcap_{i \in I} D'_i$ は X において稠密である．さて，D_i は A において稠密だったから，$A \subseteq \mathrm{cl}_X(D_i)$，すなわち $D_i = D'_i \cap A$ が成り立ち，したがって $\bigcap_{i \in I} D_i = \left(\bigcap_{i \in I} D'_i\right) \cap A$ である．$\bigcap_{i \in I} D'_i$ は X において稠密であり，A は X の開部分空間だから，命題 2.8 より，$\bigcap_{i \in I} D_i = \left(\bigcap_{i \in I} D'_i\right) \cap A$ は A において稠密である．

(2) X を Baire 空間，$A = \bigcap_{j \in J} U_j$ を X の δ-開部分空間（J は可算，各 U_j は X の開集合）とする．A の稠密開集合の可算族 $\{D_i\}_{i \in I}$ をとる．各 D_i は X の稠密開集合 D'_i を用いて $D_i = D'_i \cap A$ と書ける．D'_i, U_j はすべて X の稠密開集合だから，X が Baire であることより，$\bigcap_{i \in I} D_i = \bigcap_{i \in I} D'_i \cap \bigcap_{j \in J} U_j$ は X において稠密である．よって，A は Baire である． □

定理 12.35 可算コンパクト正則空間は Baire である．

証明 X を可算コンパクト正則空間とし，X の稠密開集合の列 $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとる．X の空でない任意の開集合 U が $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ と交わることをいえばよい．X の空でない開集合の列 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{V_n} \subseteq V_{n-1} \cap D_n$$

が成り立つように定める（ただし，$V_{-1} = U$ とする）．これは可能である．実際，D_n の稠密性より各段階において $V_{n-1} \cap D_n$ は空でない開集合だから，X の正則性を用いて上式を満たす空でない開集合 V_n をとればよい．すると，$\{\overline{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有限交叉性をもつ可算閉集合族だから，X の可算コンパクト性より，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$ は空でない（命題 7.57）．$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \subseteq U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ だから，$U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$ である．これで示された． □

系 12.36（Baire の範疇定理） (1) 局所コンパクト分離空間は Baire である．

(2) 完備距離化可能空間は Baire である．

証明　局所コンパクト分離空間 X は，その Stone–Čech コンパクト化 βX の開部分空間とみなせる（命題 7.40 (3)）．また，X を完備距離化可能空間とすると，X はその Stone–Čech コンパクト化 βX の稠密部分空間とみなすことができ（命題 10.21，命題 7.40 (2)），このとき，命題 12.28 (1) より X は βX の δ-開部分空間である．よって，主張は，可算コンパクト正則空間が Baire であること（定理 12.35）と Baire 空間の稠密 δ-開部分空間が Baire であること（命題 12.34 (2)）から従う．□

第 III 部

一様空間論

第 13 章

一様空間

記号と用語

この「記号と用語」では，X, Y は集合とする．

- $X \times X$ の部分集合 $\{(x, x) \mid x \in X\}$ を X の**対角集合**といい，$\Delta(X)$ と書く．
- $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq X \times X$ に対して，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**合成**を
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \{(x, z) \in X \times X \mid \text{ある } y \in X \text{ が存在して } (x, y) \in \boldsymbol{A} \text{ かつ } (y, z) \in \boldsymbol{B}\}$$
と定め，$\boldsymbol{A}$ の**逆**を
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \boldsymbol{A}\}$$
と定める．$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して，n 項の合成 $\boldsymbol{A} \cdots \boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}^n$ と書く．$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$ であるとき，$\boldsymbol{A}$ は**対称**であるという．
- $\boldsymbol{A} \subseteq X \times X$ と $S \subseteq X$ に対して，
$$\boldsymbol{A}[S] = \{y \in X \mid \text{ある } x \in S \text{ が存在して } (x, y) \in \boldsymbol{A}\}$$
と定める．$\boldsymbol{A}[\{x\}]$ を単に $\boldsymbol{A}[x]$ と書く．
- 写像 $f \colon X \to Y$ に対して，写像 $f \times f \colon X \times X \to Y \times Y;\ (x_0, x_1) \mapsto (f(x_0), f(x_1))$ を $f^\times$ と書く．

13.1　一様空間の定義

定義 13.1（一様空間）　X を集合とする．$X \times X$ の部分集合族 $\mathscr{U}$ が次の条件を満たすとき，$\mathscr{U}$ は X 上の**一様構造**あるいは**近縁系**であるといい，$(X, \mathscr{U})$ を**一様空間**という．

(U1) $\mathscr{U}$ は $X \times X$ 上のフィルタである．
(U2) 任意の $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ は対角集合 $\Delta(X)$ を含む．
(U3) 任意の $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ に対してある $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在し，$\boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす．
(U4) $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ ならば $\boldsymbol{U}^{-1} \in \mathscr{U}$ である．

$\mathscr{U}$ を一様空間 $(X, \mathscr{U})$ の**一様構造**あるいは**近縁系**といい，$\mathscr{U}$ の元を一様空間 $(X, \mathscr{U})$ 上の**近縁**という．

考えている一様構造 $\mathscr{U}$ を明示する必要がない場合には，単に「一様空間 X」などともいう．

(U1), (U2) より，空でない集合 X 上の一様構造は $X \times X$ 上の真フィルタとなる．$\emptyset$ 上の一様構造は $\{\emptyset\}$ のみであり，これは $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ 上の自明なフィルタである．

定義 13.2（一様構造の比較）　集合 X 上の一様構造全体の集合を，包含関係によって順序集合とみなす．より詳しくは，集合 X 上の一様構造 $\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1$ について，$\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}_1$ であるとき，$\mathscr{U}_1$ は $\mathscr{U}_0$ よりも**細かい**，$\mathscr{U}_0$ は $\mathscr{U}_1$ よりも**粗い**という．より強く $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}_1$ であるとき，それぞれ**真に細かい**，**真に粗い**という．

明らかに，X 上の最大の（最も細かい）一様構造は $\{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \varDelta(X) \subseteq \boldsymbol{U}\}$ であり，最小の（最も粗い）一様構造は $\{X \times X\}$ である．最大の一様構造をもつ一様空間を**離散一様空間**，最小の一様構造をもつ一様空間を**密着一様空間**という

後に 13.3 節で，一様構造が定める位相について定義する．離散一様構造・密着一様構造はそれぞれ離散位相・密着位相を定め，逆に密着位相を定める一様構造は密着一様構造だが，離散位相を定める一様構造が離散一様構造であるとは限らない．

13.2　準一様基と一様基

定義 13.3（準一様基，一様基）　$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\mathscr{B}$ を $X \times X$ の部分集合族とする．$\mathscr{B}$ が $\mathscr{U}$ の準フィルタ基・フィルタ基であるとき，それぞれ $\mathscr{B}$ は一様空間 $(X, \mathscr{U})$（あるいは一様構造 $\mathscr{U}$）の**準一様基**・**一様基**であるという．$\mathscr{B}$ が $\mathscr{U}$ の準一様基であることを，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{U}$ を**生成する**ともいう．$\mathscr{B}$ が集合 X 上のある一様構造の準一様基・一様基であることを，単に $\mathscr{B}$ は X 上の**準一様基**・**一様基**であるという．

命題 13.4　X を集合，$\mathscr{B}$ を $X \times X$ の部分集合族とする．$\mathscr{B}$ が次の 3 条件 (UB2)–(UB4) を満たせば，$\mathscr{B}$ は X 上の準一様基である．また，$\mathscr{B}$ が X 上の一様基であるための必要十分条件は，次の 4 条件 (UB1)–(UB4) を満たすことである．

(UB1) 任意の $\boldsymbol{B}_0, \ldots, \boldsymbol{B}_{n-1} \in \mathscr{B}$ に対してある $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ が存在し，$\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_{n-1}$ となる．
(UB2) 任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ は対角集合 $\varDelta(X)$ を含む．
(UB3) 任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対してある $\boldsymbol{C} \in \mathscr{B}$ が存在し，$\boldsymbol{C}^2 \subseteq \boldsymbol{B}$ となる．
(UB4) 任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対してある $\boldsymbol{C} \in \mathscr{B}$ が存在し，$\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B}^{-1}$ となる．

証明　（準一様基について）　$\mathscr{B}$ が (UB2)–(UB4) を満たすとして，$\mathscr{B}$ が生成するフィルタ $\mathscr{U}$ が一様構造の条件 (U1)–(U4) を満たすことを示す．

(U1)　自動的に満たされる．

(U2)　(UB2) からただちに従う．

(U3)　$\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ とすると，有限個の元 $\boldsymbol{B}_0, \ldots, \boldsymbol{B}_{n-1} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ となる．(UB3) より，各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対してある $\boldsymbol{C}_i \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{C}_i^2 \subseteq \boldsymbol{B}_i$ を満たす．このとき，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{C}_{n-1}$ と置くと，すでに示した (U1) より $\boldsymbol{C} \in \mathscr{U}$ であり，また $\boldsymbol{C}^2 \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{U}$ である．よって，(U3) は成り立つ．

(U4)　$\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ とすると，有限個の元 $\boldsymbol{B}_0, \ldots, \boldsymbol{B}_{n-1} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ となる．(UB4) より，各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対してある $\boldsymbol{C}_i \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{C}_i^{-1} \subseteq \boldsymbol{B}_i$ を満たす．このとき，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{C}_{n-1}$ と置くと，すでに示した (U1) より $\boldsymbol{C} \in \mathscr{U}$ であり，また $\boldsymbol{C}^{-1} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{U}$ である．よって，(U4) は成り立つ．

（一様基について）　十分性は，$\mathscr{B}$ が一様基であることと，$\mathscr{B}$ が準一様基かつフィルタ基であることとの同値性に注意すれば，準一様基についての結果と命題 1.5 (2) から従う．

次に，必要性を示す．すなわち，$\mathscr{B}$ がある一様構造 $\mathscr{U}$ の一様基であるとして，$\mathscr{B}$ が (UB1)–(UB4) を満たすことを示す．

(UB1)　このとき $\mathscr{B}$ はフィルタ基だから，(UB1) は命題 1.5 (2) から従う．

(UB2)　(U2) からただちに従う．

(UB3)　$\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ とすると，$\boldsymbol{B} \in \mathscr{U}$ だから，(U3) よりある $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在して $\boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{B}$ を満たす．一様基の定義より，ある $\boldsymbol{C} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{V}$ となる．このとき，$\boldsymbol{C}^2 \subseteq \boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{B}$ である．よって，(UB3) は成り立つ．

(UB4)　$\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ とすると，$\boldsymbol{B} \in \mathscr{U}$ だから，(U4) より $\boldsymbol{B}^{-1} \in \mathscr{U}$ である．一様基の定義より，ある $\boldsymbol{C} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B}^{-1}$ となる．よって，(UB4) は成り立つ．　□

命題 13.5　$n \in \mathbb{N}_{>0}$ とする．一様空間 X 上の対称近縁の n 項合成全体は，X の一様基をなす．

証明　任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{U}^n$ だから，一様構造の条件 (U1) より，$\boldsymbol{U}^n$ は近縁である．一方で，一様構造の条件 (U3) を繰り返し用いることにより，任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $\boldsymbol{V}^n \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在することがわかる．このとき，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{V}^{-1}$ は対称近縁であり，$\boldsymbol{W}^n \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす．よって，対称近縁の n 項合成全体は X の一様基をなす．　□

13.3　一様構造が定める位相

命題 13.6　$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．X 上の位相であって，各点 $x \in X$ の近傍フィルタが

$$\mathscr{U}[x] = \{\boldsymbol{U}[x] \mid \boldsymbol{U} \in \mathscr{U}\}$$

であるものが一意に存在する．

証明　定理 2.12 (4) より，次の 3 条件を確かめればよい．

(N1) 任意の $x \in X$ に対して，$\mathscr{U}[x]$ は X 上のフィルタである．

(N2) 任意の $x \in X$ と $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ に対して，$x \in \boldsymbol{U}[x]$ である．

(N3) 任意の $x \in X$ と $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ に対してある $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在し，任意の $y \in \boldsymbol{V}[x]$ に対して $\boldsymbol{U}[x] \in \mathscr{U}[y]$ である．

(N1)　$\mathscr{U}[x]$ は「$\mathscr{U}$ が $\{x\} \times X$ 上に誘導する相対フィルタを自然に X 上のフィルタとみなしたもの」だから，明らかである．

(N2)　$\mathscr{U}$ の各元が対角集合 $\Delta(X)$ を含むことから従う．

(N3)　$x \in X$ と $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ を任意にとる．一様構造の性質 (U3) より，$\boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ がとれる．すると，任意の点 $z \in \boldsymbol{V}[y]$ に対して $z \in \boldsymbol{V}^2[x] \subseteq \boldsymbol{U}[x]$ だから，$\boldsymbol{V}[y] \subseteq \boldsymbol{U}[x]$ である．$\boldsymbol{V}[y] \in \mathscr{U}[y]$ だから，これより $\boldsymbol{U}[x] \in \mathscr{U}[y]$ である．　□

定義 13.7（一様構造が定める位相）　$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．集合 X 上の位相であって，各点 $x \in X$ の近傍フィルタが $\mathscr{U}[x]$ であるもの（命題 13.6 より，このような位相は一意に存在する）を，**一様構造 $\mathscr{U}$ が定める位相**という．

以下，特に断らなくても，一様空間は常にこの位相を備えているものとして扱う．たとえば，「一様空間 X が分離である」というのは，「一様空間 X を，その一様構造が定める位相によって位相空間とみなしたものは分離である」という意味である．

命題 13.8　X を一様空間，$x \in X$ とする．

(1) $\mathscr{B}$ が X の準一様基ならば，$\mathscr{B}[x] = \{\boldsymbol{B}[x] \mid \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$ は x の準近傍基である．

(2) $\mathscr{B}$ が X の一様基ならば，$\mathscr{B}[x] = \{\boldsymbol{B}[x] \mid \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$ は x の近傍基である．

証明　X の一様構造を $\mathscr{U}$ と書く．x の近傍フィルタ $\mathscr{U}[x]$ が「$\mathscr{U}$ が $\{x\} \times X$ 上に誘導する相対フィルタを自然に X 上のフィルタとみなしたもの」であることに注意すれば，命題 1.27 から従う．　□

X を一様空間とする．X 上の近縁であって $X \times X$ の開集合・閉集合であるものを，それぞれ X 上の**開近縁**・**閉近縁**という．

補題 13.9　X を一様空間とする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ と任意の $\boldsymbol{A} \subseteq X \times X$ に対して，$\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1})^{\circ}$，$\overline{\boldsymbol{A}} \subseteq \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ が成り立つ．

証明　任意の点 $(x,y) \in \boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y] \subseteq \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1}$ が成り立つ．実際，$(u,v) \in \boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ ならば $(u,x) \in \boldsymbol{U}^{-1}$，$(y,v) \in \boldsymbol{U}$ であり，$(x,y) \in \boldsymbol{A}$ と合わせて $(u,v) \in \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1}$ を得る．$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ は $X \times X$ における (x,y) の近傍だから，ここから $(x,y) \in (\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1})^{\circ}$ が従う．よって，$\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1})^{\circ}$ である．

点 $(x,y) \in \overline{\boldsymbol{A}}$ を任意にとる．すると，$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ は (x,y) の近傍だから，$\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]$ は $\boldsymbol{A}$ と交わる．すなわち，点 $(u,v) \in (\boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[y]) \cap \boldsymbol{A}$ がとれる．このとき $(x,u) \in \boldsymbol{U}$，$(u,v) \in \boldsymbol{A}$，$(v,y) \in \boldsymbol{U}^{-1}$ だから，$(x,y) \in \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ となる．よって，$\overline{\boldsymbol{A}} \subseteq \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ である．　□

命題 13.10　X を一様空間とする．

(1) X 上の近縁の内部全体は，X の一様基をなす．特に，開近縁の全体は一様基をなす．
(2) X 上の近縁の閉包全体は，X の一様基をなす．特に，閉近縁の全体は一様基をなす．

証明　(1)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\boldsymbol{U}^{\circ}$ も近縁であることをいえばよい．命題 13.5 より，$\boldsymbol{V}^3 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす対称近縁 $\boldsymbol{V}$ がとれる．このとき，補題 13.9 より $\boldsymbol{V} \subseteq (\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-1})^{\circ} = (\boldsymbol{V}^3)^{\circ} \subseteq \boldsymbol{U}^{\circ}$ だから，$\boldsymbol{U}^{\circ}$ は近縁である．

(2)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，閉包が $\boldsymbol{U}$ に含まれるような近縁が存在することをいえばよい．命題 13.5 より，$\boldsymbol{V}^3 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす対称近縁 $\boldsymbol{V}$ がとれる．このとき，補題 13.9 より $\overline{\boldsymbol{V}} \subseteq \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^3 \subseteq \boldsymbol{U}$ だから，この $\boldsymbol{V}$ が求めるものである．　□

系 13.11　X を一様空間とする．X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ は，$\Delta(X)$ の近傍である．すなわち，$\Delta(X) \subseteq \boldsymbol{U}^{\circ}$ である．　□

命題 13.12　任意の一様空間は正則である．

証明　X を一様空間とする．X 上の閉近縁全体は一様基をなすから（命題 13.10 (2)），命題 13.8 (2) より，X の各点は閉集合のみからなる近傍基をもつ．よって，X は正則である（命題 5.24）．　□

系 13.13　一様空間 X に対して，次の 5 条件は同値である．[*1]

(a) X は T_0 である．
(b) X は T_1 である．
(c) X は分離である．
(d) X は正則分離である．

[*1] 実は，任意の一様空間は完全正則である（系 17.24）．したがって，条件 (a) から (e) は，X が完全正則分離であることとも同値である．

(e) X 上のすべての近縁の交叉は，対角集合 $\varDelta(X)$ である．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d)　命題 13.12 から従う．

(b) $\Longleftrightarrow$ (e)　(e) は，「任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対してある近縁 $\boldsymbol{U}$ が存在して $(x,y) \notin \boldsymbol{U}$ となる」こととといいかえられる．$x, y \in X$ に対して $(x,y) \notin \boldsymbol{U} \iff y \notin \boldsymbol{U}[x]$ だから，これは (b) と同値である．□

一様空間は正則だから（命題 13.12），命題 7.7 (3) より，その互いに交わらないコンパクト集合と閉集合は開集合で分離される．より強く，次が成り立つ．

命題 13.14　X を一様空間，K を X のコンパクト集合，F を X の閉集合とする．$K \cap F \neq \emptyset$ ならば，X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ であって，$\boldsymbol{U}[K] \cap \boldsymbol{U}[F] = \emptyset$ を満たすものが存在する．

証明　点 $x \in K$ と X 上の開対称近縁 $\boldsymbol{V}$ との組 $(x, \boldsymbol{V})$ であって，$\boldsymbol{V}^2[x]$ が F と交わらないようなものの全体を $\mathcal{S}$ と置く．開対称近縁の 2 項合成全体が一様基をなすことより（命題 13.5，命題 13.10 (1)），任意の $x \in K$ に対してある $\boldsymbol{V}$ が存在して $(x, \boldsymbol{V}) \in \mathcal{S}$ となるから，$\{\boldsymbol{V}[x]\}_{(x,\boldsymbol{V})\in\mathcal{S}}$ は K の開被覆である．K はコンパクトだから，$\mathcal{S}$ の有限部分集合 $\{(x_0, \boldsymbol{V}_0), \dots, (x_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-1})\}$ であって，$\{\boldsymbol{V}_0[x_0], \dots, \boldsymbol{V}_{n-1}[x_{n-1}]\}$ が K を被覆するようなものがとれる．

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{V}_{n-1}$$

と置く．

$\boldsymbol{U}[K] \cap \boldsymbol{U}[F] = \emptyset$ を示す．$\boldsymbol{U}$ は対称だから，そのためには，$\boldsymbol{U}^2[K] \cap F = \emptyset$ をいえばよい．点 $x \in K$ を任意にとる．$\{\boldsymbol{V}_0[x_0], \dots, \boldsymbol{V}_{n-1}[x_{n-1}]\}$ は K の X における被覆だから，ある $i \in \{0, \dots, n-1\}$ が存在して $x \in \boldsymbol{V}_i[x_i]$ となる．この i について，

$$\boldsymbol{U}[x] \subseteq \boldsymbol{V}_i[x] \subseteq \boldsymbol{V}_i^2[x_i]$$

が成り立つ．ここで，第一の包含は $\boldsymbol{U}$ の定義から，第二の包含は $x \in \boldsymbol{V}_i[x_i]$ から従う．さらに，$(x_i, \boldsymbol{V}_i) \in \mathcal{S}$ だから，$\boldsymbol{V}_i^2[x_i]$ は F とは交わらない．よって，$\boldsymbol{U}_i[x]$ は F とは交わらない．これが任意の $x \in K$ に対して成り立つから，$\boldsymbol{U}^2[K] \cap F = \emptyset$ である．□

13.4　一様連続写像

定義 13.15（一様連続写像）　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が**一様連続**であるとは，$X \times X$，$Y \times Y$ をそれぞれ X, Y の一様構造によってフィルタ付き空間とみなすとき，$f^{\times}\colon X \times X \to Y \times Y$ がフィルタ射であることをいう．

すなわち，一様空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が一様連続であるとは，Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して $f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ が X 上の近縁であることをいう．

命題 13.16　X, Y, Z を一様空間，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を写像とする．f と g が一様連続ならば，$g \circ f$ も一様連続である．

証明　フィルタ射の合成がフィルタ射であること（命題 1.12）から従う．□

命題 13.17　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が（一様空間の間の写像として）一様連続ならば，f は（位相空間の間の写像として）連続である．

証明　$x \in X$ とする．$f(x)$ の任意の近傍は，Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を用いて $\boldsymbol{V}[f(x)]$ と表せる．f が一様連続なら

ば $f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は X 上の近縁となり，したがって $f^{-1}(\boldsymbol{V}[f(x)]) = f^{\times -1}(\boldsymbol{V})[x]$ は x の近傍である．よって，f は連続である． □

X を一様空間，A を X の部分集合とする．X の一様構造 $\mathscr{U}$ に対して，

$$\mathscr{U}|_{A\times A} = \{\boldsymbol{U} \cap (A \times A) \mid \boldsymbol{U} \in \mathscr{U}\}$$

は A 上の一様構造をなす．これを，$\mathscr{U}$ が誘導する A 上の**相対一様構造**といい，相対一様構造によって A を一様空間とみなすとき，A を X の**部分一様空間**という．特に断らなければ，一様空間の部分集合は部分一様空間とみなす*2．

定理 13.18　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が連続であり，ある稠密部分集合 $A \subseteq X$ について $f|_A\colon A \to Y$ が一様連続であれば，f は一様連続である．

証明　f は連続で，稠密部分集合 A 上で一様連続であるとする．Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$f|_A$ の一様連続性より，$\boldsymbol{U} \cap (A \times A) \subseteq f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ を満たす X 上の開近縁 $\boldsymbol{U}$ がとれる（命題 13.10 (1)）．$A \times A$ は $X \times X$ において稠密だから（命題 3.18），命題 2.8 より $\boldsymbol{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{U} \cap (A \times A)}$ である．$f^{\times}$ が連続であることより，$\boldsymbol{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{U} \cap (A \times A)} \subseteq \overline{f^{\times -1}(\boldsymbol{V})} \subseteq f^{\times -1}(\overline{\boldsymbol{V}})$ が成り立つ．よって，Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して，$f^{\times -1}(\overline{\boldsymbol{V}})$ は X 上の近縁である．近縁の閉包全体は一様基をなすから（命題 13.10 (2)），f は一様連続である． □

定義 13.19（一様同型）　X, Y を一様空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であり，f と f^{-1} がともに一様連続であるとき，f は X から Y への**一様同型写像**であるという．一様空間 X, Y の間に一様同型写像が存在するとき，X と Y は**一様同型**であるという．

X, Y, Z を一様空間とする．明らかに，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は一様同型写像であり，$f\colon X \to Y$ が一様同型写像ならば $f^{-1}\colon Y \to X$ も一様同型写像である．また，命題 13.16 より，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ が一様同型写像ならば，$g \circ f\colon X \to Z$ も一様同型写像である．

13.5　コンパクト一様空間の一様構造

補題 13.20　X を一様空間，$\boldsymbol{U}$ を $\Delta(X)$ の近傍とする．X 上のすべての近縁の交叉は，$\boldsymbol{U}$ に含まれる．

証明　$(x, y) \notin \boldsymbol{U}$ とする．$\boldsymbol{U}$ は $\Delta(X)$ の近傍だから，$\boldsymbol{U}[x]$ は x の近傍である（命題 3.28 に注意せよ）．したがって，一様構造が定める位相の定義より，X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在して $\boldsymbol{V}[x] = \boldsymbol{U}[x]$ となる．このとき $(x, y) \notin \boldsymbol{V}$ である．よって，すべての近縁の交叉は $\boldsymbol{U}$ に含まれる． □

定理 13.21　コンパクト一様空間 X の一様構造は，$\Delta(X)$ の近傍全体，すなわち

$$\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq \boldsymbol{U}^{\circ}\}$$

である．

証明　X 上の近縁が $\Delta(X)$ の近傍であることは，系 13.11 で示した．

逆に，$\Delta(X)$ の任意の開近傍 $\boldsymbol{U}$ が X 上の近縁であることを示す．閉近縁の全体は一様基をなす（命題 13.10 (2)）から，補題 13.20 より，X 上のすべての閉近縁の交叉は $\boldsymbol{U}$ に含まれる．すなわち，X 上の閉

*2 部分一様空間については，この後の 15.2 節で改めて詳しく解説する．ここで定義を述べたのは，部分一様空間の概念が，定理 13.18 の主張を述べるために必要だからである．

近縁の全体を $\mathscr{F}$ と置くと，$\{\boldsymbol{U}\} \cup \{(X \times X) \setminus \boldsymbol{F}\}_{\boldsymbol{F} \in \mathscr{F}}$ は $X \times X$ の開被覆である．$X \times X$ はコンパクト（Tychonoff の定理：定理 7.17）だから，有限部分被覆 $\{\boldsymbol{U}, (X \times X) \setminus \boldsymbol{F}_0, \dots, (X \times X) \setminus \boldsymbol{F}_{n-1}\}$ が存在する．このとき $\boldsymbol{F}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{F}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ だから，$\boldsymbol{U}$ は X 上の近縁である． □

系 13.22 コンパクト空間は，一様化可能であれば，一意に一様化可能である．

証明 定理 13.21 に述べられている $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U} \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq \boldsymbol{U}^\circ\}$ が X の位相構造だけから決まることからわかる． □

系 13.23 コンパクト一様空間 X から一様空間 Y への写像は，連続ならば一様連続である．

証明 X をコンパクト一様空間，Y を一様空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき，$f^\times$ も連続である．Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\boldsymbol{V}$ は $\Delta(Y)$ の近傍だから（系 13.11），$f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は $\Delta(X)$ の近傍である．定理 13.21 より，これは X 上の近縁である．よって，f は一様連続である． □

定理 13.24（Lebesgue の被覆補題） X をコンパクト一様空間とし，$\mathfrak{U}$ を X の開被覆とする．このとき，ある X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ が存在して，$\{\boldsymbol{U}[x]\}_{x \in X}$ は $\mathfrak{U}$ を細分する．[*3]

証明 点 $x \in X$ と X 上の開近縁 $\boldsymbol{V}$ との組 $(x, \boldsymbol{V})$ であって，$\boldsymbol{V}^2[x]$ が $\mathfrak{U}$ のある元に含まれるようなものの全体を $\mathcal{S}$ と置く．開近縁の 2 項合成全体が一様基をなすことより（命題 13.5，命題 13.10 (1)），任意の $x \in X$ に対してある $\boldsymbol{V}$ が存在して $(x, \boldsymbol{V}) \in \mathcal{S}$ となるから，$\{\boldsymbol{V}[x]\}_{(x,\boldsymbol{V}) \in \mathcal{S}}$ は X の開被覆である．X はコンパクトだから，$\mathcal{S}$ の有限部分集合 $\{(x_0, \boldsymbol{V}_0), \dots, (x_{n-1}, \boldsymbol{V}_{n-1})\}$ であって，$\{\boldsymbol{V}_0[x_0], \dots, \boldsymbol{V}_{n-1}[x_{n-1}]\}$ が X を被覆するようなものがとれる．

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{V}_{n-1}$$

と置く．

$\{\boldsymbol{U}[x]\}_{x \in X}$ が $\mathfrak{U}$ を細分することを示す．点 $x \in X$ を任意にとる．$\{\boldsymbol{V}_0[x_0], \dots, \boldsymbol{V}_{n-1}[x_{n-1}]\}$ は X の被覆だから，ある $i \in \{0, \dots, n-1\}$ が存在して $x \in \boldsymbol{V}_i[x_i]$ となる．この i について，

$$\boldsymbol{U}[x] \subseteq \boldsymbol{V}_i[x] \subseteq \boldsymbol{V}_i^2[x_i]$$

が成り立つ．ここで，第一の包含は $\boldsymbol{U}$ の定義から，第二の包含は $x \in \boldsymbol{V}_i[x_i]$ から従う．さらに，$(x_i, \boldsymbol{V}_i) \in \mathcal{S}$ だから，$\boldsymbol{V}_i^2[x_i]$ は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる．したがって，$\boldsymbol{U}[x]$ は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる．よって，$\{\boldsymbol{U}[x]\}_{x \in X}$ は $\mathfrak{U}$ を細分する． □

[*3] 定理 14.17 において，Lebesgue の被覆補題を一様被覆系を用いて述べ直し，一様被覆系の議論によってふたたび証明する．

第 14 章

一様被覆系

記号と用語

この「記号と用語」では，X は集合とする．

- X の被覆 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ について，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ を細分することを，$\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ と表す．
- X の被覆 $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ の交叉を
$$\mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1} = \{A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1} \mid \text{各 } i \text{ に対して } A_i \in \mathfrak{A}_i\}$$
と定める（これも X の被覆となる）．ただし，空な交叉は $\{X\}$ と定める．容易にわかるように，X の被覆 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ について，任意の i に対して $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}_i$ であることと，$\mathfrak{A} < \mathfrak{B}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_{n-1}$ であることとは同値である．
- X の被覆 $\mathfrak{A}$ と $S \subseteq X$ に対して，S の $\mathfrak{A}$ に関する星を
$$\mathrm{St}(S, \mathfrak{A}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A},\ A \cap S \neq \emptyset} A$$
と定める．$\mathrm{St}(\{x\}, \mathfrak{A})$ を単に $\mathrm{St}(x, \mathfrak{A})$ と書く．
- X の被覆 $\mathfrak{A}$ に対して，
$$\mathfrak{A}^{\varDelta} = \{\mathrm{St}(x, \mathfrak{A}) \mid x \in X\},$$
$$\mathfrak{A}^{*} = \{\mathrm{St}(A, \mathfrak{A}) \mid A \in \mathfrak{A}\}$$
と定める（これらも X の被覆となる）．$\mathfrak{A}$ に対して $\varDelta$ を n 回施した結果を $\mathfrak{A}^{\varDelta^n}$，$*$ を n 回施した結果を $\mathfrak{A}^{*^n}$ と書く．容易にわかるように，X の被覆 $\mathfrak{A}$ について，$\mathfrak{A} < \mathfrak{A}^*$ かつ $\mathfrak{A}^{\varDelta} < \mathfrak{A}^*$ が成り立つ．また，X が空でなければ，$\mathfrak{A} < \mathfrak{A}^{\varDelta}$ かつ $\mathfrak{A}^* < \mathfrak{A}^{\varDelta\varDelta}$ が成り立つ[*1]．

14.1　一様被覆系，準一様被覆基と一様被覆基

定義 14.1（一様被覆系）　X を集合とする．X の被覆[*2] からなる集合 Θ が次の 4 条件を満たすとき，Θ は X 上の**一様被覆系**であるという．

[*1] X が空であるとき，$\mathfrak{A} = \{\emptyset\}$ は X の被覆だが，$\mathfrak{A}^{\varDelta} = \mathfrak{A}^{\varDelta\varDelta} = \emptyset$ かつ $\mathfrak{A}^* = \{\emptyset\}$ だから，$\mathfrak{A} < \mathfrak{A}^{\varDelta}$ も $\mathfrak{A}^* < \mathfrak{A}^{\varDelta\varDelta}$ も成り立たない．

[*2] ここでは，X の被覆とは，「X の部分集合からなる集合 $\mathfrak{A}$ であって，$\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A = X$ を満たすもの」のことである．これを「添字付けられた X の部分集合のあつまり $\{A_i\}_{i \in I}$ であって，$\bigcup_{i \in I} A_i = X$ を満たすもの」と解釈してしまうと，X 上の一様被覆系の全体が集合をなさず，都合が悪い．

(UC1) X の被覆 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ について，$\mathfrak{A} \in \Theta$ かつ $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ ならば $\mathfrak{B} \in \Theta$ である．
(UC2) $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \in \Theta$ ならば $\mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1} \in \Theta$ である（特に，$\{X\} \in \Theta$ である）．
(UC3) 任意の $\mathfrak{A} \in \Theta$ に対してある $\mathfrak{B} \in \Theta$ が存在し，$\mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ を満たす．
(UC4) $\Theta \neq \{\{\emptyset\}\}$ である．

(UC4) が問題となるのは，X が空である場合だけである．X が空である場合，(UC1)–(UC4) を満たす Θ は $\Theta = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ だけだが，この他に $\Theta = \{\{\emptyset\}\}$ が (UC1)–(UC3) を満たす．

定義 14.2（準一様被覆基，一様被覆基）　X を集合，Θ を X 上の一様被覆系，Σ を X の被覆からなる集合とする．

(1) Σ のある有限個の元の交叉を細分するような X の被覆の全体が Θ と一致するとき，すなわち

$$\Theta = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ は } X \text{ の被覆であり，ある有限個の元 } \mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1} \in \Sigma \text{ が存在して } \mathfrak{B}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_{n-1} < \mathfrak{A}\}$$

であるとき，Σ は一様被覆系 Θ の**準一様被覆基**である，あるいは Σ は一様被覆系 Θ を**生成する**という．Σ が集合 X 上のある一様被覆系の準一様被覆基であるとき，単に Σ は X 上の**準一様被覆基**であるという．

(2) Σ のある元を細分するような X の被覆の全体が Θ と一致するとき，すなわち

$$\Theta = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ は } X \text{ の被覆であり，ある } \mathfrak{B} \in \Sigma \text{ が存在して } \mathfrak{B} < \mathfrak{A}\}$$

であるとき，Σ は一様被覆系 Θ の**一様被覆基**であるという．Σ が集合 X 上のある一様被覆系の一様被覆基であるとき，単に Σ は X 上の**一様被覆基**であるという．

命題 14.3　X を集合，Σ を X の被覆からなる集合とする．Σ が次の 2 条件 (UCB2), (UCB3) を満たせば，Σ は X 上の準一様被覆基である．また，Σ が X 上の一様被覆基であるための必要十分条件は，次の 3 条件 (UCB1)–(UCB3) を満たすことである．

(UCB1) $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \in \Sigma$ ならば，ある $\mathfrak{B} \in \Sigma$ が存在して $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1}$ となる．
(UCB2) 任意の $\mathfrak{A} \in \Sigma$ に対してある $\mathfrak{B} \in \Sigma$ が存在し，$\mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ となる．
(UCB3) $\Sigma \neq \{\{\emptyset\}\}$ である．

証明　(準一様被覆基について)　Σ が (UCB2), (UCB3) を満たすとして，Σ のある有限個の元の交叉を細分するような X の被覆の全体 Θ が一様被覆系の条件 (UC1)–(UC4) を満たすことを示す．

(UC1)　明らかである．

(UC2)　$\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \in \Theta$ とすると，各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して有限個の元 $\mathfrak{B}_{i,0}, \ldots, \mathfrak{B}_{i,k_i-1} \in \Sigma$ が存在して $\mathfrak{B}_{i,0} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_{i,k_i-1} < \mathfrak{A}_i$ となる．このとき $\bigwedge_{0 \le i < n,\, 0 \le j < k_i} \mathfrak{B}_{i,j} < \mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1}$ であり，したがって $\mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1} \in \Theta$ となる．よって，(UC2) は成り立つ．

(UC3)　$\mathfrak{A} \in \Theta$ とすると，有限個の元 $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1} \in \Sigma$ が存在して $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{B}_{n-1} < \mathfrak{A}$ となる．(UCB2) より，各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対してある $\mathfrak{C}_i \in \Sigma$ が存在して $\mathfrak{C}_i^{\Delta} < \mathfrak{B}_i$ を満たす．このとき，$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{C}_n$ と置くと，すでに示した (UC2) より $\mathfrak{C} \in \Theta$ であり，また $\mathfrak{C}^{\Delta} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ である．よって，(UC3) は成り立つ．

(UC4)　(UCB3) から明らかである．

(一様被覆基について)　まず，十分性を示す．すなわち，Σ が (UCB1)–(UCB3) を満たすとして，Σ のある元を細分するような X の被覆の全体 Θ が一様被覆系の条件 (UC1)–(UC4) を満たすことを示す．(UCB1) より Θ が Σ のある有限個の元の交叉を細分するような X の被覆の全体と一致することに注意すれば，これは準一様被覆基についての結果から従う．

次に，必要性を示す．すなわち，Σ がある一様被覆系 Θ の一様被覆基であるとして，Σ が (UCB1)–(UCB3) を満たすことを示す．

(UCB1)　$\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \in \Sigma$ とすると，$\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \in \Theta$ だから，(UC2) より $\mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1} \in \Theta$ である．一様被覆基の定義より，ある $\mathfrak{B} \in \Sigma$ が存在して $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1}$ となる．よって，(UCB1) は成り立つ．

(UCB2)　$\mathfrak{A} \in \Sigma$ とすると，$\mathfrak{A} \in \Theta$ だから，(UC3) よりある $\mathfrak{B} \in \Theta$ が存在して $\mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ を満たす．一様被覆基の定義より，ある $\mathfrak{C} \in \Sigma$ が存在して $\mathfrak{C} < \mathfrak{B}$ となる．このとき，$\mathfrak{C}^{\Delta} < \mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ である．よって，(UCB2) は成り立つ．

(UBC3)　(UC4) から明らかである．□

命題 14.3 において，(UCB3) が問題となるのは，X が空である場合だけである．

命題 14.4　$n \in \mathbb{N}_{>0}$ とする．集合 X とその上の一様被覆系 Θ に対して，$\{\mathfrak{A}^{\Delta^n} \mid \mathfrak{A} \in \Theta\}$, $\{\mathfrak{A}^{*^n} \mid \mathfrak{A} \in \Theta\}$ はともに Θ の一様被覆基である．

証明　X が空ならば主張は明らかだから，以下，X が空でない場合を考える．任意の $\mathfrak{A} \in \Theta$ に対して $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}^{\Delta^n}$ だから（X が空でないことを用いる），一様被覆系の条件 (UC1) より，$\mathfrak{A}^{\Delta^n} \in \Theta$ である．一方で，一様被覆系の条件 (UC3) を繰り返し用いることにより，任意の $\mathfrak{A} \in \Theta$ に対して $\mathfrak{B}^{\Delta^n} < \mathfrak{A}$ を満たす $\mathfrak{B} \in \Theta$ が存在することがわかる．よって，$\{\mathfrak{A}^{\Delta^n} \mid \mathfrak{A} \in \Theta\}$ は Θ の一様被覆基である．また，X の任意の被覆 $\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A}^{\Delta} < \mathfrak{A}^{*} < \mathfrak{A}^{\Delta\Delta}$ だから（X が空でないことを用いる），$\{\mathfrak{A}^{*^n} \mid \mathfrak{A} \in \Theta\}$ も Θ の一様被覆基である．□

14.2　反射的関係と被覆との対応

本節では，集合 X に対して，$X \times X$ の部分集合であって対角集合 $\Delta(X)$ を含むものを，X 上の**反射的関係**と呼ぶことにする．

X を集合とする．X 上の反射的関係 $\boldsymbol{U}$ に対して，

$$\alpha(\boldsymbol{U}) = \{\boldsymbol{U}[x] \mid x \in X\}$$

と定める．これは，X の被覆である．また，X の被覆 $\mathfrak{A}$ に対して，

$$\beta(\mathfrak{A}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} (A \times A)$$

と定める．これは，X 上の反射的関係である．これらの記号は，本節と次節でのみ用いる．

X を集合とする．明らかに，X 上の反射的関係 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ について $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{V}$ ならば $\alpha(\boldsymbol{U}) < \alpha(\boldsymbol{V})$ であり，X の被覆 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ について $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ ならば $\beta(\mathfrak{A}) \subseteq \beta(\mathfrak{B})$ である．

命題 14.5　X を集合とする．

(1) X 上の反射的関係 $\boldsymbol{U}_0, \ldots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ について，$\alpha(\boldsymbol{U}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}) < \alpha(\boldsymbol{U}_0) \wedge \cdots \wedge \alpha(\boldsymbol{U}_{n-1})$ である．

(2) X の被覆 $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ について，$\beta(\mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1}) = \beta(\mathfrak{A}_0) \cap \cdots \cap \beta(\mathfrak{A}_{n-1})$ である．

証明　(1)　$\boldsymbol{U}_0, \ldots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ を X 上の反射的関係とする．各 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$\boldsymbol{U}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{U}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}_i$ より $\alpha(\boldsymbol{U}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}) < \alpha(\boldsymbol{U}_i)$ が成り立つ．よって，$\alpha(\boldsymbol{U}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}) < \alpha(\boldsymbol{U}_0) \wedge \cdots \wedge \alpha(\boldsymbol{U}_{n-1})$ である．

(2)　$\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ を X の被覆とする．

$$\begin{aligned}
\beta(\mathfrak{A}_0) \cap \cdots \cap \beta(\mathfrak{A}_{n-1}) &= \left(\bigcup_{A_0 \in \mathfrak{A}_0} (A_0 \times A_0) \right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{A_{n-1} \in \mathfrak{A}_{n-1}} (A_{n-1} \times A_{n-1}) \right) \\
&= \bigcup_{A_0 \in \mathfrak{A}_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathfrak{A}_{n-1}} ((A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times (A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})) \\
&= \beta(\mathfrak{A}_0 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_{n-1})
\end{aligned}$$

より主張は成り立つ． □

命題 14.6　X を集合とする．

(1) X 上の対称な反射的関係 $\boldsymbol{U}$ について，$\alpha(\boldsymbol{U})^{\varDelta} = \alpha(\boldsymbol{U}^2)$ である．
(2) X の被覆 $\mathfrak{A}$ について，$\beta(\mathfrak{A})^2 = \beta(\mathfrak{A}^{\varDelta})$ である．

証明　(1)　$\boldsymbol{U}$ を X 上の対称な反射的関係とする．$\alpha(\boldsymbol{U})^{\varDelta} = \{\mathrm{St}(y, \{\boldsymbol{U}[x]\}_{x \in X}) \mid y \in X\}$ であり，$z \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
z \in \mathrm{St}(y, \{\boldsymbol{U}[x]\}_{x \in X}) &\iff \text{ある } x \in X \text{ が存在して } y,\, z \in \boldsymbol{U}[x] \text{ である} \\
&\iff \text{ある } x \in X \text{ が存在して } (y, x),\, (x, z) \in \boldsymbol{U} \text{ である} \\
&\iff (y, z) \in \boldsymbol{U}^2 \\
&\iff z \in \boldsymbol{U}^2[y]
\end{aligned}$$

だから，

$$\alpha(\boldsymbol{U})^{\varDelta} = \{\mathrm{St}(y, \{\boldsymbol{U}[x] \mid x \in X\}) \mid y \in X\} = \{\boldsymbol{U}^2[y] \mid y \in X\} = \alpha(\boldsymbol{U}^2)$$

が成り立つ．

(2)　$\mathfrak{A}$ を X の被覆とする．$(x, y) \in X \times X$ に対して

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \beta(\mathfrak{A})^2 &\iff \text{ある } z \in X \text{ が存在して } (x, z),\, (z, y) \in \beta(\mathfrak{A}) \text{ である} \\
&\iff \text{ある } z \in X \text{ が存在して } x,\, y \in \mathrm{St}(z, \mathfrak{A}) \text{ である} \\
&\iff (x, y) \in \beta(\mathfrak{A}^{\varDelta})
\end{aligned}$$

だから，$\beta(\mathfrak{A})^2 = \beta(\mathfrak{A}^{\varDelta})$ である． □

命題 14.7　X を集合とする．

(1) X 上の対称な反射的関係 $\boldsymbol{U}$ について，$\beta(\alpha(\boldsymbol{U})) = \boldsymbol{U}^2$ である．
(2) X の被覆 $\mathfrak{A}$ について，$\alpha(\beta(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}^{\varDelta}$ である．

証明　(1)　$\boldsymbol{U}$ を X 上の対称な反射的関係とする．$\beta(\alpha(\boldsymbol{U})) = \bigcup_{x \in X} \boldsymbol{U}[x] \times \boldsymbol{U}[x]$ だから，$(y, z) \in X \times X$ に対して

$$\begin{aligned}
(y, z) \in \beta(\alpha(\boldsymbol{U})) &\iff \text{ある } x \in X \text{ が存在して } y,\, z \in \boldsymbol{U}[x] \text{ である} \\
&\iff \text{ある } x \in X \text{ が存在して } (y, x),\, (x, z) \in \boldsymbol{U} \text{ である} \\
&\iff (y, z) \in \boldsymbol{U}^2
\end{aligned}$$

である．よって，$\beta(\alpha(\boldsymbol{U})) = \boldsymbol{U}^2$ である．

(2)　$\mathfrak{A}$ を X の被覆とする．$\alpha(\beta(\mathfrak{A})) = \{(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}(A\times A))[x]\}_{x\in X}$ であり，

$$\left(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}(A\times A)\right)[x] = \bigcup_{A\in\mathfrak{A}}(A\times A)[x] = \bigcup_{A\in\mathfrak{A},\, x\in A} A = \mathrm{St}(x,\mathfrak{A})$$

だから，

$$\alpha(\beta(\mathfrak{A})) = \left\{\left(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}(A\times A)\right)[x] \;\middle|\; x\in X\right\} = \{\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}) \mid x\in X\} = \mathfrak{A}^{\Delta}$$

が成り立つ． □

14.3　近縁系と一様被覆系との対応

次の定理は，X 上の近縁系（一様構造）と X 上の一様被覆系との一対一対応を与えている．これより，一様被覆系を用いても，近縁系を用いたのと同様に一様空間論を展開できることがわかる．

定理 14.8　X を集合とする．

(1) X 上の近縁系 $\mathscr{U}$ に対して，
$$\alpha(\mathscr{U}) = \{\alpha(\boldsymbol{U}) \mid \boldsymbol{U}\in\mathscr{U}\}$$
は X 上の一様被覆基をなす．したがって，$\alpha(\mathscr{U})$ が生成する一様被覆系が得られる．

(2) X 上の一様被覆系 Θ に対して，
$$\beta(\Theta) = \{\beta(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}\in\Theta\}$$
は X 上の一様基をなす．したがって，$\beta(\Theta)$ が生成する近縁系が得られる．

(3) (1), (2) の対応は，互いに他の逆を与える．すなわち，
  (a) X 上の近縁系 $\mathscr{U}$ に対して，$\mathscr{U}$ から (1) の方法で得られる一様被覆系を Θ，Θ から (2) の方法で得られる近縁系を $\mathscr{U}'$ とすると，$\mathscr{U}'=\mathscr{U}$ である．
  (b) X 上の一様被覆系 Θ に対して，Θ から (2) の方法で得られる近縁系を $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ から (1) の方法で得られる一様被覆系を Θ' とすると，$\Theta'=\Theta$ である．

証明　(1)　$\mathscr{U}$ を X 上の近縁系とする．$\alpha(\mathscr{U})$ が命題 14.3 の 3 条件 (UCB1)–(UCB3) を満たすことを確かめればよい．

(UCB1)　$\boldsymbol{U}_0,\dots,\boldsymbol{U}_{n-1}\in\mathscr{U}$ とすると，(U1) より $\boldsymbol{U}_0\cap\dots\cap\boldsymbol{U}_{n-1}\in\mathscr{U}$ であり，また命題 14.5 (1) より $\alpha(\boldsymbol{U}_0\cap\dots\cap\boldsymbol{U}_{n-1}) < \alpha(\boldsymbol{U}_0)\wedge\dots\wedge\alpha(\boldsymbol{U}_{n-1})$ である．よって，(UCB1) は成り立つ．

(UCB2)　$\boldsymbol{U}\in\mathscr{U}$ とすると，(U3), (U4) よりある対称近縁 $\boldsymbol{V}\in\mathscr{U}$ が存在して $\boldsymbol{V}^2\subseteq\boldsymbol{U}$ を満たす．このとき，命題 14.6 (1) より $\alpha(\boldsymbol{V})^{\Delta} = \alpha(\boldsymbol{V}^2) < \alpha(\boldsymbol{U})$ である．よって，(UCB2) は成り立つ．

(UBC3)　X が空の場合，X 上の唯一の近縁系 $\mathscr{U}=\{\emptyset\}$ に対して $\alpha(\mathscr{U})=\{\emptyset\}$ だから，(UBC3) は成り立つ．

(2)　Θ を X 上の一様被覆系とする．$\beta(\Theta)$ が命題 13.4 の 4 条件 (UB1)–(UB4) を満たすことを確かめればよい．

(UB1)　$\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_{n-1}\in\Theta$ とすると，(UC2) より $\mathfrak{A}_0\wedge\dots\wedge\mathfrak{A}_{n-1}\in\Theta$ であり，また命題 14.5 (2) より $\beta(\mathfrak{A}_0\wedge\dots\wedge\mathfrak{A}_{n-1}) = \beta(\mathfrak{A}_0)\cap\dots\cap\beta(\mathfrak{A}_{n-1})$ である．よって，(UB1) は成り立つ．

(UB2)　X の被覆 $\mathfrak{A}$ に対して $\beta(\mathfrak{A})$ が X 上の反射的関係であることから明らかである．

(UB3)　$\mathfrak{A}\in\Theta$ とすると，(UC3) よりある $\mathfrak{B}\in\Theta$ が存在して $\mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ を満たす．このとき，命題 14.6 (2) より $\beta(\mathfrak{B})^2 = \beta(\mathfrak{B}^{\Delta}) = \beta(\mathfrak{A})$ である．よって，(UB3) は成り立つ．

(UB4)　$\mathfrak{A} \in \Theta$ に対して $\beta(\mathfrak{A})$ が対称であることから明らかである．

(3) (a)　$\mathscr{U}$ を X 上の近縁系とし，$\mathscr{U}$ から (1) の方法で得られる一様被覆系を Θ，Θ から (2) の方法で得られる近縁系を $\mathscr{U}'$ とする．

まず，$\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ を示す．$\mathfrak{A} \in \Theta$ を任意にとる．すると，Θ の定義より，ある $\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ が存在して $\alpha(\boldsymbol{U}) < \mathfrak{A}$ となる．このとき，命題 14.7 (1) より $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{U}^2 = \beta(\alpha(\boldsymbol{U})) \in \beta(\mathfrak{A})$ だから，$\beta(\mathfrak{A}) \in \mathscr{U}$ である．よって，$\{\beta(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \Theta\} \subseteq \mathscr{U}$ だから，$\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ である．

次に，$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}'$ を示す．$\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ を任意にとる．すると，近縁系の条件 (U3), (U4) より，ある対称近縁 $\boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在して $\boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす．このとき，命題 14.7 (1) より $\beta(\alpha(\boldsymbol{V})) = \boldsymbol{V}^2 \subseteq \boldsymbol{U}$ であり，また $\beta(\alpha(\boldsymbol{V})) \in \mathscr{U}'$ だから，$\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}'$ である．よって，$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}'$ である．

(3) (b)　Θ を X 上の一様被覆系とし，Θ から (2) の方法で得られる近縁系を $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ から (1) の方法で得られる一様被覆系を Θ' とする．X が空の場合，明らかに $\Theta' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \Theta$ である．以下，X は空でないとする．

まず，$\Theta' \subseteq \Theta$ を示す．$\boldsymbol{U} \in \mathscr{U}$ を任意にとる．すると，$\mathscr{U}$ の定義より，ある $\mathfrak{A} \in \Theta$ が存在して $\beta(\mathfrak{A}) \subseteq \boldsymbol{U}$ となる．このとき，命題 14.7 (2) より $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}^{\Delta} = \alpha(\beta(\mathfrak{A})) < \alpha(\boldsymbol{U})$ だから（X が空でないことより $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}^{\Delta}$ であることに注意せよ），$\alpha(\boldsymbol{U}) \in \Theta$ である．よって，$\{\alpha(\boldsymbol{U}) \mid \boldsymbol{U} \in \mathscr{U}\} \subseteq \Theta$ だから，$\Theta' \subseteq \Theta$ である．

次に，$\Theta \subseteq \Theta'$ を示す．$\mathfrak{A} \in \Theta$ を任意にとる．すると，一様被覆系の条件 (UC3) より，ある $\mathfrak{B} \in \Theta$ が存在して $\mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ を満たす．このとき，命題 14.7 (2) より $\alpha(\beta(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}^{\Delta} < \mathfrak{A}$ であり，また $\alpha(\beta(\mathfrak{B})) \in \Theta'$ だから，$\mathfrak{A} \in \Theta'$ である．よって，$\Theta \subseteq \Theta'$ が成り立つ．□

定義 14.9（一様空間の一様被覆系，準一様被覆基，一様被覆基）　$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．定理 14.8 によって近縁系 $\mathscr{U}$ と対応する X 上の一様被覆系 Θ を，一様空間 $(X, \mathscr{U})$ の**一様被覆系**という．一様被覆系 Θ の元を，一様空間 $(X, \mathscr{U})$ の**一様被覆**という．Θ の準一様被覆基・一様被覆基を，それぞれ一様空間 $(X, \mathscr{U})$ の**準一様被覆基・一様被覆基**という．

X を一様空間とし，$\mathscr{U}$ を X の近縁系，Θ を X の一様被覆系とする．定理 14.8 の対応によれば，$\alpha(\mathscr{U}) = \{\alpha(\boldsymbol{U}) \mid \boldsymbol{U} \in \mathscr{U}\}$ は X の一様被覆基を与え，$\beta(\Theta) = \{\beta(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \Theta\}$ は X の一様基を与える．より一般に，次の命題が成り立つ．

命題 14.10　X を一様空間とする．

(1) $\mathscr{B}$ が X の一様基ならば，$\alpha(\mathscr{B}) = \{\alpha(\boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$ は X の一様被覆基である．

(2) Σ が X の一様被覆基ならば，$\beta(\Sigma) = \{\beta(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \Sigma\}$ は X の一様基である．

証明　(1)　X の近縁系を $\mathscr{U}$ とすると，$\alpha(\mathscr{U})$ は X の一様被覆基である．$\alpha(\mathscr{B}) \subseteq \alpha(\mathscr{U})$ だから，$\alpha(\mathscr{B})$ の各元は X の一様被覆である．あとは $\alpha(\mathscr{U})$ の任意の元に対してそれを細分する $\alpha(\mathscr{B})$ の元が存在することをいえばよいが，これは，$\mathscr{B}$ が $\mathscr{U}$ の一様基であることから従う．

(2)　X の一様被覆系を Θ とすると，$\beta(\Theta)$ は X の一様基である．$\beta(\Sigma) \subseteq \beta(\Theta)$ だから，$\beta(\Sigma)$ の各元は X 上の近縁である．あとは $\beta(\Theta)$ の任意の元に対してそれに含まれる $\beta(\Sigma)$ の元が存在することをいえばよいが，これは，Σ が Θ の一様被覆基であることから従う．□

14.4　一様被覆系と位相

命題 14.11　X を一様空間とし，Θ を X の一様被覆系とする．点 $x \in X$ の近傍フィルタは，

$$\mathrm{St}(x, \Theta) = \{\mathrm{St}(x, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \Theta\}$$

に等しい．

証明　$\mathscr{B} = \{\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}(A\times A) \mid \mathfrak{A}\in\Theta\}$ は X の一様基だから，

$$\mathscr{B}[x] = \left\{ \left(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} (A\times A) \right)[x] \,\middle|\, \mathfrak{A}\in\Theta \right\} = \{\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}\in\Theta\} = \mathrm{St}(x,\Theta)$$

は x の近傍基である（命題 13.8）．あとは，$\mathrm{St}(x,\Theta)$ が上に閉じていること，すなわち「$\mathrm{St}(x,\Theta)$ のある元を含むような X の部分集合は $\mathrm{St}(x,\Theta)$ に属する」ことを示せばよい．

$\mathfrak{A}\in\Theta$，$\mathrm{St}(x,\mathfrak{A})\subseteq U\subseteq X$ とする．$V = \bigcup_{A\in\mathfrak{A},\, x\notin A} A$ と置けば，$\mathfrak{A} < \{U, V\}$ だから，$\{U,V\}$ は X の一様被覆である．また，$x\in U$ かつ $x\notin V$ だから，$\mathrm{St}(x,\{U,V\}) = U$ である．よって，$U = \mathrm{St}(x,\{U,V\}) \in \mathrm{St}(x,\Theta)$ である．これで，$\mathrm{St}(x,\Theta)$ が上に閉じていることが確かめられた．以上より，$\mathrm{St}(x,\Theta)$ は x の近傍フィルタである． □

命題 14.12　X を一様空間，$x\in X$ とする．

(1) Σ が X の準一様被覆基ならば，$\mathrm{St}(x,\Sigma) = \{\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}\in\Sigma\}$ は x の準近傍基である．
(2) Σ が X の一様被覆基ならば，$\mathrm{St}(x,\Sigma) = \{\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}\in\Sigma\}$ は x の近傍基である．

証明　命題 14.11 より，Σ が X の準一様被覆基・一様被覆基であるときに，$\mathrm{St}(x,\Sigma)$ がそれぞれ $\mathrm{St}(x,\Theta)$ の準フィルタ基・フィルタ基になることを示せばよい．これは，X の被覆 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ について $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ ならば $\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{St}(x,\mathfrak{B})$ であること，および X の被覆 $\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_{n-1}$ について $\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}_0\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_{n-1}) = \mathrm{St}(x,\mathfrak{A}_0)\cap\cdots\cap\mathrm{St}(x,\mathfrak{A}_{n-1})$ であることからわかる． □

X を一様空間とする．X の一様被覆であって開集合・閉集合のみからなるものを，それぞれ X の**開一様被覆**・**閉一様被覆**という．

補題 14.13　X を一様空間とする．X 上の任意の一様被覆 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A} < (\mathfrak{A}^*)^\circ$，$\overline{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}^*$ が成り立つ．

証明　任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して，$A\subseteq \mathrm{St}(A,\mathfrak{A})^\circ$ が成り立つ．実際，$x\in A$ とすると，$\mathrm{St}(x,\mathfrak{A})\subseteq\mathrm{St}(A,\mathfrak{A})$ であり，$\mathrm{St}(x,\mathfrak{A})$ は x の近傍だから（命題 14.11），$x\in\mathrm{St}(A,\mathfrak{A})^\circ$ である．よって，$\mathfrak{A} < (\mathfrak{A}^*)^\circ$ である．

任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して，$\overline{A}\subseteq\mathrm{St}(A,\mathfrak{A})$ が成り立つ．実際，$x\in\overline{A}$ とすると，x の任意の近傍は A と交わるから，特に $\mathrm{St}(x,\mathfrak{A})$ は A と交わり（命題 14.11），したがって $x\in\mathrm{St}(A,\mathfrak{A})$ である．よって，$\overline{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}^*$ である． □

命題 14.14　X を一様空間とし，Θ を X の一様被覆系とする．

(1) $\{\mathfrak{A}^\circ \mid \mathfrak{A}\in\Theta\}$ は X の一様被覆基である．特に，開一様被覆の全体は一様基をなす．
(2) $\{\overline{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A}\in\Theta\}$ は X の一様被覆基である．特に，閉一様被覆の全体は一様基をなす．

証明　(1)　X の任意の一様被覆 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}^\circ$ も一様被覆であることをいえばよい．命題 14.4 より，$\mathfrak{B}^* < \mathfrak{A}$ を満たす一様被覆 $\mathfrak{B}$ がとれる．このとき，補題 14.13 より $\mathfrak{B} < (\mathfrak{B}^*)^\circ < \mathfrak{A}^\circ$ だから，$\mathfrak{A}^\circ$ は一様被覆である．

(2)　X の任意の一様被覆 $\mathfrak{A}$ に対して，閉包が $\mathfrak{A}$ を細分するような一様被覆が存在することをいえばよい．命題 14.4 より，$\mathfrak{B}^* < \mathfrak{A}$ を満たす一様被覆 $\mathfrak{B}$ がとれる．このとき，補題 14.13 より $\overline{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}^* < \mathfrak{A}$ だから，この $\mathfrak{B}$ が求めるものである． □

系 14.15　X を一様空間とする．X の任意の一様被覆 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}^\circ$ は X の開被覆である． □

14.5　一様被覆系と一様連続写像

命題 14.16　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．次の 2 条件は同値である．

(a) f は一様連続である．
(b) Y の任意の一様被覆 $\mathfrak{B}$ に対して，$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は X の一様被覆となる．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　f が一様連続であるとする．Y の一様被覆 $\mathfrak{B}$ を任意にとる．すると，Y 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在して $\mathfrak{B}$ は $\{\boldsymbol{V}[y]\}_{y\in Y}$ によって細分される．f の一様連続性より，$f^{\times-1}(\mathfrak{V})$ は X 上の近縁である．また，各点 $x \in X$ に対して $f^{\times-1}(\boldsymbol{V})[x] = f^{-1}(\boldsymbol{V}[f(x)])$ だから，$f^{-1}(\{\boldsymbol{V}[y]\}_{y\in Y})$ は $\{f^{\times-1}(\boldsymbol{V})[x]\}_{x\in X}$ によって細分される．よって，$f^{-1}(\mathfrak{B})$ も $\{f^{\times-1}(\boldsymbol{V})[x]\}_{x\in X}$ によって細分されるから，$f^{-1}(\mathfrak{B})$ は X の一様被覆である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．すると，Y のある一様被覆 $\mathfrak{B}$ が存在して $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}}(B\times B) \subseteq \boldsymbol{V}$ となる．仮定より，$f^{-1}(\mathfrak{B})$ は X の一様被覆である．また，$\bigcup_{A\in f^{-1}(\mathfrak{B})}(A\times A) = f^{\times-1}(\bigcup_{B\in\mathfrak{B}}(B\times B)) \subseteq f^{\times-1}(\boldsymbol{V})$ である．したがって，$f^{\times-1}(\boldsymbol{V})$ は X 上の近縁である．よって，f は一様連続である．□

14.6　コンパクト一様空間の一様被覆系

次の定理は，Lebesgue の被覆補題（定理 13.24）を一様被覆系を用いて述べ直したものである．

定理 14.17　コンパクト一様空間 X において，その開被覆の全体は，X の一様被覆基をなす．すなわち，X の一様被覆系は

$$\Theta = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ は } X \text{ の被覆であり，ある } X \text{ の開被覆 } \mathfrak{U} \text{ が存在して } \mathfrak{U} < \mathfrak{A}\}$$

である．

証明　任意の一様被覆 $\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A}^\circ$ は X の開被覆だから（系 14.15），任意の一様被覆はある開被覆によって細分される．

逆に，任意の X の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ が X の一様被覆であることを示す．$X = \emptyset$ ならば明らかだから，以下，$X \neq \emptyset$ とする．このとき，$\mathfrak{U} \neq \emptyset$ であることに注意する．

点 $x \in X$ と X の開一様被覆 $\mathfrak{V}$ との組 $(x, \mathfrak{V})$ との組であって，$\mathrm{St}(x, \mathfrak{V}^\Delta)$ が $\mathfrak{U}$ のある元に含まれるようなものの全体を $\mathcal{S}$ と置く．開一様被覆に Δ を施したもの全体が一様被覆基をなすことより（命題 14.4，命題 14.14 (1)），任意の $x \in X$ に対してある $\mathfrak{V}$ が存在して $(x, \mathfrak{V}) \in \mathcal{S}$ となるから，$\{\mathrm{St}(x, \mathfrak{V})\}_{(x,\mathfrak{V})\in\mathcal{S}}$ は X の開被覆である．X はコンパクトだから，$\mathcal{S}$ の有限部分集合 $\{(x_0, \mathfrak{V}_0), \dots, (x_{n-1}, \mathfrak{V}_{n-1})\}$ であって，$\{\mathrm{St}(x_0, \mathfrak{V}_0), \dots, \mathrm{St}(x_{n-1}, \mathfrak{V}_{n-1})\}$ が X を被覆するようなものがとれる．

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 \wedge \dots \wedge \mathfrak{V}_{n-1}$$

と置く．

$\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ を細分することを示す．任意の $V \in \mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ のある元に含まれることを示したい．$V = \emptyset$ ならばこれは明らかだから（$\mathfrak{U} \neq \emptyset$ に注意せよ），$V \neq \emptyset$ とする．すると，$\{\mathrm{St}(x_0, \mathfrak{V}_0), \dots, \mathrm{St}(x_{n-1}, \mathfrak{V}_{n-1})\}$ は X の被覆だから，ある $i \in \{0, \dots, n-1\}$ が存在して $V \cap \mathrm{St}(x_i, \mathfrak{V}_i) \neq \emptyset$ となる．さらに，$\mathfrak{V} < \mathfrak{V}_i$ だから，V は $\mathfrak{V}_i$ のある元に含まれる．これらを合わせると，$V', V'' \in \mathfrak{V}_i$ が存在して，$V \subseteq V'$，$x_i \in V''$ かつ

$V' \cap V'' \neq \emptyset$ を満たすことがわかる．したがって，

$$V \subseteq \mathrm{St}(x_i, \mathfrak{V}_i^{\Delta})$$

が成り立つ．さらに，$(x_i, \mathfrak{V}_i) \in \mathcal{S}$ だから，$\mathrm{St}(x_i, \mathfrak{V}_i^{\Delta})$ は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる．よって，V は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれる．□

系 13.22 と系 13.23 の，定理 14.17 を用いた一様被覆系の議論による証明を与える．

系 14.18（系 13.22 と同内容）　コンパクト空間は，一様化可能であれば，一意に一様化可能である．

証明　定理 13.24 に述べられている $\Theta = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ は X の被覆であり，ある X の開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在して $\mathfrak{U} < \mathfrak{A}\}$ が，X の位相構造だけから決まることからわかる．□

系 14.19（系 13.23 と同内容）　コンパクト一様空間 X から一様空間 Y への写像は，連続ならば一様連続である．

証明　X をコンパクト一様空間，Y を一様空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．Y の一様被覆 $\mathfrak{B}$ を任意にとる．$\mathfrak{B}^\circ$ は Y の開被覆だから（系 14.15），$f^{-1}(\mathfrak{B}^\circ) = \{f^{-1}(B^\circ) \mid B \in \mathfrak{B}\}$ は X の開被覆である．$f^{-1}(\mathfrak{B}^\circ)$ は $f^{-1}(\mathfrak{B})$ を細分するから，定理 14.17 より，$f^{-1}(\mathfrak{B})$ は X の一様被覆である．よって，命題 14.16 より，f は一様連続である．□

第 15 章

一様構造の誘導

15.1　始一様構造

命題 15.1　X を集合, $\{(Y_i, \mathscr{V}_i)\}_{i \in I}$ を一様空間族, $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．$\{((Y_i \times Y_i, \mathscr{V}_i), \phi_i^\times)\}_{i \in I}$ が誘導する $X \times X$ 上の始フィルタ $\mathscr{U}$ は，すべての ϕ_i が一様連続となるような X 上の一様構造の中で最小のものである．

証明　$\mathscr{U}$ はすべての $\phi_i^\times$ がフィルタ射となるような $X \times X$ 上の最小のフィルタ構造だから，$\mathscr{U}$ が X 上の一様構造であることのみを示せば十分である．そのためには，$\mathscr{U}$ の標準準フィルタ基

$$\mathscr{B}' = \{\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V}) \mid i \in I,\ \boldsymbol{V} \in \mathscr{V}_i\}$$

が X 上の準一様基であることをいえばよい．命題 13.4 の条件 (UB2)–(UB4) を確かめていく．

(UB2)　$i \in I$，$\boldsymbol{V} \in \mathscr{V}_i$ とすると，$\varDelta(Y_i) \subseteq \boldsymbol{V}$ だから，$\varDelta(X) \subseteq \phi_i^{\times -1}(\varDelta(Y_i)) \subseteq \phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ である．

(UB3)　$i \in I$，$\boldsymbol{V} \in \mathscr{V}_i$ とすると，ある $\boldsymbol{W} \in \mathscr{V}_i$ が存在して $\boldsymbol{W}^2 \subseteq \boldsymbol{V}$ となり，このとき $\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{W}) \in \mathscr{U}$ かつ $\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{W})^2 \subseteq \phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{W}^2) \subseteq \phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ である．

(UB4)　$i \in I$，$\boldsymbol{V} \in \mathscr{V}_i$ とすると，$\boldsymbol{V}^{-1} \in \mathscr{V}_i$ だから，$\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})^{-1} = \phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V}^{-1}) \in \mathscr{U}$ である．　□

定義 15.2（始一様構造）　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とする．写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ に対して，すべての ϕ_i が一様連続となるような X 上の最小の一様構造（命題 15.1 より，これは存在する）を，$\{(Y_i, \phi_i)\}_{i \in I}$（あるいは単に $\{\phi_i\}_{i \in I}$）が誘導する X 上の**始一様構造**という．

命題 15.3　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を一様空間族，$\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathscr{C}_i$ が Y_i の準一様基ならば,

$$\mathscr{B}' = \{\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{C}) \mid i \in I,\ \boldsymbol{C} \in \mathscr{C}_i\}$$

は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始一様構造の準一様基である．

(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathscr{C}_i$ が Y_i の一様基ならば,

$$\mathscr{B} = \{\phi_{i_0}^{\times -1}(\boldsymbol{C}_0) \cap \cdots \cap \phi_{i_{n-1}}^{\times -1}(\boldsymbol{C}_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ i_0, \ldots, i_{n-1} \in I \text{ は相異なる},\ \boldsymbol{C}_k \in \mathscr{C}_{i_k}\}$$

は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始一様構造の一様基である．

証明　始一様構造が始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 15.1），始フィルタの一般的な性質（命題 1.15）から従う．　□

命題 15.3 で $\mathscr{C}_i$ を Y_i の一様構造と置いたときの $\mathscr{B}'$ と $\mathscr{B}$ を，それぞれ始一様構造の**標準準一様基**・**標準一様基**という．標準一様基は，標準準一様基の元の有限交叉の全体に等しい．各 Y_i の一様構造を $\mathscr{V}_i$ と書くと，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造の標準準一様基・標準一様基は，それぞれ，$\{((Y_i \times Y_i, \mathscr{V}_i), \phi_i)\}_{i\in I}$ が誘導する始フィルタの標準準フィルタ基・標準フィルタ基ともいえる．

命題 15.4　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族，$\{\phi_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ を写像族とする．$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始一様構造を $\mathscr{U}$，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始位相を $\mathfrak{O}$ とすると，$\mathscr{U}$ が定める位相は $\mathfrak{O}$ に一致する．

証明　始一様構造 $\mathscr{U}$ の標準準一様基は $\mathscr{B}' = \{\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V}) \mid i \in I,\ \boldsymbol{V}$ は Y_i 上の近縁$\}$ だから，命題 13.8 より，$\mathscr{U}$ が定める位相に関する点 $x \in X$ の準近傍基として

$$\mathscr{B}'[x] = \{\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})[x] \mid i \in I,\ \boldsymbol{V} \text{ は } Y_i \text{ 上の近縁}\}$$

がとれる．一方で，始位相 $\mathfrak{O}$ に関する x の標準準近傍基は

$$\mathfrak{B}'_x = \{\phi_i^{-1}(\boldsymbol{V}[\phi_i(x)]) \mid i \in I,\ \boldsymbol{V} \text{ は } Y_i \text{ 上の近縁}\}$$

である．ところが，$i \in I$ と Y_i 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して $\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})[x] = \phi_i^{-1}(\boldsymbol{V}[\phi_i(x)])$ だから，$\mathscr{B}'[x] = \mathfrak{B}'_x$ である．よって，$\mathscr{U}$ が定める位相は $\mathfrak{O}$ に一致する．□

命題 15.5（始一様構造の特徴付け）　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とする．写像族 $\{\phi_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始一様構造は，次の性質をもつ唯一の一様構造である．

> 任意の一様空間 Z と写像 $f : Z \to X$ について，f が一様連続であることと，任意の $i \in I$ に対して $\phi_i \circ f$ が一様連続であることとは同値である．

証明　始一様構造が始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 15.1），始フィルタの特徴付け（命題 1.17 (1)）から従う．□

命題 15.6（始一様構造の推移性）　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を集合族，$\{Z_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$（$M_i$ は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）を一様空間族とし，$\{\phi_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$，$\{\psi_{i,j} : Y_i \to Z_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ を写像族とする．このとき，$\{\psi_{i,j} \circ \phi_i\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ が誘導する X 上の始一様構造と，「各 Y_i を $\{\psi_{i,j}\}_{j\in J_i}$ が誘導する始一様構造によって一様空間とみなすときの，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の始一様構造」とは一致する．

証明　始一様構造が始フィルタとして書けることに注意すれば（命題 15.1），始フィルタの推移性（命題 1.18 (1)）から従う．□

15.2　部分一様空間

定義 15.7（部分一様空間）　X を一様空間，X' を X の部分集合とする．包含写像 $\iota : X' \to X$ が誘導する X' 上の始一様構造を，X の一様構造が誘導する X' 上の**相対一様構造**という．相対一様構造によって X' を一様空間とみなすとき，X' を X の**部分一様空間**という．

X を一様空間，X' を X の部分一様空間とする．命題 3.3 より，X' の一様構造は，X の一様構造がなす $X \times X$ 上のフィルタが誘導する $X' \times X'$ 上の相対フィルタに等しい．

以下，特に断らなければ，一様空間の部分集合は部分一様空間とみなす．

命題 15.8　X を集合，Y を一様空間とし，写像 $f : X \to Y$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．

(1) $\mathscr{C}$ が Y の準一様基ならば，$\mathscr{B} = \{f^{\times -1}(\boldsymbol{C}) \mid \boldsymbol{C} \in \mathscr{C}\}$ は X の準一様基である．
(2) $\mathscr{C}$ が Y の一様基ならば，$\mathscr{B} = \{f^{\times -1}(\boldsymbol{C}) \mid \boldsymbol{C} \in \mathscr{C}\}$ は X の一様基である．

証明　命題 15.1 に注意すれば，逆像フィルタの一般的な性質（命題 1.20）から従う． □

系 15.9　X を一様空間，X' を X の部分一様空間とする．

(1) $\mathscr{B}$ が X の準一様基ならば，$\mathscr{B}|_{X' \times X'}$ は X' の準一様基である．
(2) $\mathscr{B}$ が X の一様基ならば，$\mathscr{B}|_{X' \times X'}$ は X' の一様基である． □

命題 15.10　X, Y を一様空間，Y' を Y の部分一様空間とし，$\iota\colon Y' \to Y$ を包含写像とする．このとき，写像 $f\colon X \to Y'$ が一様連続であることと，$\iota \circ f\colon X \to Y$ が一様連続であることとは同値である．

証明　始一様構造の特徴付け（命題 15.5）から従う． □

系 15.11　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．X', Y' はそれぞれ X, Y の部分集合であり，$f(X') \subseteq Y'$ を満たすとする．f が誘導する X' から Y' への写像を f' と書く．このとき，f が一様連続ならば，f' も一様連続である．さらに，$X' = X$ ならば，f が一様連続であることと f' が一様連続であることとは同値である．

証明　$\iota_X\colon X' \to X$，$\iota_Y\colon Y' \to Y$ をそれぞれ包含写像とする．f が一様連続ならば $f \circ \iota_X = \iota_Y \circ f'$ も一様連続だから，命題 15.10 より，f' は一様連続である．さらに，$X' = X$ ならば $f = \iota_Y \circ f'$ だから，命題 15.10 より，f が一様連続であることと f' が一様連続であることとは同値である． □

命題 15.12　X を一様空間とし，$X'' \subseteq X' \subseteq X$ とする．X の部分一様空間としての X'' の一様構造と，「X の部分一様空間たる X' の部分一様空間としての X'' の一様構造」とは一致する．

証明　始一様構造の推移性（命題 15.6）から従う． □

15.3　積一様空間

定義 15.13（積一様空間）　$\{X_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とする．射影 pr_i の全体が誘導する $\prod_{i \in I} X_i$ 上の始一様構造を，$\{X_i\}_{i \in I}$ の一様構造が誘導する**積一様構造**という．積一様構造によって $\prod_{i \in I} X_i$ を一様空間とみなすとき，これを $\{X_i\}_{i \in I}$ の**積一様空間**という．

一様空間 X のみからなる I を添字集合とする族 $\{X_i\}_{i \in I}$ の積一様空間を，X^I とも書く．

以下，特に断らなければ，一様空間族の積は積一様空間とみなす．

本節の以下の部分では，集合族 $\{X_i\}_{i \in I}$ とその積集合 $X = \prod_{i \in I} X_i$ について，しばしば $X \times X$ と $\prod_{i \in I}(X_i \times X_i)$ を自然な方法で同一視する．

$\{X_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とし，$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．命題 15.1 より，X の一様構造がなす $X \times X$ 上のフィルタは，$i \in I$ に対する X_i の一様構造がなす $X_i \times X_i$ 上のフィルタたちの積フィルタに等しい．

命題 15.14　$\{X_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とし，$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．

(1) 各 $i \in I$ に対して $\mathscr{B}_i$ が X_i の準一様基ならば，

$$\mathscr{B}' = \left\{ \prod_{i \in I} \boldsymbol{B}_i \;\middle|\; 1\text{ つの } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{B}_i \in \mathfrak{B}_i\text{，それ以外の } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{B}_i = X_i \times X_i \right\}$$

は X の準一様基である．

(2) 各 $i \in I$ に対して $\mathscr{B}_i$ が X_i の一様基ならば，

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{i \in I} \boldsymbol{B}_i \,\middle|\, \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{B}_i \in \mathfrak{B}_i,\ \text{それ以外の } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{B}_i = X_i \times X_i \right\}$$

は X の一様基である．

証明　命題 15.3 から従う． □

積空間 $X = \prod_{i \in I} X_i$ の標準準一様基・標準一様基は，それぞれ

$$\mathscr{B}' = \left\{ \prod_{i \in I} \boldsymbol{U}_i \,\middle|\, 1 \text{ つの } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{U}_i \text{ は } X_i \text{ 上の近縁，それ以外の } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{U}_i = X_i \times X_i \right\},$$

$$\mathscr{B} = \left\{ \prod_{i \in I} \boldsymbol{U}_i \,\middle|\, \text{有限個の } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{U}_i \text{ は } X_i \text{ 上の近縁，それ以外の } i \in I \text{ に対して } \boldsymbol{U}_i = X_i \times X_i \right\}$$

である．

命題 15.15　X を一様空間，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とする．積一様空間への写像 $f\colon X \to \prod_{i \in I} Y_i$ が一様連続であることと，各 $i \in I$ に対して写像 $\mathrm{pr}_i \circ f\colon X \to Y_i$ が一様連続であることとは同値である．

証明　始一様構造の特徴付け（命題 15.5）から従う． □

命題 15.16（積一様空間の結合性）　$\{X_{i,j}\}_{i \in I,\, j \in J_i}$（$M_i$ は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）を一様空間族とする．積一様空間 $\prod_{i \in I,\, j \in J_i} X_{i,j}$ と積一様空間族の積一様空間 $\prod_{i \in I} \prod_{j \in J_i} X_{i,j}$ とは，自然な全単射により一様同型となる．

証明　始一様構造の推移性（命題 15.6）から従う． □

命題 15.17　$\{X_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とし，各 $i \in I$ に対して X'_i を X_i の部分集合とする．このとき，積一様空間 $\prod_{i \in I} X_i$ の部分一様空間 $\prod_{i \in I} X'_i$ と，部分一様空間族 $\{X'_i\}_{i \in I}$ の積空間 $\prod_{i \in I} X'_i$ とは，自然な全単射により一様同型となる．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$，$X' = \prod_{i \in I} X'_i$ と置き，$\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ および $\mathrm{pr}'_i\colon X' \to X'_i$ を射影，$\iota\colon X' \to X$ および $\iota_i\colon X'_i \to X_i$ を包含写像とする．積一様空間 X の部分一様空間としての X' の一様構造は，始一様構造の推移性（命題 15.6）より，$\{\mathrm{pr}_i \circ \iota\}_{i \in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．一方で，部分一様空間族 $\{X'_i\}_{i \in I}$ の積一様空間としての X' の一様構造は，始一様構造の推移性（命題 15.6）より，$\{\iota_i \circ \mathrm{pr}'_i\}_{i \in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．ここで $\mathrm{pr}_i \circ \iota = \iota_i \circ \mathrm{pr}'_i$ だから，これらの一様構造は等しい． □

15.4　部分一様空間・積一様空間と始一様構造

命題 15.18　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を一様空間族，$\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．各 $i \in I$ に対して Y'_i は Y_i の部分一様空間であり，$\phi_i(X) \subseteq Y'_i$ を満たすとする．ϕ_i を X から Y'_i への写像とみなしたものを ϕ'_i と書く．このとき，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する始一様構造と，$\{\phi'_i\}_{i \in I}$ が X 上に誘導する始一様構造とは一致する．

証明　各 $i \in I$ に対して，$\iota_i\colon Y'_i \to Y_i$ を包含写像とする．各 $i \in I$ に対して $\phi_i = \iota_i \circ \phi'_i$ だから，始一様構造の推移性（命題 15.6）より，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始一様構造と $\{\phi'_i\}_{i \in I}$ が誘導する始一様構造とは等しい． □

命題 15.19　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族，$\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ を写像族とし，$Y=\prod_{i\in I}Y_i$，$\phi=(\phi_i)_{i\in I}\colon X\to Y$ と置く．このとき，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が X 上に誘導する始一様構造と，ϕ が X 上に誘導する始一様構造とは一致する．

証明　各 $i\in I$ に対して $\phi_i=\mathrm{pr}_i\circ\phi$ だから，始一様構造の推移性（命題 15.6）より，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造と ϕ が誘導する始一様構造とは等しい．　□

系 15.20　$\{X_i\}_{i\in I}$，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族，$\{f_i\colon X_i\to Y_i\}_{i\in I}$ を写像族とする．各 $i\in I$ に対して，X_i の一様構造が f_i の誘導する始一様構造に等しいとする．このとき，$\prod_{i\in I}X_i$ の始一様構造は $\prod_{i\in I}f_i\colon\prod_{i\in I}X_i\to\prod_{i\in I}Y_i$ の誘導する始一様構造に等しい．

証明　始一様構造の推移性（命題 15.6）より，$\prod_{i\in I}X_i$ の一様構造は $\{f_i\circ\mathrm{pr}_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．よって，命題 15.19 より，$\prod_{i\in I}X_i$ の一様構造は $\prod_{i\in I}f_i\colon\prod_{i\in I}X_i\to\prod_{i\in I}Y_i$ が誘導する始一様構造に等しい．　□

15.5　一様埋め込み

15.5.1　一様埋め込み

定義 15.21（一様埋め込み）　X, Y を一様空間，$f\colon X\to Y$ を写像とする．f が**一様埋め込み**であるとは，f が単射であり，X の一様構造が f の誘導する始一様構造に一致することをいう．

命題 15.4 より，一様埋め込みは埋め込みである．

次の命題より，X から Y への一様埋め込みによって，X を Y の部分一様空間とみなすことができる．

命題 15.22　X, Y を一様空間，$f\colon X\to Y$ を写像とする．f が一様埋め込みであるための必要十分条件は，f が X から $f(X)$ への一様同型写像を与えることである．

証明　2 条件はどちらも f の単射性を導くから，以下では f の単射性を仮定する．f を X から $f(X)$ への写像とみなしたものを $f'\colon X\to f(X)$ と書く．f の単射性より，f' は全単射である．さて，f が単射であるという条件の下で，f が一様空間としての埋め込みであることは「X の一様構造が f の誘導する始一様構造に等しい」こといいかえられ，f' が一様同型写像であることは「X の位相が f' の誘導する始一様構造に等しい」ことといいかえられる．よって結局，f が誘導する X 上の始一様構造と f' が誘導する X 上の始一様構造とが等しいことをいえばよい．これは，命題 15.18 の結果である．　□

開写像・閉写像であるような一様埋め込みを，それぞれ**開一様埋め込み**・**閉一様埋め込み**という．また，像が稠密であるような一様埋め込みを，**稠密一様埋め込み**という．X から Y への開・閉・稠密一様埋め込みが存在すれば，それぞれ，X は Y の開・閉・稠密部分一様空間とみなすことができる．

命題 15.23　X, Y, Z を一様空間，$f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$ を写像とする．f と g が一様埋め込みならば，$g\circ f$ も一様埋め込みである．

証明　始一様構造の推移性（命題 15.6）と，単射性が合成で保たれることから従う．　□

命題 15.24　X, Y, Z を一様空間，$f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$ を一様連続写像とする．X の一様構造が $g\circ f$ の誘導する始一様構造に等しければ，X の一様構造は f の誘導する始一様構造に等しい．

証明　X の一様構造が $g \circ f$ の誘導する始一様構造に等しいとする．すると，X 上の近縁はすべて Z 上のある近縁の $(g \circ f)^{\times}$ による逆像を含む．したがって，g の一様連続性より，X 上の近縁はすべて Y 上のある近縁の $f^{\times}$ による逆像を含むことになる．逆に，g の連続性より，Y 上の近縁の $f^{\times}$ による逆像は，常に X 上の近縁である．よって，X の一様構造は，f の誘導する始一様構造に等しい． □

系 15.25　X, Y, Z を一様空間，$f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to Z$ を一様連続写像とする．$g \circ f$ が一様埋め込みならば，f も一様埋め込みである． □

15.5.2　積一様空間に現れる一様埋め込み

命題 15.26　$\{X_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とし，$I' \subseteq I$ とする．各 $i \in I \setminus I'$ に対して点 $x_i \in X_i$ を固定する．このとき，写像 $f\colon \prod_{i \in I'} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$; $(x_i)_{i \in I'} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ は一様埋め込みである．

証明　積一様空間の結合性（命題 15.16）より，X, Y を一様空間，$x_0 \in X$ として，写像 $f\colon Y \to X \times Y$; $y \mapsto (x_0, y)$ が一様埋め込みであることを示せば十分である．f が単射であることは明らかだから，Y の一様構造が f の誘導する始一様構造に等しいことを示す．$X \times Y$ の標準一様基は

$$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \text{ はそれぞれ } X, Y \text{ 上の近縁}\}$$

だから（ここで，$(X \times Y) \times (X \times Y)$ と $(X \times X) \times (Y \times Y)$ を自然な方法で同一視している），f が誘導する Y 上の始一様構造の一様基として

$$f^{\times -1}(\mathscr{B}) = \{f^{\times -1}(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) \mid \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \text{ はそれぞれ } X, Y \text{ 上の近縁}\}$$

がとれる（命題 15.8 (2)）．ところが，これは Y の一様構造そのものである．よって，Y の一様構造は f が誘導する始一様構造に等しい． □

系 15.27　$\{X_i\}_{i \in I}$ を一様空間族，Y を一様空間とし，$I' \subseteq I$ とする．各 $i \in I \setminus I'$ に対して点 $x_i \in X_i$ を固定する．写像 $f\colon \prod_{i \in I} X_i \to Y$ が一様連続ならば，写像 $f'\colon \prod_{i \in I'} X_i \to Y$; $(x_i)_{i \in I'} \mapsto f((x_i)_{i \in I})$ も一様連続である．

証明　$f'\colon \prod_{i \in I'} X_i \to Y$ は，写像 $g\colon \prod_{i \in I'} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$; $(x_i)_{i \in I'} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ と $f\colon \prod_{i \in I} X_i \to Y$ との合成である．命題 15.26 より g は一様連続だから，f は一様連続ならば f' も一様連続である． □

命題 15.28　$\{X_i\}_{i \in I}, \{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族，$\{f_i\colon X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とし，どの X_i も空でないとする．このとき，$\prod_{i \in I} f_i\colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$ が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して f_i が連続であることとは同値である．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$，$Y = \prod_{i \in I} Y_i$，$f = \prod_{i \in I} f_i\colon X \to Y$ と置き，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_{X,i}\colon X \to X_i$，$\mathrm{pr}_{Y,i}\colon Y \to Y_i$ を射影とする．f が連続であることは，任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_{Y,i} \circ f$ が連続であることと同値である（命題 15.15）．これと $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_{Y,i} \circ f = f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ であることより，f が連続であることは，任意の $i \in I$ に対して $f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ が連続であることと同値である．そこで，任意の $i \in I$ に対して，f_i が連続であることと $f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ が連続であることとが同値であることを示せばよい．

f_i が連続ならば $f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ が連続であることは明らかである．逆に，$f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i}$ が連続であるとする．各 $j \in I \setminus \{i\}$ に対して点 $x_j \in X_j$ を固定し（X_j が空でないことを用いる），写像 $g\colon X_i \to X$; $x_i \mapsto (x_j)_{j \in I}$ を考える．命題 15.26 より g は連続だから，$f_i = f_i \circ \mathrm{pr}_{X,i} \circ g$ は連続である．これで，同値性が示された． □

第 16 章

完備一様空間と全有界一様空間

16.1　Cauchy フィルタ

16.1.1　一様空間の部分集合の小ささ

定義 16.1（一様空間の部分集合の小ささ）　X を一様空間，$\boldsymbol{U}$ を X 上の近縁，A を X の部分集合とする．A が $\boldsymbol{U}$ 程度に小さいとは，$A \times A \subseteq \boldsymbol{U}$ であることをいう．

X を一様空間とする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}'$ と $A, A' \subseteq X$ について，$\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{U}'$，$A' \subseteq A$ かつ A が $\boldsymbol{U}$ 程度に小さければ，A' は $\boldsymbol{U}'$ 程度に小さい．また，X 上の近縁 $\boldsymbol{U}_0, \ldots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ と $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq X$ について，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して A_i が $\boldsymbol{U}_i$ 程度に小さければ，$A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ は $\boldsymbol{U}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}$ 程度に小さい．これらのことは，容易にわかる．

命題 16.2　X を一様空間，$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ を X 上の近縁，$A, B \subseteq X$ とする．A, B がそれぞれ $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 程度に小さく，$A \cap B \neq \emptyset$ ならば，$A \cup B$ は $\boldsymbol{VU}$ 程度に小さい．

証明　点 $z \in A \cap B$ を 1 つ固定する．任意の $x, y \in A \cup B$ に対して $(x, z) \in \boldsymbol{U}$ かつ $(z, y) \in \boldsymbol{V}$ だから，$(x, y) \in \boldsymbol{VU}$ である．よって，$A \cup B$ は $\boldsymbol{VU}$ 程度に小さい．　□

16.1.2　Cauchy フィルタ

定義 16.3（Cauchy フィルタ）　一様空間 X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が Cauchy であるとは，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $\boldsymbol{U}$ 程度に小さい $\mathfrak{F}$ の元が存在することをいう．

一様空間 X 上の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は，それが定める真フィルタが Cauchy であるとき，Cauchy であるという．

命題 16.4　X を一様空間，$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとし，$\mathscr{B}$ を X の準一様基とする．このとき，$\mathfrak{F}$ が Cauchy であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対して $\boldsymbol{B}$ 程度に小さい $\mathfrak{F}$ の元が存在することである．

証明　必要性は明らかだから，十分性を示す．$\mathfrak{F}$ が上の条件を満たすとする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとると，有限個の $\boldsymbol{B}_0, \ldots, \boldsymbol{B}_{n-1} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{B}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす．仮定より，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $\boldsymbol{B}_i$ 程度に小さい $F_i \in \mathfrak{F}$ がとれる．このとき，$F_0 \cap \cdots \cap F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ は $\boldsymbol{B}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ 程度に小さい．よって，$\mathfrak{F}$ は Cauchy である．　□

命題 16.5　一様空間において，ある Cauchy フィルタよりも細かい真フィルタは Cauchy である．　□

命題 16.6 一様空間において，収束する真フィルタは Cauchy である．

証明 一様空間 X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が $x \in X$ に収束するとする．このとき，任意の対称近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\boldsymbol{U}[x]$ は $\boldsymbol{U}^2$ 程度に小さい $\mathfrak{F}$ の元である．対称近縁の 2 項合成全体は一様基をなすから（命題 13.5），命題 16.4 より，$\mathfrak{F}$ は Cauchy である． □

命題 16.7 X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を一様連続写像，$\mathfrak{F}$ を X 上のフィルタとする．$\mathfrak{F}$ が Cauchy ならば，$f(\mathfrak{F})$ も Cauchy である．

証明 $\mathfrak{F}$ が Cauchy であるとする．$\mathfrak{F}$ は真フィルタだから，命題 1.24 (1) より $f(\mathfrak{F})$ も真フィルタである．Y 上の近縁 $\mathfrak{V}$ を任意にとると，$f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は X 上の近縁だから，$\mathfrak{F}$ が Cauchy であることより，$f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ 程度に小さい $F \in \mathfrak{F}$ が存在する．このとき，$f(F) \in f(\mathfrak{F})$ は $\boldsymbol{V}$ 程度に小さい．よって，$f(\mathfrak{F})$ は Cauchy である． □

命題 16.8 X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．このとき，X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は Cauchy である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，$\phi_i(\mathfrak{F})$ は Cauchy である．

証明 次の同値関係から従う：

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\iff \text{任意の } i \in I,\ Y_i \text{ 上の近縁 } \boldsymbol{V} \text{ に対して，} \phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V}) \text{ 程度に小さい } \mathfrak{F} \text{ の元が存在する} \qquad (*)\\
&\iff \text{任意の } i \in I,\ Y_i \text{ 上の近縁 } \boldsymbol{V} \text{ に対して，} \boldsymbol{V} \text{ 程度に小さい } \phi_i(\mathfrak{F}) \text{ の元が存在する}\\
&\iff \text{(b)}.
\end{aligned}$$

ここで，同値関係 $(*)$ は，$\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})$（$i \in I$，$\boldsymbol{V}$ は Y_i 上の近縁）と表される集合全体が X の標準準一様基であることと命題 16.4 から従う． □

系 16.9 X を集合，Y を一様空間とし，写像 $f\colon X \to Y$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．

(1) X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が Cauchy であるための必要十分条件は，$f(\mathfrak{F})$ が Cauchy であることである．
(2) Y 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{G}$ に対して，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ は，真フィルタであれば Cauchy である．

証明 (1) 命題 16.8 から従う．
(2) $f^{-1}(\mathfrak{G})$ が真フィルタであるとする．(1) より，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ が Cauchy であるための必要十分条件は，$f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ が Cauchy であることである．いま，$\mathfrak{G}$ は Cauchy であり $f(f^{-1}(\mathfrak{G})) \supseteq \mathfrak{G}$ だから（命題 1.25 (2)），命題 16.5 より，$f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ も Cauchy である．よって，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ は Cauchy である． □

系 16.10 X を一様空間，A を X の部分一様空間とし，$\iota\colon A \to X$ を包含写像とする．

(1) A 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が Cauchy であるための必要十分条件は，$\iota(\mathfrak{F})$ が Cauchy であることである．
(2) X 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{G}$ が A 上に相対真フィルタ $\mathfrak{G}|_A$ を誘導するならば，$\mathfrak{G}|_A$ も Cauchy である．

証明 系 16.9 から従う． □

系 16.11 X を一様空間，A を X の部分一様空間とする．点 $x \in \overline{A}$ に対して，$\mathfrak{N}_A(x)$ は A 上の Cauchy フィルタである．

証明 命題 16.6 より $\mathfrak{N}_X(x)$ が X 上の Cauchy フィルタであることと，系 16.10 (2) から従う． □

系 16.12 $\{X_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とする．積一様空間 $\prod_{i\in I} X_i$ 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は Cauchy である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，$\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F})$ は Cauchy である．

証明 命題 16.8 から従う． □

系 16.13 $\{X_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{F}_i$ を X_i 上の真フィルタとする．次の 2 条件は同値である．

(a) 積フィルタ $\prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ は Cauchy である．
(b) すべての $i \in I$ に対して，$\mathfrak{F}_i$ は Cauchy である．

証明 $\mathfrak{F} = \prod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ と置く．$i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_i$ であることに注意すれば（命題 1.35），系 16.12 から従う． □

命題 16.14 X を集合，$\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1$ を X 上の一様構造とし，X にこれらの一様構造を与えて得られる一様空間をそれぞれ X_0, X_1 と書く．$\mathscr{U}_1$ は $\mathscr{U}_0$ よりも細かく，さらに X_1 の準一様基として $X_0 \times X_0$ の閉集合からなるものがとれるとする．このとき，X 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $x \in X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は X_1 上の真フィルタとして x に収束する．
(b) $\mathfrak{F}$ は X_1 上の Cauchy フィルタであり，かつ $\mathfrak{F}$ は X_0 上の真フィルタとして x に収束する．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 収束する真フィルタが Cauchy であることと（命題 16.6），$\mathscr{U}_1$ が $\mathscr{U}_0$ よりも細かいことの結果である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 仮定より，$X_0 \times X_0$ の対称な閉集合からなる X_1 の一様基 $\mathscr{B}$ がとれる．(b) が成り立つとする．$\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ を任意にとると，$\mathfrak{F}$ が X_1 上の Cauchy フィルタであることより，$\boldsymbol{B}$ 程度に小さい $F \in \mathfrak{F}$ が存在する．F は空でないから，1 点 $y \in F$ を固定できる．すると，$F \subseteq \boldsymbol{B}[y]$ であり，また $\boldsymbol{B}$ は $X_0 \times X_0$ の閉集合だから，$\boldsymbol{B}[y]$ は X_0 の閉集合である．さらに，$\mathfrak{F}$ は X_0 上の真フィルタとして x に収束するから，$x \in \mathrm{cl}_{X_0}(F) \subseteq \boldsymbol{B}[y]$ である．したがって $F \subseteq \boldsymbol{B}[y] \subseteq \boldsymbol{B}^2[x]$ だから，$\boldsymbol{B}^2[x] \in \mathfrak{F}$ である．$\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対する $\boldsymbol{B}^2$ の全体は X_1 の一様基をなし（命題 13.5），したがって $\boldsymbol{B}^2[x]$ の全体は x の X_1 における近傍基をなすから（命題 13.8 (2)），$\mathfrak{F}$ は X_1 上の真フィルタとして x に収束する． □

16.1.3 極小 Cauchy フィルタ

定義 16.15（極小 Cauchy フィルタ） 一様空間 X 上の Cauchy フィルタの中で包含関係に関して極小であるものを，X 上の**極小 Cauchy フィルタ**という．すなわち，極小 Cauchy フィルタとは，Cauchy フィルタであって，それよりも真に粗い Cauchy フィルタが存在しないものをいう．

命題 16.16 一様空間において，任意の近傍フィルタは極小 Cauchy である．

証明 X を一様空間とし，$x \in X$ とする．近傍フィルタ $\mathfrak{N}(x)$ は x に収束するから，Cauchy である（命題 16.6）．極小性を示すために，$\mathfrak{N}(x)$ よりも粗い Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ を任意にとり，$\mathfrak{N}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ をいう．$\boldsymbol{U}[x] \in \mathfrak{N}(x)$（$\boldsymbol{U}$ は X 上の近縁）を任意にとる．$\mathfrak{F}$ は Cauchy だから，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい $F \in \mathfrak{F}$ が存在する．

このとき $F \in \mathfrak{N}(x)$ でもあるから，$x \in F$ である．これと F が $\boldsymbol{U}$ 程度に小さいことより $F \subseteq \boldsymbol{U}[x]$ だから，$\boldsymbol{U}[x] \in \mathfrak{F}$ である．よって，$\mathfrak{N}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ が成り立つ．□

定理 16.17　一様空間 X 上の任意の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して，$\mathfrak{F}$ よりも粗い極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}_0$ が一意に存在する．この $\mathfrak{F}_0$ のフィルタ基として，

$$\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{U}[F] \mid \boldsymbol{U} \text{ は } X \text{ 上の近縁，} F \in \mathfrak{F}\}$$

がとれる．

証明　まず，$\mathfrak{B}_0$ が X 上の真フィルタ基であることを確かめる．命題 1.5 (3) より，$\emptyset \notin \mathfrak{B}_0$ および「$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathfrak{B}_0$ ならば，ある $B \in \mathfrak{B}_0$ が存在して $B \subseteq B_0 \cap \dots \cap B_{n-1}$ となる」ことをいえばよい．前者は明らかであり，後者は X 上の近縁 $\boldsymbol{U}_0, \dots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ と $F_0, \dots, F_{n-1} \in \mathfrak{F}$ に対して

$$(\boldsymbol{U}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{U}_{n-1})[F_0 \cap \dots \cap F_{n-1}] \subseteq \boldsymbol{U}_0[F_0] \cap \dots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}[F_{n-1}]$$

であることからわかる．

以下，$\mathfrak{B}_0$ が生成する真フィルタ $\mathfrak{F}_0$ が，$\mathfrak{F}$ よりも粗い唯一の極小 Cauchy フィルタであることを示す．

$\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$ を示す．$\boldsymbol{U}[F] \in \mathfrak{B}_0$（$\boldsymbol{U}$ は X 上の近縁，$F \in \mathfrak{F}$）を任意にとる．$\mathit{\Delta}(X) \subseteq \boldsymbol{U}$ より $F \subseteq \boldsymbol{U}[F]$ だから，$\boldsymbol{U}[F] \in \mathfrak{F}$ となる．よって，$\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$ である．

$\mathfrak{F}_0$ が Cauchy であることを示す．対称近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとる．$\mathfrak{F}$ は Cauchy だから，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい $F \in \mathfrak{F}$ がとれる．このとき，$\boldsymbol{U}[F] \in \mathfrak{B}_0$ は $\boldsymbol{U}^3$ 程度に小さい．対称近縁の 3 項合成全体は一様基をなすから（命題 13.5），命題 16.4 より，$\mathfrak{F}_0$ は Cauchy である．

最後に，$\mathfrak{F}_0$ の極小性と一意性を示す．そのためには，$\mathfrak{F}$ よりも粗い任意の Cauchy フィルタ $\mathfrak{G}$ に対して $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{G}$ をいえばよい．$\boldsymbol{U}[F] \in \mathfrak{B}_0$（$\boldsymbol{U}$ は X 上の近縁，$F \in \mathfrak{F}$）を任意にとる．$\mathfrak{G}$ は Cauchy だから，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい $G \in \mathfrak{G}$ がとれる．このとき $G \in \mathfrak{F}$ でもあるから，$F \cap G \neq \emptyset$ である．これと G が $\boldsymbol{U}$ 程度に小さいことより $G \subseteq \boldsymbol{U}[F]$ だから，$\boldsymbol{U}[F] \in \mathfrak{G}$ である．よって，$\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{G}$ が成り立つ．□

系 16.18　一様空間 X 上の任意の極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ について，$\mathfrak{F}^\circ = \{F^\circ \mid F \in \mathfrak{F}\}$ は $\mathfrak{F}$ のフィルタ基をなす．特に，任意の $F \in \mathfrak{F}$ は内点をもつ．

証明　$\mathfrak{F}$ を X 上の極小 Cauchy フィルタとする．定理 16.17 より $\mathfrak{F}$ のフィルタ基として $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{U}[F] \mid \boldsymbol{U} \text{ は近縁，} F \in \mathfrak{F}\}$ がとれるから，任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ と $F \in \mathfrak{F}$ に対して $\boldsymbol{U}[F]^\circ$ を含む $\mathfrak{B}$ の元が存在することをいえばよい．これは，$\boldsymbol{U}$ が近縁ならば $\boldsymbol{U}^\circ$ も近縁であること（命題 13.10 (1)），および $(\boldsymbol{U}^\circ)[F] \subseteq \boldsymbol{U}[F]^\circ$ からわかる．□

定理 16.19　一様空間 X 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ について，$\lim \mathfrak{F} = \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ である．

証明　$\lim \mathfrak{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ は一般に成り立つから（命題 6.3），$\operatorname{adh} \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{F}$ を示せばよい．点 $x \in \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ を任意にとる．すると，$\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{N}(x)$ のいずれよりも細かい真フィルタ $\mathfrak{G}$ が存在する（命題 6.4）．$\mathfrak{F}$ が Cauchy だから，それよりも細かい真フィルタ $\mathfrak{G}$ も Cauchy である（命題 16.5）．さて，定理 16.17 より $\mathfrak{F}$ よりも粗い極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}_0$ が存在する．このとき，$\mathfrak{F}_0$ は $\mathfrak{G}$ よりも粗い極小 Cauchy フィルタだが，一方で $\mathfrak{N}(x)$ も $\mathfrak{G}$ より粗い極小 Cauchy フィルタだから（命題 16.16），定理 16.17 の一意性より $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{N}(x)$ となる．したがって，$x \in \lim \mathfrak{N}(x) = \lim \mathfrak{F}_0 \subseteq \lim \mathfrak{F}$ となる．よって，$\operatorname{adh} \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{F}$ が成り立つ．□

系 16.20　X を一様空間とし，$\mathfrak{F}$ を X 上の Cauchy フィルタ，$x \in X$ とする．$\mathfrak{F}$ よりも細かい真フィルタであって x に収束するものが存在すれば，$\mathfrak{F}$ は x に収束する．

証明　$\mathfrak{F}$ は Cauchy だから，定理 16.19 より $x \in \lim \mathfrak{F}$ は $x \in \operatorname{adh} \mathfrak{F}$ と同値であり，これは $\mathfrak{F}$ よりも細かい真フィルタであって x に収束するものが存在することと同値である（命題 6.4）． □

系 16.21　X を一様空間，A を X の部分一様空間とし，$\mathfrak{F}$ を X 上の Cauchy フィルタとする．$\mathfrak{F}$ は A 上に相対真フィルタ $\mathfrak{F}|_A$ を誘導するとする．このとき，

$$\lim \mathfrak{F}|_A = \lim \mathfrak{F} \cap A$$

である．さらに，A が X の閉部分一様空間であれば，

$$\lim \mathfrak{F}|_A = \lim \mathfrak{F}$$

が成り立つ．

証明　系 6.9 (2) で，$\lim \mathfrak{F} \cap A \subseteq \lim \mathfrak{F}|_A$ であること，および A が閉ならば $\lim \mathfrak{F} \subseteq \lim \mathfrak{F}|_A$ であることを示した．あとは，$\lim \mathfrak{F}|_A \subseteq \lim \mathfrak{F}$ を示せばよい．$\iota\colon A \to X$ を包含写像とする．$x \in \lim \mathfrak{F}|_A$ ならば $x \in \lim \iota(\mathfrak{F}|_A)$ であり（系 6.9 (1)），$\iota(\mathfrak{F}|_A) = \iota(\iota^{-1}(\mathfrak{F}))$ は $\mathfrak{F}$ よりも細かいから（命題 1.25 (2)），系 16.20 より $x \in \lim \mathfrak{F}$ となる．よって，$\lim \mathfrak{F}|_A \subseteq \lim \mathfrak{F}$ が成り立つ． □

16.2　完備一様空間

定義 16.22（完備一様空間）　一様空間 X が完備であるとは，X 上の任意の Cauchy フィルタが収束することをいう．

命題 16.23　コンパクト一様空間は完備である．

証明　コンパクト空間において任意の真フィルタが接触点をもつことと（命題 7.2），Cauchy フィルタの接触点はその極限点でもあること（定理 16.19）から従う． □

命題 16.24　(1) 完備一様空間の閉部分一様空間は完備である．

(2) 分離一様空間の部分一様空間は，完備ならば閉である．

(3) 完備分離一様空間 X の部分一様空間 A について，A が完備であることと A が X において閉であることとは同値である．

証明　(1)　X を完備一様空間，A を X の閉部分一様空間とし，$\iota\colon A \to X$ を包含写像とする．A 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ を任意にとる．$\iota(\mathfrak{F})$ は X 上の Cauchy フィルタだから（系 16.10 (1)），X の完備性より収束する．ここで，A が閉であることより $\lim \mathfrak{F} = \lim \iota(\mathfrak{F})$ だから（系 6.9 (1)），$\mathfrak{F}$ も収束する．よって，A は完備である．

(2)　X を分離一様空間，A を X の完備部分一様空間とする．点 $x \in \overline{A}$ を任意にとる．$\mathfrak{N}_A(x)$ は A 上の Cauchy フィルタだから（系 16.11），A の完備性より極限点 $x' \in A$ をもつ．$\mathfrak{N}_X(x)$ は X 上の Cauchy フィルタだから $\lim \mathfrak{N}_A(x) = \lim \mathfrak{N}_X(x) \cap A$ であり（系 16.21），したがって x' は $\mathfrak{N}_X(x)$ の極限点でもある．X は分離だから，極限の一意性（定理 6.20）より $x = x' \in A$ を得る．よって，$\overline{A} = A$ である．

(3)　(1), (2) から従う． □

命題 16.25　空でない一様空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) 積一様空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は完備である．

(b) すべての $i \in I$ に対して，X_i は完備である．

証明　$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が完備であるとする．$i_0 \in I$ と X_{i_0} 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}_{i_0}$ を任意にとる．$i \in I \setminus \{i_0\}$ に対して X_i 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}_i$（たとえば，X_i の点を 1 つ固定して，その点の近傍フィルタをとればよい）を選び，X 上の積フィルタ $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ を考える．すると，系 16.13 より $\mathfrak{F}$ は Cauchy だから，X の完備性より $\mathfrak{F}$ はある点 $x \in X$ に収束する．このとき，$\mathfrak{F}_{i_0} = \mathrm{pr}_{i_0}(\mathfrak{F})$ は $p_{i_0}(x)$ に収束する（命題 6.7）．よって，X_{i_0} は完備である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ を任意にとると，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_i(\mathfrak{F})$ は X_i 上の Cauchy フィルタである（命題 16.7）．これらがそれぞれ $x_i \in X_i$ に収束するならば，$\mathfrak{F}$ は $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ に収束する（系 6.10）．よって，すべての X_i が完備ならば，X も完備である． □

命題 16.26　X を集合，$\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1$ を X 上の一様構造とし，X にこれらの一様構造を与えて得られる一様空間をそれぞれ X_0, X_1 と書く．$\mathscr{U}_1$ は $\mathscr{U}_0$ よりも細かく，さらに X_1 の一様基として $X_0 \times X_0$ の閉集合からなるものがとれるとする．このとき，X_0 が完備ならば，X_1 も完備である．

証明　X_1 上の Cauchy フィルタが X_0 上でも Cauchy であることと，命題 16.14 から従う． □

定理 16.27　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を一様連続写像とし，$f(X)$ は Y において稠密であるとする．このとき，X 上の任意の極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して $f(\mathfrak{F})$ が収束するならば，Y は完備である．

証明　定理 16.17 より，与えられた条件のもとで，Y 上の任意の極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{G}$ が収束することを示せばよい．$\mathfrak{G}$ の任意の元は内点をもち（系 16.18），$f(X)$ は稠密だから，$\mathfrak{G}$ の任意の元は $f(X)$ と交わる．したがって，$f^{-1}(\mathfrak{G})$ は X 上の真フィルタである（命題 1.23）．そこで，系 16.9 (2) より $f^{-1}(\mathfrak{G})$ は Cauchy だから，仮定より $f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ は収束する．$\mathfrak{G} \subseteq f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ だから（命題 1.25 (2)），系 16.20 より，このとき $\mathfrak{G}$ も収束する． □

系 16.28　X を一様空間，X' を X の稠密部分一様空間とし，$\iota\colon X' \to X$ を包含写像とする．X 上の任意の極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ に対して $\iota(\mathfrak{F})$ が収束するならば，X は完備である． □

16.3　完備分離一様空間に対する拡張定理

定理 16.29（完備分離一様空間に対する拡張定理）　X を一様空間，A を X の稠密部分集合，Y を完備分離一様空間とする．このとき，任意の一様連続写像 $f\colon A \to X$ に対して，その一様連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ が一意に存在する．

証明　拡張の一意性は，等式延長の原理（系 5.16）から従う．拡張の存在を示す．点 $x \in X$ を任意にとる．$\mathfrak{N}_A(x)$ は Cauchy であり（系 16.11），したがってその一様連続写像による像 $f(\mathfrak{N}_A(x))$ も Cauchy である（命題 16.7）．よって，Y の完備性より $f(\mathfrak{N}_A(x))$ は収束する．すなわち，$\lim_x f \neq \emptyset$ である．系 13.13 より Y は正則分離だから，拡張定理（定理 6.27）が適用でき，f の連続な拡張 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ の存在がわかる．$\widetilde{f}|_A = f$ は一様連続だから，定理 13.18 より，$\widetilde{f}$ は一様連続である． □

系 16.30　X, Y を完備分離一様空間，A, B をそれぞれ X, Y の稠密部分集合とする．このとき，A から B への一様同型写像は，X から Y への一様同型写像に一意に拡張される．

証明　定理 16.29 より，一様同型写像 $f\colon A \to B$ は一様連続写像 $\widetilde{f}\colon X \to Y$ に一意に拡張され，同様に，一様同型写像 $g = f^{-1}\colon B \to A$ は一様連続写像 $\widetilde{g}\colon Y \to X$ に一意に拡張される．$\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ は A 上では $g \circ f = \mathrm{id}_A$

に等しいから，A の稠密性と等式延長原理（系 5.16）より $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_X$ である．同様に $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \mathrm{id}_Y$ も成り立つから，$\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ とは互いに他の逆写像である．よって，$\widetilde{f}\colon X \to Y$ は一様同型写像である．□

16.4　全有界一様空間

定義 16.31（全有界一様空間）　一様空間 X が**全有界**あるいは**先コンパクト**であるとは，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる X の有限被覆が存在することをいう．

明らかに，一様空間 X とその部分一様空間 $A \subseteq X$ について，A が全有界であることと，「X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる A の X における有限被覆が存在すること」とは同値である．

命題 16.32　X を一様空間，$A \subseteq X$ とし，$\mathscr{B}$ を X の準一様基とする．A が全有界であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対して，$\boldsymbol{B}$ 程度に小さい集合からなる X における A の有限被覆が存在することである．

証明　必要性は明らかだから，十分性を示す．A が上の条件を満たすとする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとると，有限個の $\boldsymbol{B}_0, \dots, \boldsymbol{B}_{n-1} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{B}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{B}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ を満たす．仮定より，$i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して $\boldsymbol{B}_i$ 程度に小さい集合からなる X における A の有限被覆 $\{B_{i,0}, \dots, B_{i,k_i-1}\}$ が存在する．このとき，

$$\{B_{0,j_0} \cap \dots \cap B_{n-1,j_{n-1}} \mid \text{各 } i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ に対して } j_i \in \{0, \dots, k_i - 1\}\}$$

は $\boldsymbol{B}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{B}_{n-1} \subseteq \boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる X における A の有限被覆である．よって，A は全有界である．□

命題 16.33　X を一様空間とする．

(1) $A \subseteq X$ が全有界で $A' \subseteq A$ ならば，A' も全有界である．
(2) $A_0, \dots, A_{n-1} \subseteq X$ が全有界ならば，$A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ も全有界である．
(3) A が全有界ならば，$\overline{A}$ も全有界である．

証明　(1)　明らかである．

(2)　$A_0, \dots, A_{n-1} \subseteq X$ が全有界であるとする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとると，各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，A_i の全有界性より，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる X における A_i の有限被覆 $\{B_{i,0}, \dots, B_{i,k_i-1}\}$ がとれるこのとき，$\{B_{i,j}\}_{i\in\{0,\dots,n-1\},\, j\in\{0,\dots,k_i-1\}}$ は $\boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる X における $A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ の有限被覆である．よって，$A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ は全有界である．

(3)　$A \subseteq X$ が全有界であるとする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとると，A の全有界性より，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる X における A の有限被覆 $\{B_0, \dots, B_{n-1}\}$ がとれる．このとき，$\{\overline{B_0}, \dots, \overline{B_{n-1}}\}$ は $\overline{\boldsymbol{U}}$ 程度に小さい集合からなる X における $\overline{A}$ の有限被覆である．近縁の閉包全体は一様基をなすから（命題 13.10 (2)），命題 16.32 より，$\overline{A}$ は全有界である．□

命題 16.34　X, Y を一様空間，$f\colon X \to Y$ を一様連続写像とする．$A \subseteq X$ が全有界ならば，$f(A)$ も全有界である．

証明　$A \subseteq X$ が全有界であるとする．Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとると，$f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は X 上の近縁だから，A の全有界性より，$f^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ 程度に小さい集合からなる X における A の有限被覆 $\{B_0, \dots, B_{n-1}\}$ が存在する．このとき，$\{f(B_0), \dots, f(B_{n-1})\}$ は $\boldsymbol{V}$ 程度に小さい集合からなる Y における $f(A)$ の有限被覆である．

よって，$f(A)$ は全有界である． □

命題 16.35　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．$A\subseteq X$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) A は全有界である．
(b) すべての $i\in I$ に対して，$\phi_i(A)$ は全有界である．

特に，すべての Y_i が全有界ならば，X も全有界である．

証明　次の同値関係から従う：

(a) $\iff$ 任意の $i\in I$，Y_i 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して，$\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ 程度に小さい集合からなる X における A の有限被覆が存在する　(∗)
$\iff$ 任意の $i\in I$，Y_i 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して，$\boldsymbol{V}$ 程度に小さい集合からなる Y_i における $\phi_i(A)$ の有限被覆が存在する
$\iff$ (b).

ここで，同値関係 (∗) は，$\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})$（$i\in I$，$\boldsymbol{V}$ は Y_i 上の近縁）と表される集合全体が X の標準準一様基であることと命題 16.32 から従う． □

命題 16.36　一様空間 X に対して，次の 6 条件は同値である．

(a) X は全有界である．
(b) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい開集合からなる X の有限開被覆が存在する．
(c) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して有限個の点 $x_0,\dots,x_{n-1}\in X$ が存在し，$\{\boldsymbol{U}[x_0],\dots,\boldsymbol{U}[x_{n-1}]\}$ は X を被覆する．
(d) X 上の任意の点列に対して，それが定める真フィルタよりも細かい Cauchy フィルタが存在する．
(e) X 上の任意の真フィルタに対して，それよりも細かい Cauchy フィルタが存在する．
(f) X 上の任意の極大フィルタは Cauchy である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (f)　X が全有界であるとする．$\mathfrak{M}$ を X 上の極大フィルタとする．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとると，X が全有界であることより，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい集合からなる X の被覆 $\{A_0,\dots,A_{n-1}\}$ が存在する．すると，$A_0\cup\dots\cup A_{n-1}=X\in\mathfrak{M}$ だから，いずれかの A_i は $\mathfrak{M}$ に属する（命題 1.9）．よって，$\mathfrak{M}$ は Cauchy である．

(f) $\Longrightarrow$ (e)　任意の真フィルタがそれよりも細かい極大フィルタをもつこと（定理 1.10）から従う．

(e) $\Longrightarrow$ (d)　明らかである．

(d) $\Longrightarrow$ (c)　対偶を示す．X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ について，有限個の点 $x_0,\dots,x_{n-1}\in X$ をどのようにとっても $\{\boldsymbol{U}[x_0],\dots,\boldsymbol{U}[x_{n-1}]\}$ は X を被覆しないとする．すると，X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $x_n\notin\boldsymbol{U}[x_0]\cup\dots\cup\boldsymbol{U}[x_{n-1}]$ を満たすようなものがとれる．この点列が定める真フィルタ $\mathfrak{F}$ は，より細かい Cauchy フィルタをもたない．実際，$\mathfrak{F}$ より細かい真フィルタの元 A を任意にとると，真フィルタの有限交叉性より，A は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の異なる 2 項を含む．これは，A が $\boldsymbol{U}$ 程度には小さくないことを示している．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　(b) が成り立つとする．対称開近縁 $\boldsymbol{U}$ を任意にとると，(b) より，有限個の点 $x_0,\dots,x_{n-1}\in X$ であって $\{\boldsymbol{U}[x_0],\dots,\boldsymbol{U}[x_{n-1}]\}$ が X を被覆するようなものが存在する．このとき，各 $\boldsymbol{U}[x_i]$ は $\boldsymbol{U}^2$ 程度に小さい開集合である．対称開近縁の 2 項合成全体は一様基をなすから（命題 13.5，命題 13.10 (1)），X は全有界である（命題 16.32）．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである． □

系 16.37　可算コンパクト一様空間は全有界である．

証明　位相空間 X が可算コンパクトであるための必要十分条件は，X 上の任意の点列に対して，それが定める真フィルタよりも細かい真フィルタであって収束するものが存在することであった（命題 7.57）．一方で，一様空間 X が全有界であるための必要十分条件は，X 上の任意の点列に対して，それが定める真フィルタよりも細かい Cauchy フィルタが存在することであった（命題 16.36）．収束する真フィルタは Cauchy だから（命題 16.6），可算コンパクト一様空間は全有界である． □

定理 16.38　一様空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X はコンパクトである．
(b) X は完備かつ全有界である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　コンパクト一様空間が完備であることは命題 16.23 で，全有界であることは系 16.37 ですでに示した．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X が完備かつ全有界であるとする．$\mathfrak{F}$ を X 上の真フィルタとすると，X が全有界であることと命題 16.36 より，$\mathfrak{F}$ よりも細かい Cauchy フィルタが存在する．いま X は完備だから，この Cauchy フィルタは収束する．よって，X 上の任意の真フィルタに対して，それよりも細かい収束する真フィルタが存在するから，命題 7.2 より，X はコンパクトである． □

16.5　一様空間の分離化と完備化

16.5.1　一様空間の分離化

定義 16.39（一様空間の分離化）　X を一様空間とする．分離一様空間 X^{s} と一様連続写像 $s\colon X \to X^{\mathrm{s}}$ との組 (X^{s}, s) であって，次の普遍性を満たすものを，X の**分離化**という．

> 任意の分離一様空間 Z と一様連続写像 $f\colon X \to Z$ に対して，一様連続写像 $f^{\mathrm{s}}\colon X^{\mathrm{s}} \to Z$ であって $f = f^{\mathrm{s}} \circ s$ を満たすものが一意に存在する．

定理 16.40（分離化の存在と一意性）　任意の一様空間 X に対して，X の分離化 (X^{s}, s) が存在する．さらに，(X^{s}, s), $(X^{\mathrm{s}\prime}, s')$ がともに X の分離化であれば，一様同型写像 $\phi\colon X^{\mathrm{s}} \to X^{\mathrm{s}\prime}$ であって，$s' = \phi \circ s$ を満たすものが存在する．

定理 16.41　X, Y を一様空間，$\alpha\colon X \to Y$ を一様連続写像とする．(Y, α) が X の分離化であるための必要十分条件は，次の 3 条件を満たすことである．

(SEP1) Y は分離である．
(SEP2) α は全射である．
(SEP3) X の一様構造は，α が誘導する始一様構造に一致する．

以下，分離化の存在と一意性（定理 16.40）と定理 16.41 をまとめて証明する．証明は 3 段に分けて行うが，次節の完備化の存在と一意性（定理 16.50）の証明に使われるのは第 1 段と第 2 段のみであり，完備化の構成から分離化の構成も得られるから（命題 16.52），第 3 段を読み飛ばして次節に進んでも問題ない．

証明　まず分離化の一意性を示し，次に条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすものが分離化であることを示し，最後に条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすものを構成する．X を一様空間とする．

■分離化が同型を除いてたかだか一意であること　(X^{s}, s) と $(X^{\mathrm{s}\prime}, s')$ がともに X の分離化であるとする．分離化の普遍性より，一様連続写像 $\phi\colon X^{\mathrm{s}} \to X^{\mathrm{s}\prime}$ であって $s' = \phi \circ s$ を満たすもの，および一様連続写像 $\psi\colon X^{\mathrm{s}\prime} \to X^{\mathrm{s}}$ であって $s = \psi \circ s'$ を満たすものがとれる．すると，$\psi \circ \phi\colon X^{\mathrm{s}} \to X^{\mathrm{s}}$ は $s = (\psi \circ \phi) \circ s$ を満たす一様連続写像だが，一方で $\mathrm{id}_{X^{\mathrm{s}}}$ も同様の性質を満たす一様連続写像だから，普遍性が誘導する写像の一意性より，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{X^{\mathrm{s}}}$ が成り立つ．同様に，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{X^{\mathrm{s}\prime}}$ が成り立つ．よって，$\phi\colon X^{\mathrm{s}} \to X^{\mathrm{s}\prime}$ は $s' = \phi \circ s$ を満たす一様同型写像である．

■条件 (SEP1)–(SEP3) を満たす (Y, α) が X の分離化であること　一様空間 Y と一様連続写像 $\alpha\colon X \to Y$ との組 (Y, α) が条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすとして，(Y, α) が分離化の普遍性を満たすことを示す．分離一様空間 Z と一様連続写像 $f\colon X \to Z$ を任意にとる．

まず，写像 $g\colon Y \to Z$ であって $f = g \circ \alpha$ を満たすものが一意に存在することを示す．α は全射だから，そのためには，$x, y \in X$ に対して，$\alpha(x) = \alpha(y)$ ならば $f(x) = f(y)$ であることをいえばよい．対偶を示す．$f(x) \neq f(y)$ とすると，Z が分離であることより，$(f(x), f(y))$ を含まない Z 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ がとれる（系 13.13）．すると，$f^{\times -1}(\boldsymbol{W})$ は (x, y) を含まない X 上の近縁である．X の一様構造は α が誘導する始一様構造に等しいから，Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ であって，$\alpha^{\times -1}(\boldsymbol{V}) \subseteq f^{\times -1}(\boldsymbol{W})$ を満たすものが存在する．$(x, y) \notin f^{\times -1}(\boldsymbol{W})$ だったから $(x, y) \notin \alpha^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ であり，したがって $(\alpha(x), \alpha(y)) \notin \boldsymbol{V}$ である．近縁は必ず対角集合を含むから，これより $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ である．これで示された．

次に，この写像 $g\colon Y \to Z$ が一様連続であることを示す．Z 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ を任意にとる．$g \circ \alpha = f$ は一様連続だから，$\alpha^{\times -1}(g^{\times -1}(\boldsymbol{W}))$ は X 上の近縁である．X の一様構造は α が誘導する始一様構造に等しいから，Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ であって，$\alpha^{\times -1}(\boldsymbol{V}) \subseteq \alpha^{\times -1}(g^{\times -1}(\boldsymbol{W}))$ を満たすものが存在する．α が全射であることより，このとき $\boldsymbol{V} \subseteq g^{\times -1}(\boldsymbol{W})$ が成り立つから，$g^{\times -1}(\boldsymbol{W})$ は Y 上の近縁である．よって，g は一様連続である．これで，(Y, α) が分離化の普遍性を満たすことが示された．

■条件 (SEP1)–(SEP3) を満たす (X^{s}, s) の構成　X 上の近縁すべての交叉を $\boldsymbol{R}$ と置く．すると，一様構造の性質から容易にわかるように，$\boldsymbol{R}$ は X 上の同値関係を定める．この同値関係による X の商集合を X^{s} とし，$s\colon X \to X^{\mathrm{s}}$ を等化写像とする．

$\{s^{\times}(\boldsymbol{U}) \mid \boldsymbol{U}$ は X 上の近縁$\}$ が X^{s} 上の一様基をなすことを示す．命題 13.4 より，そのためには，次の 4 条件を確かめればよい．

(UB1) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}_0, \dots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ に対して X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$s^{\times}(\boldsymbol{V}) \subseteq s^{\times}(\boldsymbol{U}_0) \cap \dots \cap s^{\times}(\boldsymbol{U}_{n-1})$ となる．
(UB2) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\mathit{\Delta}(X^{\mathrm{s}}) \subseteq s^{\times}(\boldsymbol{U})$ である．
(UB3) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$s^{\times}(\boldsymbol{V})^2 \subseteq s^{\times}(\boldsymbol{U})$ となる．
(UB4) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$s^{\times}(\boldsymbol{V}) \subseteq s^{\times}(\boldsymbol{U})^{-1}$ となる．

(UB1)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}_0, \dots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ に対して $s^{\times}(\boldsymbol{U}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}) \subseteq s^{\times}(\boldsymbol{U}_0) \cap \dots \cap s^{\times}(\boldsymbol{U}_{n-1})$ であることから従う．

(UB2)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ が対角集合 $\mathit{\Delta}(X)$ を含むことから従う．

(UB3)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して $s^{\times}(\boldsymbol{V})^2 \subseteq s^{\times}(\boldsymbol{V}^3)$ が成り立つことをいえば十分である．(u, v), $(v, w) \in s^{\times}(\boldsymbol{V})$ とすると，(x, y), $(y', z) \in \boldsymbol{V}$ が存在して $(u, v) = (s(x), s(y))$, $(v, w) = (s(y'), s(z))$ と書ける．$s(y) = v = s(y')$ より $(y, y') \in \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{V}$ だから，$(x, z) \in \boldsymbol{V}^3$ である．したがって，$(u, w) =$

$(s(x), s(z)) \in s^{\times}(\boldsymbol{V}^3)$ である．よって，$s^{\times}(\boldsymbol{V})^2 \subseteq \pi^{\times}(\boldsymbol{V}^3)$ である．

(UB4)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $s^{\times}(\boldsymbol{U}^{-1}) = s^{\times}(\boldsymbol{U})^{-1}$ であることから従う．

以上より，$\{s^{\times}(\boldsymbol{U}) \mid \boldsymbol{U}$ は X 上の近縁$\}$ は X^{s} 上の一様基をなす．X^{s} を，この一様基が生成する一様構造によって一様空間とみなす．以下，この (X^{s}, s) が条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすことを示す．

(SEP2)　s が全射であることは明らかである．

(SEP3)　X の一様構造が s の誘導する始一様構造に一致することを示す（系として，s が一様連続であることがわかる）．s が誘導する X 上の始一様構造の一様基として $\{s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U})) \mid \boldsymbol{U}$ は X 上の近縁$\}$ がとれるから（命題 15.8），2 つの一様構造が一致することを示すためには，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して

$$\boldsymbol{U} \subseteq s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U})) \subseteq \boldsymbol{U}^3$$

が成り立つことをいえば十分である．左側の包含は明らかだから，右側の包含を示す．$(x, y) \in s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U}))$ を任意にとる．すると，$(s(x), s(y)) \in s^{\times}(\boldsymbol{U})$ だから，$(x', y') \in \boldsymbol{U}$ が存在して $(s(x), s(y)) = (\pi(x'), \pi(y'))$ を満たす．$s(x) = s(x')$，$s(y') = s(y)$ より (x, x'), $(y', y) \in \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{U}$ だから，$(x, y) \in \boldsymbol{U}^3$ である．よって，$s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U})) \subseteq \boldsymbol{U}^3$ である．これで，X の一様構造が π の誘導する始一様構造に一致することが示された．

(SEP1)　X^{s} が分離であることを示す．そのためには，X^{s} 上の近縁すべての交叉が $\varDelta(X^{\mathrm{s}})$ であることをいえばよい（系 13.13）．$(u, v) \in (X^{\mathrm{s}} \times X^{\mathrm{s}}) \setminus \varDelta(X^{\mathrm{s}})$ を任意にとる．$(s(x), s(y)) = (u, v)$ なる $(x, y) \in X \times X$ をとると，$(x, y) \notin \boldsymbol{R}$ だから，(x, y) を含まない X 上の近縁が存在する．すでに示した (SEP2) より，$\{s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U})) \mid \boldsymbol{U}$ は X 上の近縁$\}$ が X の一様基であること踏まえると，X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ であって，$(x, y) \in s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U}))$ を満たすものがとれる．このとき，$s^{\times}(s^{\times -1}(s^{\times}(\boldsymbol{U}))) = s^{\times}(\boldsymbol{U})$ は X^{s} 上の近縁であり，(u, v) を含まない．よって，X^{s} 上の近縁すべての交叉は $\varDelta(X^{\mathrm{s}})$ である．□

分離化は，自然な方法で一様空間の圏から分離一様空間の圏への関手をなし，分離化の普遍性より，この関手は包含関手の左随伴となる．詳細は省略する．

命題 16.42　X を一様空間とし，(X^{s}, s) を X の分離化とする．s が一様同型写像であるための必要十分条件は，X が分離であることである．

証明　X^{s} は分離だから，s が一様同型写像ならば，X も分離である．逆に，X が分離ならば，(X, id_X) は明らかに X の分離化だから，分離化の一意性（定理 16.50）より，s は id_X と同じく一様同型写像である．□

命題 16.43　X を一様空間とする．X の分離化 (X^{s}, s) は，X の（位相空間としての）Kolmogorov 商である．

証明　分離化 (X^{s}, s) は定理 16.41 の条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすから，定理 5.50 の条件 (KQ1)–(KQ3) も満たす（(KQ3) については，命題 15.4 に注意せよ）．よって，(X^{s}, s) は X の Kolmogorov 商である．□

系 16.44　X を一様空間とし，(X^{s}, s) を X の分離化とする．2 点 x, $y \in X$ が識別されるための必要十分条件は，$s(x) \neq s(y)$ である．

証明　(X^{s}, s) を X の Kolmogorov 商であることに注意すれば（命題 16.42），Kolmogorov 商の一般的な性質（命題 5.51）から従う．□

命題 16.45　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．各 $i \in I$ に対して，$(Y_i^{\mathrm{s}}, s_{Y_i})$ を Y_i の分離化とする．写像 $(s_{Y_i} \circ \phi_i)_{i \in I} \colon X \to \prod_{i \in I} Y_i^{\mathrm{s}}$ による X の像を X^{s} とし，$(s_{Y_i} \circ \phi_i)_{i \in I}$ を X から X^{s} への写像とみなしたものを s_X と書くと，(X^{s}, s_X) は X の分離化である．

証明　定理 16.41 より，(X^{s}, s_X) が条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすことを確かめればよい．X^{s} は分離一様空間族の積の部分一様空間だから，分離である（命題 5.19，命題 5.18）．また，定義から明らかに，$s_X \colon X \to X^{\mathrm{s}}$ は全射である．最後に，X の一様構造が s_X の誘導する始一様構造に等しいことを示す．X の一様構造は $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しく，各 $i \in I$ に対して Y_i の一様構造は s_{Y_i} が誘導する始一様構造に等しいから（定理 16.41），始一様構造の推移性（命題 15.6）より，X の一様構造は $\{s_{Y_i} \circ \phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．命題 15.19 と命題 15.18 より，これはさらに s_X が誘導する始一様構造に等しい．これで，条件 (SEP1)–(SEP3) が確かめられた．□

系 16.46　X を一様空間，A を X の部分一様空間とし，(X^{s}, s) を X の分離化とする．$s|_A$ を A から $s(A)$ への写像とみなしたものを s_A と書くと，$(s(A), s_A)$ は A の分離化である．□

系 16.47　$\{X_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，各 $i \in I$ に対して (X_i^{s}, s_i) を X の分離化とする．このとき，$(\prod_{i\in I} X_i^{\mathrm{s}}, \prod_{i\in I} s_i)$ は $\prod_{i\in I} X_i$ の分離化である．□

系 16.48　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\phi_i \colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．(X^{s}, s_X) を X の分離化とし，各 $i \in I$ に対して $(Y_i^{\mathrm{s}}, s_{Y_i})$ を Y の分離化とする．また，各 $i \in I$ に対して，一様連続写像 $s_{Y_i} \circ \phi_i \colon X \to Y_i^{\mathrm{s}}$ から分離化の普遍性によって誘導される一様連続写像を $\phi_i^{\mathrm{s}} \colon X^{\mathrm{s}} \to Y_i^{\mathrm{s}}$ と書く．このとき，X^{s} の一様構造は，$\{\phi_i^{\mathrm{s}}\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．

証明　命題 16.45 より，X^{s} は写像 $(s_{Y_i} \circ \phi_i)_{i\in I} \colon X \to \prod_{i\in I} Y_i^{\mathrm{s}}$ による X の像であり，s_X は $(s_{Y_i} \circ \phi_i)_{i\in I}$ を X から X^{s} への写像とみなしたものであるとしてよい．各 $i \in I$ に対して，写像 $\phi_i^{\mathrm{s}} \colon X^{\mathrm{s}} \to Y_i^{\mathrm{s}}$ は $s_{Y_i} \circ \phi_i = \phi_i^{\mathrm{s}} \circ s_X$ を満たす唯一の一様連続写像だが，包含写像 $X^{\mathrm{s}} \to \prod_{i\in I} Y_i^{\mathrm{s}}$ と i-成分への射影との合成はこの性質をみたすから，ϕ_i^{s} はこの写像と一致する．これと始一様構造の推移性（命題 15.6）より，X^{s} の一様構造は $\{\phi_i^{\mathrm{s}}\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．□

16.5.2　一様空間の完備化

定義 16.49（一様空間の完備化）　X を一様空間とする．完備分離一様空間 $\widehat{X}$ と一様連続写像 $\iota \colon X \to \widehat{X}$ との組 $(\widehat{X}, \iota)$ であって，次の普遍性を満たすものを，X の**完備化**という．

> 任意の完備分離一様空間 Z と一様連続写像 $f \colon X \to Z$ に対して，一様連続写像 $\widehat{f} \colon \widehat{X} \to Z$ であって $f = \widehat{f} \circ \iota$ を満たすものが一意に存在する．

定理 16.50（完備化の存在と一意性）　任意の一様空間 X に対して，X の完備化 $(\widehat{X}, \iota)$ が存在する．さらに，$(\widehat{X}, \iota)$, $(\widehat{X}', \iota')$ がともに X の完備化であれば，一様同型写像 $\phi \colon \widehat{X} \to \widehat{X}'$ であって，$\iota' = \phi \circ \iota$ を満たすものが存在する．

定理 16.51　X, Y を一様空間，$\alpha \colon X \to Y$ を一様連続写像とする．(Y, α) が X の完備化であるための必要十分条件は，次の 3 条件を満たすことである．

(CMP1)　Y は完備分離である．
(CMP2)　$\alpha(X)$ は Y において稠密である．
(CMP3)　X の一様構造は，α が誘導する始一様構造に一致する．

以下，完備化の存在と一意性（定理 16.50）と定理 16.51 をまとめて証明する．

証明　まず完備化の一意性を示し，次に条件 (CMP1)–(CMP3) を満たすものが完備化であることを示し，最後に条件 (CMP1)–(CMP3) を満たすものを構成する．X を一様空間とする．

■完備化が同型を除いてたかだか一意であること　$(\widehat{X}, \iota)$ と $(\widehat{X}', \iota')$ がともに X の分離化であるとする．完備化の普遍性より，一様連続写像 $\phi\colon \widehat{X} \to \widehat{X}'$ であって $\iota' = \phi \circ \iota$ を満たすもの，および一様連続写像 $\psi\colon \widehat{X}' \to \widehat{X}$ であって $\iota = \psi \circ \iota'$ を満たすものがとれる．すると，$\psi \circ \phi\colon \widehat{X} \to \widehat{X}$ は $\iota = (\psi \circ \phi) \circ \iota$ を満たす一様連続写像だが，一方で $\mathrm{id}_{\widehat{X}}$ も同様の性質を満たす一様連続写像だから，普遍性が誘導する写像の一意性より，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\widehat{X}}$ が成り立つ．同様に，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\widehat{X}'}$ が成り立つ．よって，$\phi\colon \widehat{X} \to \widehat{X}'$ は $\iota' = \phi \circ \iota$ を満たす一様同型写像である．

■条件 (CMP1)–(CMP3) を満たす (Y, α) が X の完備化であること　一様空間 Y と一様連続写像 $\alpha\colon X \to Y$ との組 (Y, α) が条件 (CMP1)–(CMP3) を満たすとして，(Y, α) が完備化の普遍性を満たすことを示す．完備分離一様空間 Z と一様連続写像 $f\colon X \to Z$ を任意にとる．

α を X から $\alpha(X)$ への写像とみなしたものを α_0 と書き，$\alpha_1\colon \alpha(X) \to Y$ を包含写像とする．$(\alpha(X), \alpha_0)$ は定理 16.41 の条件 (SEP1)–(SEP3) を満たすから ((SEP3) については，命題 15.18 に注意せよ)，$(\alpha(X), \alpha_0)$ は X の分離化である．よって，分離化の普遍性より，一様連続写像 $g\colon \alpha(X) \to Z$ であって $f = g \circ \alpha_0$ を満たすものが一意に存在する．さらに，$\alpha(X)$ は Y において稠密だから，完備分離一様空間に対する拡張定理（定理 16.29）より，一様連続写像 $h\colon Y \to Z$ であって $g = h \circ \alpha_1$ を満たすものが一意に存在する．この h は，$f = h \circ \alpha$ を満たす唯一の一様連続写像である．よって，(Y, α) は完備化の普遍性を満たす．

■条件 (CMP1)–(CMP3) を満たす $(\widehat{X}, \iota)$ の構成　$\widehat{X}$ を X 上の極小 Cauchy フィルタ全体の集合とし，写像 $\iota\colon X \to \widehat{X}$ を

$$\iota(x) = \mathfrak{N}_X(x) \quad (x \in X)$$

と定める．近傍フィルタは極小 Cauchy だから（命題 16.16），ι は矛盾なく定まる．

X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して

$$[\boldsymbol{U}] = \{(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \in \widehat{X} \times \widehat{X} \mid \boldsymbol{U} \text{ 程度に小さい } \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \text{ の元が存在する}\}$$

と定める．$\{[\boldsymbol{U}] \mid \boldsymbol{U} \text{ は } X \text{ 上の近縁}\}$ が $\widehat{X}$ 上の一様基をなすことを示す．命題 13.4 より，そのためには，次の 4 条件を確かめればよい．

(UB1) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}_0, \dots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ に対して X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$[\boldsymbol{V}] \subseteq [\boldsymbol{U}_0] \cap \dots \cap [\boldsymbol{U}_{n-1}]$ となる．
(UB2) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\varDelta(\widehat{X}) \subseteq [\boldsymbol{U}]$ である．
(UB3) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$[\boldsymbol{V}]^2 \subseteq [\boldsymbol{U}]$ となる．
(UB4) X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して X 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$[\boldsymbol{V}] \subseteq [\boldsymbol{U}]^{-1}$ となる．

(UB1)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}_0, \dots, \boldsymbol{U}_{n-1}$ に対して $[\boldsymbol{U}_0 \cap \dots \cap \boldsymbol{U}_{n-1}] \subseteq [\boldsymbol{U}_0] \cap \dots \cap [\boldsymbol{U}_{n-1}]$ であることから従う．

(UB2)　$\mathfrak{X} \in \widehat{X}$ は Cauchy だから，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\mathfrak{X}$ は $\boldsymbol{U}$ 程度に小さい元を含む．したがって，$(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) \in [\mathfrak{U}]$ である．よって，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\varDelta(\widehat{X}) \subseteq [\boldsymbol{U}]$ である．

(UB3)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して $[\boldsymbol{V}]^2 \subseteq [\boldsymbol{V}^2]$ が成り立つことをいえば十分である．$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \in [\boldsymbol{V}]$ とすると，$\boldsymbol{V}$ 程度に小さい $A \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$，$B \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z}$ がとれる．このとき，A, $B \in \mathfrak{Y}$ より $A \cap B \neq \emptyset$ だから，命題 16.2 より，$A \cup B$ は $\boldsymbol{V}^2$ 程度に小さい．したがって，$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) \in [\boldsymbol{V}^2]$ である．よって，$[\boldsymbol{V}]^2 \subseteq [\boldsymbol{V}^2]$ である．

(UB4)　X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $[\boldsymbol{U}]$ が対称であることから明らかである．

以上より，$\{[\boldsymbol{U}] \mid \boldsymbol{U}$ は $\widehat{X}$ 上の近縁$\}$ は $\widehat{X}$ 上の一様基をなす．$\widehat{X}$ を，この一様基が生成する一様構造によって一様空間とみなす．以下，この $(\widehat{X}, \iota)$ が条件 (CMP1)–(CMP3) を満たすことを示す．

(CMP2)　$\iota(X)$ が $\widehat{X}$ において稠密であることを示す．そのためには，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ と $\mathfrak{X} \in \widehat{X}$ に対して $[\boldsymbol{U}][\mathfrak{X}] \cap i(X) \neq \emptyset$ をいえばよい．すなわち，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ と極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{X}$ に対してある $x \in X$ が存在し，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}_X(x)$ の元が存在することを示せばよい．このことは，次のようにしてわかる．まず，$\mathfrak{X}$ は極小 Cauchy だから，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい元 $A \in \mathfrak{X}$ をもち，さらにこの A は内点をもつ（系 16.18）．その内点を 1 つとって x とすれば，$A \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}_X(x)$ である．これで，$\iota(X)$ が $\widehat{X}$ において稠密であることが示された．

(CMP3)　X の一様構造が，ι の誘導する始一様構造に一致することを示す（系として，ι が一様連続であることがわかる）．ι が誘導する X 上の始一様構造の一様基として $\{\iota^{\times -1} \mid \boldsymbol{U}$ は X 上の近縁$\}$ がとれるから（命題 15.8），2 つの一様構造が一致することを示すためには，X 上の任意の対称近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して

$$\iota^{\times -1}([\boldsymbol{U}]) \subseteq \boldsymbol{U} \subseteq \iota^{\times -1}([\boldsymbol{U}^3])$$

が成り立つことをいえば十分である．$(x, y) \in \iota^{\times -1}([\boldsymbol{U}])$ ならば $(\mathfrak{N}_X(x), \mathfrak{N}_X(y)) \in [\boldsymbol{U}]$ だから，したがって $\boldsymbol{U}$ 程度に小さい $N \in \mathfrak{N}_X(x) \cap \mathfrak{N}_X(y)$ が存在する．このとき，$(x, y) \in N \times N \subseteq \boldsymbol{U}$ である．よって，$\iota^{\times -1}([\boldsymbol{U}]) \subseteq \boldsymbol{U}$ が成り立つ．また，$(x, y) \in \boldsymbol{U}$ ならば $\boldsymbol{U}[x] \cup \boldsymbol{U}[y]$ は $\boldsymbol{U}^3$ 程度に小さく，x と y 両方の近傍である．したがって $(\mathfrak{N}_X(x), \mathfrak{N}_X(y)) \in [\boldsymbol{U}^3]$，すなわち $(x, y) \in \iota^{\times -1}([\boldsymbol{U}^3])$ である．よって，$\boldsymbol{U} \subseteq \iota^{\times -1}([\boldsymbol{U}^3])$ が成り立つ．これで，X の一様構造が ι の誘導する始一様構造に一致することが示された．

(CMP1)　$\widehat{X}$ が分離であることを示す．そのためには，$\widehat{X}$ 上の近縁すべての交叉が $\Delta(\widehat{X})$ であることをいえばよい（系 13.13）．$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \widehat{X}$ とし，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \in [\boldsymbol{U}]$ が成り立つとする．X の部分集合族

$$\{A \cup B \mid A \in \mathfrak{X},\ B \in \mathfrak{Y}\}$$

は X 上の真フィルタ基となる（命題 1.5 (3) からわかる）．これが生成する真フィルタを $\mathfrak{Z}$ とすると，$\mathfrak{Z}$ は $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ を含むから，仮定より，X 上の任意の近縁 $\boldsymbol{U}$ に対して，$\mathfrak{Z}$ は $\boldsymbol{U}$ 程度に小さい元を含む．すなわち，$\mathfrak{Z}$ は Cauchy である．さて，明らかに $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{X}$ かつ $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Y}$ だが，$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ は極小 Cauchy，$\mathfrak{Z}$ は Cauchy だから，$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}$ が成り立つ．以上より，$\widehat{X}$ 上の近縁すべての交叉は $\Delta(\widehat{X})$ である．

$\widehat{X}$ が完備であることを示す．すでに示した (CMP2), (CMP3) より，$\iota\colon X \to \widehat{X}$ は一様連続でその像 $\iota(X)$ は $\widehat{X}$ において稠密である．そこで，定理 16.27 より，$\widehat{X}$ が完備であることを示すためには，X 上の任意の極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{X}$ に対して $\iota(\mathfrak{X})$ が収束することをいえば十分である．すなわち，X 上の任意の極小 Cauchy フィルタ $\mathfrak{X}$ と近縁 $\boldsymbol{U}$ に対してある $A \in \mathfrak{X}$ が存在し，$\iota(A) \subseteq [\boldsymbol{U}][\mathfrak{X}]$ となることを示せばよい．このことは，次のようにしてわかる．まず，$\mathfrak{X}$ は極小 Cauchy だから，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい開集合 $A \in \mathfrak{X}$ が存在する（系 16.18）．このとき，任意の $x \in A$ に対して $A \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}_X(x)$ だから，$\mathfrak{N}_X(x) \in [\boldsymbol{U}][\mathfrak{X}]$ である．よって，$\iota(A) \subseteq [\boldsymbol{U}][\mathfrak{X}]$ が成り立つ．これで，$\widehat{X}$ が完備であることが示された．□

完備化は，自然な方法で一様空間の圏から完備分離一様空間の圏への関手をなし，完備化の普遍性より，この関手は包含関手の左随伴となる．詳細は省略する．

命題 16.52　X を一様空間とし，$(\widehat{X}, \iota)$ を X の完備化とする．ι を X から $\iota(X)$ への写像とみなしたものを $\iota_0\colon X \to \iota(X)$ と書くと，$(\iota(X), \iota_0)$ は X の分離化である．

この命題は，完備化の存在と一意性（定理 16.50）と定理 16.51 の証明の第 2 段で本質的に示されているが，ここで改めて証明しておく．

証明　完備化 $(\widehat{X},\iota)$ は定理 16.51 の条件 (CMP1)–(CMP3) を満たすから，$(\iota(X),\iota_0)$ は定理 16.41 の条件 (SEP1)–(SEP3) を満たす（(SEP3) については，命題 15.18 に注意せよ）．よって，$(\iota(X),\iota_0)$ は X の分離化である． □

命題 16.53　X を一様空間とし，$(\widehat{X},\iota)$ を X の完備化とする．

(1) ι が一様埋め込みであるための必要十分条件は，X が分離であることである．
(2) ι が一様同型写像であるための必要十分条件は，X が完備分離であることである．

証明　(1)　命題 16.52 より，ι が一様埋め込みであることは，X の分離化 $s\colon X\to X^{\mathrm{s}}$ が一様同型写像であることと同値である．命題 16.42 より，これは，X が分離であることと同値である．

(2)　$\widehat{X}$ は完備分離だから，ι が一様同型写像ならば，X も完備分離である．逆に，X が完備分離ならば，(X,id_X) は明らかに X の完備化だから，完備化の一意性（定理 16.50）より，ι は id_X と同じく一様同型写像である． □

命題 16.54　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．各 $i\in I$ に対して，$(\widehat{Y}_i,\iota_{Y_i})$ を Y_i の完備化とする．写像 $(\iota_{Y_i}\circ\phi_i)_{i\in I}\colon X\to\prod_{i\in I}\widehat{Y}_i$ による X の像の閉包を $\widehat{X}$ とし，$(\iota_{Y_i}\circ\phi_i)_{i\in I}$ を X から $\widehat{X}$ への写像とみなしたものを ι_X と書くと，$(\widehat{X},\iota_X)$ は X の完備化である．

証明　定理 16.51 より，$(\widehat{X},\iota_X)$ が条件 (CMP1)–(CMP3) を満たすことを確かめればよい．$\widehat{X}$ は完備分離一様空間族の積の閉部分一様空間だから，完備分離である（命題 5.19，命題 5.18，命題 16.25，命題 16.24 (1)）．また，定義から明らかに，$\iota_X\colon X\to\widehat{X}$ の像は $\widehat{X}$ において稠密である．最後に，X の一様構造が ι_X の誘導する始一様構造に等しいことを示す．X の一様構造は $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しく，各 $i\in I$ に対して Y_i の一様構造は ι_{Y_i} が誘導する始一様構造に等しいから（定理 16.51），始一様構造の推移性（命題 15.6）より，X の一様構造は $\{\iota_{Y_i}\circ\phi_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．命題 15.19 と命題 15.18 より，これはさらに ι_X が誘導する始一様構造に等しい．これで，条件 (CMP1)–(CMP3) が確かめられた． □

系 16.55　X を一様空間，A を X の部分一様空間とし，$(\widehat{X},\iota)$ を X の完備化とする．$\iota|_A$ を A から $\overline{\iota(A)}$ への写像とみなしたものを ι_A と書くと，$(\overline{\iota(A)},\iota_A)$ は A の完備化である． □

系 16.56　$\{X_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，各 $i\in I$ に対して $(\widehat{X_i},\iota_i)$ を X の完備化とする．このとき，$(\prod_{i\in I}\widehat{X_i},\prod_{i\in I}\iota_i)$ は $\prod_{i\in I}X_i$ の完備化である． □

系 16.57　X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\phi_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造によって X を一様空間とみなす．$(\widehat{X},\iota_X)$ を X の完備化とし，各 $i\in I$ に対して $(\widehat{Y}_i,\iota_{Y_i})$ を Y の完備化とする．また，各 $i\in I$ に対して，一様連続写像 $\iota_{Y_i}\circ\phi_i\colon X\to\widehat{Y}_i$ から完備化の普遍性によって誘導される一様連続写像を $\widehat{\phi}_i\colon\widehat{X}\to\widehat{Y}_i$ と書く．このとき，$\widehat{X}$ の一様構造は，$\{\widehat{\phi}_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．

証明　命題 16.54 より，$\widehat{X}$ は写像 $(\iota_{Y_i}\circ\phi_i)_{i\in I}\colon X\to\prod_{i\in I}\widehat{Y}_i$ による X の像の閉包であり，ι_X は $(\iota_{Y_i}\circ\phi_i)_{i\in I}$ を X から $\widehat{X}$ への写像とみなしたものであるとしてよい．各 $i\in I$ に対して，写像 $\widehat{\phi}_i\colon\widehat{X}\to\widehat{Y}_i$ は $\iota_{Y_i}\circ\phi_i=\widehat{\phi}_i\circ\iota_X$ を満たす唯一の一様連続写像だが，包含写像 $\widehat{X}\to\prod_{i\in I}\widehat{Y}_i$ と i-成分への射影との合成はこの性質をみたすから，$\widehat{\phi}_i$ はこの写像と一致する．これと始一様構造の推移性（命題 15.6）より，$\widehat{X}$ の一様構造は $\{\widehat{\phi}_i\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい． □

命題 16.58　一様空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は全有界である．

(b) X の完備化はコンパクトである．

証明　$(\widehat{X}, \iota)$ を X の完備化とする．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　X が全有界ならば，その一様連続像の閉包 $\widehat{X} = \overline{\iota(X)}$ も全有界である（命題 16.34，命題 16.33 (3)，定理 16.51）．よって，このとき $\widehat{X}$ は完備かつ全有界だから，定理 16.38 よりコンパクトである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\widehat{X}$ がコンパクトならば，$\widehat{X}$ は全有界である（系 16.37）．X の一様構造は $\iota\colon X \to \widehat{X}$ が誘導する始一様構造に等しいから（定理 16.51），命題 16.35 より，このとき X も全有界である．　$\square$

第 17 章

擬距離族と一様構造

17.1　擬距離が定める一様構造

定義 17.1（閉帯，開帯）　X を集合，d を X 上の擬距離とする．$r > 0$ に対して，d に関する幅 r の閉帯・開帯[*1] を，それぞれ

$$\boldsymbol{B}_d(r) = d^{-1}([0, r]) = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \leq r\},$$
$$\boldsymbol{B}_d^\circ(r) = d^{-1}([0, r)) = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < r\}$$

と定める[*2]．擬距離 d を明示せずに，単に $\boldsymbol{B}(r)$, $\boldsymbol{B}^\circ(r)$ と書くこともある．

命題 17.2　X を集合，d を X 上の擬距離とする．d に関する閉帯の全体

$$\mathscr{B}_d = \{\boldsymbol{B}_d(r) \mid r > 0\}$$

は，X 上の一様基である．

証明　命題 13.4 より，次の 4 条件を確かめればよい．

(UB1) 任意の $r_0, \ldots, r_{n-1} > 0$ に対してある $r > 0$ が存在し，$\boldsymbol{B}_d(r) \subseteq \boldsymbol{B}_d(r_0) \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_d(r_{n-1})$ となる．
(UB2) 任意の $r > 0$ に対して，$\Delta(X) \subseteq \boldsymbol{B}_d(r)$ である．
(UB3) 任意の $r > 0$ に対してある $s > 0$ が存在し，$\boldsymbol{B}_d(s)^2 \subseteq \boldsymbol{B}_d(r)$ となる．
(UB4) 任意の $r > 0$ に対してある $s > 0$ が存在し，$\boldsymbol{B}_d(s) \subseteq \boldsymbol{B}_d(r)^{-1}$ となる．

(UB1)　$r_0, \ldots, r_{n-1} > 0$ に対して $r = \min\{r_0, \ldots, r_{n-1}\}$ と置けば，$\boldsymbol{B}_d(r) \subseteq \boldsymbol{B}_d(r_0) \cap \cdots \cap \boldsymbol{B}_d(r_{n-1})$ である．

(UB2)　明らかである．

(UB3)　三角不等式より，任意の $r > 0$ に対して $\boldsymbol{B}_d(r/2)^2 \subseteq \boldsymbol{B}_d(r)$ である．

(UB4)　任意の $r > 0$ に対して $\boldsymbol{B}_d(r)$ が対称であることからわかる．　□

定義 17.3（擬距離が定める一様構造）　X を集合，d を X 上の擬距離とする．X 上の一様構造であって，$\mathscr{B}_d = \{\boldsymbol{B}_d(r) \mid r > 0\}$ を一様基とするもの（命題 17.2 より，このような一様構造は一意に存在する）を，擬距離 d が定める一様構造という．

[*1] 「閉帯」と「開帯」は，本稿だけの用語である．

[*2] $\boldsymbol{B}_d(r)$, $\boldsymbol{B}_d^\circ(r)$ という記号ではあるが，d が定める位相（定義 10.4）に関して，幅 r の閉帯の内部が幅 r の開帯に一致するとは限らない．

X を集合，d を X 上の擬距離とし，d が定める一様構造 $\mathscr{U}_d$ によって X を一様空間とみなす．命題 13.8 より，点 $x \in X$ の近傍基として
$$\mathscr{B}_d[x] = \{B_d(x;r) \mid r > 0\}$$
がとれる．よって，$\mathscr{U}_d$ が定める位相は，d が定める位相 $\mathfrak{O}_d$（定義 10.4）に等しい．

X, Y を集合，d_X, d_Y をそれぞれ X, Y 上の擬距離とする．容易にわかるように，写像 $f\colon X \to Y$ が d_X，d_Y の定める一様構造に関して一様連続であることと，擬距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像として一様連続であること（定義 10.9）とは同値である．

以下，特に断らなくても，擬距離空間 (X, d) は常に d が定める一様構造を備えているものとして扱う．

命題 17.4　X を集合，(Y, d_Y) を擬距離空間，$f\colon X \to Y$ を写像とし，f が誘導する擬距離 d_X によって X を擬距離空間とみなす．このとき，X の一様構造は，f が誘導する X 上の始一様構造に一致する．

証明　X の一様基として
$$\mathscr{B}_d = \{\boldsymbol{B}_{d_X}(r) \mid r > 0\}$$
がとれる．一方で，f が誘導する X 上の始一様構造の一様基として
$$\mathscr{B} = \{f^{\times -1}(\boldsymbol{B}_{d_Y}(r)) \mid r > 0\}$$
がとれる（命題 15.8 (2) がとれる．ところが，$r > 0$ に対して $\boldsymbol{B}_{d_X}(r) = f^{\times -1}(\boldsymbol{B}_{d_Y}(r))$ だから，$\mathscr{B}_d = \mathscr{B}$ である．よって，X の一様構造は f が誘導する X 上の始一様構造に一致する．□

17.2　擬距離族が定める一様構造

定義 17.5（擬距離族が定める位相・一様構造）　X を集合，$\{d_i\}_{i \in I}$ を X 上の擬距離族とする．各 $i \in I$ に対して，集合 X に d_i が定める一様構造を与えて得られる一様空間を X_i と書き，恒等写像 id_X を X から X_i への写像とみなしたものを $\phi_i\colon X \to X_i$ と書くことにする．$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の始一様構造を，**擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造**という．この一様構造が定める X 上の位相を，**擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める位相**という．

上の状況で，擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める位相は，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始位相に等しい（命題 15.4）．擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める位相・一様構造は，各 $i \in I$ に対する「d_i が定める位相・一様構造」の全体の上限である．

命題 17.6　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を集合族とし，各 Y_i を擬距離族 $\{d_{i,j}\}_{j \in J_i}$（J_i は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）が定める一様構造によって一様空間とみなす．$\{\phi_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ を写像族とする．このとき，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の一様構造は，擬距離族 $\{d_{i,j} \circ \phi_i^{\times}\}_{i \in I,\, j \in J_i}$ が定める X 上の一様構造に等しい．

証明　始一様構造の推移性（命題 15.6）より，各 Y_i 上に 1 つの擬距離 d_i が与えられている場合のみを考えれば十分である．d_i が定める一様構造は $\{\boldsymbol{B}_{d_i}(r) \mid r > 0\}$ を一様基とするから，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する始一様構造の準一様基として
$$\mathscr{B}' = \{\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{B}_{d_i}(r)) \mid i \in I,\ r > 0\}$$
がとれる（命題 15.3）．一方で，擬距離族 $\{d_i \circ \phi_i^{\times}\}_{i \in I}$ が定める一様構造の準一様基として
$$\mathscr{B}'' = \{\boldsymbol{B}_{d_i \circ \phi_i^{\times}}(r) \mid i \in I,\ r > 0\}$$
がとれる．ところが，$\phi_i^{\times -1}(\boldsymbol{B}_{d_i}(r)) = \boldsymbol{B}_{d_i \circ \phi_i^{\times}}(r)$ だから，$\mathscr{B}' = \mathscr{B}''$ である．よって，$\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する一様構造は $\{d_{i,j} \circ \phi_i^{\times}\}_{i \in I,\, j \in J_i}$ が定める一様構造に等しい．□

系 17.7 X を集合，$A \subseteq X$ とし，$\{d_i\}_{i \in I}$ を X 上の擬距離族とする．このとき，$\{d_i|_{A \times A}\}_{i \in I}$ が定める A 上の一様構造は，$\{d_i\}_{i \in I}$ が X 上に定める一様構造が誘導する A 上の相対一様構造に等しい． □

命題 17.8 集合 X を，その上の擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造によって一様空間とみなす．

(1) 各 $i \in I$ に対して，関数 $d_i\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は一様連続である．
(2) 各 $i \in I$ と空でない部分集合 $A \subseteq X$ に対して，関数 $d_i(-, A)\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0};\ x \mapsto d_i(x, A)$ は一様連続である．

証明 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造は d_i が定める一様構造よりも細かいから，擬距離が 1 つの場合のみを考えれば十分である．以下，d を集合 X 上の擬距離とし，X を d が定める一様構造によって一様空間とみなす．また，$\mathbb{R}$ 上の自然な距離に関する幅 $r > 0$ の閉帯を，$\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}}(r)$ と書くことにする．

(1) 三角不等式より $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$ だから，$\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}}(r)$ の $d^{\times}$ による逆像は $\{((x, y), (x', y')) \mid (x, x'), (y, y') \in \boldsymbol{B}_d(r/2)\}$ を含む．よって，d は一様連続である．

(2) 擬距離が 1 つの場合は，命題 10.13 (2) ですでに示した． □

命題 17.9 X を集合，$\{d_i\}_{i \in I}$ を X 上の擬距離族とする．

(1) $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める X 上の位相は，関数 d_i がすべて連続となるような X 上の位相のうち最小のものである．
(2) $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める X 上の一様構造は，関数 d_i がすべて一様連続となるような X 上の一様構造のうち最小のものである．

証明 擬距離族が定める位相・一様構造の定義より，擬距離が 1 つの場合のみを考えれば十分である．以下，d を X 上の擬距離とし，X を d が定める一様構造によって一様空間とみなす．

(1) 擬距離が 1 つの場合は，命題 10.17 ですでに示した．

(2) 命題 17.8 (1) より，d が定める一様構造に関して関数 d は一様連続である．逆に，X 上の一様構造 $\mathscr{U}$ に関して d が一様連続であるとする．この一様構造 $\mathscr{U}$ に関する積一様空間 $X \times X$ の標準一様基は，

$$\{((x, y), (z, w)) \mid (x, z) \in \boldsymbol{U},\ (y, w) \in \boldsymbol{V}\} \quad (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathscr{U})$$

という形の集合全体であった．したがって，d の定める一様構造に関して d が一様連続であることより（命題 17.8 (1)），任意の $r > 0$ に対してある $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathscr{U}$ が存在し，任意の $(x, y), (z, w) \in X \times X$ に対して「$(x, z) \in \boldsymbol{U}$ かつ $(y, w) \in \boldsymbol{V}$ ならば $|d(x, y) - d(z, w)| \leq r$」が成り立つ．特に，$(z, w) = (y, y)$ と置けば「$(x, y) \in \boldsymbol{U}$ ならば $d(x, y) \leq r$」，すなわち $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{B}_d(r)$ を得る．これより，$\boldsymbol{B}_d(r) \in \mathscr{U}$ である．よって，$\mathscr{U}$ は d が定める一様構造よりも細かい．以上より，d が定める一様構造は，d が一様連続となるような最小の一様構造である． □

命題 17.10 X を集合，$\{d_i\}_{i \in I}$ を X 上の擬距離族とする．$\{d_i\}_{i \in I}$ が定める X 上の位相は，完全正則である．

証明 完全正則性は始位相に遺伝するから（命題 5.26），擬距離が 1 つの場合のみを考えれば十分である．ところが，1 つの擬距離が定める位相が完全正則であることは，命題 10.21 ですでに示した． □

命題 17.11 X を集合とする．X 上の擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める位相は T_0 である．
(b) $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める位相は分離である．

(c) $\{d_i\}_{i\in I}$ が定める位相は完全正則分離である．

(d) 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対してある $i \in I$ が存在し，$d_i(x, y) > 0$ となる．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)　擬距離の定める位相が正則かつ正規であること（命題 10.21）から従う．

(a) $\Longleftrightarrow$ (d)　命題 5.2 より，2 点 $x, y \in X$ が $\{d_i\}_{i\in I}$ の定める位相に関して識別されるための必要十分条件は，ある $i \in I$ が存在して，x と y が d_i の定める位相に関して識別されることである．さらに，命題 10.20 より，x と y が d_i の定める位相に関して識別されるための必要十分条件は，$d(x, y) > 0$ である．これらから主張が従う．$\square$

17.3　擬距離が定める一様構造の完備性

X を集合，d を X 上の擬距離とし，d が定める一様構造によって X を一様空間とみなす．次の命題は，X が一様空間として完備であることと，擬距離空間 (X, d) が完備であること（定義 11.6）との同値性を示している．

命題 17.12　X を集合，d を X 上の擬距離とし，d が定める一様構造によって X を一様空間とみなす．X が完備であるための必要十分条件は，X 上の任意の Cauchy 列が収束することである．

証明　必要性は明らかだから，十分性を示す．X 上の任意の Cauchy 列が収束するとして，X 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ を任意にとる．$\mathfrak{F}$ は Cauchy だから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，直径 2^{-n} 以下の元 $F_n \in \mathfrak{F}$ がとれる．$\mathfrak{F}$ は有限交叉性をもつから，点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in F_0 \cap \cdots \cap F_n$ を満たすようにとることができる．すると，任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq n_0$ ならば $x_m, x_n \in F_{n_0}$ であり，したがって $d(x_m, x_n) < 2^{-n_0}$ である．よって，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列だから，仮定より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある点 $x \in X$ に収束する．

$\mathfrak{F}$ が x に収束することを示す．任意の $r > 0$ に対して $B_d(x; r) \in \mathfrak{F}$ であることを示せばよい．$n_0 \in \mathbb{N}$ を十分大きくとって，$2^{-n_0} \leq r$ が成り立つようにする．点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のある項から先の点はすべて F_{n_0} に含まれているから，$x \in \overline{F_{n_0}}$ である（命題 6.34）．ここで，$\operatorname{diam}_d(\overline{F_{n_0}}) = \operatorname{diam}_d(F_{n_0}) \leq 2^{-n_0}$ だから（系 10.19），$F_{n_0} \subseteq B_d(x; 2^{-n_0}) \subseteq B_d(x; r)$ が成り立つ．$F_{n_0} \in \mathfrak{F}$ だったから，これより $B_d(x; r) \in \mathfrak{F}$ である．これで示された．$\square$

17.4　擬距離族が定める一様構造の分離化・完備化

命題 17.13　X を集合，$\{d_i\}_{i\in I}$ を X 上の擬距離族とし，$\{d_i\}_{i\in I}$ が定める一様構造によって X を一様空間とみなす．X の分離化を (X^{s}, s) とすると，各 $i \in I$ に対して，$d_i = d_i^{\mathrm{s}} \circ s^{\times}$ を満たす X^{s} 上の擬距離 d_i^{s} が一意に存在する．さらに，このとき，X^{s} の一様構造は $\{d_i^{\mathrm{s}}\}_{i\in I}$ が定める一様構造に一致する．

証明　$(X^{\mathrm{s}} \times X^{\mathrm{s}}, s^{\times})$ は $X \times X$ の分離化であり（系 16.47），各 $d_i\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は一様連続だから（命題 17.8 (1)），分離化の普遍性より，各 $i \in I$ に対して，一様連続写像 $d_i^{\mathrm{s}}\colon X^{\mathrm{s}} \times X^{\mathrm{s}} \to \mathbb{R}$ であって $d_i = d_i^{\mathrm{s}} \circ s^{\times}$ を満たすものが一意に存在する．さらに，s が全射であることより，各 d_i^{s} は X^{s} 上の擬距離である．あとは，X^{s} の一様構造が $\{d_i^{\mathrm{s}}\}_{i\in I}$ の定める一様構造に一致することを示せばよい．

まず，与えられた X 上の擬距離族がただ 1 つの擬距離 d からなる場合を考える．$d = d^{\mathrm{s}} \circ s^{\times}$ を満たす X^{s} 上の唯一の擬距離 d^{s} をとる．$s(x), s(y) \in X^{\mathrm{s}}$（$x, y \in X$）に対して，$d^{\mathrm{s}}(s(x), s(y)) = 0$ ならば $d(x, y) = 0$ だから，x と y は識別されず（命題 10.20），したがって $s(x) = s(y)$ となる（命題 16.43）．よって，d^{s} は X^{s}

上の距離である．距離空間 $(X^{\mathrm{s}}, d^{\mathrm{s}})$ を $X^{\mathrm{s}\prime}$ と書き，$s\colon X \to X^{\mathrm{s}}$ を X から $X^{\mathrm{s}\prime}$ への写像とみなしたものを $s'\colon X \to X^{\mathrm{s}\prime}$ と書く．すると，$X^{\mathrm{s}\prime}$ は分離であり，s は全射である．また，d は $s'\colon X \to X^{\mathrm{s}\prime}$ が誘導する X 上の擬距離だから，X の一様構造は s' が誘導する始一様構造に等しい（命題 17.4）．よって，定理 16.51 より，$(X^{\mathrm{s}\prime}, s')$ も X の分離化である．恒等写像 $\mathrm{id}_{X^{\mathrm{s}}}$ を X^{s} から $X^{\mathrm{s}\prime}$ への写像とみなしたものを $\phi\colon X^{\mathrm{s}} \to X^{\mathrm{s}\prime}$ と書くと，明らかに f は $s' = \phi \circ s$ を満たす唯一の写像だから，分離化の一意性（定理 16.40）より，ϕ は一様同型写像である．これは，X^{s} の一様構造が d^{s} の定める一様構造に一致することを意味する．

次に，一般の場合を考える．各 $i \in I$ に対して，X を d_i が定める一様構造によって一様空間とみなしたものを X_i と書き，恒等写像 id_X を X から X_i への写像とみなしたものを $\phi_i\colon X \to X_i$ と書く．また，各 $i \in I$ に対して，(X_i^{s}, s_i) を X_i の分離化とし，一様連続写像 $s_i \circ \phi_i\colon X \to X_i^{\mathrm{s}}$ から分離化の普遍性によって誘導される一様連続写像を $\phi_i^{\mathrm{s}}\colon X^{\mathrm{s}} \to X_i^{\mathrm{s}}$ と書く．すると，系 16.48 より，X^{s} の一様構造は $\{\phi_i^{\mathrm{s}}\}_{i\in I}$ が誘導する始一様構造に等しい．一方で，前段の結果より，各 $i \in I$ に対して，X_i^{s} の一様構造は「$d_i = d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ s_i^{\times}$ を満たす X_i^{s} 上の唯一の擬距離 $d_i^{\mathrm{s}\prime}$」が定める一様構造に一致する．よって，命題 17.6 より，X^{s} の一様構造は擬距離族 $\{d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ (\phi_i^{\mathrm{s}})^{\times}\}_{i\in I}$ が定める一様構造に等しい．ところが，各 $i \in I$ に対して，X^{s} 上の擬距離 $d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ (\phi_i^{\mathrm{s}})^{\times}$ は

$$\begin{aligned}(d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ (\phi_i^{\mathrm{s}})^{\times}) \circ s^{\times} &= d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ (\phi_i^{\mathrm{s}} \circ s)^{\times} \\ &= d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ (s_i \circ \phi_i)^{\times} \\ &= (d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ s_i^{\times}) \circ \phi_i^{\times} \\ &= d_i\end{aligned}$$

を満たすから，$d_i^{\mathrm{s}\prime} \circ (\phi_i^{\mathrm{s}})^{\times} = d_i^{\mathrm{s}}$ である．以上より，X^{s} の一様構造は，$\{d_i^{\mathrm{s}}\}_{i\in I}$ が定める一様構造に一致する． □

補題 17.14　X を集合，$\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1$ を X 上の一様構造とする．3 条件

(i) $\mathscr{U}_0$ は完備分離である．
(ii) $\mathscr{U}_1$ は $\mathscr{U}_0$ よりも粗い．
(iii) $\mathscr{U}_0$ が定める位相に関して稠密な部分集合 $A \subseteq X$ が存在して，$\mathscr{U}_0$ と $\mathscr{U}_1$ が A 上に誘導する相対一様構造は等しい．

が満たされるならば，$\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}_1$ である．

証明　条件 (i)–(iii) が満たされるとして，(iii) を満たす部分集合 $A \subseteq X$ をとる．X に一様構造 $\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1$ を与えて得られる一様空間をそれぞれ X_0, X_1 と書く．また，$(\widehat{X_1}, \iota)$ を X_1 の完備化とする．恒等写像 id_X を X_0 から X_1 への写像とみなしたものを $f\colon X_0 \to X_1$ と書くと，(ii) より f は一様連続であり，(iii) より f は $A \subseteq X_0$ から $A \subseteq X_1$ への一様同型写像を与える．また，命題 16.52 と系 16.46 より，$\iota|_A$ を A から $\iota(A)$ への写像とみなしたものは A の分離化を与えるが，(i), (iii) より A は分離だから，ι は $A \subseteq X_1$ から $\iota(A) \subseteq \widehat{X_1}$ への一様同型写像を与える．さらに，(ii), (iii) より A は X_0, X_1 において稠密であり，またこれより $\iota(A)$ は $\widehat{X}$ において稠密である（定理 16.51）．以上より，一様連続写像 $\iota \circ f\colon X_0 \to \widehat{X_1}$ は稠密部分一様空間 $A \subseteq X_0$ から稠密部分一様空間 $\iota(A) \subseteq \widehat{X_1}$ への一様同型を与え，(i) と完備化の定義より $X_0, \widehat{X_1}$ はともに完備分離だから，系 16.30 より，$\iota \circ f$ は一様同型写像である．特に，X_0 の一様構造は f が誘導する始一様構造に等しい（命題 15.24）．これは，$\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}_1$ を意味する． □

命題 17.15　X を集合，$\{d_i\}_{i\in I}$ を X 上の擬距離族とし，$\{d_i\}_{i\in I}$ が定める一様構造によって X を一様空間とみなす．X の完備化を $(\widehat{X}, \iota)$ とすると，各 $i \in I$ に対して，$d_i = \widehat{d}_i \circ \iota^{\times}$ を満たす $\widehat{X}$ 上の擬距離 $\widehat{d}_i$ が一意に存在する．さらに，このとき，$\widehat{X}$ の一様構造は $\{\widehat{d}_i\}_{i\in I}$ が定める一様構造に一致する．

証明　$(\widehat{X} \times \widehat{X}, \iota^{\times})$ は $X \times X$ の完備化であり（系 16.56），各 $d_i \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は一様連続だから（命題 17.8 (1)），完備化の普遍性より，各 $i \in I$ に対して，一様連続写像 $\widehat{d}_i \colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$ であって $d_i = \widehat{d}_i \circ \iota^{\times}$ を満たすものが一意に存在する．さらに，$\iota(X)$ が $\widehat{X}$ において稠密であること（定理 16.51）と等式延長の原理（系 5.16），不等式延長の原理（命題 5.17）より，各 $\widehat{d}_i$ は $\widehat{X}$ 上の擬距離である．あとは，$\widehat{X}$ の一様構造が $\{\widehat{d}_i\}_{i \in I}$ の定める一様構造に一致することを示せばよい．

ι を X から $\iota(X)$ への写像とみなしたものを ι_0 と書くと，$(\iota(X), \iota_0)$ は X の分離化である（命題 16.52）．また，各 $i \in I$ に対して，$\widehat{d}_i|_{\iota(X) \times \iota(X)}$ は $\iota(X)$ 上の擬距離であり，$d_i = \widehat{d}_i|_{\iota(X) \times \iota(X)} \circ \iota_0^{\times}$ を満たす．これら 2 つと命題 17.13 より，$\iota(X)$ の一様構造は $\{\widehat{d}_i|_{\iota(X) \times \iota(X)}\}_{i \in I}$ が定める一様構造に一致する．系 17.7 より，これは，$\iota(X)$ の一様構造が「$\{\widehat{d}_i\}_{i \in I}$ の定める一様構造が $\iota(X)$ 上に誘導する相対一様構造」に一致することを意味する．さらに，$\widehat{X}$ は完備分離であり，$\iota(X)$ は $\widehat{X}$ において稠密であり（定理 16.51），$\{\widehat{d}_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造は $\widehat{X}$ の一様構造よりも粗い（命題 17.9 (2)）．よって，補題 17.14 より，$\widehat{X}$ の一様構造は $\{\widehat{d}_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造に一致する．□

17.5　一様空間の距離化定理と一様化定理

17.5.1　ゲージ化補題

定理 17.16（ゲージ化補題）　X を集合とする．$X \times X$ の対称な部分集合の列 $\{\boldsymbol{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{U}_{n+1}^3 \subseteq \boldsymbol{U}_n$ を満たすとする．このとき，X 上の擬距離 d であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\boldsymbol{B}_d(2^{-n-1}) \subseteq \boldsymbol{U}_n \subseteq \boldsymbol{B}_d(2^{-n})$$

を満たすものが存在する．

証明　一般性を失わず，$\boldsymbol{U}_0 = X \times X$ と仮定する．関数 $f \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{-n} & ((x, y) \in \boldsymbol{U}_n \setminus \boldsymbol{U}_{n+1}) \\ 0 & ((x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{U}_n) \end{cases}$$

と定める．これを用いて，関数 $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$d(x, y) = \inf\left\{ \sum_{0 \leq i < p} f(z_i, z_{i+1}) \;\middle|\; x = z_0, \ldots, z_{p-1}, z_p = y \text{ は } X \text{ 上の有限点列（} p \in \mathbb{N} \text{ は任意）} \right\}$$

と定める．定義から明らかに，d は X 上の擬距離である．この擬距離 d が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{B}_d(2^{-n-1}) \subseteq \boldsymbol{U}_n \subseteq \boldsymbol{B}_d(2^{-n})$ を満たすことを示すためには，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\frac{1}{2} f(x, y) \leq d(x, y) \leq f(x, y)$$

が成り立つことをいえばよい．右側の不等式は明らかである．左側の不等式を示すためには，X 上の任意の有限点列 $x = z_0, \ldots, z_{p-1}, z_p = y$ に対して

$$\sum_{0 \leq i < p} f(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} f(x, y)$$

を示せばよい．

帰納法で示す．$p = 0$ のときは $x = y$ であり，不等式は明らかである．次に，$p \geq 1$ 未満に対して不等式が成り立つと仮定して，p のときを示す．$A = \sum_{0 \leq i < p} f(z_i, z_{i+1})$ と置く．$A = 0$ のとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ と

$i \in \{0, \dots, p-1\}$ に対して $(z_i, z_{i+1}) \in \boldsymbol{U}_n$ だから，$(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{U}_n$ であり，$f(x, y) = 0$ となるため，不等式は成り立つ．$A \geq 1$ のとき，不等式は自明である．以下，$0 < A \leq 1$ とする．$\sum_{0 \leq i < q} f(z_i, z_{i+1}) \leq A/2$ を満たす最大の $q \in \{0, \dots, p-1\}$ をとると，

$$\sum_{0 \leq i < q} f(z_i, z_{i+1}) \leq \frac{A}{2} \quad \text{かつ} \quad \sum_{q+1 \leq i < p} f(z_i, z_{i+1}) \leq \frac{A}{2}$$

だから，帰納法の仮定より $f(x, z_q) \leq A$ かつ $f(z_{q+1}, y) \leq A$ となる．また，明らかに $f(z_q, z_{q+1}) \leq A$ である．したがって，$2^{-n} \leq A$ を満たす最小の $n \in \mathbb{N}$ をとれば，f の定義より $(x, z_q), (z_q, z_{q+1}), (z_{q+1}, y) \in \boldsymbol{U}_n$ が成り立つ．このとき $(x, y) \in \boldsymbol{U}_n^3 \subseteq \boldsymbol{U}_{n-1}$ となるから（$A \leq 1$ より $n \geq 1$ であることに注意せよ），$f(x, y) \leq 2^{-n+1} \leq 2A$ を得る．これで p のときが示され，帰納法が完成した． □

17.5.2　一様空間の距離化定理

定義 17.17（擬距離化可能な一様空間）　X を一様空間とする．集合 X 上の擬距離 d が定める一様構造が X の一様構造と一致するとき，d は X の一様構造と**整合する**という．X の一様構造と整合する擬距離【距離】が存在するとき，X は**擬距離化可能**【**距離化可能**】であるという．

定理 17.18（一様空間の距離化定理）　一様空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は一様空間として擬距離化可能【距離化可能】である．
(b) X の一様構造は可算一様基をもつ【分離であり，かつ可算一様基をもつ】.

証明　一様空間として距離化可能であることは一様空間として擬距離化可能かつ分離であることと同値だから（命題 17.11），擬距離化可能性についてのみ示せばよい．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　擬距離 d が定める一様構造が可算一様基 $\{\boldsymbol{B}_d(r) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ をもつことから従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X が可算一様基 $\{\boldsymbol{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をもつとする．対称近縁の 3 項合成全体が一様基をなすことより（命題 13.5），X 上の対称近縁の列 $\{\boldsymbol{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{V}_{n+1}^3 \subseteq \boldsymbol{V}_n$ かつ $\boldsymbol{V}_n \subseteq \boldsymbol{U}_n$ を満たすものがとれる．このとき，$\{\boldsymbol{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ も X の一様基である．ここで，ゲージ化補題（定理 17.16）より，X 上の擬距離 d であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{B}_d(2^{-n-1}) \subseteq \boldsymbol{V}_n \subseteq \boldsymbol{B}_d(2^{-n})$ を満たすものがとれる．この擬距離 d は，X の一様構造と整合する． □

系 17.19　集合 X 上の可算な擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造は，擬距離化可能である．さらに，任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対してある $i \in I$ が存在して $d_i(x, y) \neq 0$ となるならば，この一様構造は距離化可能である．

証明　可算な擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造は可算準一様基 $\{\boldsymbol{B}_{d_i}(r) \mid i \in I,\ r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ をもち，したがって可算一様基をもつから，一様空間の擬距離化定理（定理 17.18）より擬距離化可能である．後半の主張は，前半の結果と命題 17.11 から従う． □

系 17.20　擬距離化可能【距離化可能】な一様空間の可算族の積は，擬距離化可能【距離化可能】である．

証明　距離化可能であることは擬距離化可能かつ分離であることと同値であり（命題 17.11），分離性が積に遺伝することはすでに示したから（命題 5.19），擬距離化可能性についてのみ示せばよい．

$\{X_i\}_{i \in I}$ を擬距離化可能な一様空間の可算族とし，各 $i \in I$ に対して，X_i の一様構造と整合する擬距離 d_i をとる．命題 17.6 より，$\prod_{i \in I} X_i$ の積一様構造は，擬距離の可算族 $\{d_i \circ \mathrm{pr}_i^{\times}\}_{i \in I}$ が定める一様構造に等しい．系 17.19 より，これは擬距離化可能である． □

17.5.3　一様化定理

定義 17.21（一様化可能空間）　X を位相空間とする．集合 X 上の一様構造 $\mathscr{U}$ が定める位相が X の位相と一致するとき，$\mathscr{U}$ は X の位相と**整合する**という．X の位相と整合する一様構造が存在するとき，X は**一様化可能**であるという．より強く，X の位相と整合する一様構造が一意に存在するとき，X は**一意に一様化可能**であるという．

定理 17.22　任意の一様空間に対して，その一様構造を定める擬距離の族が存在する．

証明　X を一様空間とし，その一様構造を $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{U}_i\}_{i \in I}$ とする．対称近縁の 3 項合成全体が一様基をなすことより（命題 13.5），各 $i \in I$ に対して，X 上の対称近縁の列 $\{\boldsymbol{V}_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{V}_{i,0} \subseteq \boldsymbol{U}_i$ かつ $\boldsymbol{V}_{i,n+1}^3 \subseteq \boldsymbol{V}_{i,n}$ を満たすものがとれる．ここで，ゲージ化補題（定理 17.16）より，各 $i \in I$ に対して，X 上の擬距離 d_i であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{B}_{d_i}(2^{-n-1}) \subseteq \boldsymbol{V}_{i,n} \subseteq \boldsymbol{B}_{d_i}(2^{-n})$ を満たすものがとれる．この擬距離族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が定める一様構造は，X の一様構造に一致する．□

定理 17.23（一様化定理）　位相空間 X に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) X の位相と整合する全有界な一様構造が存在する．
(b) X は一様化可能である．
(c) X の位相を定めるような擬距離族が存在する．
(d) X は完全正則である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　定理 17.22 から従う．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　命題 17.10 から従う．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　X が完全正則であるとする．このとき，X の位相は，X から $[0,1]$ への連続写像の全体が誘導する始位相 $\mathfrak{O}$ に一致する（命題 5.25）．X から $[0,1]$ への連続写像の全体が誘導する始一様構造を $\mathscr{U}$ とすると，$\mathscr{U}$ が定める位相は $\mathfrak{O}$ に一致する（命題 15.4）．さらに，$[0,1]$ はコンパクト，したがって全有界だから（系 16.37），全有界性が始一様構造に遺伝することより（命題 16.35），$\mathscr{U}$ は全有界である．よって，X の位相と整合する全有界な一様構造が存在する．□

系 17.24　任意の一様空間は完全正則である．□

定理 17.25　コンパクト擬分離空間は，一意に一様化可能である．

証明　コンパクト空間がたかだか一意に一様化可能であること（定理 13.21），コンパクト擬分離空間が完全正則であること（系 7.10），および完全正則空間が一様化可能であること（定理 17.23）から従う．□

第 18 章

写像空間

記号と用語

この「記号と用語」では，特に断らない限り，X, Y は集合とする．

- X から Y への写像全体がなす集合を $\mathscr{F}(X;Y)$ と書く．また，X, Y が位相空間であるとき，X から Y への連続写像全体がなす集合を $\mathscr{C}(X;Y)$ と書く．
- $H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．部分集合 $A \subseteq X$ に対して，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(A;Y)$; $u \mapsto u|_A$ による H の像を $H|_A$ と書く．点 $x \in X$ に対して，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to Y$; $u \mapsto u(x)$ による H の像を $H(x)$ と書く．集合 X', Y' と写像 $f\colon X' \to X$，$g\colon Y \to Y'$ に対して，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(X';Y)$; $u \mapsto u \circ f$ による H の像を $H \circ f$，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(X;Y')$; $u \mapsto g \circ u$ による H の像を $g \circ H$，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(X';Y')$; $u \mapsto g \circ u \circ f$ による H の像を $g \circ H \circ f$ と書く．
- $\mathfrak{F}$ を $\mathscr{F}(X;Y)$ 上のフィルタとする．部分集合 $A \subseteq X$ に対して，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(A;Y)$; $u \mapsto u|_A$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタを $\mathfrak{F}|_A$ と書く[*1]．点 $x \in X$ に対して，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to Y$; $u \mapsto u(x)$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタを $\mathfrak{F}(x)$ と書く．集合 X', Y' と写像 $f\colon X' \to X$，$g\colon Y \to Y'$ に対して，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(X';Y)$; $u \mapsto u \circ f$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタを $\mathfrak{F} \circ f$，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(X;Y')$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタを $g \circ \mathfrak{F}$，写像 $\mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}(X';Y')$; $u \mapsto g \circ u \circ f$ による $\mathfrak{F}$ の像フィルタを $g \circ \mathfrak{F} \circ f$ と書く．

18.1　一様収束の一様構造

X を集合，Y を一様空間，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．$A \subseteq X$ と $\boldsymbol{V} \subseteq Y \times Y$ に対して，

$$\mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{V}) = \{(u,v) \in H \times H \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } (u(x), v(x)) \in \boldsymbol{V}\}$$

と定める．$H = \mathscr{F}(X;Y)$ のとき，$\mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{V})$ を単に $\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V})$ と書く．

Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対する $\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V})$ の全体

$$\{\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V}) \mid \boldsymbol{V} \text{ は } Y \text{ 上の近縁}\}$$

が H 上の一様基であることを確かめる．命題 13.4 より，そのためには，次の 4 条件を示せばよい．

(UB1) Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}_0, \dots, \boldsymbol{V}_{n-1}$ に対して Y 上のある近縁 $\boldsymbol{V}$ が存在し，$\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V}) \subseteq \mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V}_0) \cap \dots \cap \mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V}_{n-1})$ となる．

[*1] 部分集合族の制限を表す記号と衝突するが，混同の危険はないと思われる．

(UB2) Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して，$\varDelta(H) \subseteq \mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V})$ である．
(UB3) Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して Y 上のある近縁 $\boldsymbol{W}$ が存在し，$\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{W})^2 \subseteq \mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V})$ となる．
(UB4) Y 上の任意の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して Y 上のある近縁 $\boldsymbol{W}$ が存在し，$\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{W}) \subseteq \mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V})^{-1}$ となる．

(UB2) は明らかである．(UB1), (UB4) では，それぞれ $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 \cap \cdots \cap \boldsymbol{V}_{n-1}$，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}^{-1}$ と置けばよい．(UB3) では，$\boldsymbol{W}^2 \subseteq \boldsymbol{V}$ となる Y 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ をとればよい．これで示された．

これを踏まえて，次のように定義する．

定義 18.1（一様収束の位相・一様構造） X を集合，Y を一様空間，$H \subseteq \mathscr{F}(X; Y)$ とする．

$$\{\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V}) \mid \boldsymbol{V} \text{ は } Y \text{ 上の近縁}\}$$

を一様基をする H 上の一様構造を，H の**一様収束の一様構造**という．この一様構造が定める H 上の位相を，H の**一様収束の位相**という．$\mathscr{F}(X; Y)$ に一様収束の一様構造を与えて得られる一様空間を，$\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X; Y)$ と書く．

H 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が一様収束の位相に関して $u \in H$ に収束することを，$\mathfrak{F}$ が u に**一様収束**するという．

命題 15.8 (1) と始位相と始一様構造の整合性（命題 15.4）より，H の一様収束の位相・一様構造は，$\mathscr{F}(X; Y)$ の一様収束の位相・一様構造が誘導する相対位相・相対一様構造に等しい．

X が一点集合 $\{x\}$ の場合，$\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(\{x\}; Y)$ は自然な全単射 $u \mapsto u(x)$ によって Y に一様同型である．

命題 18.2 X を集合，Y を一様空間，$H \subseteq \mathscr{F}(X; Y)$ とする．$\mathscr{B}$ が Y の準一様基【一様基】ならば，

$$\{\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$$

は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X; Y)$ の準一様基【一様基】である．

証明 Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して $\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{V})$ を対応させる操作が，包含と有限交叉を保つことから従う． □

18.2 $\mathfrak{S}$-収束の一様構造

定義 18.3（$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造） X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族，$H \subseteq \mathscr{F}(X; Y)$ とする．$A \in \mathfrak{S}$ に対する写像

$$H \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(A; Y); \quad u \mapsto u|_A$$

の全体が誘導する H 上の始一様構造を，H の **$\mathfrak{S}$-収束の一様構造**という．この一様構造が定める H 上の位相を，H の **$\mathfrak{S}$-収束の位相**という．$\mathscr{F}(X; Y)$ に $\mathfrak{S}$-収束の一様構造を与えて得られる一様空間を，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ と書く．

H 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が $\mathfrak{S}$-収束の位相に関して $u \in H$ に収束することを，$\mathfrak{F}$ が u に **$\mathfrak{S}$-収束**するという．

始位相と始一様構造の整合性（命題 15.4）より，H の $\mathfrak{S}$-収束の位相は，$A \in \mathfrak{S}$ に対する写像

$$H \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(A; Y); \quad u \mapsto u|_A$$

の全体が誘導する H 上の始位相である．また，始位相・始一様構造の推移性（命題 3.6 (1)，命題 15.6）より，H の $\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造は，$\mathscr{F}(X; Y)$ の $\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造が誘導する相対位相・相対一様構造に等しい．

X の部分集合族 $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ について，$\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ ならば，$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造は $\mathfrak{T}$-収束の位相・一様構造よりも粗い．また，$\mathfrak{S}$ が生成する X 上のイデアルを $\mathfrak{I}$ とすると，$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造は $\mathfrak{I}$-収束の位相・一様

構造よりに等しい．これを示しておく．$\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ だから，$\mathfrak{S}$-収束の一様構造は $\mathfrak{T}$-収束の一様構造よりも粗い．一方で，$B \in \mathfrak{T}$ と Y 上の近縁 $\mathfrak{V}$ を任意にとると，有限個の $A_i \in \mathfrak{S}$（$0 \leq i < n$）を $B \subseteq \bigcup_{0 \leq i < n} A_i$ となるようにとれ，このとき $\bigcap_{0 \leq i < n} \mathsf{W}(A_i, \boldsymbol{V}) \subseteq \mathsf{W}(B, \boldsymbol{V})$ である．よって，$\mathfrak{T}$-収束の一様構造は $\mathfrak{S}$-収束の一様構造よりも粗い．これで示された．

定義 18.4（一様収束，単純収束，コンパクト一様収束，全有界一様収束の位相・一様構造）　X を集合，Y を一様空間とする．

(1) $A \subseteq X$，$\mathfrak{S} = \{A\}$ であるとき，$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造を A **上一様収束の位相・一様構造**といい，$\mathscr{F}(X;Y)$ に A 上一様収束の一様構造を与えて得られる一様空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{u},A}(X;Y)$ と書く[*2]．
(2) $A \subseteq X$，$\mathfrak{S} = \{\{x\} \mid x \in A\}$ であるとき，$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造を A **上単純収束の位相・一様構造**といい，$\mathscr{F}(X;Y)$ に A 上単純収束の一様構造を与えて得られる一様空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X;Y)$ と書く．X 上単純収束の位相・一様構造を単に**単純収束の位相・一様構造**といい，$\mathscr{F}_{\mathrm{s},X}(X;Y)$ を単に $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ と書く．
(3) X が位相空間であり，$\mathfrak{S}$ が X のコンパクト集合全体であるとき，$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造を**コンパクト一様収束の位相・一様構造**といい，$\mathscr{F}(X;Y)$ にコンパクト一様収束の一様構造を与えて得られる一様空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X;Y)$ と書く．
(4) X が一様空間であり，$\mathfrak{S}$ が X の全有界集合全体であるとき，$\mathfrak{S}$-収束の位相・一様構造を**全有界一様収束の位相・一様構造**といい，$\mathscr{F}(X;Y)$ に全有界一様収束の一様構造を与えて得られる一様空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X;Y)$ と書く．

$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$，$A \subseteq X$ とする．H 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が A 上一様収束・A 上単純収束・コンパクト一様収束・全有界一様収束の位相に関して $u \in H$ に収束することを，$\mathfrak{F}$ が u に A **上一様収束**[*3]・A **上単純収束**（$A = X$ のときは単に**単純収束**）・**コンパクト一様収束**・**全有界一様収束**するという．

H の A 上単純収束の一様構造は $x \in A$ に対する写像 $H \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(\{x\};Y);\ u \mapsto u|_{\{x\}}$ の全体が誘導する始一様構造だが，$\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(\{x\};Y)$ は自然な全単射 $u \mapsto u(x)$ によって Y に一様同型だから，H の A 上単純収束の一様構造は $x \in A$ に対する写像 $H \to Y;\ u \mapsto u(x)$ の全体が誘導する始一様構造ともいえる．特に，$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ は積一様空間 Y^X と同一視できる．

命題 18.5　X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．

(1) $\mathscr{B}$ が Y の準一様基ならば，
$$\{\mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{B}) \mid A \in \mathfrak{S},\ \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$$
は H の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造の準一様基である．
(2) $\mathscr{B}$ が Y の一様基ならば，
$$\{\mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{B}) \mid A \text{ は } \mathfrak{S} \text{ の元の有限合併},\ \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$$
は H の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造の一様基である．

証明　(1)　$\mathscr{B}$ を Y の準一様基とする．H の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造は $A \in \mathfrak{S}$ に対する写像 $H \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(A;Y);\ u \mapsto u|_A$ の全体が誘導する始一様構造であり，各 $A \in \mathfrak{S}$ に対して $\{\mathsf{W}_{\mathscr{F}(A;Y)}(A, \boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(A;Y)$ の準一様基だから（命題 18.2），命題 15.3 (1) から主張を得る．

[*2] X 上一様収束の位相・一様構造はすでに定義した一様収束の位相・一様構造（定義 18.1）そのものであり，$\mathscr{F}_{\mathrm{u},X}(X;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ に一致する．
[*3] $A = X$ のときは，すでに定義した一様収束（定義 18.1）そのものである．

(2)　$\mathscr{B}$ を Y の一様基とする．(1) より，$n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathfrak{S}$, $\boldsymbol{B}_i \in \mathscr{B}$ $(0 \leq i < n)$ に対する $\bigcap_{0 \leq i < n} \mathsf{W}_H(A_i, \boldsymbol{B}_i)$ の全体は H の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造の一様基をなす．$\mathscr{B}$ は一様基だから，$\boldsymbol{B}_i \in \mathscr{B}$ $(0 \leq i < n)$ に対してある $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ が存在して $\boldsymbol{B} \subseteq \bigcap_{0 \leq i < n} \boldsymbol{B}_i$ となり，このとき $\mathsf{W}_H(\bigcup_{0 \leq i < n} A_i, \boldsymbol{B}) \subseteq \bigcap_{0 \leq i < n} \mathsf{W}_H(A_i, \boldsymbol{B}_i)$ である．よって，$\mathfrak{S}$ の元の有限合併 A と $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対する $\mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{B})$ の全体は，H の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造の一様基をなす． □

命題 18.6　X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．任意の $x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ に対して，写像 $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y) \to Y;\ u \mapsto u(x)$ は一様連続である．

証明　$x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ を任意にとる．$\{x\}$ は $\mathfrak{S}$ が生成する X 上のイデアルに含まれるから，写像 $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y) \to Y;\ u \mapsto u(x)$ は一様連続である． □

命題 18.7　X, X' を集合，Y, Y' を一様空間，$\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ をそれぞれ X, X' の部分集合族とする．写像 $f\colon X' \to X$ が条件「任意の $A' \in \mathfrak{S}'$ に対して $f(A')$ は $\mathfrak{S}$ が生成するイデアルに含まれる」を満たし，写像 $g\colon Y \to Y'$ が一様連続ならば，写像

$$\omega\colon \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y) \to \mathscr{F}_{\mathfrak{S}'}(X'; Y'); \quad u \mapsto g \circ u \circ f$$

は一様連続である．

証明　$\mathfrak{S}$ が X 上のイデアルであるとしても一般性を失わない．f と g が条件を満たすとする．$A' \in \mathfrak{S}'$ と Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}'$ に対して，$\omega^{\times -1}(\mathsf{W}(A', \boldsymbol{V}')) = \mathsf{W}(f(A'), g^{\times -1}(\boldsymbol{V}'))$ であり，$f(A') \in \mathfrak{S}'$ かつ $g^{\times -1}(\boldsymbol{V}')$ は Y 上の近縁だから，ω は一様連続である． □

系 18.8　X, X' を集合，Y を一様空間，$f\colon X' \to X$ を写像とし，f を右から合成する写像 $\omega\colon \mathscr{F}(X; Y) \to \mathscr{F}(X'; Y);\ u \mapsto u \circ f$ を考える．

(1) ω は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X; Y)$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X'; Y)$ への写像として連続である．
(2) ω は $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y)$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X'; Y)$ への写像として連続である．
(3) X, X' が位相空間であり f が連続ならば，ω は $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X; Y)$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X'; Y)$ への写像として連続である．
(4) X, X' が一様空間であり f が一様連続ならば，ω は $\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X; Y)$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X'; Y)$ への写像として連続である．

証明　命題 18.7 から従う（(3) については命題 7.5 を，(4) については命題 16.34 を用いる）． □

命題 18.9　X, Y を集合とする．$\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族，$\{\phi_i\colon X_i \to X\}_{i \in I}$ を写像族，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{S}_i$ を X_i の部分集合族とし，$\mathfrak{S} = \{\phi_i(A) \mid i \in I,\ A \in \mathfrak{S}_i\}$ と置く．また，$\{Y_j\}_{j \in J}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\psi_j\colon Y \to Y_j\}_{j \in J}$ が誘導する始一様構造によって Y を一様空間とみなす．このとき，$\mathscr{F}(X; Y)$ の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造は，$i \in I$ と $j \in J$ に対する写像

$$\omega_{i,j}\colon \mathscr{F}(X; Y) \to \mathscr{F}_{\mathfrak{S}_i}(X_i; Y_j); \quad u \mapsto \psi_j \circ u \circ \phi_i$$

の全体が誘導する始一様構造に等しい．

証明　Y の標準準一様基は $\{\psi_j^{\times -1}(\boldsymbol{V}) \mid j \in J,\ \boldsymbol{V}$ は Y_j 上の近縁$\}$ だから，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ の一様構造の準一様基として

$$\{\mathsf{W}(\phi_i(A), \psi_j^{\times -1}(\boldsymbol{V})) \mid i \in I,\ j \in J,\ A \in \mathfrak{S}_i,\ \boldsymbol{V} \text{ は } Y_j \text{ 上の近縁}\} \tag{$*$}$$

がとれる（命題 18.5 (2)）．一方で，各 $i \in I$ と $j \in J$ に対して $\{\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V}) \mid A \in \mathfrak{S}_i,\ \boldsymbol{V}$ は Y_j 上の近縁$\}$ は $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}_i}(X_i; Y_j)$ の準一様基だから（命題 18.5 (2)），$\{\omega_{i,j}\}_{i \in I,\, j \in J}$ が誘導する $\mathscr{F}(X; Y)$ 上の始一様構造の準一

様基として

$$\{\omega_{i,j}^{\times -1}(\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V})) \mid i \in I,\ j \in J,\ A \in \mathfrak{S}_i,\ \boldsymbol{V} \text{ は } Y_j \text{ 上の近縁}\} \tag{$**$}$$

がとれる（命題 15.3 (1)）．ところが

$$\omega_{i,j}^{\times -1}(\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V})) = \mathsf{W}(\phi_i(A), \psi_j^{\times -1}(\boldsymbol{V}))$$

だから，($*$) と ($**$) とは等しい．よって，$\mathfrak{S}$-収束の一様構造は $\{\omega_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J}$ が誘導する始一様構造に等しい． □

系 18.10 X を集合，Y を一様空間，Y' を Y の部分一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\mathscr{F}(X; Y')$ の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造は，$\mathscr{F}(X; Y)$ の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造が誘導する相対一様構造に等しい． □

系 18.11 X を集合，$\{Y_j\}_{j\in J}$ を一様空間族，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．自然な全単射

$$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}\left(X; \prod_{j\in J} Y_j\right) \to \prod_{j\in J} \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y_j)$$

は一様同型写像である． □

命題 18.12 X, Y を集合，Z を一様空間，$\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ をそれぞれ X, Y の部分集合族とし，$\mathfrak{S} \times \mathfrak{T} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{S},\ T \in \mathfrak{T}\}$ と置く．自然な全単射

$$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}}(X \times Y; Z) \to \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; \mathscr{F}_{\mathfrak{T}}(Y; Z))$$

は一様同型写像である．

証明 命題 18.2 より，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}}(X\times Y; Z)$ の準一様基としては $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$, Z 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ に対する $\mathsf{W}(A\times B, \boldsymbol{W})$ の全体がとれ，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; \mathscr{F}_{\mathfrak{T}}(Y; Z))$ の準一様基としては同じ A, B, $\boldsymbol{W}$ に対する $\mathsf{W}(A, \mathsf{W}(B, \boldsymbol{W}))$ の全体がとれる．$\mathsf{W}(A\times B, \boldsymbol{W})$ と $\mathsf{W}(A, \mathsf{W}(B, \boldsymbol{W}))$ とは自然な全単射 $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}}(X \times Y; Z) \to \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; \mathscr{F}_{\mathfrak{T}}(Y; Z))$ によって対応するから，自然な全単射は一様同型写像である． □

命題 18.13 X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\mathfrak{S}$ が X を被覆し，かつ Y が分離ならば，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ は分離である．

証明 仮定が成り立つとして，異なる 2 点 u, $v \in \mathscr{F}(X; Y)$ を任意にとる．$\mathfrak{S}$ が X を被覆することより，ある $A \in \mathfrak{S}$ と $x \in X$ が存在して $u(x) \neq u(y)$ となる．いま Y は分離だから，$(u(x), v(x))$ を含まない Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ がとれる（系 13.13）．このとき，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ 上の近縁 $\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V})$ は (u, v) を含まない．よって，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ は分離である（系 13.13）． □

定理 18.14 X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\mathscr{F}(X; Y)$ 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ と点 $u \in \mathscr{F}(X; Y)$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は u に $\mathfrak{S}$-収束する．
(b) 任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して，$\mathfrak{F}|_A$ は $u|_A$ に一様収束する．
(c) $\mathfrak{F}$ は $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ 上の Cauchy フィルタであり，かつ $\mathfrak{F}$ は u に $\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ 上単純収束する．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) 命題 6.8 から従う．

(a) $\Longrightarrow$ (c) 収束する真フィルタが Cauchy であることと（命題 16.6），$\mathfrak{S}$-収束の位相が $\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ における単純収束の位相よりも細かいことの結果である．

(c) $\Longrightarrow$ (a) $B = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ と置く．$\mathfrak{S}$-収束の一様構造は B 上単純収束の一様構造よりも細かいから，命題 16.14 より，$\mathfrak{S}$-収束の一様構造の一様基として $\mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(X;Y) \times \mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(X;Y)$ の閉集合からなるものがとれることを示せばよい．各点 $x \in B$ に対して，連続写像 $\mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(X;Y) \to Y;\ u \mapsto u(x)$ を θ_x と書く．$A \in \mathfrak{S}$ と Y 上の閉近縁 $\boldsymbol{V}$ に対する $\mathsf{W}(S, \boldsymbol{V})$ の全体は $\mathfrak{S}$-収束の一様構造の一様基であり（命題 13.10 (2)，命題 18.5），その各元 $\mathsf{W}(S, \boldsymbol{V})$ は

$$\mathsf{W}(S, \boldsymbol{V}) = \bigcap_{x \in B} \theta_x^{\times -1}(\boldsymbol{V})$$

と書けるから，$\mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(X;Y) \times \mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(X;Y)$ の閉集合である．これで，主張は示された． □

系 18.15 X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．H が $\mathfrak{S}$-収束の一様構造に関して完備であるための必要十分条件は，H 上の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造に関する任意の Cauchy フィルタが H のある点に $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ 上単純収束することである．

証明 系 6.9 (1) と定理 18.14 から従う． □

系 18.16 X を集合，Y を一様空間，$\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$ を X の部分集合族，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とし，$\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}_1$ かつ $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}_0} A = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}_1} A$ であるとする．このとき，H が $\mathfrak{S}_0$-収束の一様構造に関して完備ならば，H は $\mathfrak{S}_1$-収束の一様構造に関しても完備である．

証明 $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}_1$ より $\mathfrak{S}_1$-収束の一様構造は $\mathfrak{S}_0$-収束の一様構造よりも細かいから，$\mathfrak{S}_1$-収束の一様構造に関する H 上の Cauchy フィルタは $\mathfrak{S}_0$-収束の一様構造に関しても Cauchy である．よって，系 18.15 より，H が $\mathfrak{S}_0$-収束の一様構造に関して完備ならば，H は $\mathfrak{S}_1$-収束の一様構造に関しても完備である． □

系 18.17 X を集合，Y を完備一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とすると，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ は完備である．

証明 $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ 上の Cauchy フィルタ $\mathfrak{F}$ を任意にとる．任意の $x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ に対して，写像 $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y) \to Y;\ u \mapsto u(x)$ は一様連続だから（命題 18.6），$\mathfrak{F}(x)$ は Y 上の Cauchy フィルタである（命題 16.7）．いま Y は完備だから，$\mathfrak{F}(x)$ は収束する．よって，系 18.15 より，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ は完備である． □

18.3 連続写像の空間

定義 18.18（連続写像の空間） X を位相空間，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．X から Y への連続写像全体のなす集合 $\mathscr{C}(X;Y)$ に $\mathfrak{S}$-収束の一様構造を与えて得られる一様空間を，$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ と書く．また，$A \subseteq X$ として，$\mathscr{C}(X;Y)$ に A 上一様収束，A 上単純収束，コンパクト一様収束の一様構造を与えて得られる一様空間を，それぞれ $\mathscr{C}_{\mathrm{u},A}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{s},A}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X;Y)$ と書く．$\mathscr{C}_{\mathrm{u},X}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{s},X}(X;Y)$ をそれぞれ単に $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ と書く．さらに，X が一様空間であるとき，$\mathscr{C}(X;Y)$ に全有界一様収束の一様構造を与えて得られる一様空間を，$\mathscr{C}_{\mathrm{pc}}(X;Y)$ と書く．

命題 18.19 X を位相空間，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\mathscr{C}(X;Y)$ の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造と $\overline{\mathfrak{S}}$-収束の一様構造とは等しい．

証明 閉近縁の全体は一様基をなすから（命題 13.10 (2)），命題 18.5 (1) より，$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ の準一様基としては $A \in \mathfrak{S}$ と Y 上の閉近縁 $\boldsymbol{V}$ に対する $\mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(A, \boldsymbol{V})$ の全体がとれ，$\mathscr{C}_{\overline{\mathfrak{S}}}(X;Y)$ の準一様基としては同じ A と $\boldsymbol{V}$ に対する $\mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(\overline{A}, \boldsymbol{V})$ の全体がとれる．この A と $\boldsymbol{V}$ に対して $\mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(A, \boldsymbol{V}) = \mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(\overline{A}, \boldsymbol{V})$ だから，$\mathscr{C}(X;Y)$ の $\mathfrak{S}$-収束の一様構造と $\overline{\mathfrak{S}}$-収束の一様構造とは等しい． □

命題 18.20　X を位相空間，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ が X において稠密であり，かつ Y が分離ならば，$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ は分離である．

証明　仮定が成り立つとして，異なる 2 点 u, $v \in \mathscr{C}(X;Y)$ を任意にとる．$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ が X において稠密であることと等式延長原理（系 5.16）より，ある $A \in \mathfrak{S}$ と $x \in A$ が存在して $u(x) \neq v(x)$ となる．いま Y は分離だから，$(u(x), v(x))$ を含まない Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ がとれる（系 13.13）．このとき，$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ 上の近縁 $\mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(A, \boldsymbol{V})$ は (u, v) を含まない．よって，$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ は分離である（系 13.13）．□

命題 18.21　X を位相空間，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\mathfrak{S}$ の元の内部全体が X を被覆するならば，写像

$$\theta\colon \mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y) \times X \to Y; \quad (u, x) \mapsto u(x)$$

は連続である．

証明　$\mathfrak{S}$ の元の内部全体が X を被覆するとする．$u_0 \in \mathscr{C}(X;Y)$，$x_0 \in X$，Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．仮定より，x_0 を内点にもつ $A \in \mathfrak{S}$ がとれる．$\mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(A, \boldsymbol{V})$ は $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ 上の近縁だから，

$$\mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(A, \boldsymbol{V})[u_0] = \{u \in \mathscr{C}(X;Y) \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } (u_0(x), u(x)) \in \boldsymbol{V}\}$$

は u_0 の $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ における近傍である．また，u_0 は連続だから，x_0 の近傍 U を，任意の $x \in U$ に対して $(u_0(x_0), u_0(x)) \in \boldsymbol{V}$ となるようにとれる．すると，任意の $u \in \mathsf{W}_{\mathscr{C}(X;Y)}(A, \boldsymbol{V})[u_0]$ と $x \in A \cap U$ に対して，$(u_0(x_0), u_0(x))$, $(u_0(x), u(x)) \in \boldsymbol{V}$ より $(u_0(x_0), u(x)) \in \boldsymbol{V}^2$ である．よって，θ は連続である．□

定理 18.22　X を位相空間，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とする．$\mathfrak{S}$ のある元の内点 x_0 に対して，x_0 において連続な X から Y への写像全体のなす集合は，$\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ の閉集合である．

証明　x_0 を $A \in \mathfrak{S}$ の内点とし，x_0 において連続な X から Y への写像全体のなす集合を $H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ と書く．H の $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ における閉包を $\overline{H}$ と書き，$u_0 \in \overline{H}$ とする．Y 上の対称近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V})$ は $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ 上の近縁だから，

$$\mathsf{W}(A, \boldsymbol{V})[u_0] = \{u \in \mathscr{F}(X;Y) \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } (u_0(x), u(x)) \in \boldsymbol{V}\}$$

は u_0 の $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ における近傍である．これと $u_0 \in \overline{H}$ より，$u \in H \cap \mathsf{W}(X, \boldsymbol{V})[u_0]$ がとれる．u は x_0 において連続だから，x_0 の近傍 U を，任意の $x \in U$ に対して $(u(x_0), u(x)) \in \boldsymbol{V}$ となるようにとれる．すると，任意の $x \in A \cap U$ に対して，$(u_0(x_0), u(x_0))$, $(u(x_0), u(x))$, $(u(x), u_0(x)) \in \boldsymbol{V}$ より $(u_0(x_0), u_0(x)) \in \boldsymbol{V}^3$ である．よって，u_0 は x_0 において連続である．これで，H が $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ の閉集合であることが示された．□

系 18.23　X を位相空間，Y を一様空間，$\mathfrak{S}$ を X の部分集合族とし，条件「写像 $f\colon X \to Y$ について，任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $f|_A$ が連続ならば，f は連続である」が満たされるとする．このとき，$\mathscr{C}(X;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ の閉集合である．さらに，Y が完備ならば，$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ は完備である．

証明　$A \in \mathfrak{S}$ に対して，一様連続写像 $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y) \mapsto \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(A;Y)$; $u \mapsto u|_A$ を ρ_A と書く．仮定より，$\mathscr{C}(X;Y) = \bigcap_{A\in\mathfrak{S}} \rho_A^{-1}(\mathscr{C}(A;Y))$ である．また，$A \in \mathfrak{S}$ に対して，$\mathscr{C}(A;Y)$ は $x \in A$ に対する「x において連続な X から Y への写像全体のなす集合」の全体の交叉だから，定理 18.22 より $\mathscr{C}(A;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(A;Y)$ の閉集合である．よって，$\mathscr{C}(X;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ の閉集合である．Y が完備ならば $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ も完備であり（系 18.17），したがってその閉部分一様空間 $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X;Y)$ も完備である（命題 16.24 (1)）．□

X を位相空間とする．X が**コンパクト生成**であるとは，その位相が「コンパクト部分空間 $K \subseteq X$ に対する包含写像 $K \to X$ の全体が誘導する X 上の終位相」と等しいことをいう．終位相の特徴付け（命題 3.5 (2)）

より，X がコンパクト生成であるための必要十分条件は，任意の位相空間 Y と写像 $f\colon X \to Y$ に対して，「任意のコンパクト部分空間 $K \subseteq X$ に対して $f|_K\colon K \to Y$ が連続ならば，f は連続である」ことである．明らかに，局所コンパクト空間はコンパクト生成である．また，命題 6.37 より，第一可算空間はコンパクト生成である[*4]．

系 18.24 X をコンパクト生成な位相空間，Y を一様空間とする．$\mathscr{C}(X;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X;Y)$ の閉集合である．さらに，Y が完備ならば，$\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X;Y)$ は完備である．

証明 系 18.23 からただちに従う． □

18.4 等連続集合

18.4.1 等連続集合

定義 18.25（等連続性，一様等連続性） X を位相空間，Y を一様空間，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X から Y への写像の族とする．$x \in X$ に対して写像 $\Lambda \to Y;\ \lambda \mapsto u_\lambda(x)$ を対応させる写像を，$\widetilde{u}\colon X \to \mathscr{F}(\Lambda;Y)$ と書く．

(1) $x_0 \in X$ とする．$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が x_0 において**等連続**であるとは，$\widetilde{u}\colon X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(\Lambda;Y)$ が x_0 において連続であることをいう．

(2) X が一様空間であるとする．このとき，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**一様等連続**であるとは，$\widetilde{u}\colon X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(\Lambda;Y)$ が一様連続であることをいう．

$\mathscr{B}$ を Y の準一様基とすると，$\{\mathsf{W}(\Lambda,\boldsymbol{B}) \mid \boldsymbol{B} \in \mathscr{B}\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(\Lambda;Y)$ の準一様基である（命題 18.2）．よってこのとき，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が x_0 において等連続であるための必要十分条件は「任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対して x_0 のある近傍 U が存在し，任意の $\lambda \in \Lambda$ と $x \in U$ に対して $(u_\lambda(x_0), u_\lambda(x)) \in \boldsymbol{B}$ となる」ことであり，さらに X が一様空間ならば，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が一様等連続であるための必要十分条件は「任意の $\boldsymbol{B} \in \mathscr{B}$ に対して $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} u^{\times -1}(\boldsymbol{B})$ が X 上の近縁である」ことである．

上記のいい換えからわかるように，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の等連続性・一様等連続性は $\mathscr{F}(X;Y)$ の部分集合 $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ のみによって定まり，添字の付け方によらない．そこで，以下では $\mathscr{F}(X;Y)$ の部分集合 H に対しても等連続性・一様等連続性を考える．

命題 18.26 X, X' を位相空間，Y, Y' を一様空間，$f\colon X' \to X$ を写像，$g\colon Y \to Y'$ を一様連続写像，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．

(1) $x'_0 \in X'$ とし，f が x'_0 において連続であるとする．このとき，H が $f(x'_0)$ において等連続ならば，$g \circ H \circ f \subseteq \mathscr{F}(X';Y')$ は x'_0 において等連続である．

(2) X, X' が一様空間であり，f が一様連続であるとする．このとき，H が一様等連続ならば，$g \circ H \circ f \subseteq \mathscr{F}(X';Y')$ も一様等連続である．

証明 命題 18.7 より，写像 $\omega\colon \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y) \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y');\ u \mapsto g \circ u$ が一様連続であることに注意する．

(1) H が $f(x'_0)$ において等連続ならば，写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y);\ x \mapsto (u \mapsto u(x))$ は $f(x'_0)$ において連続だから，これに右から f を，左から ω を合成して得られる写像 $X' \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y');\ x \mapsto (u \mapsto (g \circ u \circ f)(x))$ は x'_0 において連続である．よって，$g \circ H \circ f$ は x'_0 において等連続である．

(2) H が一様等連続ならば，写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y);\ x \mapsto (u \mapsto u(x))$ は一様連続だから，これに右から f

[*4] 同様に，命題 A.11 (1) より，列型空間（定義 A.6）はコンパクト生成である．

を，左から ω を合成して得られる写像 $X' \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y');\ x \mapsto (u \mapsto (g \circ u \circ f)(x))$ は一様連続である．よって，$g \circ H \circ f$ は一様等連続である． □

命題 18.27　X を位相空間，Y を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を一様空間族とし，写像族 $\{\psi_j \colon Y \to Y_j\}_{j \in J}$ が誘導する始一様構造によって Y を一様空間とみなす．また，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．

(1) H が $x_0 \in X$ において等連続であるための必要十分条件は，任意の $j \in J$ に対して $\psi_j \circ H \subseteq \mathscr{F}(X;Y_j)$ が x_0 において等連続であることである．

(2) $\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間族，$\{\phi_i \colon X_i \to X\}_{i \in I}$ を写像族とし，X の位相は $\{\phi_i\}_{i \in I}$ が誘導する終位相に等しいとする．このとき，H が等連続であるための必要十分条件は，任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して $\psi_j \circ H \circ \phi_i \subseteq \mathscr{F}(X_i;Y_j)$ が等連続であることである．

(3) X が一様空間であるとする．このとき，H が一様等連続であるための必要十分条件は，任意の $j \in J$ に対して $\psi_j \circ H \subseteq \mathscr{F}(X;Y_j)$ が一様等連続であることである．

証明　命題 18.9 より，$\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y)$ の一様構造は，$j \in J$ に対する「$\psi_j \colon Y \to Y_j$ を右から合成する写像 $\mathscr{F}(H;Y) \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y_j)$」の全体が誘導する始一様構造に等しい．

(1)　H が x_0 において等連続であるとは，写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y);\ x \mapsto (u \mapsto u(x))$ が x_0 において連続であることだが，命題 3.4 と始位相・終位相の特徴付け（命題 1.17）より，これは任意の $j \in J$ に対して写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y_j);\ x \mapsto (u \mapsto (\psi_j \circ u)(x))$ が連続であること，すなわち任意の $j \in J$ に対して $\psi_j \circ H$ が等連続であることと同値である．

(2)　H が等連続であるとは，写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y);\ x \mapsto (u \mapsto u(x))$ が連続であることだが，始位相・終位相の特徴付け（命題 3.5）より，これは任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して写像 $X_i \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y_j);\ x \mapsto (u \mapsto (\psi_j \circ u \circ \phi_i)(x))$ が連続であること，すなわち任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して $\psi_j \circ H \circ \phi_i$ が等連続であることと同値である．

(3)　H が一様等連続であるとは，写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y);\ x \mapsto (u \mapsto u(x))$ が一様連続であることだが，始一様構造の特徴付け（命題 15.5）より，これは任意の $j \in J$ に対して写像 $X \to \mathscr{F}_{\mathrm{u}}(H;Y);\ x \mapsto (u \mapsto (\psi_j \circ u)(x))$ が一様連続であること，すなわち任意の $j \in J$ に対して $\psi_j \circ H$ が一様等連続であることと同値である． □

命題 18.28　X をコンパクト一様空間，Y を一様空間とする．任意の等連続集合 $H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ は一様等連続である．

証明　コンパクト一様空間から一様空間への連続写像が常に一様連続であること（系 13.23）から従う． □

命題 18.29　X, Y を位相空間，Z を一様空間，$f \colon X \times Y \to Z$ を写像とする．

(1) 任意の $x \in X$ に対して $f(x,-) \colon Y \to Z$ が連続であり，かつ $\{f(-,y) \mid y \in Y\} \subseteq \mathscr{F}(X;Z)$ が等連続ならば，f は連続である．

(2) X, Y が一様空間であるとする．このとき，f が一様連続であるための必要十分条件は，$\{f(x,-) \mid x \in X\} \subseteq \mathscr{F}(Y;Z)$ および $\{f(-,y) \mid y \in Y\} \subseteq \mathscr{F}(X;Z)$ が一様等連続であることである．

証明　(1)　写像 $X \to \mathscr{F}(Y;Z);\ x \mapsto f(x,-)$ を $\widetilde{f}$ と書く．任意の $x \in X$ に対して $f(x,-) \colon Y \to Z$ が連続ならば，$\widetilde{f}$ は X から $\mathscr{C}(Y;Z)$ への写像を定める．さらに，H が等連続ならば，この写像 $\widetilde{f}$ は X から $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(Y;Z)$ への写像として連続である．また，命題 18.21 より，写像 $\theta \colon \mathscr{C}_{\mathrm{u}}(Y;Z) \times Y \to Z;\ (v,y) \mapsto v(y)$ は連続である．f は $\widetilde{f} \times \mathrm{id}_Y \colon X \times Y \to \mathscr{C}_{\mathrm{u}}(Y;Z) \times Y$ と $\theta \colon \mathscr{C}_{\mathrm{u}}(Y;Z) \times Y \to Z$ との合成に等しいから，このとき f は連続である．

(2)　f が一様連続であるとして，Z 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ を任意にとる．すると，X, Y それぞれの上の近縁 $\boldsymbol{U}$,

$\boldsymbol{V}$ が存在して，任意の $(x,x')\in\boldsymbol{U}$ と $(y,y')\in\boldsymbol{V}$ に対して $(f(x,y),f(x',y'))\in\boldsymbol{W}$ が成り立つ．特に，任意の $(x,x')\in\boldsymbol{U}$ と $y\in Y$ に対して $(f(x,y),f(x',y))\in\boldsymbol{W}$ であり，任意の $x\in X$ と $(y,y')\in\boldsymbol{V}$ に対して $(f(x,y),f(x,y'))\in\boldsymbol{W}$ である．よって，$\{f(x,-)\mid x\in X\}$ および $\{f(-,y)\mid y\in Y\}$ は一様等連続である．

逆に，$\{f(x,-)\mid x\in X\}$ および $\{f(-,y)\mid y\in Y\}$ が一様等連続であるとして，Z 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ を任意にとる．すると，X 上の近縁 $\boldsymbol{U}$ が存在して，任意の $(x,x')\in\boldsymbol{U}$ と $y\in Y$ に対して $(f(x,y),f(x',y))\in\boldsymbol{W}$ であり，任意の $x\in X$ と $(y,y')\in\boldsymbol{V}$ に対して $(f(x,y),f(x,y'))\in\boldsymbol{W}$ である．$(x,x')\in\boldsymbol{U}$，$(y,y')\in\boldsymbol{V}$ とすると，$(f(x,y),f(x',y))$, $(f(x',y),f(x',y'))\in\boldsymbol{W}$ だから，$(f(x,y),f(x',y'))\in\boldsymbol{W}^2$ である．よって，f は一様等連続である．□

系 18.30　X を位相空間，Y を一様空間，$H\subseteq\mathscr{F}(X;Y)$ とする．写像

$$\theta\colon H\times X\to Y;\quad (u,x)\mapsto u(x)$$

を考える．

(1) H が等連続ならば，H に単純収束の位相を与えるとき，θ は連続である．
(2) X が一様空間であるとする．このとき，H に一様収束の一様構造を与えるときに θ が一様連続であるための必要十分条件は，H が一様等連続であることである．

証明　(1)　H に単純収束の位相を与えると，任意の $x\in X$ に対して $\theta(-,x)\colon H\to Y;\ u\mapsto u(x)$ は連続である．よって，命題 18.29 (1) より，$H=\{\theta(u,-)\mid u\in H\}$ が等連続ならば θ は連続である．

(2)　H に一様収束の一様構造を与える．$\{\theta(-,x)\mid x\in X\}\subseteq\mathscr{F}(H;Y)$ が一様等連続であるとは，包含写像 $H\to\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ が一様連続であるということだが，これは常に成り立つ．よって，命題 18.29 (2) より，θ が一様連続であるための必要十分条件は，$H=\{\theta(u,-)\mid u\in H\}$ が一様等連続であることである．□

命題 18.31　X を位相空間，Y を集合，$H\subseteq\mathscr{F}(X;Y)$ とし，H の $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ における閉包を $\overline{H}$ と書く．

(1) $x_0\in X$ とする．H が x_0 において等連続ならば，$\overline{H}$ も x_0 において等連続である．
(2) X が一様空間であるとする．このとき，H が一様等連続ならば，$\overline{H}$ も一様等連続である．

証明　(1)　H が x_0 において等連続であるとする．$\boldsymbol{V}$ を Y 上の対称近縁とすると，x_0 の近傍 U であって，任意の $x\in U$ と $u\in H$ に対して $(u(x_0),u(x))\in\boldsymbol{V}$ であるものがとれる．このとき，任意の $x\in U$ と $v\in\overline{H}$ に対して $(v(x_0),v(x))\in\boldsymbol{V}^3$ であることを示す．$\mathsf{W}(\{x_0,x\},\boldsymbol{V})[v]$ は $v\in\overline{H}$ の $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ における近傍だから，$u\in\mathsf{W}(\{x_0,x\},\boldsymbol{V})[v]\cap H$ がとれる．この u について $(v(x_0),u(x_0))$, $(u(x_0),u(x))$, $(u(x),v(x))\in\boldsymbol{V}$ だから，$(v(x_0),v(x))\in\boldsymbol{V}^3$ である．よって，$\overline{H}$ は x_0 において等連続である．

(2)　H が一様等連続であるとする．Y 上の対称近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して，

$$\bigcap_{u\in H}u^{\times-1}(\boldsymbol{V})\subseteq\bigcap_{v\in\overline{H}}v^{\times-1}(\boldsymbol{V}^3)$$

であることを示す．$(x,x')\in\bigcap_{u\in H}u^{\times-1}(\boldsymbol{V})$，$v\in\overline{H}$ を任意にとる．$\mathsf{W}(\{x,x'\},\boldsymbol{V})[v]$ は v の $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ における近傍だから，$u\in\mathsf{W}(\{x,x'\},\boldsymbol{V})[v]\cap H$ がとれる．この u について $(v(x),u(x))$，$(u(x),u(x'))$，$(u(x'),v(x'))\in\boldsymbol{V}$ だから，$(v(x),v(x'))\in\boldsymbol{V}^3$ である．よって，$(x,x')\in\bigcap_{v\in\overline{H}}v^{\times-1}(\boldsymbol{V}^3)$ である．よって，$\overline{H}$ は一様等連続である．□

18.4.2　Ascoli–Arzelà の定理

定理 18.32　X を位相空間，Y を一様空間，$D\subseteq X$ を稠密集合，$H\subseteq\mathscr{F}(X;Y)$ とする．

(1) H が等連続であるとする．このとき，H のコンパクト一様収束の一様構造，単純収束の一様構造，D 上単純収束の一様構造はすべて一致する．

(2) X が一様空間であり，H が一様等連続であるとする．このとき，H の全有界一様収束の一様構造，単純収束の一様構造，D 上単純収束の一様構造はすべて一致する．

証明 それぞれ，H の D 上単純収束の一様構造がコンパクト一様収束・全有界一様収束の一様構造よりも細かいことを示せばよい．すなわち，任意のコンパクト集合・全有界集合 $A \subseteq X$ と Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ に対して，有限集合 $F \subseteq D$ と Y 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ が存在して

$$\mathsf{W}_H(F, \boldsymbol{W}) \subseteq \mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{V}) \tag{$*$}$$

が成り立つことを示せばよい（命題 18.5 (2)）．

(1) コンパクト集合 $A \subseteq X$ と Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\boldsymbol{W}$ を Y 上の近縁とすると，H の等連続性より，空でない開集合 $U \subseteq X$ であって条件「任意の $u \in H$ と任意の x, $x' \in U$ に対して $(u(x), u(x')) \in \boldsymbol{W}$ である」を満たすものの全体は X を被覆する．A はコンパクトだから，このような空でない開集合からなる A の有限開被覆 $\{U_0, \dots, U_{n-1}\}$ がとれる．D は X において稠密だから，各 i に対して $a_i \in D \cap U_i$ がとれる．これを用いて，$F = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ と置く．このとき，

$$\mathsf{W}_H(F, \boldsymbol{W}) \subseteq \mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{W}^3) \tag{$**$}$$

が成り立つことを示す．$(u, v) \in \mathsf{W}_H(F, \boldsymbol{W})$ を任意にとる．$x \in A$ に対して，x を含む U_i をとると，$(u(x), u(a_i))$, $(u(a_i), v(a_i))$, $(v(a_i), v(x)) \in \boldsymbol{W}$ だから，$(u(x), v(x)) \in \boldsymbol{W}^3$ である．よって，($**$) が成り立つ．そこで，Y 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{W}^3 \subseteq \boldsymbol{V}$ となるようにとっておけば，($*$) が成り立つ．これで，主張は示された．

(2) 全有界集合 $A \subseteq X$ と Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\boldsymbol{W}$ を Y 上の近縁とすると，H の等連続性より，$\boldsymbol{U} = \bigcap_{u \in H} u^{\times -1}(\boldsymbol{W})$ は X 上の近縁である．A は全有界だから，$\boldsymbol{U}$ 程度に小さい空でない開集合からなる A の有限開被覆 $\{U_0, \dots, U_{n-1}\}$ がとれる（命題 16.36）．D は X において稠密だから，各 i に対して $a_i \in D \cap U_i$ がとれる．これを用いて，$F = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ と置く．このとき，

$$\mathsf{W}_H(F, \boldsymbol{W}) \subseteq \mathsf{W}_H(A, \boldsymbol{W}^3) \tag{$***$}$$

が成り立つことを示す．$(u, v) \in \mathsf{W}_H(F, \boldsymbol{W})$ を任意にとる．$x \in A$ に対して，x を含む U_i をとると，$(u(x), u(a_i))$, $(u(a_i), v(a_i))$, $(v(a_i), v(x)) \in \boldsymbol{W}$ だから，$(u(x), v(x)) \in \boldsymbol{W}^3$ である．よって，($***$) が成り立つ．そこで，Y 上の近縁 $\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{W}^3 \subseteq \boldsymbol{V}$ となるようにとっておけば，($*$) が成り立つ．これで，主張は示された． □

系 18.33 X を位相空間【一様空間】，Y を一様空間，$H \subseteq \mathscr{C}(X; Y)$ を等連続集合【一様等連続集合】とする．このとき，H の $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y)$ における閉包と $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X; Y)$【$\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X; Y)$】における閉包とは一致し，これらは $\mathscr{C}(X; Y)$ に含まれる．

証明 H の $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y)$ における閉包を $\overline{H}$ と書く．コンパクト一様収束の位相【全有界一様収束の位相】は単純収束の位相よりも細かいから，H の $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X; Y)$【$\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X; Y)$】における閉包は $\overline{H}$ に含まれる．一方で，命題 18.31 より $\overline{H}$ は等連続【一様等連続】だから，定理 18.32 より $\overline{H}$ のコンパクト一様収束の位相【全有界一様収束の位相】と単純収束の位相とは一致する．したがって，$\overline{H}$ のコンパクト一様収束の位相【全有界一様収束の位相】に関する H の閉包は $\overline{H}$ に等しい．これは，H の $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X; Y)$【$\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X; Y)$】における閉包が $\overline{H}$ を含むことを意味する．以上より，H の $\mathscr{F}_{\mathrm{c}}(X; Y)$【$\mathscr{F}_{\mathrm{pc}}(X; Y)$】における閉包は $\overline{H}$ に等しい．すでに述べたように $\overline{H}$ は等連続【一様等連続】だから，特に $\mathscr{C}(X; Y)$ に含まれる． □

定理 18.34（Ascoli–Arzelà の定理）　X を位相空間【一様空間】, Y を一様空間, $\mathfrak{S}$ を X の被覆, $H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とし，任意の $u \in H$ と $A \in \mathfrak{S}$ に対して $u|_A$ は連続【一様連続】であるとする．このとき，次の 3 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) が成り立つ．さらに，$\mathfrak{S}$ の各元がコンパクト【全有界】ならば，3 条件は同値である．

(a) H は $\mathfrak{S}$-収束の一様構造に関して全有界である．
(b) 任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $H|_A \subseteq \mathscr{F}(A;Y)$ は等連続【一様等連続】であり，かつ H は単純収束の一様構造に関して全有界である．
(c) 任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $H|_A \subseteq \mathscr{F}(A;Y)$ は等連続【一様等連続】であり，かつ任意の $x \in X$ に対して $H(x) \subseteq Y$ は全有界である．

証明　命題 16.35 より，(b) $\Longleftrightarrow$ (c) であり，(a) は任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $H|_A$ が一様収束の一様構造に関して全有界であることと同値である．また，$\mathfrak{S}$ が X の被覆であること，命題 18.9 および命題 16.35 より，H は単純収束の一様構造に関して全有界であることは，任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $H|_A$ が単純収束の一様構造に関して全有界であることと同値である．したがって，あとは次のことを示せばよい：

X を位相空間【一様空間】，Y を一様空間，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とし，H の各元は連続【一様連続】であるとする．このとき，次の 2 条件について，(a′) $\Longrightarrow$ (b′) が成り立つ．さらに，X がコンパクト【全有界】ならば，2 条件は同値である．

(a′) H は一様収束の一様構造に関して全有界である．
(b′) H は等連続【一様等連続】かつ単純収束の一様構造に関して全有界である．

以下，これを証明する．

(a′) $\Longrightarrow$ (b′)　H が一様収束の一様構造に関して全有界であるとする．単純収束の一様構造は収束の一様構造よりも粗いから H は単純収束の一様構造に関しても全有界である．H が等連続【一様等連続】であることを示す．

X が位相空間で H の各元が連続である場合に，H が等連続であることを示す．点 $x_0 \in X$ と Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\mathsf{W}(X, \boldsymbol{V})$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ 上の近縁であり，H は一様収束の一様構造に関して全有界だから，$\mathsf{W}(X, \boldsymbol{V})$ 程度に小さい空でない集合からなる H の有限被覆 $\{H_0, \ldots, H_{n-1}\}$ がとれる．各 i に対して $u_i \in H_i$ を 1 つずつとる．各 u_i は連続だから，x_0 の近傍 U を，任意の i と $x \in U$ に対して $(u_i(x_0), u_i(x)) \in \boldsymbol{V}$ となるようにとれる．このとき，任意の $u \in H$ と $x \in U$ に対して

$$(u(x_0), u(x)) \in \boldsymbol{V}^3 \tag{$*$}$$

が成り立つことを示す．$u \in H$ と $x \in U$ を任意にとる．u を含む H_i をとると，$(u(x_0), u_i(x_0))$, $(u_i(x_0), u_i(x))$, $(u_i(x), u(x)) \in \boldsymbol{V}$ だから，$(u(x_0), u(x)) \in \boldsymbol{V}^3$ である．これで，($*$) が示された．よって，H は等連続である．

X が一様等連続で H の各元が一様連続である場合に，H が一様等連続であることを示す．Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\mathsf{W}(X, \boldsymbol{V})$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ 上の近縁であり，H は一様収束の一様構造に関して全有界だから，$\mathsf{W}(X, \boldsymbol{V})$ 程度に小さい空でない集合からなる H の有限被覆 $\{H_0, \ldots, H_{n-1}\}$ がとれる．各 i に対して $u_i \in H_i$ を 1 つずつとる．各 u_i は一様連続だから，$\boldsymbol{U} = \bigcap_{0 \leq i < n} u_i^{\times -1}(\boldsymbol{V})$ は X 上の近縁である．このとき，任意の $u \in H$ に対して

$$\boldsymbol{U} \subseteq u^{\times -1}(\boldsymbol{V}^3) \tag{$**$}$$

が成り立つことを示す．$u \in H$ と $(x, x') \in \boldsymbol{U}$ を任意にとる．u を含む H_i をとると，$(u(x), u_i(x))$, $(u_i(x), u_i(x'))$, $(u_i(x'), u(x')) \in \boldsymbol{V}$ だから，$(u(x), u(x')) \in \boldsymbol{V}^3$ である．これで，($**$) が示された．よって，H は一様等連続である．

(b′) $\Longrightarrow$ (a′)（X がコンパクト【全有界】である場合）　H が等連続【一様等連続】かつ単純収束の一様構造に関して全有界であるとする．X がコンパクト【全有界】であることと定理 18.32 より，H の一様収束の一様構造と単純収束の一様構造とは一致するから，H は一様収束の一様構造に関しても全有界である．　□

系 18.35　X をコンパクト生成空間，Y を一様空間とする．$H \subseteq \mathscr{C}(X;Y)$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(1) H はコンパクト一様収束の一様構造に関して全有界である．
(2) H は等連続であり，かつ単純収束の一様構造に関して全有界である．
(3) H は等連続であり，かつ任意の $x \in X$ に対して $H(x) \subseteq Y$ は全有界である．

証明　X はコンパクト生成だから，その位相は「コンパクト部分空間 $K \subseteq X$ に対する包含写像 $K \to X$ の全体が誘導する X 上の終位相」と等しい．したがって，命題 18.27 (2) より，H が等連続であることと任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対して $H|_K$ が等連続であることとは同値である．よって，主張は Ascoli–Arzelà の定理（定理 18.34）から従う．　□

18.5　位相空間への写像がなす空間

18.5.1　単純収束の位相

定義 18.36（単純収束の位相）　X を集合，Y を位相空間，$A \subseteq X$，$H \subseteq \mathscr{F}(X;Y)$ とする．$x \in A$ に対する写像

$$H \to Y; \quad u \mapsto u(x)$$

の全体が誘導する H 上の始位相を，H の A 上**単純収束の位相**という．$\mathscr{F}(X;Y)$, $\mathscr{C}(X;Y)$ に A 上単純収束の位相を与えて得られる位相空間を，それぞれ $\mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{s},A}(X;Y)$ と書く．X 上単純収束の位相を単に**単純収束の位相**といい，$\mathscr{F}_{\mathrm{s},X}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{s},X}(X;Y)$ をそれぞれ単に $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$, $\mathscr{C}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ と書く．

H 上の真フィルタ $\mathfrak{F}$ が A 上単純収束の位相に関して $u \in H$ に収束することを，$\mathfrak{F}$ が u に A **上単純収束**（$A = X$ のときは単に**単純収束**）するという．

$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ は積空間 Y^X と同一視できる．Y が一様空間の場合には，定義 18.4 と定義 18.36 の「A 上単純収束の位相」は一致する．

命題 18.37　X, X' を集合，Y, Y' を位相空間，A, A' をそれぞれ X, X' の部分集合とする．写像 $f\colon X' \to X$ が $f(A') \subseteq A$ を満たし，写像 $g\colon Y \to Y'$ が連続ならば，写像

$$\omega\colon \mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X;Y) \to \mathscr{F}_{\mathrm{s},A'}(X';Y'); \quad u \mapsto g \circ u \circ f$$

は連続である．特に，写像 $f\colon X' \to X$ と連続写像 $g\colon Y \to Y'$ に対して，上記の ω は $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X;Y)$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X';Y')$ への写像として連続である．

証明　始位相の特徴付け（命題 3.5 (1)）より，任意の $x' \in A'$ に対して写像

$$\omega_{x'}\colon \mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X;Y) \to Y'; \quad u \mapsto g(u(f(x')))$$

が連続であることを示せばよい．$\omega_{x'}$ は写像 $\mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X;Y) \to Y$; $u \mapsto u(f(x'))$ と写像 $g\colon Y \to Y'$ との合成で書ける．$f(x') \in f(A') \subseteq A$ より前者は連続であり，仮定より後者は連続だから，$\omega_{x'}$ は連続である．これで，主張は示された．　□

命題 18.38　X, Y を集合とする．$\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族, $\{\phi_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$ を写像族, 各 $i \in I$ に対して $A_i \subseteq X_i$ とし，$A = \bigcup_{i\in I} \phi_i(A_i)$ と置く．また，$\{Y_j\}_{j\in J}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\psi_j\colon Y \to Y_j\}_{j\in J}$ が誘導する始位相によって Y を位相空間とみなす．このとき，$\mathscr{F}(X; Y)$ の A 上単純収束の位相は，$i \in I$ と $j \in J$ に対する写像

$$\omega_{i,j}\colon \mathscr{F}(X;Y) \to \mathscr{F}_{\mathrm{s},A_i}(X_i;Y_j); \quad f \mapsto \psi_j \circ f \circ \phi_i$$

の全体が誘導する始位相に等しい．

証明　始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\mathscr{F}(X; Y)$ の A 上単純収束の位相は，$x \in A$ と $j \in Y$ に対する写像 $\mathscr{F}(X; Y) \to Y_i$; $u \mapsto \psi_j(u(x))$ の全体が誘導する始位相に等しい．一方で，始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\{\omega_{i,j}\}_{i\in I,\, j\in J}$ が誘導する始位相は，$i \in I$，$j \in J$，$x' \in X_i$ に対する写像 $\mathscr{F}(X; Y) \to Y_i$; $u \mapsto \omega_{i,j}(u)(x') = \psi_j(u(\phi_i(x')))$ の全体が誘導する始位相に等しい．いま $A = \bigcup_{i\in I} \phi_i(A_i)$ だから，これら 2 つの位相は一致する． □

系 18.39　X を集合，Y を位相空間，Y' を Y の部分空間，$A \subseteq X$ とする．$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y')$ の A 上単純収束の位相は，$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y)$ の A 上単純収束の位相が誘導する相対位相に等しい． □

系 18.40　X を集合，$\{Y_j\}_{j\in J}$ を位相空間族，$A \subseteq X$ とする．自然な全単射

$$\mathscr{F}_{\mathrm{s},A}\left(X; \prod_{j\in J} Y_j\right) \to \prod_{j\in J} \mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X; Y_j)$$

は同相写像である． □

系 18.41　X, Y を集合，Z を位相空間，A, B をそれぞれ X, Y の部分集合とする．自然な全単射

$$\mathscr{F}_{\mathrm{s},A\times B}(X \times Y; Z) \to \mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X; \mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(Y; Z))$$

は同相写像である．

証明　$\mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(Y; Z)$ の位相は $y \in B$ に対する写像 $\mathscr{F}(Y; Z) \to Z$; $v \mapsto v(y)$ の全体が誘導する始位相だから，命題 18.38 より，$\mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X; \mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(Y; Z))$ の位相は $y \in B$ に対する写像 $\mathscr{F}(X; \mathscr{F}(Y; Z)) \to \mathscr{F}_A(X; Z)$; $u \mapsto u(-)(y)$ の全体が誘導する始位相である．さらに，始位相の推移性（命題 3.6 (1)）より，$\mathscr{F}(X; \mathscr{F}(Y; Z))$ の位相は $x \in A$ と $y \in B$ に対する写像 $\mathscr{F}(X; \mathscr{F}(Y; Z)) \to Z$; $u \mapsto u(x)(y)$ の全体が誘導する始位相である．自然な全単射を通して，この写像は $\mathscr{F}(X \times Y; Z) \to Z$; $u \mapsto u(x, y)$ に対応する．$\mathscr{F}_{\mathrm{s},A\times B}(X \times Y; Z)$ の位相はこれらの写像全体が誘導する始位相だから，自然な全単射は $\mathscr{F}_{\mathrm{s},A\times B}(X \times Y; Z)$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{s},A}(X; \mathscr{F}_{\mathrm{s},B}(Y; Z))$ への同相写像である． □

命題 18.42　X を集合，Y を分離空間とすると，$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y)$ は分離である．

証明　$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(X; Y)$ は積空間 Y^X と同一視できるから，主張は命題 5.19 の結果である． □

命題 18.43　X, Y を位相空間，Z を一様空間，$H \subseteq \mathscr{F}(Y; Z)$ とする．H が等連続ならば，$\mathscr{C}(X; Y)$, H, $\mathscr{C}(X; Z)$ に単純収束の位相を与えるとき，写像

$$\alpha\colon H \times \mathscr{C}(X;Y) \to \mathscr{C}(X;Z); \quad (v, u) \mapsto v \circ u$$

は連続である．

証明　H が等連続であるとする．始位相の特徴付け（命題 3.5 (1)）より，任意の $x \in X$ に対して写像

$$\alpha_x\colon H \times \mathscr{C}(X;Y) \to Z; \quad (v,u) \mapsto v(u(x))$$

が連続であることを示せばよい（$\mathscr{C}(X;Y)$, H には単純収束の位相を与える）．α_x は写像 $H \times \mathscr{C}(X;Y) \to H \times Y$; $(v,u) \mapsto (v,u(x))$ と写像 $H \times Y \to Z$; $(v,y) \mapsto v(y)$ との合成で書ける．前者は明らかに連続であり，後者は系 18.30 より連続だから，α_x は連続である．これで，主張は示された． □

18.5.2　コンパクト開位相

X, Y を位相空間，$H \subseteq \mathscr{C}(X;Y)$ とする．$A \subseteq X$ と $B \subseteq Y$ に対して，

$$[A,B]_H = \{f \in H \mid f(A) \subseteq B\}$$

と定める．$H = \mathscr{C}(X;Y)$ のとき，$[A,B]_H$ を単に $[A,B]$ と書く．

定義 18.44（コンパクト開位相）　X, Y を位相空間，$H \subseteq \mathscr{C}(X;Y)$ とする．コンパクト集合 $K \subseteq X$ と開集合 $V \subseteq Y$ に対する $[K,V]_H$ の全体

$$\{[K,V]_H \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクト集合，} V \text{ は } Y \text{ の開集合}\}$$

が生成する H 上の位相を，H の**コンパクト開位相**という．$\mathscr{C}(X;Y)$ にコンパクト開位相を与えて得られる位相空間を，$\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)$ と書く．

系 3.9 (1) より，H のコンパクト開位相は，$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相が誘導する相対位相に等しい．

定義より，コンパクト集合 $K \subseteq X$ と開集合 $V \subseteq Y$ に対する $[K,V]_H$ の全体は H のコンパクト開位相の準開基だが，一般に開基ではない．

命題 18.45　X を擬分離空間，Y を位相空間，$\mathfrak{B}$ を Y の準開基とする．また，$\mathfrak{A}$ を X のコンパクト集合からなる族であって，条件「任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ とそれを含む開集合 $U \subseteq X$ に対して有限個の A_0, ..., $A_{n-1} \in \mathfrak{A}$ が存在し，$K \subseteq A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1} \subseteq U$ となる」を満たすものとする．このとき，

$$\{[A,B] \mid A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}$$

は $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)$ の準開基である．

証明　一般に，X の部分集合 A と Y の部分集合族 $\{B_i\}_{i \in I}$ に対して $[A, \bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i \in I}[A,B_i]$ だから，必要ならば $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{B}$ の元の有限交叉全体に置き換えることで，$\mathfrak{B}$ は Y の開基であると仮定しても一般性を失わない．以下，このように仮定する．

コンパクト集合 $K \subseteq X$ と開集合 $V \subseteq Y$ を任意にとる．$u \in [K,V]$ とすると，$u(K)$ は V に含まれるコンパクト集合だから，$\mathfrak{B}$ が Y の開基であることより，有限個の $B_i \in \mathfrak{B}$（$0 \leq i < m$）が存在して $u(K) \subseteq \bigcup_{0 \leq i < m} B_i \subseteq V$ となる．$\{u^{-1}(B_i)\}_{0 \leq i < m}$ は K の X における開被覆だから，命題 7.14 より，これを一対一細分する K の閉被覆 $\{K_i\}_{0 \leq i < m}$ がとれる．さらに，各コンパクト集合 K_i は開集合 $u^{-1}(B_i)$ に含まれるから，$\mathfrak{A}$ に対する仮定より，有限個の $A_{i,j} \in \mathfrak{A}$（$0 \leq j < n_i$）が存在して $K_i \subseteq \bigcup_{0 \leq j < n_i} A_{i,j} \subseteq u^{-1}(B_i)$ となる．このとき，

$$u \in \bigcap_{0 \leq i < m} \bigcap_{0 \leq j < n_i} [A_{i,j}, B_i] \subseteq \left[\bigcup_{0 \leq i < m} \bigcup_{0 \leq j < n_i} A_{i,j},\ \bigcap_{0 \leq i < m} B_i\right] \subseteq [K,V]$$

である．したがって，$[K,V]$ は $[A,B]$（$A\in\mathfrak{A}$，$B\in\mathfrak{B}$）という形の集合の合併として表せる．よって，$\{[A,B]\mid A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B}\}$ は $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)$ の準開基である． □

命題 18.46　X, X', Y, Y' を位相空間，$f\colon X'\to X$，$g\colon Y\to Y'$ を連続写像とする．写像

$$\omega\colon \mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X';Y');\quad u\mapsto g\circ u\circ f$$

は連続である．

証明　コンパクト集合 $K'\subseteq X'$ と開集合 $V'\subseteq Y'$ に対して，$\omega^{-1}([K',V'])=[f(K'),g^{-1}(V')]$ であり，$f(K')$ は X のコンパクト集合（命題 7.5）かつ $g^{-1}(V')$ は Y の開集合である．よって，ω は連続である． □

命題 18.47　X を位相空間とする．また，Y を集合，$\{Y_j\}_{j\in J}$ を位相空間族とし，写像族 $\{\psi_j\colon Y\to Y_j\}_{j\in J}$ が誘導する始位相によって Y を位相空間とみなす．このとき，$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相は，$j\in J$ に対する写像

$$\omega_j\colon \mathscr{C}(X;Y)\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y_j);\quad u\mapsto \psi_j\circ u$$

の全体が誘導する始位相に等しい．

証明　Y の標準準開基は $\{\psi_j^{-1}(V)\mid j\in J,\ V\text{ は }Y_j\text{ の開集合}\}$ だから，$\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)$ の準開基として

$$\{[K,\psi_j^{-1}(V)]\mid j\in J,\ K\text{ は }X\text{ のコンパクト集合},\ V\text{ は }Y_j\text{ の開集合}\}\tag{$*$}$$

がとれる（命題 18.45）．一方で，各 $j\in J$ に対して $\{[K,V]\mid K\text{ は }X\text{ のコンパクト集合},\ V\text{ は }Y_j\text{ の開集合}\}$ は $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y_j)$ の準開基だから，$\{\omega_j\}_{j\in J}$ が誘導する $\mathscr{C}(X;Y)$ 上の始位相の準開基として

$$\{\omega_j^{-1}([K,V])\mid j\in J,\ K\text{ は }X\text{ のコンパクト集合},\ V\text{ は }Y_j\text{ の開集合}\}\tag{$**$}$$

がとれる（命題 3.2 (1)）．ところが

$$\omega_j^{-1}([K,V])=[K,\psi_j^{-1}(V)]$$

だから，($*$) と ($**$) とは等しい．よって，$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相は $\{\omega_j\}_{j\in J}$ が誘導する始位相に等しい． □

系 18.48　X を集合，Y を位相空間，Y' を Y の部分空間とする．$\mathscr{C}(X;Y')$ のコンパクト開位相は，$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相が誘導する相対位相に等しい． □

系 18.49　X を集合，$\{Y_j\}_{j\in J}$ を位相空間族とする．自然な全単射

$$\mathscr{C}_{\mathrm{co}}\left(X;\prod_{j\in J}Y_j\right)\to\prod_{j\in J}\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y_j)$$

は同相写像である． □

命題 18.50　X, Y, Z を位相空間とし，Y は真局所コンパクトであるとする．このとき，写像

$$\alpha\colon \mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z)\times\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Z);\quad (v,u)\mapsto v\circ u$$

は連続である．

証明　Y のコンパクト集合全体のなす集合を $\mathfrak{L}$ と置く．コンパクト集合 $K \subseteq X$ と開集合 $W \subseteq Z$ に対して，

$$\alpha^{-1}([K,W]) = \bigcup_{L \in \mathfrak{L}} ([L,W] \times [K,L^\circ]) \tag{$*$}$$

が成り立つことを示す．$L \in \mathfrak{L}$，$u \in [K,L^\circ]$，$v \in [L,W]$ とすると，$(v \circ u)(K) \subseteq v(L^\circ) \subseteq W$ だから，$(v,u) \in \alpha^{-1}([K,W])$ である．逆に，$(v,u) \in \alpha^{-1}([K,W])$ とすると，$(v \circ u)(K) \subseteq W$，すなわち $u(K) \subseteq v^{-1}(W)$ である．いま Y は真局所コンパクトだから，その開部分空間 $v^{-1}(W)$ も真局所コンパクトである（命題 7.29 (3)）．したがって，命題 7.27 (1) より，$u(K) \subseteq L^\circ$ かつ $L \subseteq v^{-1}(W)$ を満たす $L \in \mathfrak{L}$ がとれる．この L について，$(v,u) \in [L,W] \times [K,L^\circ]$ である．よって，($*$) が成り立つ．

これより，コンパクト集合 $K \subseteq X$ と開集合 $W \subseteq Z$ に対して $\alpha^{-1}([K,W])$ は $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z) \times \mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)$ の開集合だから，α は連続である．□

定理 18.51　X, Y, Z を位相空間，$f\colon X \times Y \to Z$ を写像とする．次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，Y が真局所コンパクトならば，2 条件は同値である．

(a) f は連続である．
(b) 任意の $x \in X$ に対して写像 $f(x,-)\colon Y \to Z$ は連続であり，かつ写像 $\widetilde{f}\colon X \to \mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z);\, x \mapsto f(x,-)$ は連続である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　f が連続であるとする．任意の $x \in X$ に対して $f(x,-)$ が連続であることは明らかだから，$\widetilde{f}$ が連続であることを示す．コンパクト集合 $L \subseteq Y$ と開集合 $W \subseteq Z$ を任意にとる．$x \in \widetilde{f}^{-1}([L,W])$ とすると，$\{x\} \times L \subseteq f^{-1}(W)$ だから，Tube Lemma（定理 7.15）より，x の開近傍 U が存在して $U \times L \subseteq f^{-1}(W)$ となる．このとき，$U \subseteq \widetilde{f}^{-1}([L,W])$ だから，x は $\widetilde{f}^{-1}([L,W])$ の内点である．したがって，$\widetilde{f}^{-1}([L,W])$ は X の開集合である．よって，$\widetilde{f}$ は連続である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)（Y が真局所コンパクトである場合）　(b) が成り立つとする．$(x,y) \in X \times Y$ と $f(x,y)$ の開近傍 W を任意にとる．$f(x,-)$ は連続であり，Y は真局所コンパクトだから，y のコンパクト近傍 L が存在して $f(\{x\} \times L) \subseteq W$ となる．すると $\widetilde{f}(x) \in [L,W]$ だから，$\widetilde{f}$ が連続であることより，x の近傍 U が存在して $\widetilde{f}(U) \subseteq [L,W]$，すなわち $f(U \times L) \subseteq W$ となる．よって，f は連続である．□

系 18.52　X を真局所コンパクト空間，Y を位相空間，$H \subseteq \mathscr{C}(X;Y)$ とする．H のコンパクト開位相は，写像 $\theta\colon H \times X \to Y;\, (u,x) \mapsto u(x)$ を連続にする H 上の位相の中で最小のものである．

証明　H をある位相によって位相空間とみなすとき，θ が連続であるための必要十分条件は，包含写像 $H \to \mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;Y)$ が連続であることである（定理 18.51）．相対位相の定義より，これは，H の位相が H のコンパクト開位相よりも細かいことと同値である．よって，H のコンパクト開位相は，θ を連続にする H 上の位相の中で最小のものである．□

補題 18.53　X, Y を擬分離空間とする．任意のコンパクト集合 $M \subseteq X \times Y$ とそれを含む開集合 $W \subseteq X \times Y$ に対して，X の有限個のコンパクト集合 K_i および Y の有限個のコンパクト集合 L_i（$0 \leq i < n$）が存在して，$M \subseteq \bigcup_{0 \leq i < n} (K_i \times L_i) \subseteq W$ となる．

証明　M の X, Y の上への射影による像をそれぞれ X', Y' と置くと，M は $X' \times Y'$ のコンパクト集合であり，$X' \times Y'$ の開集合 $W \cap (X' \times Y')$ に含まれる．また，X', Y' はコンパクト擬分離であり（命題 7.5），したがって真局所コンパクトである．したがって，コンパクト集合 $K \subseteq X'$ とコンパクト集合 $L \subseteq Y'$ との組 (K,L) であって $K \times L \subseteq W \cap (X' \times Y')$ を満たすものの全体を $\mathcal{S}$ と置くと，$\{\mathrm{int}_{X'}(K) \times \mathrm{int}_{Y'}(L)\}_{(K,L) \in \mathcal{S}}$ は M の $X' \times Y'$ における開被覆である．M はコンパクトだから，有限個の $(K_i, L_i) \in \mathcal{S}$（$0 \leq i < n$）であっ

て，$\{\mathrm{int}_{X'}(K_i)\times\mathrm{int}_{Y'}(L_i)\}_{0\le i<n}$ が M を被覆するものがとれる．このとき，$M\subseteq\bigcup_{0\le i<n}(K_i\times L_i)\subseteq W$ が成り立つ． □

定理 18.54　X, Y, Z を位相空間とし，

(1) X が擬分離かつ Y が局所コンパクト擬分離，または
(2) X, Y が真局所コンパクト

のいずれかが成り立つとする．このとき，自然な全単射 $\mathscr{F}(X\times Y;Z)\to\mathscr{F}(X;\mathscr{F}(Y;Z))$ の $\mathscr{C}(X\times Y;Z)$ への制限は，$\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)$ から $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))$ への同相写像を与える．

証明　どちらの場合も Y は真局所コンパクトだから，定理 18.51 より，自然な全単射 $\mathscr{F}(X\times Y;Z)\to\mathscr{F}(X;\mathscr{F}(Y;Z))$ の $\mathscr{C}(X\times Y;Z)$ への制限は，$\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)$ から $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))$ への全単射を与える．以下，この全単射を $\gamma\colon\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))$ と書く．

(1)　X が擬分離かつ Y が局所コンパクト擬分離であるとする．X が擬分離であることと命題 18.45 より，コンパクト集合 $K\subseteq X$，コンパクト集合 $L\subseteq Y$，開集合 $W\subseteq Z$ に対する $[K,[L,W]]$ の全体は $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))$ の準開基である．そこで，γ が同相写像であることを示すためには，上記の K, L, W に対する $\gamma^{-1}([K,[L,W]])=[K\times L,W]$ の全体が $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)$ の準開基であることをいえばよい．これは，命題 18.45，X, Y が擬分離であること，および補題 18.53 から従う．

(2)　一般に，位相空間 S, T に対して，写像 $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(S;T)\times S\to T$; $(u,x)\mapsto u(x)$ を $\theta_{S,T}$ と書くことにする．系 18.52 より，S が真局所コンパクトならば $\theta_{S,T}$ は連続である．

X, Y が真局所コンパクトであるとする．定理 18.51 を 2 回用いることにより，$\gamma\colon\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))$ の連続性と $\theta_{X\times Y,Z}\colon\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)\times X\times Y\to Z$ の連続性とが同値であることがわかる．いま $X\times Y$ は真局所コンパクトだから（定理 7.33），$\theta_{X\times Y,Z}$ は連続であり，したがって γ も連続である．次に，定理 18.51 より，$\gamma^{-1}\colon\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X\times Y;Z)$ の連続性と $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X;\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z))\times X\times Y\to Z$; $(h,x,y)\mapsto h(x)(y)=\theta_{Y,Z}(\theta_{X,\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y;Z)}(h,x),y)$ の連続性とが同値であることがわかる．いま X, Y は真局所コンパクトだから，後者の写像は連続であり，したがって γ^{-1} も連続である．これで，γ が同相写像であることが示された． □

定理 18.55　X を擬分離空間，Y を一様空間とする．$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相は，コンパクト一様収束の位相に一致する．

証明　定義より，$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト一様収束の位相は，コンパクト集合 $K\subseteq X$ に対する写像 $\mathscr{C}(X;Y)\to\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(K;Y)$; $u\mapsto u|_K$ の全体が誘導する始位相に等しい．また，命題 3.2 (1) より，$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相は，コンパクト集合 $K\subseteq X$ に対する写像 $\mathscr{C}(X;Y)\to\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(K;Y)$; $u\mapsto u|_K$ の全体が誘導する始位相に等しい．よって，X をコンパクト擬分離空間として，$\mathscr{C}(X;Y)$ の一様収束位相とコンパクト開位相が一致することを示せばよい．以下，これを示す．

$\mathscr{C}(X;Y)$ の一様収束の位相がコンパクト開位相よりも細かいことを示す．$K\subseteq X$ をコンパクト集合，$V\subseteq Y$ を開集合とし，$u\in[K,V]$ を任意にとる．コンパクト集合 $u(K)$ は開集合 V に含まれるから，命題 13.14 より，Y 上の近縁 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}[u(K)]\subseteq V$ となるようにとれる．この $\boldsymbol{V}$ について，$\mathsf{W}(X,\boldsymbol{V})[u]\subseteq[K,V]$ だから，$[K,V]$ は一様収束の位相に関しても u の近傍である．よって，$\mathscr{C}(X;Y)$ の一様収束の位相はコンパクト開位相よりも細かい．

$\mathscr{C}(X;Y)$ のコンパクト開位相が一様収束の位相よりも細かいことを示す．$u\in\mathscr{C}(X;Y)$ と Y 上の開近縁 $\boldsymbol{V}$ を任意にとる．$\{u^{-1}(\boldsymbol{V}[y])\}_{y\in Y}$ はコンパクト空間 X の開被覆だから，有限個の $y_0,\dots,y_{n-1}\in Y$ が存在して，$\{u^{-1}(\boldsymbol{V}[y_i])\}_{0\le i<n}$ は X の被覆する．さらに，X がコンパクト擬分離であることと命題 7.14 より，こ

の開被覆を一対一細分する X の閉被覆 $\{K_i\}_{0\leq i<n}$ がとれる．このとき，

$$u \in \bigcap_{0\leq i<n} [K_i, \boldsymbol{V}[y_i]] \subseteq \mathsf{W}(X, \boldsymbol{V}^2)[u] \tag{$*$}$$

であることを示す．各 i に対して $K_i \subseteq u^{-1}(\boldsymbol{V}[y_i])$ だから，$u \in \bigcap_{0\leq i<n}[K_i, \boldsymbol{V}[y_i]]$ である．次に，$v \in \bigcap_{0\leq i<n}[K_i, \boldsymbol{V}[y_i]]$ とし，$x \in X$ を任意にとる．$\{K_i\}_{0\leq i<n}$ は X の被覆だから，x はある K_i に含まれる．この i について，$u, v \in [K_i, \boldsymbol{V}[y_i]]$ より $(u(x), y_i)$, $(y_i, v(x)) \in \boldsymbol{V}$ であり，したがって $(u(x), v(x)) \in \boldsymbol{V}^2$ である．これが任意の $x \in X$ に対して成り立つから，$v \in \mathsf{W}(X, \boldsymbol{V}^2)[u]$ である．これで，($*$) が示された．したがって，$\mathsf{W}(X, \boldsymbol{V}^2)[u]$ はコンパクト開位相に関しても u の近傍である．よって，$\mathscr{C}(X; Y)$ のコンパクト開位相は一様収束の位相よりも細かい． □

系 18.56　X を擬分離空間，Y を集合，$\mathscr{V}_0$, $\mathscr{V}_1$ を Y 上の一様構造とし，Y にこれらの一様構造を与えて得られる一様空間をそれぞれ Y_0, Y_1 と書く．Y_0 と Y_1 の位相が等しければ，$\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X; Y_0)$ と $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X; Y_1)$ の位相は等しい． □

18.6　距離空間への写像がなす空間

定義 18.57（一様擬距離）　X, Y を集合，d を Y 上の擬距離とする．$u, v \in \mathscr{F}(X; Y)$ に対して

$$\delta(u, v) = \sup_{x\in X} d(u(x), u(y))$$

（ただし，$X = \emptyset$ ならば $\delta(u, v) = 0$ とする）として定まる関数 $\delta\colon \mathscr{F}(X; Y) \times \mathscr{F}(X; Y) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$（あるいはその制限）を，$d$ が定める**一様擬距離**という．d が距離ならば，一様擬距離の代わりに**一様距離**という．

Y が擬距離空間【距離空間】ならば，Y の擬距離【距離】が定める一様擬距離【一様距離】を，単に**一様擬距離【一様距離】**という．

一様擬距離【一様距離】は，値として ∞ をとりうるということを除けば，擬距離【距離】の条件（定義 10.1）をすべて満たす．

命題 18.58　X, Y を集合とし，Y 上の擬距離族 $\{d_i\}_{i\in I}$ が定める一様構造によって Y を一様空間とみなす．また，$H \subseteq \mathscr{F}(X; Y)$ とし，各 $i \in I$ に対して，d_i が定める一様擬距離を δ_i と書く．このとき，

$$\{\{(u, v) \in H \times H \mid \delta_i(u, v) \leq r\} \mid i \in I,\ r > 0\}$$

は H の一様収束の一様構造の準一様基である．特に，各 δ_i が $H \times H$ 上で ∞ を値にとらない（したがって H 上の擬距離である）ならば，H の一様収束の一様構造は，擬距離族 $\{\delta_i\}_{i\in I}$ が定める一様構造に等しい．

証明　$\{\boldsymbol{B}_{d_i}(r) \mid i \in I,\ r > 0\}$ は Y の準一様基だから，$i \in I$ と $r > 0$ に対する $\mathsf{W}_H(X, \boldsymbol{B}_{d_i}(r)) = \{(u, v) \in H \times H \mid \delta_i(u, v) \leq r\}$ の全体は H の一様収束の一様構造の一様基である（命題 18.2）． □

次の命題では，集合 X と擬距離空間 Y に対して，X から Y への有界写像（すなわち，写像 $u\colon X \to Y$ であって像 $u(X)$ が Y の擬距離に関して有界であるもの）全体のなす集合を，$\mathscr{B}(X; Y)$ と書く．一様擬距離は $\mathscr{B}(X; Y) \times \mathscr{B}(X; Y)$ 上で ∞ を値にとらず，したがって $\mathscr{B}(X; Y)$ 上の擬距離となる．命題 18.58 より，この擬距離が定める一様構造は，$\mathscr{B}(X; Y)$ の一様収束の一様構造である．

命題 18.59　X を集合，Y を擬距離空間とする．$\mathscr{B}(X; Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X; Y)$ の開かつ閉な集合である．さらに，Y が完備ならば，$\mathscr{B}(X; Y)$ は一様擬距離に関して完備である．

証明　Y の擬距離を d，d が定める一様擬距離を δ と書く．命題 18.58 より，$u \in \mathscr{F}(X;Y)$ に対して，$U_u = \{v \in \mathscr{F}(X;Y) \mid \delta(u,v) \leq 1\}$ は u の $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ における近傍である．$v \in U_u$ とすると，任意の x，$y \in X$ に対して

$$d(u(x),u(y)) - 2 \leq d(v(x),v(y)) \leq d(u(x),u(y)) + 2$$

だから，u が有界であることと v が有界であることとは同値である．したがって，$u \in \mathscr{B}(X;Y)$ ならば $U_u \subseteq \mathscr{B}(X;Y)$ であり，$u \notin \mathscr{B}(X;Y)$ ならば $U_u \cap \mathscr{B}(X;Y) = \emptyset$ である．よって，$\mathscr{B}(X;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ の開かつ閉な集合である．

Y が完備ならば $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ も完備であり（系 18.17），したがってその閉集合 $\mathscr{B}(X;Y)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{u}}(X;Y)$ の部分一様空間として完備である（命題 16.24 (1)）．$\mathscr{B}(X;Y)$ の一様擬距離が定める一様構造は一様収束の一様構造だから，$\mathscr{B}(X;Y)$ は一様擬距離に関して完備である．□

定義 18.60（一様ノルム）　X を集合とする．$u \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ に対して，その**一様ノルム**を，

$$\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

（ただし，$X = \emptyset$ ならば $\|u\| = 0$ とする）と定める．

$\mathbb{K}$ の標準的な距離が定める $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ の一様距離を δ とすると，$\delta(u,v)$ は $u - v$ の一様ノルムに等しい．

$u \in \mathscr{B}(X;\mathbb{K})$ に対しては $\|u\| < \infty$ である．特に，X がコンパクト空間ならば $\mathscr{C}(X;\mathbb{K}) \subseteq \mathscr{B}(X;\mathbb{K})$ だから（命題 7.5），$u \in \mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ に対して $\|u\| < \infty$ である．

18.7　近似定理

18.7.1　Dini の定理

X を集合，$H \subseteq \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ とする．H が**上に有向**であるとは，任意の有限個の元 $u_0, \ldots, u_{n-1} \in H$ に対してある $v \in H$ が存在し，$u_0, \ldots, u_{n-1} \leq v$ となることをいう．

定理 18.61（Dini の定理）　X をコンパクト空間，H を上に有向な $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ の部分集合とする．$f = \sup H \in \mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ ならば，f は H の $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ における閉包に属する．

証明　仮定が成り立つとして，$\epsilon > 0$ を任意にとる．$f = \sup H$ より任意の $x \in X$ に対して $u(x) > f(x) - \epsilon$ が存在し，H の各元と f は連続だから，

$$\{\{x \in X \mid u(x) > f(x) - \epsilon\}\}_{u \in H}$$

は X の開被覆である．したがって，その有限部分被覆がとれる．これに対応する H の有限個の元を $u_0, \ldots, u_{n-1}$ として，$u_0, \ldots, u_{n-1} \leq v$ となる $v \in H$ をとる．すると，任意の $x \in X$ に対して $f(x) - \epsilon < v(x) \leq f(x)$ だから，$\|v - f\| \leq \epsilon$（$\|-\|$ は一様ノルムを表す）である．よって，f は H の $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ における閉包に属する．□

系 18.62　X をコンパクト空間とする．$\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ 上の単調増加な点列 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in \mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ に単純収束するならば，$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は f に一様収束する．

証明　仮定が成り立つとする．$H = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と置くと，H は上に有向な $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ の部分集合であって $f = \sup H$ だから，Dini の定理（定理 18.61）より，f は H の $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ における閉包に属する．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在し，$\|u_n - f\| \leq \epsilon$（$\|-\|$ は一様ノルムを表す）となる．$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は単

調増加だから，このような n をとると，任意の $m \geq n$ に対して $\|u_m - f\| \leq \epsilon$ が成り立つ．よって，$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様収束する． □

18.7.2 Stone–Weierstrass の定理

定理 18.63 X をコンパクト空間，$H \subseteq \mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ とし，u, $v \in H$ ならば $\max\{u,v\}$, $\min\{u,v\} \in H$ であるとする．$f \in \mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) f は H の $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ における閉包に属する．

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ と 2 点 x, $y \in X$ に対してある $u \in H$ が存在し，$|u(x) - f(x)| \leq \epsilon$ かつ $|u(y) - f(y)| \leq \epsilon$ を満たす．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $X = \emptyset$ ならば明らかだから，そうでないとする．(b) が成り立つとして，$\epsilon > 0$ を任意にとる．$x \in X$ として $H_x = \{u \in H \mid u(x) < f(x) + \epsilon\}$ と置くと，仮定より任意の $y \in X$ に対して $u(y) > f(y) - \epsilon$ を満たす $u \in H_x$ が存在するから，

$$\{\{y \in X \mid u(y) > f(y) - \epsilon\}\}_{u\in H_x}$$

は X の開被覆である．したがって，その有限部分被覆がとれる．これに対応する H_x の有限部分集合を F_x とし（$X \neq \emptyset$ より $F_x \neq \emptyset$ である），$v_x = \max F_x$ と置くと，$v_x \in H$ であり，$v_x(x) < f(x) + \epsilon$ かつ $v_x > f - \epsilon$ である．次に，x を動かすと，

$$\{\{y \in X \mid v_x(y) < f(y) + \epsilon\}\}_{x\in X}$$

は X の開被覆だから，その有限部分被覆がとれる．これに対応する有限個の点を x_0, …, $x_{n-1} \in X$ とし（$X \neq \emptyset$ より $n \geq 1$ である），$v = \min\{v_{x_0}, \ldots, v_{x_{n-1}}\}$ と置くと，$v \in H$ であり，$f - \epsilon < v < f + \epsilon$ を満たす．よって，f は H の $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ における閉包に属する． □

系 18.64 X をコンパクト空間，H を $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ の部分実線型空間とする．H が 2 条件

(i) 任意の x, $y \in X$ と α, $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，「$x = y$ かつ $\alpha \neq \beta$」でなければ，ある $u \in H$ が存在して $u(x) = \alpha$ かつ $u(y) = \beta$ となる．

(ii) $u \in H$ ならば $|u| \in H$ である．

を満たすならば，H は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ において稠密である．

証明 H が (i), (ii) を満たすとする．一般に，実数値関数 u, v に対して

$$\max\{u,v\} = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|),$$
$$\min\{u,v\} = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)$$

だから，(ii) より，u, $v \in H$ ならば $\max\{u,v\}$, $\min\{u,v\} \in H$ である．これと (i) と定理 18.63 より，H は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ において稠密である． □

補題 18.65 S を $\mathbb{R}$ の有界集合とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，定数項をもたない実係数多項式 p であって，任意の $t \in S$ に対して $|p(t) - |t|| \leq \epsilon$ を満たすものが存在する．

証明　$S = [-1, 1]$ の場合に示せば十分である．定数項をもたない実係数多項式の列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が関数 $t \mapsto \sqrt{t}$ に $[0, 1]$ 上一様収束するならば，$(p_n(t^2))_{n\in\mathbb{N}}$ は定数項をもたない実係数多項式の列であり，関数 $t \mapsto |t|$ に $[0, 1]$ 上一様収束する．そこで，このような $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を構成すればよい．

再帰的に

$$p_0(t) = 0, \qquad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2) \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定めると，これが条件を満たすことを示す．各 p_n が定数項をもたない実係数多項式であることは明らかである．$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $[0, 1]$ 上一様に関数 $t \mapsto \sqrt{t}$ に収束することをいうために，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \qquad (t \in [0, 1]) \tag{$*$}$$

が成り立つことを，n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らかである．n のときは成り立つとして，$n + 1$ のときを考える．p_{n+1} の再帰的定義から，

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))\right)$$

を得る．$t \in [0, 1]$ とする．帰納法の仮定より $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ だから，$\sqrt{t} - p_n(t) \geq 0$ かつ $1 - (\sqrt{t} + p_n(t))/2 \geq 1 - \sqrt{t} \geq 0$ であり，したがって $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geq 0$ である．また，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}
\sqrt{t} - p_{n+1}(t) &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) \\
&\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これで帰納法が完成し，$(*)$ が示された．□

X を集合，$H \subseteq \mathscr{F}(X; \mathbb{K})$ とする．H が X **上で消えない**とは，任意の $x \in X$ に対してある $u \in H$ が存在し，$u(x) \neq 0$ となることをいう．また，H が X **の点を分離する**とは，任意の異なる 2 点 x, $y \in X$ に対してある $u \in H$ が存在し，$u(x) \neq u(y)$ となることをいう．

定理 18.66（Stone–Weierstrass の定理）　X をコンパクト空間，H を $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ の部分実代数（すなわち，部分実線型空間であって，u, $v \in H$ ならば $uv \in H$ であるもの）とする．H が 2 条件

(i) H は X 上で消えない．
(ii) H は X の点を分離する．

を満たすならば，H は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X; \mathbb{R})$ において稠密である．

証明　H が (i), (ii) を満たすとして，H の $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X; \mathbb{R})$ における閉包を $\overline{H}$ と書く．(i), (ii) より，任意の x, $y \in X$ と α, $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，「$x = y$ かつ $\alpha \neq \beta$」でなければ，ある $u \in H$ が存在して $u(x) = \alpha$ かつ $u(y) = \beta$ となる．また，$u \in H$ とすると，$u(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合だから（命題 7.5），補題 18.65 より，関数 $t \mapsto |t|$ に $u(X)$ 上一様収束する定数項をもたない実係数多項式の列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．H は $\mathscr{C}(X; \mathbb{R})$ の部分実代数だから $(p_n \circ u)_{n\in\mathbb{N}}$ は H の元からなる点列であり，この点列は $|u|$ に一様収束する．よって，$|u| \in \overline{H}$ である．以上より，$\overline{H}$ は系 18.64 の 2 条件を満たすから，$\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X; \mathbb{R})$ において稠密であり，したがって $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X; \mathbb{R})$ 全体に一致する．□

系 18.67 X をコンパクト空間，H を $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ の部分複素代数（すなわち，部分複素線型空間であって，u, $v \in H$ ならば $uv \in H$ であるもの）であって，複素共役をとる操作で閉じているものとする．H が 2 条件

(i) H は X 上で消えない．
(ii) H は X の点を分離する．

を満たすならば，H は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{C})$ において稠密である．

証明 H の元のうち実数値関数であるもの全体を $H_{\mathbb{R}}$ と書く．H は $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ の部分複素代数だから，$H_{\mathbb{R}}$ は $\mathscr{C}(X;\mathbb{R})$ の部分実代数である．一般に，複素数値関数 u に対して $\operatorname{Re} u = (u+\overline{u})/2$，$\operatorname{Im} u = (u-\overline{u})/2i$ であり，H は複素共役をとる操作で閉じているから，$u \in H$ ならば $\operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} u \in H_{\mathbb{R}}$ である．逆に，v, $w \in H_{\mathbb{R}}$ ならば $v + iw \in H$ である．よって，

$$H = \{v + iw \mid v,\, w \in H_{\mathbb{R}}\} \tag{$*$}$$

が成り立つ．

H が (i), (ii) を満たすとすると，($*$) より $H_{\mathbb{R}}$ も同じ条件を満たすから，Stone–Weierstrass の定理（定理 18.66）より，$H_{\mathbb{R}}$ は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{R})$ において稠密である．これと ($*$) より，H は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{C})$ において稠密である． □

X を局所コンパクト分離空間とし，$\alpha X = X \cup \{\infty\}$ をその 1 点コンパクト化とする．$u \in \mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ は，無限遠点 ∞ で値 0 をとる αX 上の連続関数に延長できるとき，**無限遠で消える**という．$u \in \mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ が無限遠で消えるための必要十分条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対してコンパクト集合 $K \subseteq X$ が存在し，任意の $x \in X \setminus K$ に対して $|u(x)| \leq \epsilon$ が成り立つことである．無限遠で消える $\mathscr{C}(X;\mathbb{K})$ の元全体のなす $\mathbb{K}$-代数を $\mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ と書き，これを $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(X;\mathbb{K})$ の部分一様空間とみなす．

系 18.68 X を局所コンパクト分離空間，H を $\mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ の部分 $\mathbb{K}$-代数（すなわち，部分 $\mathbb{K}$-線型空間であって，u, $v \in H$ ならば $uv \in H$ であるもの）であって，複素共役をとる操作で閉じているものとする[*5]．H が 2 条件

(i) H は X 上で消えない．
(ii) H は X の点を分離する．

を満たすならば，H は $\mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ において稠密である．

証明 $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ を X の 1 点コンパクト化とする．$u \in \mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ に対して，無限遠点 ∞ では値 0 をとるとして u を αX 上の連続関数に拡張したものを，$\widetilde{u} \in \mathscr{C}(\alpha X;\mathbb{K})$ と書くことにする．$\mathscr{C}(\alpha X;\mathbb{K})$ の部分集合 H' を

$$H' = \{\widetilde{u} + c \mid u \in H,\ c \in \mathbb{K}\}$$

と定める．

H は $\mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ の複素共役をとる操作で閉じた部分 $\mathbb{K}$-代数だから，H' は $\mathscr{C}(\alpha X;\mathbb{K})$ の複素共役をとる操作で閉じた部分 $\mathbb{K}$-代数である．H が (i), (ii) を満たすとすると，H' も同じ条件を満たすから，Stone–Weierstrass の定理やその系（定理 18.66，系 18.67）より，H' は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(\alpha X;\mathbb{K})$ において稠密である．H が $\mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ において稠密であることを示す．$f \in \mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ と $\epsilon > 0$ を任意にとる．H' は $\mathscr{C}_{\mathrm{u}}(\alpha X;\mathbb{K})$ において稠密だから，ある $u \in H$ と $c \in \mathbb{K}$ が存在して，$\|\widetilde{u} + c - \widetilde{f}\| \leq \epsilon$（$\|{-}\|$ は一様ノルムを表す）となる．これ

[*5] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ならば，この条件は自明である．

より，$|c| = |\widetilde{u}(\infty) + c - \widetilde{f}(\infty)| \leq \epsilon$ であることに注意すれば,

$$\|u - f\| \leq \|u + c - f\| + |c| \leq 2\epsilon$$

を得る．よって，H は $\mathscr{C}_0(X;\mathbb{K})$ において稠密である． $\square$

付録 A

列型空間

A.1 点列閉集合と点列閉包

定義 A.1（点列閉集合，点列閉包） X を位相空間，A を X の部分集合とする．

(1) A が X の**点列閉集合**であるとは，A の点からなる任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，そのすべての（X 上での）極限点が A に属することをいう．

(2) A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって点 $x \in X$ を極限点とするものが存在するとき，x は A の**点列接触点**であるという．A の点列接触点全体の集合を，A の（X における）**点列閉包**といい，$\mathrm{scl}_X(A)$ あるいは単に $\mathrm{scl}(A)$ と書く．写像 $\mathrm{scl}\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ を，位相空間 X の**点列閉包作用素**という．

A が点列閉集合であることは，$\mathrm{scl}(A) = A$ であることと同値である．

命題 A.2 X を位相空間とする．

(1) $A \subseteq X$ に対して，$A \subseteq \mathrm{scl}(A) \subseteq \overline{A}$ である．

(2) A_0, …, $A_{n-1} \subseteq X$ に対して，$\mathrm{scl}(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = \mathrm{scl}(A_0) \cup \cdots \cup \mathrm{scl}(A_{n-1})$ である（特に，$\mathrm{scl}(\emptyset) = \emptyset$ である）．

証明 (1) 任意の点 $x \in A$ に対して，定点列 $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束するから，$A \subseteq \mathrm{scl}(A)$ である．A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するならば，命題 6.35 (1) より $x \in \overline{A}$ である．よって，$\mathrm{scl}(A) \subseteq \overline{A}$ である．

(2) $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，$A_i \subseteq A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ だから $\mathrm{scl}(A_i) \subseteq \mathrm{scl}(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ である．よって，$\mathrm{scl}(A_0) \cup \cdots \cup \mathrm{scl}(A_{n-1}) \subseteq \mathrm{scl}(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ が成り立つ．

逆向きの包含を示す．$x \in \mathrm{scl}(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ とすると，$A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ の点からなる点列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ であって x に収束するものがとれる．このとき，無限個の項 x_k が A_i に属するような $i \in \{0, \dots, n-1\}$ がとれる．そのような i をとり，$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の項のうち A_i に属するものだけからなる部分列を考える．この部分列も x に収束するから（命題 6.43 (1)），$x \in \mathrm{scl}(A_i)$ である．よって，$\mathrm{scl}(A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \subseteq \mathrm{scl}(A_0) \cup \cdots \cup \mathrm{scl}(A_{n-1})$ が成り立つ． □

命題 A.3 位相空間 X に対して，次が成り立つ．[*1]

[*1] したがって，定理 2.12 (1) より，位相空間 X の点列閉集合全体は（それを閉集合全体とする）集合 X 上の位相を定める．しかし，その位相が X のもとの位相と一致するとは限らない．これらの位相が一致することは，X が列型空間（定義 A.6 (1)）であることと同値である．

(1) X の部分集合族 $\{F_i\}_{i\in I}$ について，各 F_i が X の点列閉集合ならば，$\bigcap_{i\in I} F_i$ は X の点列閉集合である（特に，X は X の点列閉集合である）．

(2) X の部分集合 $F_0, \dots, F_{n-1}$ について，$F_0, \dots, F_{n-1}$ が X の点列閉集合ならば，$F_0 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ は X の点列閉集合である（特に，$\emptyset$ は X の点列閉集合である）．

証明　(1)　$F = \bigcap_{i\in I} F_i$ と置く．各 F_i が点列閉集合であるとすると，任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{scl}(F) \subseteq \mathrm{scl}(F_i) = F_i$ だから，$\mathrm{scl}(F) \subseteq F$ が成り立つ．一方で，$F \subseteq \mathrm{scl}(F)$ である（命題 A.2 (1)）．よって，$\mathrm{scl}(F) = F$ であり，F は点列閉集合である．

(2)　「任意の $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して $\mathrm{scl}(F_i) = F_i$」ならば $\mathrm{scl}(F_0 \cup \cdots \cup F_{n-1}) = F_0 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ であることを示せばよいが，これは命題 A.2 (2) から従う．□

命題 A.4　位相空間において，任意の閉集合は点列閉集合である．

証明　命題 A.2 (1) から従う．□

命題 A.5　X を位相空間，X' を X の部分空間とする．$A \subseteq X'$ に対して，$\mathrm{scl}_{X'}(A) = \mathrm{scl}_X(A) \cap X'$ である．

証明　$x \in X'$ とする．A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X' 上の点列として x に収束することと X 上の点列として x に収束することとは同値だから（系 6.39），$\mathrm{scl}_{X'}(A) = \mathrm{scl}_{X'}(A) \cap X' = \mathrm{scl}_X(A) \cap X'$ が成り立つ．□

A.2　列型空間と Fréchet–Urysohn 空間

定義 A.6（列型空間，Fréchet–Urysohn 空間）　X を位相空間とする．

(1) X が**列型**であるとは，X の閉集合全体と点列閉集合全体が一致することをいう．

(2) X が **Fréchet–Urysohn** であるとは，X の閉包作用素と点列閉包作用素が一致することをいう．

明らかに，Fréchet–Urysohn 空間は列型である．

命題 A.7　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は Fréchet–Urysohn である．

(b) X の任意の部分空間は列型である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　対偶を示す．X の部分空間 X' が列型でないとすれば，部分集合 $A \subseteq X'$ であって $\mathrm{cl}_{X'}(A) \setminus \mathrm{scl}_{X'}(A) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する．このとき，命題 A.5 より

$$\mathrm{cl}_X(A) \setminus \mathrm{scl}_X(A) \supseteq (\mathrm{cl}_X(A) \setminus \mathrm{scl}_X(A)) \cap X' = \mathrm{cl}_{X'}(A) \setminus \mathrm{scl}_{X'}(A) \neq \emptyset$$

だから，X は Fréchet–Urysohn ではない．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．X が Fréchet–Urysohn でないとすれば，部分集合 $A \subseteq X$ であって $\mathrm{scl}(A) \subset \overline{A}$ を満たすものが存在する．1 点 $x \in \overline{A} \setminus \mathrm{scl}(A)$ を固定する．このとき，A は $A \cup \{x\}$ の点列閉集合だが，閉集合ではない．よって，X の部分空間 $A \cup \{x\}$ は列型ではない．□

命題 A.8　第一可算空間は Fréchet–Urysohn である．

証明　X を第一可算空間として，任意の $A \subseteq X$ に対して $\overline{A} \subseteq \mathrm{scl}(A)$ であることを示せばよい．$x \in \overline{A}$ を任意にとり，x の可算近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ をとる．$x \in \overline{A}$ よりすべての U_n は A と交わるから，任意の

$n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in U_n \cap A$ を満たす点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．このとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束する．実際，任意の近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $U_n \subseteq U$ となり，このとき $x_n, x_{n+1}, \ldots \in U$ である．よって，$x \in \mathrm{scl}(A)$ である．よって，$\overline{A} \subseteq \mathrm{scl}(A)$ である． □

命題 A.9　列型空間の商は列型である．特に，列型空間の開連続像および閉連続像は列型である．

証明　X を列型空間，$X/{\sim}$ を X の商空間とし，$\pi\colon X \to X/{\sim}$ を等化写像とする．商位相の定義および X が列型であることから，$X/{\sim}$ の点列閉集合 F に対して，$\pi^{-1}(F)$ が X の点列閉集合であることを示せば十分である．$\pi^{-1}(F)$ の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するとする．π は連続だから，このとき，F の点からなる点列 $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\pi(x)$ に収束する（命題 6.37 (1)）．F は点列閉集合だから $\pi(x) \in F$ であり，したがって $x \in \pi^{-1}(F)$ である．よって，$\pi^{-1}(F)$ は X の点列閉集合である．

後半の主張は，開連続全射および閉連続全射が沈め込みである（命題 3.27 (2)）ことから従う． □

定理 A.10　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) 距離化可能空間から X への沈め込みが存在する．
(b) 第一可算空間から X への沈め込みが存在する．
(c) X は列型である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　距離化可能空間が第一可算であること（命題 10.24）から明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　第一可算空間が列型であること（命題 A.8）と列型空間の商が列型であること（命題 A.9）から従う．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$(X, \mathfrak{O})$ を列型空間とする．$\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化を $\alpha\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とする．$\alpha\mathbb{N}$ は $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ と同相だから距離化可能であり，したがってその任意の和も距離化可能であることに注意する（命題 12.6）．$\alpha\mathbb{N}$ から X への連続写像全体が誘導する X 上の終位相を $\mathfrak{O}'$ とする．すると，命題 3.20 (2) より，$\alpha\mathbb{N}$ のみからなる族の和空間から $(X, \mathfrak{O}')$ への沈め込みが存在する．そこで，$\mathfrak{O}' = \mathfrak{O}$ を示せば主張が従う．

$\mathfrak{O}' \supseteq \mathfrak{O}$ は終位相の特徴付け（命題 3.5 (2)）からわかる．$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ を示す．$(X, \mathfrak{O})$ は列型だったから，$\mathfrak{O}'$ に関する閉集合 F が $\mathfrak{O}$ に関する点列閉集合であることを示せばよい．F の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x_\infty \in X$ に収束するとする．このとき，対応 $n \mapsto x_n$ は $\alpha\mathbb{N}$ から $(X, \mathfrak{O})$ への連続写像だから，終位相 $\mathfrak{O}'$ の定義より，$\{n \in \alpha\mathbb{N} \mid x_n \in F\} = \mathbb{N} \cup \{\infty \mid x_\infty \in F\}$ は $\alpha\mathbb{N}$ の閉集合である．ところが，$\mathbb{N}$ は $\alpha\mathbb{N}$ の閉集合ではないから，$x_\infty \in F$ でなければならない．よって，F は $\mathfrak{O}$ に関する点列閉集合である． □

A.3　列型空間の位相的性質と点列

次の命題は，命題 6.37 (2) の一般化である．

命題 A.11　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) X が列型空間であるとする．このとき，f が連続であることと f が点列連続であることとは同値である．
(2) X が Fréchet–Urysohn 空間であるとする．このとき，f が $x \in X$ において連続であることと f が x において点列連続であることとは同値である．

証明　「連続ならば点列連続である」ことはすでに命題 6.37 (1) で（一般の位相空間について）示したから，

「連続でなければ点列連続でない」ことを示せばよい．

(1)　X が列型空間であり，f が連続でないとする．すると，Y の閉集合 F であって，$f^{-1}(F)$ が X の閉集合でないものがとれる．X は列型だから，$f^{-1}(F)$ は X の点列閉集合ではない．すなわち，$f^{-1}(F)$ の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，ある点 $x \in X \setminus f^{-1}(F)$ に収束するものが存在する．このとき，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は閉集合 F の点からなる点列だから，$f(x) \in Y \setminus F$ には収束しない（命題 6.35 (1)）．よって，f は点列連続でない．

(2)　X が Fréchet–Urysohn 空間であり，f が $x \in X$ において連続でないとする．すると，$f(x)$ の開近傍 V であって，$f^{-1}(V)$ が x の近傍でないものがとれる．X は Fréchet–Urysohn だから，$x \in \overline{X \setminus f^{-1}(V)} = \mathrm{scl}(X \setminus f^{-1}(V))$ である．すなわち，$X \setminus f^{-1}(V)$ の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，x に収束するものが存在する．このとき，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は閉集合 $Y \setminus V$ の点からなる点列だから，$x \in V$ には収束しない（命題 6.35 (1)）．よって，f は x において点列連続でない．　□

次の命題は，命題 6.44 (2) の一般化である．

命題 A.12　列型空間 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ を接触点とするための必要十分条件は，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列であって x に収束するものが存在することである．

証明　すでに確かめたように，十分性は，列型空間に限らず一般の位相空間で成り立つ（命題 6.44 (1)）．

必要性を示す．点 x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であるとする．x のすべての近傍に含まれるような項 x_n が無限個存在するならば，そのような項だけをとり出すことによって x に収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が構成できる．

次に，x のすべての近傍に含まれる項が有限個しか存在しない場合を考える．この場合，そのような項は存在しないと仮定しても一般性を失わない．x は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点だから，$x \in \overline{\{x_0, x_1, x_2, \dots\}}$ である．したがって，X が列型であることより，$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の点からなる点列 $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で x に収束するものが存在する．x のすべての近傍に含まれるような x_n は存在しないとしたから，写像 $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は非有界である．収束点列の任意の部分列がもとの点列と同じ点に収束することに注意すれば（命題 6.43 (1)），ϕ は狭義単調増加であるとしてよい．このとき，$(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列となる．　□

次の命題は，第一可算空間に関する命題 7.58 (2) の一般化である．

系 A.13　列型空間について，点列コンパクト性と可算コンパクト性は同値である．

証明　可算コンパクト性は，任意の点列が接触点をもつことと同値であった（命題 7.57）．列型空間において，点列が収束部分列をもつことと接触点をもつこととは同値だから（命題 A.12），主張が従う．　□

付録 B

1 の分割

B.1　1 の分割

定義 B.1（弱台，台）　位相空間 X 上の関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対して，その弱台を

$$\operatorname{wksp} f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

と定める．また，f の台を

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

と定める．

定義 B.2（関数族の局所有限性）　位相空間 X 上の関数族 $\{f_i\}_{i \in I}$（$f_i\colon X \to \mathbb{R}$）が局所有限であるとは，その台の族 $\{\operatorname{supp} f_i\}_{i \in I}$ が局所有限であることをいう．

位相空間の部分集合族 $\mathfrak{A}$ が局所有限であることと $\overline{\mathfrak{A}}$ が局所有限であることとは同値だった（命題 2.35）から，$\{f_i\}_{i \in I}$ の局所有限性を $\{\operatorname{wksp} f_i\}_{i \in I}$ の局所有限性で定義しても同じことである．

定義 B.3（部分集合族に従属する関数族）　X を位相空間とし，$\{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合族とする．

(1) X 上の関数族 $\{f_i\}_{i \in I}$ が $\{A_i\}_{i \in I}$ に**弱く従属する**とは，$\{\operatorname{wksp} f_i\}_{i \in I}$ が $\{A_i\}_{i \in I}$ の一対一細分であることをいう．

(2) X 上の関数族 $\{f_i\}_{i \in I}$ が $\{A_i\}_{i \in I}$ に**強く従属する**とは，$\{\operatorname{supp} f_i\}_{i \in I}$ が $\{A_i\}_{i \in I}$ の一対一細分であることをいう．

定義 B.4（1 の分割）　X を位相空間，A を X の部分集合とする．次の 2 条件を満たす関数族 $\{f_i\colon X \to [0,1]\}_{i \in I}$ を，X **における** A **上の 1 の分割**という．

(i) 各 f_i は連続である．

(ii) 任意の点 $x \in A$ に対して，$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ である．

X における X 上の 1 の分割を，単に X **上の 1 の分割**という．

補題 B.5　位相空間 X 上の 1 の分割 $\{f_i\}_{i \in I}$ に対して，$\sup_{i \in I} f_i$ は連続関数である．

証明　$x \in X$ を任意にとる．任意の $\epsilon > 0$ に対して $f_i(x) \geq \epsilon$ となる $i \in I$ は有限個しかないから，最大値 $M = \max_{i \in I} f_i(x) > 0$ が存在する．さて，$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ だから，有限個の互いに異なる $i_0, \ldots, i_{n-1} \in I$

をとって

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_{i_k}(x) > 1 - \frac{M}{2}$$

が成り立つようにできる．このとき，ある $k \in \{0, \dots, n-1\}$ について $f_{i_k}(x) = M$ だから，一般性を失わず，$f_{i_0}(x) = M$ であるとしてよい．f_{i_0}, ..., $f_{i_{n-1}}$ は連続だから，x の十分小さい近傍 U をとれば，2 条件

(i) 任意の $y \in U$ に対して，$\sum_{k=0}^{n-1} f_{i_l}(y) \geq 1 - M/2$ である．
(ii) 任意の $y \in U$ に対して，$f_{i_0}(y) \geq M/2$ である．

が成り立つ．このとき，$i \in I \setminus \{i_0, \dots, i_{n-1}\}$ に対しては，(i) より任意の $y \in U$ に対して $f_i(y) \leq M/2$ である．一方で，(ii) より，任意の $y \in U$ に対して

$$\sup_{i \in I} f_i(y) = \max\{f_{i_0}(y), \dots, f_{i_{n-1}}(y)\}$$

である．$\max\{f_{i_0}, \dots, f_{i_{n-1}}\}$ は連続だから，$\sup_{i \in I} f_i$ は U 上で連続である．よって，$\sup_{i \in I} f_i$ は連続である． □

命題 B.6　位相空間 X とその被覆 $\{A_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) $\{A_i\}_{i \in I}$ に弱く従属する 1 の分割が存在する．
(b) $\{A_i\}_{i \in I}$ に強く従属する 1 の分割が存在する．
(c) $\{A_i\}_{i \in I}$ に弱く従属する局所有限な 1 の分割が存在する．
(d) $\{A_i\}_{i \in I}$ に強く従属する局所有限な 1 の分割が存在する．

証明　(d) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a)，(d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (d)　$\{A_i\}_{i \in I}$ に弱く従属する 1 の分割 $\{f_i\}_{i \in I}$ がとれたとする．$f = \sup_{i \in I} f_i$ とし，各 $i \in I$ に対して関数 $g_i \colon X \to [0, 1]$ を

$$g_i = \max\left\{f_i - \frac{f}{2}, 0\right\}$$

と定める．補題より f は連続だから，各 g_i も連続である．また，$f_i - f/2$ が連続であること，命題 2.22，常に $f > 0$ であることより，

$$\operatorname{supp} g_i = \overline{\left(f_i - \frac{f}{2}\right)^{-1}((0, \infty))} \subseteq \left(f_i - \frac{f}{2}\right)^{-1}([0, \infty)) \subseteq \operatorname{wksp} f_i \subseteq A_i$$

である．すなわち，$\{g_i\}_{i \in I}$ は $\{A_i\}_{i \in I}$ に強く従属する．

$\{g_i\}_{i \in I}$ が局所有限であることを示そう．点 $x \in X$ を任意にとり，i_0, ..., $i_{n-1} \in I$ を $\sum_{k=0}^{n-1} f_{i_k}(x) > 1 - f(x)/2$ が成り立つように選ぶ．f_{i_0}, ..., $f_{i_{n-1}}$ および f は連続だから（補題 B.5），x の十分小さい近傍 U をとれば，任意の $y \in U$ に対して $\sum_{k=0}^{n-1} f_{i_k}(y) > 1 - f(y)/2$ が成り立つ．このとき $i \in I \setminus \{i_0, \dots, i_{n-1}\}$ に対して $f_i(y) \leq f(y)/2$，すなわち $g_i(y) = 0$ だから，$U \cap (\operatorname{wksp} g_i) = \emptyset$ である．よって，$\{g_i\}_{i \in I}$ は局所有限である．

よって，連続関数 $g = \sum_{i \in I} g_i$ が定義でき，容易にわかるように X 上で $g > 0$ となる．$\{g_i\}_{i \in I}$ は $\{A_i\}_{i \in I}$ に強く従属する局所有限な関数族だったから，$\{g_i/g\}_{i \in I}$ は $\{A_i\}_{i \in I}$ に強く従属する局所有限な 1 の分割を与える． □

B.2　開被覆の収縮

定義 B.7　位相空間 X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ の**収縮**とは，同じ添字集合をもつ X の開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ であって，$\{\overline{V_i}\}_{i\in I}$ が $\{U_i\}_{i\in I}$ を一対一細分するもののことをいう．このとき，$\{V_i\}_{i\in I}$ は $\{U_i\}_{i\in I}$ を**収縮する**ともいう．開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ に収縮が存在するとき，この開被覆は**収縮可能**であるという．

定理 B.8　位相空間 X に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) X は正規である．
(b) X の任意の有限開被覆は収縮可能である．
(c) X の任意の局所有限開被覆は収縮可能である．
(d) X の任意の点有限開被覆は収縮可能である．

証明　(d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとする．互いに交わらない X の閉集合 E, F を任意にとる．$\{X\setminus E, X\setminus F\}$ は X の有限開被覆だから，(b) より，これを収縮する開被覆 $\{U, V\}$ が存在する．このとき，X の開集合 $X\setminus\overline{U}$, $X\setminus\overline{V}$ は E と F を分離する．よって，X は正規である．

(a) $\Longrightarrow$ (d)　X が正規であるとする．X の点有限開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を任意にとる．整列可能定理によって，I を整列集合とみなしておく．開集合族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を，次の 2 条件を満たすように超限再帰的に構成する．

(i) 任意の $i\in I$ に対して，$\overline{V_i}\subseteq U_i$ である．
(ii) 任意の $i\in I$ に対して，$\{V_j\}_{j\le i}\cup\{U_j\}_{j>i}$ は X を被覆する．

以下，その構成を示す．

$i<i_0$ に対しては V_i が定まり，かつ上の条件 (i), (ii) が満たされているとする．このとき V_{i_0} を構成して，$i=i_0$ に対しても (i), (ii) が成り立つようにしたい．まず，$\{V_j\}_{j<i_0}\cup\{U_j\}_{j\ge i_0}$ が X を被覆することを示す．点 $x\in X$ を任意にとる．$x\in U_i$ を満たす $i\in I$（点有限性よりこれは有限個である）の中で最大のものを i_1 とする．$i_1\ge i_0$ ならば $x\in U_{i_0}$ によって，$i_1<i_0$ ならば再帰の仮定によって，いずれにしても

$$x\in\bigcup_{j<i_0}V_j\cup\bigcup_{j\ge i_0}U_j$$

となる．これで，$\{V_j\}_{j<i_0}\cup\{U_j\}_{j\ge i_0}$ が X を被覆することが示された．したがって，

$$X\setminus\left(\bigcup_{j<i_0}V_j\cup\bigcup_{j>i_0}U_j\right)\subseteq U_{i_0}$$

が成り立つ．この式の左辺は X の閉集合であり，右辺は X の開集合だから，X の正規性より，X の開集合 V_{i_0} であって

$$X\setminus\left(\bigcup_{j<i_0}V_j\cup\bigcup_{j>i_0}U_j\right)\subseteq V_{i_0}\subseteq\overline{V_{i_0}}\subseteq U_{i_0}$$

を満たすものがとれる．このように定めれば，$i=i_0$ に対しても (i), (ii) が成り立つ．これで，条件を満たす $\{V_i\}_{i\in I}$ を構成できることがわかった．

最後に，このように構成した $\{V_i\}_{i\in I}$ が X を被覆することは，(i) と (ii) より

$$\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\leq i} V_j \cup \bigcup_{j>i} U_j\right) = X$$

であることからわかる． □

B.3　1 の分割と正規空間

定理 B.9　位相空間 X に対して，次の 5 条件は同値である．[*1]

(a) X は正規である．
(b) X の任意の有限開被覆が，それに弱く従属する 1 の分割をもつ．
(c) X の任意の有限開被覆が，それに強く従属する 1 の分割をもつ．
(d) X の任意の局所有限開被覆が，それに弱く従属する 1 の分割をもつ．
(e) X の任意の局所有限開被覆が，それに強く従属する 1 の分割をもつ．

証明　(b) $\Longleftrightarrow$ (c)，(d) $\Longleftrightarrow$ (e)　命題 B.6 から従う．

(d) $\Longrightarrow$ (b)，(e) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　X の互いに交わらない閉集合 E, F を任意にとる．$\{X\setminus E, X\setminus F\}$ は X の有限開被覆だから，仮定 (b) より，連続関数 $f, g\colon X\to[0,1]$ であって $f+g=1$ かつ $f(E), g(F)\subseteq\{0\}$ を満たすものが存在する．このとき $f(F)\subseteq\{1\}$ だから，f は E と F を分離する．よって，X は正規である．

(a) $\Longrightarrow$ (e)　X を正規空間とし，$\{U_i\}_{i\in I}$ を X の局所有限開被覆とする．定理 B.8 より，X の開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ であって $\overline{V_i}\subseteq U_i$（$i\in I$）を満たすものがとれる．$X$ の正規性より，各 $i\in I$ に対して $\overline{V_i}\subseteq W_i\subseteq\overline{W_i}\subseteq U_i$ を満たす開集合 W_i がとれる．さらに Urysohn の補題（定理 5.38）より，連続関数 $f_i\colon X\to[0,1]$ であって $f_i(\overline{V_i})\subseteq\{1\}$ かつ $f_i(X\setminus W_i)\subseteq\{0\}$ を満たすものがとれる．

このとき $\operatorname{supp} f_i\subseteq\overline{W_i}\subseteq U_i$ が成り立ち，$\{U_i\}_{i\in I}$ が局所有限だから $\{\operatorname{supp} f_i\}_{i\in I}$ も局所有限である．また，$\{V_i\}_{i\in I}$ は X の被覆だから，X 上常に $\sum_{i\in I} f_i>0$ である．そこで $f=\sum_{i\in I} f_i$ と置けば，$\{f_i/f\}_{i\in I}$ は $\{U_i\}_{i\in I}$ に強く従属する 1 の分割である． □

系 B.10　X を正規空間，A を X の閉集合とする．このとき，X における任意の A の有限開被覆に対して，それに強く従属する（X における A 上の）1 の分割が存在する．

証明　$\{U_0,\dots,U_{n-1}\}$ を X における A の有限開被覆とする．このとき $\{U_0,\dots,U_{n-1},X\setminus A\}$ は X の有限開被覆だから，定理 B.9 より，これに強く従属する 1 の分割 $\{f_0,\dots,f_{n-1},f\}$ が存在する．$\operatorname{supp} f\subseteq X\setminus A$ より A 上で $f=0$ だから，A 上で $f_0+\dots+f_{n-1}=1$ が成り立つ．よって，$\{f_0,\dots,f_{n-1}\}$ は $\{U_0,\dots,U_{n-1}\}$ に強く従属する X における A 上の 1 の分割である． □

B.4　1 の分割とパラコンパクト空間

定理 B.11　擬分離空間 X に対して，次の 5 条件は同値である．

[*1] 条件 (b)–(e) について，開被覆として有限・局所有限なものしか考えていないため，それに（弱く・強く）従属する 1 の分割は自動的に局所有限になることに注意せよ．

(a) X はパラコンパクトである．
(b) X の任意の開被覆が，それに弱く従属する 1 の分割をもつ．
(c) X の任意の開被覆が，それに強く従属する 1 の分割をもつ．
(d) X の任意の開被覆が，それに弱く従属する局所有限な 1 の分割をもつ．
(e) X の任意の開被覆が，それに強く従属する局所有限な 1 の分割をもつ．

証明 (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e) 命題 B.6 から従う．

(d) $\Longrightarrow$ (a) (d) が成り立つとする．X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を任意にとると，(d) より，これに弱く従属する 1 の分割 $\{f_i\}_{i\in I}$ が存在する．このとき，$\{\operatorname{wksp} f_i\}_{i\in I}$ は $\{U_i\}_{i\in I}$ を細分する局所有限な開被覆である．よって，X はパラコンパクトである．

(a) $\Longrightarrow$ (e) X をパラコンパクト擬分離空間とし，X の任意の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとる．パラコンパクト性より，$\{U_i\}_{i\in I}$ を一対一細分する局所有限開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ がとれる[*2]．パラコンパクト擬分離空間は正規だから（命題 8.5）だから，定理 B.9 より，$\{V_i\}_{i\in I}$ に強く従属する局所有限な 1 の分割 $\{f_i\}_{i\in I}$ がとれる．この $\{f_i\}_{i\in I}$ は，$\{U_i\}_{i\in I}$ に強く従属する局所有限な 1 の分割である． □

系 B.12 X をパラコンパクト擬分離空間，A を X の閉集合とする．このとき，任意の X における A の開被覆に対して，それに強く従属する X における A 上の 1 の分割が存在する．

証明 $\{U_i\}_{i\in I}$ を X における A の開被覆とする．すると $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus A\}$ は X の開被覆だから，定理 B.11 より，これに強く従属する 1 の分割 $\{f_i\}_{i\in I} \cup \{f\}$ が存在する．$\operatorname{supp} f \subseteq X \setminus A$ より A 上で $f = 0$ だから，A 上で $\sum_{i\in I} f_i = 1$ が成り立つ．よって，$\{f_i\}_{i\in I}$ は $\{U_i\}_{i\in I}$ に強く従属する X における A 上の 1 の分割である． □

系 B.13 X を局所コンパクト分離空間，K を X のコンパクト集合とする．このとき，X における K の開被覆に対して，それに強く従属する X における K 上の 1 の分割が存在する．さらに，この 1 の分割 $\{f_i\}_{i\in I}$ は，任意の $i \in I$ に対して $\operatorname{supp} f_i$ がコンパクトであるようにとれる．

証明 $\{U_i\}_{i\in I}$ を X における K の開被覆とする．X の 1 点コンパクト化を αX とすると，K は αX の閉集合だから，$\{U_i\}_{i\in I} \cup \{\alpha X \setminus K\}$ は αX の開被覆である．αX はコンパクト分離であり，特にパラコンパクト分離だから，系 B.12 より，$\{U_i\}_{i\in I} \cup \{\alpha X \setminus K\}$ に強く従属する αX における A 上の 1 の分割 $\{f_i\}_{i\in I} \cup \{f\}$ の存在がいえる．このとき，$\{f_i|_X\}_{i\in I}$ は $\{U_i\}_{i\in I}$ に強く従属する X における K 上の 1 の分割である．

次に，1 の分割に属する各関数の台がコンパクトになるようにできることを示す．K を含む相対コンパクトな開集合 V をとっておく（命題 7.27 (2)）．$\{U_i \cap V\}_{i\in I}$ も X における K の開被覆だから，前段の結論より，$\{U_i \cap V\}_{i\in I}$ に強く従属する X における K 上の 1 の分割 $\{g_i\}_{i\in I}$ がとれる．V は相対コンパクトだから，このとき $\operatorname{supp} g_i$ はあるコンパクト集合の閉集合であり，したがってコンパクトである（命題 7.4）．よって，この $\{g_i\}_{i\in I}$ が求める 1 の分割となる． □

最後に，正規空間に対する定理 B.8 に対応する，パラコンパクト擬分離空間に対する定理を示しておく．これは，命題 7.14 の一般化になっている．

定理 B.14 パラコンパクト擬分離空間において，任意の開被覆は収縮可能である．

証明 X をパラコンパクト擬分離空間とする．X の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を任意にとる．パラコンパクト擬分離空間は正則だから（命題 8.5），X の開被覆 $\mathfrak{V}$ であって，$\overline{\mathfrak{V}}$ が $\mathfrak{U}$ を細分するようなものがとれる（命

[*2] 「一対一」細分がとれることについては，定義 8.1 の後の注意書きを参照のこと．

題 5.30)．さらに，X はパラコンパクトだから，$\mathfrak{V}$ を細分する局所有限開被覆 $\mathfrak{W}$ がとれる．各 $i \in I$ に対して，$\mathfrak{W}$ の元であってその閉包が U_i に含まれるようなもの全体の合併を W_i とする．$\mathfrak{V}$ は X の開被覆であり，定義より $\mathfrak{V}$ の各元の閉包は $\mathfrak{U}$ のある元に含まれるから，$\{V_i\}_{i \in I}$ は X の開被覆である．また，$\mathfrak{V}$ は局所有限，したがって閉包保存だから（命題 2.36），各 $i \in I$ に対して $\overline{V_i} \subseteq U_i$ である． □

B.5 応用：正規性・パラコンパクト擬分離性が σ-閉部分空間に遺伝することの別証明

1 の分割を用いて，定理 5.35 と系 8.9 の別証明を与える．

定理 B.15（定理 5.35 と同内容）　正規空間の σ-閉部分空間は正規である．

証明　位相空間 X が正規であることは，X の任意の有限開被覆がそれに弱く従属する 1 の分割をもつことと同値である（定理 B.9）．したがって，X の任意の有限開被覆がそれに弱く従属する 1 の分割をもつとして，X の σ-閉部分空間 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$（各 F_n は X の閉集合）も同じ性質をもつことを示せばよい．

X における A の有限開被覆 $\{U_0, \dots, U_{m-1}\}$ を任意にとる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{U_0, \dots, U_{m-1}, X \setminus F_n\}$ は X の開被覆だから，これに弱く従属する X 上の 1 の分割 $\{f_{n,0}, \dots, f_{n,m-1}, f_n\}$ が存在する．これを用いて，$i \in \{0, \dots, m-1\}$ に対して関数 $g_i \colon A \to [0,1]$ を

$$g_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n-1} f_{n,i}|_A$$

と定める．g_i は連続関数の一様収束極限だから連続であり，$\operatorname{wksp} g_i \subseteq U_i \cap A$ を満たす．また，$g = g_0 + \dots + g_{m-1}$ は A 上で常に 0 より大きい値をとる連続関数である．よって，$\{g_0/g, \dots, g_{m-1}/g\}$ は $\{U_0 \cap A, \dots, U_{m-1} \cap A\}$ に弱く従属する A 上の 1 の分割である．これで，主張は示された． □

定理 B.16（系 8.9 と同内容）　パラコンパクト擬分離空間の σ-閉部分空間はパラコンパクト擬分離である．

証明　擬分離空間 X がパラコンパクトであることは，X の任意の開被覆がそれに弱く従属する局所有限な 1 の分割をもつことと同値である（定理 B.11）．したがって，X の任意の開被覆がそれに弱く従属する局所有限な 1 の分割をもつとして，X の σ-閉部分空間 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$（各 F_n は閉集合）も同じ性質をもつことを示せばよい．

X における A の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ を任意にとる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{U_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus F_n\}$ は X の開被覆だから，これに弱く従属する局所有限な X 上の 1 の分割 $\{f_{n,i}\}_{i \in I} \cup \{f_n\}$ が存在する．これを用いて，$i \in I$ に対して関数 $g_i \colon A \to [0,1]$ を

$$g_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n-1} f_{n,i}|_A$$

と定める．g_i は連続関数の一様収束極限だから連続であり，$\operatorname{wksp} g_i \subseteq U_i \cap A$ を満たす．また，$\{\operatorname{wksp} g_i\}_{i \in I}$ は局所有限だから，$g = \sum_{i \in I} g_i$ は A 上で常に 0 より大きい値をとる連続関数である．よって，$\{g_i/g\}_{i \in I}$ は $\{U_i \cap A\}_{i \in I}$ に弱く従属する局所有限な A 上の 1 の分割である．これで，主張は示された． □

参考資料

全体にわたって，Bourbaki [14], [15] を大いに参考にした．

位相空間論の入門書として，内田 [24] を挙げる．やや発展的な事項まで扱った位相空間論の教科書として，Kelley [19]，Willard [23]，森田 [27] を挙げる．位相空間論の専門書として，Engelking [18]，児玉・永見 [25] を挙げる．

冒頭の引用文は，Bourbaki（和訳）[16] の「序」，および森 [28] に収録されている「位相構造批判」による．

主要な命題や定理の詳しい参照先は，次のとおりである（原論文あるいはそれに準ずるものは **bold** 体で示した．）．

- 定理 2.12（位相のさまざまな特徴付け）：[24, 定理 15.3, 16.2]
- 命題 2.22（連続であるための条件）：[39]
- 命題 3.32（部分空間の商空間と商空間の部分空間とが同相であるための十分条件）：[14, I.5.2 Prop. 4]
- 命題 3.34（積空間の商空間と商空間の積空間とが同相であるための十分条件）：[14, I.5.3 Cor. de la Prop. 8]
- 定理 4.15（$2^{\aleph_0}$ 個の可分空間の積は可分である）：[**2**], [**3**], [**7**], [23, 16.4], [38]
- 定理 4.21（任意の有限積が可算鎖条件を満たすような族の積は可算鎖条件を満たす）：[20, II 定理 1.9]
- 定理 5.35（正規性は σ-閉部分空間に遺伝する）：[21, Prop. 2.2.4]
- 定理 5.38（Urysohn の補題）：[25, 9.9]
- 定理 5.41（Tietze の拡張定理）：[24, 定理 29.5]
- 命題 5.44（商空間が分離であることと同値関係のグラフが閉であることとの関係）：[14, I.8.3 Prop. 8]
- 命題 5.45（正則分離空間上の閉同値関係のグラフは閉である）：[14, I.8.6 Prop. 14]
- 命題 5.47（正則分離空間の空でない閉集合を 1 点に潰して得られる商空間は分離である）：[14, I.8.6 Prop. 15]
- 定理 6.27（拡張定理）：[14, I.8.5 Thm. 1]
- 定理 6.28（二重極限定理）：[14, I.8.5 Cor. de la Thm. 1]
- 定理 7.17（Tychonoff の定理）：[14, I.9.5 Thm. 3]
- 定理 7.18（Alexander の準開基定理）：[19, 定理 5.6]
- 定理 7.63（可算コンパクト空間の点可算開被覆は有限部分被覆をもつ）：[**31**]
- 定理 7.67（ω_1 個の点列コンパクト空間の積は可算コンパクトである：[**11**]
- 系 8.20（可分メタ Lindelöf ならば Lindelöf である）：[41]
- 系 8.22（可算鎖条件を満たしパラコンパクトならば Lindelöf である）：[32]
- 定理 8.8（Michael の定理）：[**4**]
- 定理 8.10（森田の定理）：[**5**], [27, 定理 28.6]
- 定理 8.11（Lindelöf 強局所コンパクトならばパラコンパクト）：[26, II.15 補題 2]
- 定理 8.14（強局所コンパクト空間についてパラコンパクト性と σ-コンパクト空間の族の和空間として

表せることとは同値である）：[14, I.9.10 Thm. 5], [25, 17.17]

- 定理 8.15（σ-コンパクト分離空間はメタコンパクトである）：[42]
- 定理 8.16（パラコンパクト空間とコンパクト空間との積はパラコンパクトである）：[25, 17.19]
- 定理 8.17（パラコンパクトと強局所コンパクトパラコンパクトとの積はパラコンパクトである）：[25, 17.20]
- 定理 8.18 （パラコンパクト分離空間と σ-コンパクト正則分離空間との積はパラコンパクト分離である）：[29]
- 命題 9.16（局所連結空間の商は局所連結である）：[14, I.11.6 Prop. 12]
- 定理 10.27（Stone の定理）：[**12**], [**8**]
- 定理 11.19（擬距離空間がコンパクトであるための条件）：[13, 3 定理 6]
- 定理 12.16（コンパクト距離化可能空間の閉連続像はコンパクト距離化可能である）：[23, 23.2]
- 定理 12.19（Bing–長田–Smirnov の距離化定理）：[**1**], [**6**], [**9**], [30]
- 定理 12.21（局所擬距離化可能かつパラコンパクト擬分離ならば擬距離化可能である）：[**10**], [40]
- 命題 12.27 （完備擬距離化可能空間の δ-開部分空間は完備擬距離化可能である）：[15, IX.6.1 Prop. 2, 3], [35, 命題 3.3]
- 命題 12.28（分離空間の稠密部分空間は完備距離化可能ならば δ-開である）：[15, IX.6.1 Thm. 1], [35, 命題 3.4]
- 定理 12.35（可算コンパクト正則ならば Baire である）：[23, 25.3]
- 定理 13.21（コンパクト一様空間の一様構造）：[19, 6.29, 6.30]
- 定理 13.24（Lebesgue の被覆補題）：[14, II.4 Exer. 1]
- 定理 14.17（コンパクト一様空間の一様被覆系）：[23, 36.19]
- 定理 16.17（極小 Cauchy フィルタの存在）：[14, II.3.2 Prop. 5]
- 定理 16.29（完備分離一様空間に対する拡張定理）：[14, II.3.6 Thm. 2]
- 定理 16.50（完備化の存在と一意性）：[14, II.3.7 Thm. 3]
- 補題 17.14（完備分離な一様構造と一致するための十分条件）：[14, II.3.7 Prop. 14]
- 定理 17.16（ゲージ化補題）：[15, IX.1.4 Prop. 2]
- 定理 18.34（Ascoli–Arzelà の定理）：[15, X.2.5 Thm. 2]
- 定理 18.51（コンパクト開位相とカリー化との関係）：[15, X.3.4 Thm. 3]
- 定理 18.54（$\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X \times Y; Z)$ と $\mathscr{C}_{\mathrm{co}}(X; \mathscr{C}_{\mathrm{co}}(Y; Z))$ との自然な同相）：[15, X.3.4 Cor. 2 de la Thm. 3], [17, Thm. 2.4.7]
- 定理 18.55（コンパクト開位相とコンパクト一様収束位相との関係）：[15, X.3.4 Thm. 2]
- 定理 18.61（Dini の定理）：[15, X.4.1 Thm. 1]
- 定理 18.66（Stone–Weierstrass の定理）：[15, X.4.2 Thm. 3]
- 命題 A.7（Fréchet–Urysohn であるための条件）：[33]
- 命題 A.9（列型空間の商は列型である）：[33]
- 定理 A.10（列型であるための条件）：[34]
- 命題 B.6（種々の 1 の分割の存在の同値性）：[37, 補題 4.7]
- 定理 B.8（正規空間において点有限開被覆は収縮可能である）：[15, IX.4.3 Thm. 3]
- 定理 B.16 （正規性・パラコンパクト擬分離性が σ-閉部分空間に遺伝することの 1 の分割を用いた証明）：[37, 定理 4.10]

論文

[1] R. H. Bing, “Metrization of topological spaces”, *Canadian Journal of Mathematics* **3**.2 (1951): 175–186.

[2] E. Hewitt, “A remark on density characters”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **52**.8 (1946): 641–643.

[3] E. Marczewski, “Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques”, *Fundamenta Mathematicae* **34**.1 (1947): 127–143.

[4] E. Michael, “A note on paracompact spaces”, *Proceedings of the American Mathematical Society* **4**.5 (1953): 831–838.

[5] K. Morita (森田 紀一), “Star-finite coverings and star-finite property”, *Mathematica Japonica* **1** (1948): 60–68.

[6] J. Nagata (長田 潤一), “On a necessary and sufficient condition of metrizability”, *Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University. Series A: Mathematics* **1**.2 (1950): 93–100.

[7] E. S. Pondiczery, “Power problems in abstract spaces”, *Duke Mathematical Journal* **11**.4 (1944): 835–837.

[8] M. E. Rudin, “A new proof that metric spaces are paracompact”, *Proceedings of the American Mathematical Society* **20**.2 (1969): 603.

[9] Yu. M. Smirnov, “A necessary and sufficient condition for metrizability of topological spaces”, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **77** (1951): 197–200.

[10] Yu. M. Smirnov, “On metrization of topological spaces”, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* **6**.6 (1951): 100–111.

[11] C. T. Scarborough, A. H. Stone, “Products of nearly compact spaces”, *Transactions of the American Mathematical Society* **124**.1 (1966): 131–147.

[12] A. H. Stone, “Paracompactness and product spaces”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **54**.10 (1948): 977–982.

文献

[13] L. V. Ahlfors（著），笠原 乾吉（訳），『複素解析』，現代数学社，1982.

[14] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Topologie générale: Chapitres 1 à 4*, Springer, 2007.

[15] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Topologie générale: Chapitres 5 à 10*, Springer, 2007.

[16] N. Bourbaki (著), 森 毅, 清水 達雄 (訳),『ブルバキ数学原論 位相 1』, 東京図書, 1968.（Bourbaki [14] の第 1 章，第 2 章の和訳である．）

[17] T. tom Dieck, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, 2008.

[18] R. Engelking, *General Topology*, revised and completed edition, Heldermann Verlag, 1989.

[19] J. L. Kelley（著），児玉 之宏（訳），『位相空間論』，吉岡書店，1968.

[20] K. Kunen（著），藤田 博司（訳），『集合論 独立性証明への案内』，日本評論社，2008.

[21] K. Sakai (酒井 克郎), *Geometric Aspects of General Topology*, Springer, 2013.

[22] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*, revised edition, Dover Publications,

1995.
[23] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.
[24] 内田 伏一,『集合と位相』, 裳華房, 1986.
[25] 児玉 之宏, 永見 啓応,『位相空間論』, 岩波書店, 1974.
[26] 松島 与三,『多様体入門』, 裳華房, 1965.
[27] 森田 紀一,『位相空間論』, 岩波書店, 1981.
[28] 森 毅,『位相のこころ』, 筑摩書房, 2006.

ウェブページ

以下のウェブページには, 2021 年 1 月 1 日にアクセスし, 内容を確認した.

[29] concious4410, 電波通信「パラコンパクト性など：アドベントカレンダー 2015」, 2015.
http://concious4410.hatenablog.com/entry/2015/12/11/205721
[30] concious4410, 電波通信「距離化可能定理 part−1:BNS」, 2016.
http://concious4410.hatenablog.com/entry/2016/01/22/132906
[31] concious4410, 電波通信「点可算被覆と可算コンパクト性」, 2016.
http://concious4410.hatenablog.com/entry/2016/12/29/214356
[32] Dan Ma, Dan Ma's Topology Blog 'CCC + Paracompact => Lindelof', 2009.
https://dantopology.wordpress.com/2009/10/18/ccc-paracompact-lindelof/
[33] Dan Ma, Dan Ma's Topology Blog 'Sequential spaces, I', 2010.
https://dantopology.wordpress.com/2010/06/21/sequential-spaces-i/
[34] Dan Ma, Dan Ma's Topology Blog 'Sequential spaces, II', 2010.
https://dantopology.wordpress.com/2010/06/23/sequential-spaces-ii/
[35] yamyamtopo, トポロジーいろいろ「位相空間論における反例と線形順序」, 2017.
https://yamyamtopo.wordpress.com/2017/07/08/位相空間論における反例と線形順序/
[36] yamyamtopo, トポロジーいろいろ「コンパクト開位相をめぐって」, 2017.
https://yamyamtopo.wordpress.com/2017/01/19/コンパクト開位相をめぐって/
[37] yamyamtopo, トポロジーいろいろ「パラコンパクト性 PDF」, 2020 年 3 月 29 日修正版, 2020.
https://yamyamtopo.wordpress.com/2015/12/19/パラコンパクト性-pdf/
[38] yujitomo, yujitomo のブログ「Hewitt-Marczewski-Pondiczery の定理」, 2016.
http://yujitomo.hatenablog.com/entry/2016/02/09/130631
[39] y_bonten, y_bonten's blog「連続写像のさまざまな定義」, 2017.
http://y-bonten.hatenablog.com/entry/2017/10/19/113603
[40] サクラ, 環付サクラ空間「距離化可能性」, 2018.
http://ringed-sakura.space/math.html
[41] π-Base '(Separable $\wedge$ Metacompact) $\Rightarrow$ Lindelof'.
https://topology.jdabbs.com/theorems/I000024
[42] π-Base '($T_2 \wedge \sigma$-compact) $\Rightarrow$ Metacompact'.（現在アクセス不能）