Hilbert 空間

箱

2025 年 6 月 19 日

概要

Hilbert 空間とその上の連続線型作用素について解説する．Hilbert 空間上のコンパクト作用素については，ノルム空間・Banach 空間上での一般論を認めた上で，コンパクト正規作用素のスペクトル分解を証明し，Hilbert–Schmidt 作用素やトレースクラス作用素について解説する．最後に，種々の作用素位相を定義し，その基本的な性質を見る．

目次

記号と用語

- 本稿を通して，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．特に断らなければ，線型空間の係数体は $\mathbb{K}$ とする．
- 実線型空間 V の複素化を，$V_{(\mathbb{C})}$ と書く．
- 線型空間 V 上の恒等作用素を，1_V と書く．
- 位相線型空間 V から W への連続線型作用素全体のなす空間，コンパクト作用素（すなわち，線型作用素であって，原点 $0 \in V$ のある近傍を W の相対コンパクト集合に移すもの）全体のなす空間，有限階数の連続線型作用素全体のなす空間を，それぞれ $\mathscr{L}(V;W)$, $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V;W)$, $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V;W)$ と書く．$V=W$ である場合は，これらを単に $\mathscr{L}(V)$, $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V)$, $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V)$ と書く．
- 特に断らなければ，ノルム空間 V のノルムを，$\|{-}\|_V$ あるいは単に $\|{-}\|$ と書く．
- 特に断らなければ，ノルム空間 V に対して，$\mathscr{L}(V)$ は作用素ノルムによってノルム空間とみなし，$x \in \mathscr{L}(V)$ の作用素ノルムを $\|x\|$ と書く．
- 位相線型空間 V 上の連続線型作用素 x に対して，そのスペクトルを，$\mathrm{Sp}(x)$ と書く．すなわち，$\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda 1_V - x$ が $\mathscr{L}(V)$ において可逆$\}$ である．

1 Hilbert 空間

1.1 準双線型写像

定義 1.1（準双線型写像） V_1, V_2, W を線型空間とする．

(1) 写像 $\Phi\colon V_1 \times V_2 \to W$ が**準双線型**（sesquilinear）であるとは，任意の $\xi_2 \in V_2$ に対して写像 $\Phi(-,\xi_2)\colon V_1 \to W$ が共役線型であり，任意の $\xi_1 \in V_1$ に対して写像 $\Phi(\xi_1,-)\colon V_2 \to W$ が線型であることをいう．$W=\mathbb{K}$ である場合は，$V_1 \times V_2$ から $\mathbb{K}$ への準双線型写像を，$V_1 \times V_2$ 上の**準双線型形式**（sesquilinear form）という．さらに，$V_1 = V_2$ である場合は，$V_1 \times V_1$ 上の準双線型形式を，単に V_1 上の準双線型形式という．

(2) $\Phi\colon V_1 \times V_2 \to W$ を準双線型写像とする．V_1 から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2, W)$ への共役線型写像 $\xi_1 \mapsto \Phi(\xi_1,-)$ の

核を，Φ の**左退化空間**（left degenerate space）という．Φ の左退化空間が 0 であるとき，Φ は**左非退化**（left non-degenerate）であるという．V_2 から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{V_1}, W)$ への線型写像 $\xi_2 \mapsto \Phi(-, \xi_2)$ の核を，Φ の**右退化空間**（right degenerate space）という．Φ の右退化空間が 0 であるとき，Φ は**右非退化**（right non-degenerate）であるという．

係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ である場合には，準双線型写像とは，双線型写像のことにほかならない．

定義 1.2（Hermite 形式） V を線型空間とする．

(1) 準双線型形式 $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が **Hermite**（hermitian）であるとは，任意の $\xi,\ \eta \in V$ に対して $\Phi(\eta, \xi) = \overline{\Phi(\xi, \eta)}$ であることをいう．このとき，Φ は V 上の **Hermite 形式**（hermitian form）であるという．

(2) 容易に確かめられるように，Hermite 形式 $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ の左退化空間と右退化空間は等しい．この共通の空間を，Φ の**退化空間**（degenerate space）という．Φ の退化空間が 0 であるとき，Φ は**非退化**（non-degenerate）であるという．

(3) Hermite 形式 $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が**正値**（positive）であるとは，任意の $\xi \in V$ に対して $\Phi(\xi, \xi) \geq 0$ であることをいう．

係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ である場合には，Hermite 形式とは，対称双線型形式のことにほかならない．

例 1.3（標準内積） $n \in \mathbb{N}$ とする．$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\Phi((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \mu_i$$

と定めると，容易に確かめられるように，Φ は $\mathbb{K}^n$ 上の非退化正値 Hermite 形式である．この Φ を，$\mathbb{K}^n$ の**標準内積**（standard inner product）という．

命題 1.4（分極公式） V と W を線型空間とし，$\Phi\colon V \times V \to W$ を準双線型写像とする．

(1) 係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ であり，Φ が対称ならば，任意の $\xi, \eta \in V$ に対して，

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\Phi(\xi + \eta, \xi + \eta) - \Phi(\xi - \eta, \xi - \eta))$$

が成り立つ．

(2) 係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ ならば，任意の $\xi, \eta \in V$ に対して，

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\Phi(\xi + \eta, \xi + \eta) - \Phi(\xi - \eta, \xi - \eta) - i\Phi(\xi + i\eta, \xi + i\eta) + i\Phi(\xi - i\eta, \xi - i\eta))$$

が成り立つ．

証明 右辺を展開することで確かめられる． □

系 1.5 複素線型空間 V 上の準双線型形式 $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ が Hermite であるための必要十分条件は，任意の $\xi \in V$ に対して $\Phi(\xi, \xi) \in \mathbb{R}$ であることである．

証明 必要性は明らかであり，十分性は分極公式（命題 1.4 (2)）から従う． □

系 1.6 V と W を線型空間とし，$\Phi, \Psi\colon V \times V \to W$ を準双線型写像とする．係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ であり Φ と Ψ が対称であるか，または係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ であるとする．このとき，$\Phi = \Psi$ であるための必要十分条件は，任意の $\xi \in V$ に対して $\Phi(\xi, \xi) = \Psi(\xi, \xi)$ であることである．

証明 分極公式（命題 1.4）から従う． □

命題 1.7（中線定理） V と W を線型空間とし，$\Phi\colon V \times V \to W$ を実双線型写像とする．任意の $\xi, \eta \in V$ に対して，

$$\Phi(\xi+\eta, \xi+\eta) + \Phi(\xi-\eta, \xi-\eta) = 2(\Phi(\xi, \xi) + \Phi(\eta, \eta))$$

が成り立つ．

証明 左辺を展開することで確かめられる． □

命題 1.8（Cauchy–Schwarz の不等式） V を線型空間とし，$\Phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を正値 Hermite 形式とする．任意の $\xi, \eta \in V$ に対して，

$$|\Phi(\xi, \eta)|^2 \leq \Phi(\xi, \xi)\Phi(\eta, \eta)$$

が成り立つ．さらに，Φ が非退化であるとき，この不等式の等号成立条件は，ξ と η の一方が他方のスカラー倍に等しいことである．

証明 Φ が正値であることより，任意の $t \in \mathbb{R}$ と絶対値 1 の複素数 λ に対して，

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Phi(\xi + t\lambda\eta, \xi + t\lambda\eta) \\ &= \Phi(\xi, \xi) + (2\operatorname{Re}\Phi(\xi, \lambda\eta))t + \Phi(\lambda\eta, \lambda\eta)t^2 \\ &= \Phi(\xi, \xi) + (2\operatorname{Re}\lambda\Phi(\xi, \eta))t + \Phi(\eta, \eta)t^2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

が成り立つ．したがって，判別式を考えることで，

$$\Phi(\xi, \xi)\Phi(\eta, \eta) - (\operatorname{Re}\lambda\Phi(\xi, \eta))^2 \geq 0 \tag{$**$}$$

を得る．絶対値 1 の複素数 λ を $\lambda\Phi(\xi, \eta) = |\Phi(\xi, \eta)|$ となるようにとれば，主張の不等式を得る．

ξ と η の一方が他方のスカラー倍に等しい場合，明らかに，主張の不等式の等号が成立する．逆に，主張の不等式の等号が成立するとすると，ある絶対値 1 の複素数 λ が存在して ($**$) の等号が成立するから，この λ とある $t \in \mathbb{R}$ に対して ($*$) の等号が成立するか，または $\Phi(\eta, \eta) = 0$ でなければならない．Φ が非退化であるとすると，前者は $\xi + t\lambda\eta = 0$ を意味し，後者は $\eta = 0$ を意味する．よって，このとき，ξ と η の一方は他方のスカラー倍に等しい． □

系 1.9 I を集合とし，各 $i \in I$ に対して λ_i, $\mu_i \in \mathbb{C}$ とする．

(1) 各 $i \in I$ に対して λ_i, $\mu_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ であるとする．このとき，

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i \leq \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i \in I} \mu_i^2\right)^{1/2}$$

が成り立つ．

(2) $\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2<\infty$ かつ $\sum_{i\in I}|\mu_i|^2<\infty$ であるとする．このとき，$(\lambda_i\mu_i)_{i\in I}$ は総和可能であり，

$$\left|\sum_{i\in I}\lambda_i\mu_i\right| \leq \sum_{i\in I}|\lambda_i\mu_i| \leq \left(\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}|\mu_i|^2\right)^{1/2}$$

が成り立つ．

このとき，

証明 (1) I が有限である場合は，一般性を失わず $I=\{1,\dots,n\}$（$n\in\mathbb{N}$）であると仮定して，$\mathbb{R}^n$ 上の標準内積（例 1.3）に対して Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）を用いれば，主張の不等式を得る．一般の場合を考える．添字集合が有限である場合の結果より，任意の有限部分集合 $J\subseteq I$ に対して，

$$\sum_{i\in J}\lambda_i\mu_i \leq \left(\sum_{i\in J}\lambda_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in J}\mu_i^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in I}\lambda_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}\mu_i^2\right)^{1/2}$$

が成り立つ．よって，主張の不等式が成り立つ．

(2) (1) より

$$\sum_{i\in I}|\lambda_i\mu_i| \leq \left(\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}|\mu_i|^2\right)^{1/2} < \infty$$

だから，$(\lambda_i\mu_i)_{i\in I}$ は総和可能である．三角不等式と合わせて，主張を得る． □

系 1.10 V を線型空間とし，$\Phi\colon V\times V\to\mathbb{K}$ を正値 Hermite 形式とする．$\xi\in V$ について，任意の $\eta\in V$ に対して $\Phi(\xi,\eta)=0$ であることと，$\Phi(\xi,\xi)=0$ であることとは同値である．特に，Φ が非退化であるための必要十分条件は，$\Phi(\xi,\xi)=0$ を満たす $\xi\in V$ が $\xi=0$ のみであることである．

証明 Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より，$\Phi(\xi,\xi)=0$ ならば，任意の $\eta\in V$ に対して $\Phi(\xi,\eta)=0$ である． □

系 1.11 V を線型空間とし，$\Phi\colon V\times V\to\mathbb{K}$ を正値 Hermite 形式とする．$\xi\in V$ に対して $p(\xi)=\Phi(\xi,\xi)^{1/2}$ と定めると，p は V 上の半ノルムである．さらに，p が V 上のノルムであるための必要十分条件は，Φ が非退化であることである．

証明 任意の $\lambda\in\mathbb{K}$ と $\xi\in V$ に対して，

$$\Phi(\lambda\xi,\lambda\xi)=|\lambda|^2\Phi(\xi,\xi)$$

だから，$p(\lambda\xi)=|\lambda|p(\xi)$ である．任意の $\xi,\eta\in V$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より

$$\begin{aligned}\Phi(\xi+\eta,\xi+\eta)&=\Phi(\xi,\xi)+\Phi(\eta,\eta)+2\operatorname{Re}\Phi(\xi,\eta)\\&\leq\Phi(\xi,\xi)+\Phi(\eta,\eta)+2\Phi(\xi,\xi)^{1/2}\Phi(\eta,\eta)^{1/2}\\&=(\Phi(\xi,\xi)^{1/2}+\Phi(\eta,\eta)^{1/2})^2\end{aligned}$$

だから，三角不等式 $p(\xi+\eta)\leq p(\xi)+p(\eta)$ が成り立つ．よって，p は V 上の半ノルムである．さらに，系 1.10 より，p が V 上のノルムであるための必要十分条件は，Φ が非退化であることである． □

系 1.11 の状況で，p を，**正値 Hermite 形式 Φ が定める半ノルム**（Φ が非退化である場合には，**Φ が定めるノルム**）という．

1.2　内積空間

定義 1.12（前内積空間，内積空間）　V が線型空間であり，その上に正値 Hermite 形式 $\langle -|-\rangle$ が定まっているとき，V を**前内積空間**（pre-inner product space）という．このとき，V に定まっている正値 Hermite 形式 $\langle -|-\rangle$ を，V の**前内積**（pre-inner product）という．前内積空間 V であって，その前内積が非退化であるものを，**内積空間**（inner product space）という．内積空間 V の前内積を，V の**内積**（inner product）という．

以下，特に断らなければ，前内積空間 V の前内積を，$\langle -|-\rangle_V$ あるいは単に $\langle -|-\rangle$ と書く．どの空間を考えているかを明示して，$\langle -|-\rangle_V$ などとも書く．また，特に断らなければ，前内積空間 V の前内積が定める半ノルム（V が内積空間である場合には，内積が定めるノルム）を，$\|-\|_V$ あるいは単に $\|-\|$ と書く．以下では，特に断らなくても，これによって，前内積空間 V を半ノルム空間（V が内積空間である場合には，ノルム空間）とみなす．

注意 1.13　V を前内積空間とする．Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より，任意の $\xi, \eta \in V$ に対して，

$$|\langle \xi|\eta\rangle| \leq \|\xi\|\|\eta\|$$

が成り立つ．特に，前内積 $\langle -|-\rangle$ は，それが定めるノルムに関して連続である．

定義 1.14（前内積空間の Hausdorff 化）　V を前内積空間とする．V の前内積の退化空間を N と置くと，V の前内積は V/N 上の非退化正値 Hermite 形式を誘導し，これによって V/N は内積空間をなす．この内積空間 V/N を，V の **Hausdorff 化**（Hausdorffization）という．

注意 1.15　V を前内積空間とし，V/N を V の Hausdorff 化（N は V の前内積の退化空間）とする．Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より $N = \{\xi \in V \mid \|\xi\| = 0\}$ だから，ノルム空間としての V/N は，半ノルム空間としての V の Hausdorff 化にほかならない．

定義 1.16（直交性）　V を前内積空間とする．$\xi, \eta \in V$ が $\langle \xi|\eta\rangle = 0$ を満たすとき，ξ と η は**直交する**（orthogonal）といい，$\xi \perp \eta$ と書く．部分集合 $A, B \subseteq V$ について，任意の $\xi \in A$ と $\eta \in B$ が直交するとき，A と B は**直交する**といい，$A \perp B$ と書く（一方が 1 点集合である場合には，$\xi \perp B$ あるいは $A \perp \eta$ などとも書く）．また，部分集合 $A \subseteq V$ に対して，

$$A^{\perp} = \{\xi \in V \mid \xi \perp A\}$$

と書く．

容易に確かめられるように，前内積空間 V の部分集合 A に対して，$(\overline{A})^{\perp} = A^{\perp}$ であり，$A^{\perp}$ は V の閉部分線型空間である．

1.3　Hilbert 空間

定義 1.17（Hilbert 空間）　内積空間であって，（それをノルム空間とみなしたものが）完備であるものを，**Hilbert 空間**（Hilbert space）という．

注意 1.18　一般に，有限次元位相線型空間は完備である．したがって，有限次元内積空間は Hilbert 空間である．

命題 1.19 V を前内積空間とする．V を半ノルム空間として完備 Hausdorff 化して得られる Banach 空間を $\widehat{V}$ と書き，$\iota\colon V\to\widehat{V}$ を自然な写像とする．

(1) $\widehat{V}$ 上の連続 Hermite 形式 $\langle -|-\rangle_{\widehat{V}}$ であって，任意の $\xi,\eta\in V$ に対して $\langle\iota(\xi)|\iota(\eta)\rangle_{\widehat{V}}=\langle\xi|\eta\rangle_V$ を満たすものが一意に存在する．

(2) $\widehat{V}$ は (1) の Hermite 形式 $\langle -|-\rangle_{\widehat{V}}$ によって Hilbert 空間をなし，この Hilbert 空間のノルムは，Banach 空間 $\widehat{V}$ のノルムに一致する．

証明 (1) 位相線型空間の完備化に関する一般論より，$\widehat{V}\times\widehat{V}$ から $\mathbb{K}$ への連続実双線型写像 $\langle -|-\rangle_{\widehat{V}}$ であって，任意の $\xi,\eta\in V$ に対して $\langle\iota(\xi)|\iota(\eta)\rangle_{\widehat{V}}=\langle\xi|\eta\rangle_V$ を満たすものが一意に存在する．$\langle -|-\rangle_V$ は V 上の Hermite 形式であり，$\iota(V)$ は $\widehat{V}$ において稠密だから，$\langle -|-\rangle_{\widehat{V}}$ は $\widehat{V}$ 上の Hermite 形式である．

(2) 半ノルム空間 V の半ノルムを $\|-\|_V$ と書き，Banach 空間 $\widehat{V}$ のノルムを $\|-\|_{\widehat{V}}$ と書く．任意の $\xi\in V$ に対して $\|\iota(\xi)\|_{\widehat{V}}^2=\|\xi\|_V^2=\langle\xi|\xi\rangle_V=\langle\iota(\xi)|\iota(\xi)\rangle_{\widehat{V}}$ であり，$\iota(V)$ は $\widehat{V}$ において稠密だから，任意の $\widehat{\xi}\in\widehat{V}$ に対して $\|\widehat{\xi}\|_{\widehat{V}}^2=\langle\widehat{\xi}|\widehat{\xi}\rangle_{\widehat{V}}$ が成り立つ．$\widehat{V}$ は Banach 空間だから，$\widehat{V}$ は Hermite 形式 $\langle -|-\rangle_{\widehat{V}}$ によって Hilbert 空間をなす． □

定義 1.20（前内積空間の完備 Hausdorff 化） 命題 1.19 の状況で，Hilbert 空間 $\widehat{V}$ を，前内積空間 V の**完備 Hausdorff 化**（complete Hausdorffization）という．V が内積空間である場合には，$\widehat{V}$ を V の**完備化**（completion）という．

注意 1.21 V を前内積空間とし，V/N を V の Hausdorff 化（N は V の前内積の退化空間），$\widehat{V}$ を V の完備 Hausdorff 化とする．

(1) V/N は $\widehat{V}$ の稠密部分空間とみなせる．特に，V が内積空間ならば，V はその完備化 $\widehat{V}$ の稠密部分空間とみなせる．

(2) 一般に，完備な半ノルム空間の Hausdorff 化は，Banach 空間となる．したがって，V が（半ノルム空間として）完備ならば，その完備 Hausdorff 化 $\widehat{V}$ は Hausdorff 化 V/N と同一視される．

1.4 射影定理

補題 1.22 V を前内積空間とし，$\xi\in V$，$r,\epsilon\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．凸集合 C が $\{\eta\in V\mid r\leq\|\eta-\xi\|\leq r+\epsilon\}$ に含まれるならば，C の直径は $2\sqrt{2r\epsilon+\epsilon^2}$ 以下である．

証明 一般性を失わず，$\xi=0$ であると仮定する．$\eta,\zeta\in C$ とすると，$\|\eta\|,\|\zeta\|\leq r+\epsilon$ であり，$(\eta+\zeta)/2\in C$ より $\|(\eta+\zeta)/2\|\geq r$ である．よって，中線定理（命題 1.7）より

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2}(\eta-\zeta)\right\|^2 &\leq \frac{1}{2}(\|\eta\|^2+\|\zeta\|^2)-\left\|\frac{1}{2}(\eta+\zeta)\right\|^2\\
&\leq (r+\epsilon)^2-r^2\\
&= 2r\epsilon+\epsilon^2
\end{aligned}
$$

だから，$\|\eta-\zeta\|\leq 2\sqrt{2r\epsilon+\epsilon^2}$ である． □

定理 1.23（射影定理） V を前内積空間，C をその空でない凸集合とし，C は（半ノルム空間 V の部分擬距

離空間として）完備かつ Hausdorff であるとする．このとき，任意の $\xi \in V$ に対して，$p_C(\xi) \in C$ であって

$$\|p_C(\xi) - \xi\| = \inf_{\eta \in C} \|\eta - \xi\|$$

を満たすものが，一意に存在する．さらに，この $p_C(\xi)$ は，任意の $\eta \in C$ に対して

$$\operatorname{Re}\langle \xi - p_C(\xi) | \eta - p_C(\xi) \rangle \leq 0$$

を満たす，C の唯一の点である．

証明　一般性を失わず，$\xi = 0$ であると仮定する．$r = \inf_{\eta \in C} \|\eta\|$ と置き，$\epsilon > 0$ に対して $C_\epsilon = \{\eta \in C \mid \|\eta\| \leq r + \epsilon\}$ と定めると，C_ϵ は C の空でない閉集合であり，補題 1.22 よりその直径は $2\sqrt{2r\epsilon + \epsilon^2}$ 以下である．$\epsilon \to 0+$ のとき $2\sqrt{2r\epsilon + \epsilon^2} \to 0$ であり，C は完備かつ Hausdorff だから，$\bigcap_{\epsilon > 0} C_\epsilon$ は 1 点のみからなる．この 1 点が，$p_C(0)$ にほかならない．

後半の主張を示す．$\eta \in C$ とすると，任意の $t \in [0,1]$ に対して，$p_C(0) + t(\eta - p_C(0)) \in C$ より

$$\|p_C(0)\|^2 \leq \|p_C(0) + t(\eta - p_C(0))\|^2$$

であり，右辺を展開すると

$$2t \operatorname{Re}\langle p_C(0) | \eta - p_C(0) \rangle + t^2 \|\eta - p_C(0)\| \geq 0$$

となる．$t > 0$ として上式の両辺を $2t$ で割り，$t \to 0+$ とすれば，$\operatorname{Re}\langle p_C(0) | \eta - p_C(0) \rangle \geq 0$ を得る．逆に，$\zeta \in C$ がこの性質を満たすとすると，任意の $\eta \in C$ に対して

$$\|\eta\|^2 = \|\zeta\|^2 + \|\eta - \zeta\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle \zeta | \eta - \zeta \rangle \geq \|\zeta\|^2$$

だから，$\zeta = p_C(0)$ である．□

系 1.24　V を前内積空間，C をその空でない凸集合とし，C は（V の部分擬距離空間として）完備かつ Hausdorff であるとする．射影定理（定理 1.23）によって定まる写像 $p_C \colon V \to C$ は，任意の $\xi, \eta \in V$ に対して，

$$\|p_C(\xi) - p_C(\eta)\| \leq \|\xi - \eta\|$$

を満たす．特に，p_C は連続である．

証明　任意の ξ, $\eta \in V$ に対して，射影定理（定理 1.23）より $\operatorname{Re}\langle \xi - p_C(\xi) | p_C(\xi) - p_C(\eta) \rangle \geq 0$ かつ $\operatorname{Re}\langle \eta - p_C(\xi) | p_C(\eta) - p_C(\xi) \rangle \geq 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\|\xi - \eta\|^2 &= \|(\xi - p_C(\xi)) + (p_C(\xi) - p_C(\eta)) + (p_C(\eta) - \eta)\|^2 \\
&= \|p_C(\xi) - p_C(\eta)\|^2 + \|(\xi - p_C(\xi)) + (p_C(\eta) - \eta)\|^2 \\
&\quad + 2 \operatorname{Re}\langle \xi - p_C(\xi) | p_C(\xi) - p_C(\eta) \rangle + 2 \operatorname{Re}\langle \eta - p_C(\xi) | p_C(\eta) - p_C(\xi) \rangle \\
&\geq \|p_C(\xi) - p_C(\eta)\|^2
\end{aligned}$$

である．□

系 1.25　V を前内積空間，M をその部分線型空間とし，M は（V の部分擬距離空間として）完備かつ Hausdorff であるとする．射影定理（定理 1.23）によって定まる写像 $p_M \colon V \to M$ を考える．

(1) 任意の $\xi \in V$ に対して，$p_M(\xi)$ は，$\xi - p_M(\xi) \in M^\perp$ を満たす，C の唯一の点である．

(2) p_M はノルム減少な連続線型作用素であり，$M \neq 0$ ならば $\|p_M\| = 1$ である．
(3) 直和分解 $V = M \oplus M^\perp$ が成立し，これに伴う M の上への射影は p_M に一致する．

証明 (1) $\xi \in V$ とすると，射影定理（定理 1.23）および M が V の部分線型空間であることより，任意の $\eta \in M$ に対して $\mathrm{Re}\langle \xi - p_M(\xi) | \eta \rangle \leq 0$ が成り立つ．この式で η を $\lambda\eta$（$\lambda \in \mathbb{C}$）に置き換えれば $\mathrm{Re}\,\lambda\langle \xi - p_M(\xi) | \eta \rangle \leq 0$ を得るが，これが任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して成り立つためには，$\langle \xi - p_M(\xi) | \eta \rangle = 0$ でなければならない．よって，$\xi - p_M(\xi) \in M^\perp$ である．逆に，$\zeta \in M$ が $\xi - \zeta \in M^\perp$ を満たすとすると，射影定理（定理 1.23）における一意性の主張より，$\zeta = p_M(\xi)$ である．

(2) p_C が線型であることは，(1) による p_M の特徴付けから従う．p_C がノルム減少であることは，系 1.24 から従う．$\xi \in M$ に対しては $p_M(\xi) = \xi$ だから，$M \neq 0$ ならば，$\|p_M\| = 1$ である．

(3) M は Hausdorff だから，$\xi \in M$ であって $\langle \xi | \xi \rangle = 0$ を満たすものは $\xi = 0$ のみである．すなわち，$M \cap M^\perp = 0$ である．また，(1) より，任意の $\xi \in V$ は $p_M(\xi) \in M$ と $\xi - p_M(\xi) \in M^\perp$ の和に分解できる．よって，直和分解 $V = M \oplus M^\perp$ が成立し，これに伴う M の上への射影は p_M に一致する． □

定義 1.26（直交射影，直交補空間） 系 1.25 の状況で，$p_M \colon V \to M$ を V 上の M の上への**直交射影**（orthogonal projection）あるいは単に**射影**といい，$M^\perp$ を M の**直交補空間**（orthogonal complement）という．

V を前内積空間，M をその完備かつ Hausdorff な部分線型空間とするとき，直交射影 $p_M \colon V \to M$ を，しばしば V 上の連続線型作用素 $p_M \colon V \to V$ とみなす．

命題 1.27 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，M をその部分線型空間とする．

(1) $M^{\perp\perp} = \overline{M}$ が成り立つ．
(2) M が $\mathcal{H}$ において稠密であるための必要十分条件は，$M^\perp = 0$ である．

証明 $(\overline{M})^\perp = M^\perp$ より M が $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．

(1) 明らかに，$M \subseteq M^{\perp\perp}$ である．一方で，系 1.25 より，M と $M^{\perp\perp}$ はともに $M^\perp$ の補空間である．よって，$M^{\perp\perp} = M$ である．

(2) M は $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間だから，M が $\mathcal{H}$ において稠密であることは，$M = \mathcal{H}$ と同値である．さらに，系 1.25 より直和分解 $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ が成立するから，これは $M^\perp = 0$ と同値である． □

1.5 Riesz の表現定理

前内積空間 V の複素共役 $\overline{V}$ を考え，$\overline{\xi}, \overline{\eta} \in \overline{V}$ に対して $\langle \overline{\xi} | \overline{\eta} \rangle_{\overline{V}} = \overline{\langle \xi | \eta \rangle_V}$ と定めると，容易に確かめられるように，$\overline{V}$ はこれを前内積として前内積空間をなす．この前内積に関して，V から $\overline{V}$ への自然な写像 $v \mapsto \overline{v}$ は等長だから，V が内積空間であることと $\overline{V}$ が内積空間であることとは同値であり，V が Hilbert 空間であることと $\overline{V}$ が Hilbert 空間であることとは同値である．

定理 1.28（Riesz の表現定理） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して，$\overline{\mathcal{H}}$（上記の方法で Hilbert 空間とみなす）から $\mathcal{H}^*$ への写像 $\overline{\xi} \mapsto \langle \xi | - \rangle$ は，$\overline{\mathcal{H}}$ の内積が定めるノルムと $\mathcal{H}^*$ の作用素ノルムに関して，等長同型作用素である．

証明　写像 $\overline{\xi} \mapsto \langle \xi | - \rangle$ が線型であることは明らかである．また，$\xi \in \mathcal{H}$ とすると，Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して $|\langle \xi | \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|$ であり，一方で $\langle \xi | \xi \rangle = \|\xi\|^2$ だから，$\langle \xi | - \rangle$ の作用素ノルムは $\|\xi\|$ に等しい．よって，写像 $\overline{\xi} \mapsto \langle \xi | - \rangle$ は等長である．

最後に，全射性を示す．$f \in \mathcal{H}^* \setminus \{0\}$ とすると，$\operatorname{Ker} f$ は $\mathcal{H}$ の余次元 1 の閉部分線型空間だから，その直交補空間 $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ は 1 次元である（系 1.25）．1 点 $\xi \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \setminus \{0\}$ を固定すると，$\operatorname{Ker} \langle \xi | - \rangle = \{\xi\}^\perp = (\operatorname{Ker} f)^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} f$ だから（命題 1.27 (1)），ある $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ が存在して $f = \lambda \langle \xi | - \rangle = \langle \overline{\lambda} \xi | - \rangle$ となる．これで，全射性が示された． □

位相線型空間 V, W に対して，$V \times W$ 上の連続準双線型形式全体のなす空間を，$\mathscr{S}(V, W)$ と書く．V, W がノルム空間である場合，$\Phi \in \mathscr{S}(V, W)$ の作用素ノルムを

$$\|\Phi\| = \sup_{\|\xi\|, \|\eta\| \leq 1} |\Phi(\xi, \eta)|$$

と定める．これにより，$\mathscr{S}(V, W)$ は Banach 空間をなす．

定理 1.29　$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ に対して，写像 $\Phi_x \colon \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ を $\Phi_x(\eta, \xi) = \langle \eta | x\xi \rangle$ と定めると，Φ_x は連続準双線型形式である．さらに，$\mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ から $\mathscr{S}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto \Phi_x$ は，等長同型作用素である．

証明　$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ に対して $\Phi_x \in \mathscr{S}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ であり，写像 $x \mapsto \Phi_x$ が線型であることは明らかである．また，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ とすると，Riesz の表現定理（定理 1.28）より

$$\|\Phi_x\| = \sup_{\|\xi\|, \|\eta\| \leq 1} |\Phi_x(\eta, \xi)| = \sup_{\|\xi\|, \|\eta\| \leq 1} |\langle \eta | x\xi \rangle| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|x\xi\| = \|x\|$$

だから，写像 $x \mapsto \Phi_x$ は等長である．

最後に，全射性を示す．$\Phi \in \mathscr{S}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ を任意にとる．各 $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\Phi(-, \xi)$ は $\mathcal{K}$ 上の連続共役線型形式だから，Riesz の表現定理（定理 1.28）を $\overline{\mathcal{K}}$ に適用することで，ある $x(\xi) \in \mathcal{K}$ が一意に存在して，任意の $\eta \in \mathcal{K}$ に対して $\langle \eta | x(\xi) \rangle = \Phi(\eta, \xi)$ を満たすことがわかる．これによって，写像 $x \colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を定める．$\Phi(\eta, \xi)$ が ξ に関して線型であることより，x は線型である．さらに，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，Riesz の表現定理（定理 1.28）より

$$\|x\xi\| = \sup_{\|\eta\| \leq 1} |\langle \eta | x\xi \rangle| = \sup_{\|\eta\| \leq 1} |\Phi(\eta, \xi)| \leq \|\Phi\| \|\xi\|$$

である．よって，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ であり，x の定義より $\Phi_x = \Phi$ が成り立つ．これで，全射性が示された． □

2　Hilbert 空間の構成

2.1　実 Hilbert 空間の複素化

「記号と用語」で述べたように，実線型空間 V の複素化を，$V_{(\mathbb{C})}$ と書く．

定義 2.1（実前内積空間の複素化）　V を実前内積空間とする．$\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2 \in V_{(\mathbb{C})}$（$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \in V$）に対して

$$\langle \xi_1 + i\eta_1 | \xi_2 + i\eta_2 \rangle_{V_{(\mathbb{C})}} = \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle_V + \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle_V$$

と定めると，容易に確かめられるように，$V_{(\mathbb{C})}$ はこれを前内積として前内積空間をなす．これを，実前内積空間 V の**複素化**（complexification）という．

V を実前内積空間とすると，容易に確かめられるように，$V\times V$ から $V_{(\mathbb{C})}$ への写像 $(\xi,\eta)\mapsto\xi+i\eta$ は，位相線型空間の同型である[*1]．したがって，V が内積空間であることと $V_{(\mathbb{C})}$ が内積空間であることとは同値であり，V が Hilbert 空間であることと $V_{(\mathbb{C})}$ が Hilbert 空間であることとは同値である．

2.2　Hilbert 空間の複素共役と双対

前内積空間の複素共役については 1.5 節ですでに述べたが，改めて定義する．

定義 2.2（前内積空間の複素共役）　V を前内積空間とする．$\overline{\xi},\overline{\eta}\in\overline{V}$ に対して

$$\langle\overline{\xi}|\overline{\eta}\rangle_{\overline{V}}=\overline{\langle\xi|\eta\rangle_V}$$

と定めると，容易に確かめられるように，$\overline{V}$ はこれを前内積として前内積空間をなす．これを，前内積空間 V の**複素共役**（complex conjugate）という．

V を前内積空間とすると，V から $\overline{V}$ への自然な写像 $v\mapsto\overline{v}$ は，共役等長同型作用素である．したがって，V が内積空間であることと $\overline{V}$ が内積空間であることとは同値であり，V が Hilbert 空間であることと $\overline{V}$ が Hilbert 空間であることとは同値である．

定義 2.3（双対 Hilbert 空間）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\overline{\mathcal{H}}$ の内積を，Riesz の表現定理（定理 1.28）による $\overline{\mathcal{H}}$ から $\mathcal{H}^*$ への等長同型作用素 $\overline{\xi}\mapsto\langle\xi|{-}\rangle$ によって移すことで，$\mathcal{H}^*$ 上の内積が得られ，これによって $\mathcal{H}^*$ は Hilbert 空間をなす．これを，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の**双対**（dual）という．

Riesz の表現定理（定理 1.28）における等長性より，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の双対 $\mathcal{H}^*$ の内積が定まるノルムは，作用素ノルムに一致する．

2.3　Hilbert 直和

定義 2.4（前内積空間の直和）　$(V_i)_{i\in I}$ を前内積空間の族とし，$V=\bigoplus_{i\in I}V_i$ と置く．V の二つのベクトル $\xi=(\xi_i)_{i\in I}$ と $\eta=(\eta_i)_{i\in I}$ に対して

$$\langle\xi|\eta\rangle_V=\sum_{i\in I}\langle\xi_i|\eta_i\rangle_{V_i}$$

（右辺は有限項を除いて 0 である）と定めると，容易に確かめられるように，V はこれを前内積として前内積空間をなす．これを，$(V_i)_{i\in I}$ の**直和**（direct sum）という．

$(V_i)_{i\in I}$ を前内積空間の族とし，$V=\bigoplus_{i\in I}V_i$ と置く．このとき，容易に確かめられるように，V が内積空間であるための必要十分条件は，各 V_i が内積空間であることである．一方で，以下の注意 2.10 で述べるように，各 V_i が Hilbert 空間であっても，V が Hilbert 空間であるとは限らない．

命題 2.5　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，

$$\mathcal{H}=\left\{(\xi_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathcal{H}_i\;\middle|\;\sum_{i\in I}\|\xi_i\|_{\mathcal{H}_i}^2<\infty\right\}$$

と置く．

[*1] より強く，前内積空間の直和 $V\oplus V$（定義 2.4）から $V_{(\mathbb{C})}$ への写像 $(\xi,\eta)\mapsto\xi+i\eta$ は，等長線型同型である．

(1) $\mathcal{H}$ は $\prod_{i\in I}\mathcal{H}_i$ の部分線型空間である．

(2) $\mathcal{H}$ の任意の二つのベクトル $\xi=(\xi_i)_{i\in I}$ と $\eta=(\eta_i)_{i\in I}$ に対して，級数 $(\langle\xi_i|\eta_i\rangle)_{i\in I}$ は総和可能である．さらに，

$$\langle\xi|\eta\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{i\in I}\langle\xi_i|\eta_i\rangle_{\mathcal{H}_i}$$

と定めると，$\mathcal{H}$ はこれを内積として Hilbert 空間をなす．

証明 (1) $\mathcal{H}$ が 0 を含み，スカラー倍に関して閉じていることは明らかである．また，$\xi=(\xi_i)_{i\in I}$ と $\eta=(\eta_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{H}$ に属するとすると，中線定理（命題 1.7）より

$$\sum_{i\in I}\|\xi_i+\eta_i\|_{\mathcal{H}_i}^2\leq 2\sum_{i\in I}(\|\xi_i\|_{\mathcal{H}_i}^2+\|\eta_i\|_{\mathcal{H}_i}^2)<\infty$$

だから，$\xi+\eta\in\mathcal{H}$ である．よって，$\mathcal{H}$ は和に関して閉じている．

(2) $\mathcal{H}$ の任意の二つのベクトル $\xi=(\xi_i)_{i\in I}$ と $\eta=(\eta_i)_{i\in I}$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8，系 1.9 (1)）より

$$\sum_{i\in I}|\langle\xi_i|\eta_i\rangle_{\mathcal{H}_i}|\leq\sum_{i\in I}\|\xi_i\|_{\mathcal{H}_i}\|\eta_i\|_{\mathcal{H}_i}\leq\left(\sum_{i\in I}\|\xi_i\|_{\mathcal{H}_i}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}\|\eta_i\|_{\mathcal{H}_i}^2\right)^{1/2}<\infty$$

だから，$(\langle\xi_i|\eta_i\rangle)_{i\in I}$ は総和可能である．

主張の $\langle -|-\rangle_{\mathcal{H}}$ が $\mathcal{H}$ 上の非退化正値 Hermite 形式であることは明らかである．これを内積とする内積空間 $\mathcal{H}$ が完備であることを示す．$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{H}$ 上の Cauchy 列とし，各 ξ^n を $(\xi_i^n)_{i\in I}$ と表す．各 $i\in I$ に対して，i-成分を与える $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_i$ への写像はノルム減少（特に，連続）な線型作用素だから，$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることより，$(\xi_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．したがって，極限 $\xi_i=\lim_{n\to\infty}\xi_i^n\in\mathcal{H}_i$ が存在する．そこで，$\xi=(\xi_i)_{i\in I}$ と置く．$\xi\in\mathcal{H}$ であり，$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が ξ に収束することを示す．$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列だから，任意の $\epsilon>0$ に対して，ある $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $m,n\geq n_\epsilon$ に対して $\|\xi^m-\xi^n\|_{\mathcal{H}}^2\leq\epsilon$ が成り立つ．したがって，$n\geq n_\epsilon$ とすると，任意の有限部分集合 $F\subseteq I$ に対して

$$\sum_{i\in F}\|\xi_i-\xi_i^n\|_{\mathcal{H}_i}^2=\lim_{m\to\infty}\sum_{i\in F}\|\xi_i^m-\xi_i^n\|_{\mathcal{H}_i}^2\leq\lim_{m\to\infty}\|\xi^m-\xi^n\|_{\mathcal{H}}^2\leq\epsilon$$

だから，

$$\sum_{i\in I}\|\xi_i-\xi_i^n\|_{\mathcal{H}_i}^2\leq\epsilon \tag{$*$}$$

である．$\epsilon>0$ と $n\geq n_\epsilon$ を一つ固定すると，($*$) より特に $\sum_{i\in I}\|\xi_i-\xi_i^n\|_{\mathcal{H}_i}^2<\infty$，すなわち $\xi-\xi^n\in\mathcal{H}$ だから，$\xi=\xi^n+(\xi-\xi^n)\in\mathcal{H}$ である．さらに，任意の $\epsilon>0$ と $n\geq n_\epsilon$ に対して，($*$) より $\|\xi-\xi^n\|_{\mathcal{H}}^2\leq\epsilon$ だから，$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は ξ に収束する．これで，$\mathcal{H}$ が完備であることが示された．$\square$

定義 2.6（Hilbert 直和） $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とする．命題 2.5 によって定まる Hilbert 空間

$$\mathcal{H}=\left\{(\xi_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathcal{H}_i\;\middle|\;\sum_{i\in I}\|\xi_i\|_{\mathcal{H}_i}^2<\infty\right\}$$

を，$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ の **Hilbert 直和**（Hilbert direct sum）といい，$\mathcal{H}=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と書く．

一つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のみからなる族 $(\mathcal{H})_{i\in I}$ の Hilbert 直和は，$\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ とも書く．

例 2.7　I を集合とする．Hilbert 空間 $\mathbb{K}$（標準内積を考える）のみからなる族 $(\mathbb{K})_{i\in I}$ の Hilbert 直和を，$l^2(I;\mathbb{K})$ あるいは単に $l^2(I)$ と書く．すなわち，

$$l^2(I) = l^2(I;\mathbb{K}) = \left\{ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \;\middle|\; \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < \infty \right\}$$

であり，$(\lambda_i)_{i\in I}$, $(\mu_i)_{i\in I} \in l^2(I;\mathbb{K})$ に対して

$$\langle (\lambda_i)_{i\in I} | (\mu_i)_{i\in I} \rangle = \sum_{i\in I} \overline{\lambda_i} \mu_i$$

である．

注意 2.8　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とする．$\mathcal{H}_i$ が有限個を除いて 0 ならば，容易に確かめられるように，Hilbert 空間 $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ の位相は，$\prod_{i\in I} \mathcal{H}_i$ の積位相が誘導する相対位相に一致する．しかし，それ以外の場合は，これらの位相は一致しない．実際，$\mathcal{H}_{i_n} \neq 0$ を満たす異なる添字の列 $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対してノルム 1 のベクトル $\xi_n \in \mathcal{H}_{i_n}$ をとると，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Hilbert 空間 $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ においては収束しないが，$\prod_{i\in I} \mathcal{H}_i$ の積位相が誘導する相対位相に関しては 0 に収束する．

次の命題より，Hilbert 直和 $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ は，直和 $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ の完備化とみなせる．

命題 2.9　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置く．任意の $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$ について，有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して $\xi^F = (\xi^F_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ を

$$\xi^F_i = \begin{cases} \xi_i & (i \in F) \\ 0 & (i \notin F) \end{cases}$$

によって定めると，ネット $(\xi^F)_F$ は ξ に収束する．特に，$\mathcal{H}$ は $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ を稠密部分線型空間として含む．

証明　$\xi \in \mathcal{H}$ より $\sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < \infty$ だから，$F \to I$ のとき

$$\|\xi - \xi^F\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{i\in I\setminus F} \|\xi_i\|^2_{\mathcal{H}_i} \to 0$$

である．よって，$(\xi^F)_F$ は ξ に収束する．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対してこのようなネット $(\xi^F)_F$ がとれるから，$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ は $\mathcal{H}$ において稠密である．　□

注意 2.10　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とすると，Hilbert 直和 $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ が直和 $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ の完備化とみなせることより，

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \text{ が Hilbert 空間} &\iff \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathcal{H}_i \\ &\iff \mathcal{H}_i \text{ が有限個を除き } 0 \end{aligned}$$

である．

命題 2.11　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ と $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して $x_i \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_i;\mathcal{K}_i)$ とし，これらは $\sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty$ を満たすとする．このとき，任意の $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$

に対して $x\xi = (x_i\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}$ であり，これによって定まる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 x は連続であり，その作用素ノルムは

$$\|x\| = \sup_{i\in I}\|x_i\|$$

で与えられる．

証明 $C = \sup_{i\in I}\|x_i\|$ と置く．任意の $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\sum_{i\in I}\|x_i\xi_i\|^2 \leq \sum_{i\in I}\|x_i\|^2\|\xi_i\|^2 \leq C^2\sum_{i\in I}\|\xi_i\|^2 = C^2\|\xi\|^2 < \infty$$

だから，$x\xi \in \mathcal{K}$ である．さらに，上式より，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 x は連続であり，$\|x\| \leq C$ を満たす．一方で，x の各 $\mathcal{H}_i$ への制限は x_i に一致するから，$\|x\| \geq \|x_i\|$ である．よって，$\|x\| \geq C$ である． □

定義 2.12（連続線型作用素の Hilbert 直和） $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ と $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して $x_i \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_i;\mathcal{K}_i)$ とし，これらは $\sup_{i\in I}\|x_i\| < \infty$ を満たすとする．命題 2.11 によって定まる $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を，連続線型作用素の族 $(x_i)_{i\in I}$ の **Hilbert 直和**（Hilbert direct sum）といい，$x = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}x_i$ と書く．

一つの連続線型作用素 x のみからなる族 $(x)_{i\in I}$ の Hilbert 直和は，$x^{\widehat{\oplus} I}$ とも書く．

2.4 正規直交基底

定義 2.13（直交族，完全族） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$(S_i)_{i\in I}$ をその部分集合の族とする．

(1) $(S_i)_{i\in I}$ が**直交族**（orthogonal family）であるとは，任意の異なる 2 元 $i, j \in I$ に対して S_i と S_j が直交することをいう．
(2) $(S_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{H}$ において**完全**（total）であるとは，$\bigcup_{i\in I}S_i$ が $\mathcal{H}$ を位相線型空間として生成する（すなわち，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\bigcup_{i\in I}S_i$ が $\mathcal{H}$ において稠密である）ことをいう．

本小節の以下の部分で必要になるため，ユニタリ作用素を定義しておく（定義 3.43 で改めて定義する）．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x が**ユニタリ**（unitary）であるとは，x が線型同型であり，かつ任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle x\xi|x\eta\rangle = \langle\xi|\eta\rangle$ を満たすことをいう．分極公式（命題 1.4）より，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのユニタリ作用素とは，Banach 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への等長同型作用素のことにほかならない．

定理 2.14 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ をその閉部分線型空間の完全直交族とする．$\mathcal{H}_i$ の上への直交射影を，p_i と書く．

(1) 任意の $(\xi_i)_{i\in I} \in \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ は，$\mathcal{H}$ において総和可能である．さらに，$U(\xi_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I}\xi_i$ と定めると，U は $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{H}$ へのユニタリ作用素である．
(2) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$(p_i\xi)_{i\in I} \in \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ である．さらに，$V\xi = (p_i\xi)_{i\in I}$ と定めると，V は $\mathcal{H}$ から $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ へのユニタリ作用素である．
(3) (1) と (2) で定めたユニタリ作用素 U と V は，互いに他の逆である．

証明 (1) $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ は直交族だから，$(\xi_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ に対して $U_0(\xi_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I}\xi_i$ と定めると，U_0 は $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{H}$ への等長作用素である．したがって，U_0 は，$\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ の完備化 $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{H}$ への等長

作用素 U に一意に拡張される．$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ が完全族であることより，U_0 の像は $\mathcal{H}$ において稠密だから，U はユニタリ作用素である．

$(\xi_i)_{i\in I} \in \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ として，有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して $(\xi_i^F)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ を

$$\xi_i^F = \begin{cases} \xi_i & (i \in F) \\ 0 & (i \notin F) \end{cases}$$

によって定める．すると，$F \to I$ のとき，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ において $(\xi_i^F)_{i\in I} \to (\xi_i)_{i\in I}$ だから（命題 2.9），$\mathcal{H}$ において $\sum_{i\in F} \xi_i = U(\xi_i^F)_{i\in I} \to U(\xi_i)_{i\in I}$ である．すなわち，$(\xi_i)_{i\in I}$ は $\mathcal{H}$ において総和可能であり，$U(\xi_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} \xi_i$ が成り立つ．これで，主張が示された．

(2), (3)　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ は直交族だから，$(\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$ とすると，任意の $i_0 \in I$ に対して，

$$p_{i_0} U(\xi_i)_{i\in I} = p_{i_0}\left(\sum_{i\in I} \xi_i\right) = \sum_{i\in I} p_{i_0} \xi_i = \xi_{i_0}$$

である．これより，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $(p_i\xi)_{i\in I} \in \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ であり，$V\xi = (p_i\xi)_{i\in I}$ と定めると，$V = U^{-1}$ である．U はユニタリだから，V もユニタリである．□

定義 2.15（正規直交基底）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$(\xi_i)_{i\in I}$ をそのベクトルの族とする．

(1) $(\xi_i)_{i\in I}$ が**直交族**（orthogonal family）であるとは，$(\mathbb{K}\xi_i)_{i\in I}$ が直交族であることをいう．$(\xi_i)_{i\in I}$ が**正規直交族**（orthonormal family）であるとは，$(\xi_i)_{i\in I}$ が直交族であり，任意の $i \in I$ に対して $\|\xi_i\| = 1$ であることをいう．
(2) $(\xi_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{H}$ において**完全**（total）であるとは，$(\mathbb{K}\xi_i)_{i\in I}$ が完全族であることをいう．
(3) $\mathcal{H}$ において完全な正規直交族を，$\mathcal{H}$ の**正規直交基底**（orthonormal basis）という．

例 2.16　I を集合とし，Hilbert 空間 $l^2(I;\mathbb{K})$ を考える．各 $i \in I$ に対して，i-成分のみが 1 でほかの成分が 0 である元を $\epsilon_i \in l^2(I;\mathbb{K})$ と書くと，容易に確かめられるように，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ は $l^2(I;\mathbb{K})$ の正規直交基底である．これを，$l^2(I;\mathbb{K})$ の**標準正規直交基底**（standard orthonormal basis）という．標準正規直交基底が $l^2(I;\mathbb{K})$ の代数的な基底であるための必要十分条件は，I が有限であることである．

定理 2.17　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ をその正規直交基底とする．

(1) 任意の $(\lambda_i)_{i\in I} \in l^2(I;\mathbb{K})$ に対して，$(\lambda_i\epsilon_i)_{i\in I}$ は $\mathcal{H}$ において総和可能である．さらに，$U(\lambda_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} \lambda_i\epsilon_i$ と定めると，U は $l^2(I;\mathbb{K})$ から $\mathcal{H}$ へのユニタリ作用素である．
(2) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$(\langle\epsilon_i|\xi\rangle)_{i\in I} \in l^2(I;\mathbb{K})$ である．さらに，$V\xi = (\langle\epsilon_i|\xi\rangle)_{i\in I}$ と定めると，V は $\mathcal{H}$ から $l^2(I;\mathbb{K})$ へのユニタリ作用素である．
(3) (1) と (2) で定めたユニタリ作用素 U と V は，互いに他の逆である．

証明　$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間の完全直交族 $(\mathbb{K}\epsilon_i)_{i\in I}$ に定理 2.14 を適用し，$\mathbb{K}\epsilon_i$ の上への直交射影が $\xi \mapsto \langle\epsilon_i|\xi\rangle\epsilon_i$ で与えられることに注意すれば，主張が従う．□

注意 2.18　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ をその正規直交基底とすると，定理 2.17 のユニタリ作用素によって，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ は $l^2(I;\mathbb{K})$ の標準正規直交基底に移される．よって，例 2.16 より，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{H}$ の代数的な基底であるための必要十分条件は，I が有限であることである．これは，$\mathcal{H}$ が有限次元であることと同値である．

系 2.19（Perseval の等式） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ をその正規直交基底とする．このとき，任意の $\xi\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\|\xi\|^2=\sum_{i\in I}|\langle\epsilon_i|\xi\rangle|^2$$

が成り立つ．

証明 定理 2.17 より，写像 $\xi\mapsto(\langle\epsilon_i|\xi\rangle)_{i\in I}$ は $\mathcal{H}$ から $l^2(I;\mathbb{K})$ へのユニタリ作用素である．よって，主張の等式が成り立つ． □

定理 2.20 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の任意の正規直交系 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ に対して，それを拡張する正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in\widetilde{I}}$（$\widetilde{I}$ は I を含む添字集合）が存在する．特に，任意の Hilbert 空間は，正規直交基底をもつ．

証明 正規直交系をなす $\mathcal{H}$ の部分集合であってすべての ϵ_i（$i\in I$）を含むもの全体のなす集合は，包含関係に関して帰納的だから，Zorn の補題より，その極大元がとれる．この極大元に対応する正規直交系 $(\epsilon_i)_{i\in\widetilde{I}}$（$\widetilde{I}$ は I を含む添字集合）を考える．この族が完全でないとすると，$\{\epsilon_i\mid i\in\widetilde{I}\}^\perp\neq 0$ だから（命題 1.27 (2)），すべての ϵ_i（$i\in\widetilde{I}$）と直交するノルム 1 のベクトル $\xi\in\mathcal{H}$ がとれる．$(\epsilon_i)_{i\in\widetilde{I}}$ に ξ を加えたものも正規直交系となるが，これは $(\epsilon_i)_{i\in\widetilde{I}}$ の極大性に反する．よって，背理法より，$(\epsilon_i)_{i\in\widetilde{I}}$ は完全であり，$\mathcal{H}$ の正規直交基底をなす． □

定理 2.21 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ がともに $\mathcal{H}$ の正規直交基底ならば，添字集合 I と J の濃度は等しい．

証明 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底であるとすると，定理 2.17 より，$\mathcal{H}$ から $l^2(I;\mathbb{K})$ へのユニタリ作用素が存在する．特に，I が有限ならば $\mathcal{H}$ は $\#I$ 次元であり，I が無限ならば $\mathcal{H}$ は無限次元である．$(\epsilon'_j)_{j\in J}$ についても同じことがいえる．したがって，線型空間の次元の一意性より，I と J はともに有限であるかともに無限であるかのいずれかであり，ともに有限である場合，$\#I=\#J$ が成り立つ．

次に，I と J がともに無限であるとする．各 $i\in I$ に対して，定理 2.17 より $(\langle\epsilon'_j|\epsilon_i\rangle)_{j\in J}\in l^2(J;\mathbb{K})$ だから，$J_i=\{j\in J\mid\langle\epsilon'_j|\epsilon_i\rangle\neq 0\}$ と置くと，J_i は可算である．また，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ が完全であることより $(\operatorname{span}\{\epsilon_i\mid i\in I\})^\perp=0$ だから（命題 1.27 (2)），任意の $j\in J$ に対してある $i\in I$ が存在して $\langle\epsilon'_j|\epsilon_i\rangle\neq 0$ を満たす．すなわち，$J=\bigcup_{i\in I}J_i$ である．したがって，

$$\#J\leq\aleph_0\cdot\#I=\#I$$

が成り立つ．I と J を入れ替えれば，逆向きの不等式も得られる．よって，$\#I=\#J$ が成り立つ． □

定義 2.22（Hilbert 次元） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底の濃度（定理 2.20 と定理 2.21 より，これは一意に定まる）を，$\mathcal{H}$ の **Hilbert 次元**（Hilbert dimension）という．

2.5 Hilbert テンソル積

補題 2.23 任意の有限次元前内積空間は，直交族をなす基底をもつ．

証明 V を有限次元前内積空間とする．V の前内積の退化空間を N と置き，N の補空間 V' を一つ固定する．V' は有限次元内積空間だから Hilbert 空間であり（注意 1.18），したがって，その正規直交基底 $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)$

がとれる（定理 2.20）．さらに，N の基底 $(\epsilon_{n+1},\dots,\epsilon_m)$ をとる．すると，$(\epsilon_1,\dots,\epsilon_m)$ は，V の基底であって直交族をなす． □

命題 2.24 $(V_i)_{i\in I}$ を線型空間の有限族とし，$V=\bigotimes_{i\in I}V_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して，$\Phi_i\colon V_i\times V_i\to\mathbb{K}$ を Hermite 形式とする．

(1) Hermite 形式 $\Phi\colon V\times V\to\mathbb{K}$ であって，任意の $(\xi_i)_{i\in I}$, $(\eta_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i$ に対して

$$\Phi\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i,\bigotimes_{i\in I}\eta_i\right)=\prod_{i\in I}\Phi_i(\xi_i,\eta_i)$$

を満たすものが，一意に存在する．

(2) 各 Φ_i が正値であるとする．このとき，(1) によって定まる Φ は，正値である．

(3) 各 Φ_i が非退化かつ正値であるとする．このとき，(1) によって定まる Φ は，非退化かつ正値である．

証明 (1) $(\prod_{i\in I}\overline{V_i})\times(\prod_{i\in I}V_i)$ から $\mathbb{K}$ への写像

$$((\overline{\xi_i})_{i\in I},(\eta_i)_{i\in I})\mapsto\prod_{i\in I}\Phi_i(\xi_i,\eta_i)$$

は多重線型形式だから，テンソル積の普遍性より，$\overline{V}\otimes V=(\bigotimes_{i\in I}\overline{V_i})\otimes(\bigotimes_{i\in I}V_i)$ 上の線型形式 $\widetilde{\Phi}$ であって，任意の $(\xi_i)_{i\in I}$, $(\eta_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i$ に対して

$$\widetilde{\Phi}\left(\left(\bigotimes_{i\in I}\overline{\xi_i}\right)\otimes\left(\bigotimes_{i\in I}\eta_i\right)\right)=\prod_{i\in I}\Phi_i(\xi_i,\eta_i)$$

を満たすものが，一意に存在する．これを用いて写像 $\Phi\colon V\times V\to\mathbb{K}$ を

$$\Phi(\xi,\eta)=\widetilde{\Phi}(\overline{\xi}\otimes\eta)$$

と定めれば，$\widetilde{\Phi}$ は V 上の準双線型形式であって主張の等式を満たす唯一のものである．さらに，各 Φ_i が Hermite であることより，任意の $(\xi_i)_{i\in I}$, $(\eta_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i$ に対して

$$\Phi\left(\bigotimes_{i\in I}\eta_i,\bigotimes_{i\in I}\xi_i\right)=\prod_{i\in I}\Phi_i(\eta_i,\xi_i)=\prod_{i\in I}\overline{\Phi_i(\xi_i,\eta_i)}=\overline{\Phi\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i,\bigotimes_{i\in I}\eta_i\right)}$$

が成り立つから，Φ は Hermite である．

(2), (3) $I=\emptyset$ ならば，主張は明らかである．そうでないとして，一つの元 $i_0\in I$ を固定する．$\xi\in V\setminus\{0\}$ を任意にとり，これを $\xi=\sum_{k=1}^{n}\bigotimes_{i\in I}\xi_i^k$（$n\in\mathbb{N}$, $\xi_i^k\in V_i$）と表す．V_i の有限次元部分線型空間 $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\xi_{i_0}^1,\dots,\xi_{i_0}^n\}$ を考えると，その基底 $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_m)$ であって，任意の異なる二つの元 k, $l\in\{1,\dots,m\}$ に対して $\Phi_{i_0}(\epsilon_k,\epsilon_l)=0$ を満たすものがとれる（補題 2.23）．そこで，一般性を失わず，任意の k, $l\in\{1,\dots,n\}$, $k\neq l$ に対して $\Phi_{i_0}(\xi_{i_0}^k,\xi_{i_0}^l)=0$ であると仮定する．すると，任意の異なる二つの元 k, $l\in\{1,\dots,n\}$ に対して

$$\Phi\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i^k,\bigotimes_{i\in I}\xi_i^l\right)=\prod_{i\in I}\Phi_i(\xi_i^k,\xi_i^l)=0$$

だから，

$$
\begin{aligned}
\Phi(\xi,\xi) &= \sum_{k,l=1}^{n} \Phi\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i^k, \bigotimes_{i\in I}\xi_i^l\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i^k, \bigotimes_{i\in I}\xi_i^k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\prod_{i\in I}\Phi_i(\xi_i^k,\xi_i^k)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．各 Φ_i が正値ならば，上式より $\Phi(\xi,\xi)\geq 0$ である．また，$\xi\neq 0$ よりある $k\in\{1,\dots,n\}$ が存在して任意の $i\in I$ に対して $\xi_i^k\neq 0$ となるから，各 Φ_i が非退化かつ正値ならば，上式より $\Phi(\xi,\xi)>0$ である．これで，主張が示された． □

定義 2.25（前内積空間のテンソル積） $(V_i)_{i\in I}$ を前内積空間の有限族とし，$V=\bigotimes_{i\in I}V_i$ と置く．命題 2.24 (2) より，V 上の正値 Hermite 形式 $\langle -|-\rangle_V$ であって，任意の $(\xi_i)_{i\in I}$, $(\eta_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i$ に対して

$$
\left\langle \bigotimes_{i\in I}\xi_i \middle| \bigotimes_{i\in I}\eta_i \right\rangle_V = \prod_{i\in I}\langle\xi_i|\eta_i\rangle_{V_i}
$$

を満たすものが，一意に存在する．これを前内積とする前内積空間 V を，$(V_i)_{i\in I}$ の**テンソル積**（tensor product）という．

注意 2.26 $(V_i)_{i\in I}$ を前内積空間の有限族とし，$V=\bigotimes_{i\in I}V_i$ と置く．

(1) 前内積空間のテンソル積の定義より，任意の $(\xi_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i$ に対して，

$$
\left\|\bigotimes_{i\in I}\xi_i\right\| = \prod_{i\in I}\|\xi_i\|
$$

が成り立つ．特に，$\prod_{i\in I}V_i$ から $\bigotimes_{i\in I}V_i$ への多重線型写像 $(\xi_i)_{i\in I}\mapsto\bigotimes_{i\in I}\xi_i$ は，連続である．

(2) 命題 2.24 (3) より，各 V_i が内積空間ならば，V も内積空間である．

定義 2.27（Hilbert テンソル積） $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とする．これらのテンソル積 $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{H}_i$ を完備化して得られる Hilbert 空間を，$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ の **Hilbert テンソル積**（Hilbert tensor product）といい，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と書く．添字集合 I の元が列挙されている場合には，$\mathcal{H}_{i_1}\mathbin{\widehat{\otimes}}\cdots\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathcal{H}_{i_n}$ などとも書く．

有限添字集合 I の元が i_1, …, i_n と列挙されている場合には，Hilbert テンソル積を $\mathcal{H}_{i_1}\mathbin{\widehat{\otimes}}\cdots\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathcal{H}_{i_n}$ とも書く．一つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のみからなる有限族 $(\mathcal{H})_{i\in I}$ の Hilbert テンソル積は，$\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} I}$ とも書く．

命題 2.28 $(V_i)_{i\in I}$ と $(W_i)_{i\in I}$ を前内積空間の有限族とし，各 $i\in I$ に対して $x_i\in\mathscr{L}(V_i;W_i)$ とする．このとき，線型写像のテンソル積 $\bigotimes_{i\in I}x_i$ は，前内積空間のテンソル積 $\bigotimes_{i\in I}V_i$ から $\bigotimes_{i\in I}W_i$ への連続線型作用素であり，その作用素ノルムは

$$
\left\|\bigotimes_{i\in I}x_i\right\| = \prod_{i\in I}\|x_i\|
$$

で与えられる．

証明　$I=\{1,2\}$ である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．

まず，

$$
\begin{aligned}
\|x_1\|\|x_2\| &= \sup_{\|\xi_1\|,\|\xi_2\|\le 1}\|x_1\xi_1\|\|x_2\xi_2\| \\
&= \sup_{\|\xi_1\|,\|\xi_2\|\le 1}\|(x_1\otimes x_2)(\xi_1\otimes\xi_2)\| \\
&\le \|x_1\otimes x_2\|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

次に，$\|x_1\otimes x_2\|\le\|x_1\|\|x_2\|$ を示す．$x_1\otimes x_2=(x_1\otimes 1_{V_2})(1_{V_1}\otimes x_2)$ だから，そのためには，$\|x_1\otimes 1_{V_2}\|\le\|x_1\|$ および $\|1_{V_1}\otimes x_2\|\le\|x_2\|$ を示せばよい．どちらも同様だから，前者のみを示す．写像 $(\xi_1,\eta_1)\mapsto\|x_1\|^2\langle\xi_1|\eta_1\rangle-\langle x_1\xi_1|x_2\eta_2\rangle$ は V_1 上の正値 Hermite 形式だから，命題 2.24 (2) より，$V_1\otimes V_2$ 上の正値 Hermite 形式 $\varPhi$ であって，任意の ξ_1, $\eta_1\in V_1$ と ξ_2, $\eta_2\in V_2$ に対して

$$
\begin{aligned}
\varPhi(\xi_1\otimes\xi_2,\eta_1\otimes\eta_2) &= (\|x_1\|^2\langle\xi_1|\eta_1\rangle-\langle x_1\xi_1|x_2\eta_2\rangle)\langle\xi_2|\eta_2\rangle \\
&= \|x_1\|^2\langle\xi_1\otimes\xi_2|\eta_1\otimes\eta_2\rangle-\langle(x_1\otimes 1_{V_2})(\xi_1\otimes\xi_2)|(x_1\otimes 1_{V_2})(\eta_1\otimes\eta_2)\rangle
\end{aligned}
$$

を満たすものが，（一意に）存在する．$\varPhi$ の準双線型性より，任意の ξ, $\eta\in V_1\otimes V_2$ に対して，

$$
\varPhi(\xi,\eta)=\|x_1\|^2\langle\xi|\eta\rangle-\langle(x_1\otimes 1_{V_2})\xi|(x_1\otimes 1_{V_2})\eta\rangle
$$

である．上式と $\varPhi$ の正値性より，任意の $\xi\in V_1\otimes V_2$ に対して

$$
0\le\varPhi(\xi,\xi)=\|x_1\|^2\|\xi\|^2-\|(x_1\otimes 1_{V_2})\xi\|^2,
$$

となるから，$\|(x_1\otimes 1_{V_2})\xi\|\le\|x_1\|\|\xi\|$ が成り立つ．よって，$\|x_1\otimes 1\|\le\|x_1\|$ である．　□

定義 2.29（連続線型作用素の Hilbert テンソル積）　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ と $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，各 $i\in I$ に対して $x_i\in\mathscr{L}(\mathcal{H}_i;\mathcal{K}_i)$ とする．このとき，線型写像のテンソル積 $\bigotimes_{i\in I}x_i$ は内積空間のテンソル積 $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{H}_i$ から $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{K}_i$ への連続線型作用素だから（命題 2.28），Hilbert テンソル積 $\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ から $\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ への連続線型作用素に一意に拡張される．この拡張を，$(x_i)_{i\in I}$ の **Hilbert テンソル積**（Hilbert tensor product）といい，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}x_i$ と書く．

有限添字集合 I の元が i_1, ..., i_n と列挙されている場合には，連続線型作用素の Hilbert テンソル積を $x_{i_1}\mathbin{\widehat{\otimes}}\cdots\mathbin{\widehat{\otimes}}x_{i_n}$ とも書く．一つの連続線型作用素 x のみからなる有限族 $(x)_{i\in I}$ の Hilbert テンソル積は，$x^{\widehat{\otimes}I}$ とも書く．

注意 2.30　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ と $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，各 $i\in I$ に対して $x_i\in\mathscr{L}(\mathcal{H}_i;\mathcal{K}_i)$ とする．このとき，命題 2.28 より，連続線型作用素の Hilbert テンソル積 $\widehat{\bigotimes}_{i\in I}x_i\in\mathscr{L}(\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i;\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{K}_i)$ の作用素ノルムは，

$$
\left\|\widehat{\bigotimes_{i\in I}}x_i\right\|=\prod_{i\in I}\|x_i\|
$$

で与えられる．

注意 2.31　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とする．各 $i\in I$ に対して，$\mathcal{M}_i$ を $\mathcal{H}_i$ を閉部分線型空間とし，$\iota_i\in\mathscr{L}(\mathcal{M}_i;\mathcal{H}_i)$ を包含写像とする．このとき，各 ι_i が等長であることから容易に確かめられるように，

$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\iota_i\in\mathscr{L}(\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{M}_i;\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i)$ は等長である．以下では，特に断らなくても，これによって，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{M}_i$ を $\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ の閉部分線型空間とみなす．

命題 2.32 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して $(\mathcal{H}_{i,j_i})_{j\in J_i}$ を $\mathcal{H}_i$ の閉部分線型空間の完全直交族とし，$J=\prod_{i\in I}J_i$ と置く．このとき，$(\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_{i,j_i})_{(j_i)_{i\in I}\in J}$ は，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間の完全直交族である．

証明 各 $i\in I$ に対して $(\mathcal{H}_{i,j_i})_{j\in J_i}$ は直交族だから，Hilbert テンソル積の内積の定義より，$(\bigotimes_{i\in I}\mathcal{H}_{i,j_i})_{(j_i)_{i\in I}\in J}$ は直交族である．また，各 $i\in I$ に対して $\bigoplus_{j_i\in J_i}\mathcal{H}_{i,j_i}$ は $\mathcal{H}_i$ において稠密だから，

$$\bigoplus_{(j_i)_{i\in I}\in J}\bigotimes_{i\in I}\mathcal{H}_{i,j_i}=\bigotimes_{i\in I}\bigoplus_{j_i\in J_i}\mathcal{H}_{i,j_i}$$

は $\mathcal{H}$ において稠密である．よって，$(\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_{i,j_i})_{(j_i)_{i\in I}\in J}=(\overline{\bigotimes_{i\in I}\mathcal{H}_{i,j_i}})_{(j_i)_{i\in I}\in J}$ は，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間の完全直交族である． □

系 2.33 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して $(\epsilon_{i,j_i})_{j\in J_i}$ を $\mathcal{H}_i$ の正規直交基底とし，$J=\prod_{i\in I}J_i$ と置く．このとき，$(\bigotimes_{i\in I}\epsilon_{i,j_i})_{(j_i)_{i\in I}\in J}$ は，$\mathcal{H}$ の正規直交基底である．

証明 各 $\mathcal{H}_i$ の閉部分線型空間の完全直交族 $(\mathbb{K}\epsilon_{i,j_i})_{j\in J_i}$ に命題 2.32 を適用すればよい． □

3 Hilbert 空間上の連続線型作用素

3.1 始空間と終空間

定義 3.1（始空間，終空間） x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とする．

(1) $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $(\operatorname{Ker}x)^{\perp}$ を，x の**始空間**（initial space）あるいは**右台空間**（right support space）という．x の始空間の上への直交射影を，x の**始射影**（initial projection）あるいは**右台射影**（right support projection）といい，$\mathrm{s_R}(x)$ と書く．
(2) $\mathcal{K}$ の閉部分線型空間 $\overline{x\mathcal{H}}$ を，x の**終空間**（final space）あるいは**左台空間**（left support space）という．x の終空間の上への直交射影を，x の**終射影**（final projection）あるいは**左台射影**（left support projection）といい，$\mathrm{s_L}(x)$ と書く．

注意 3.2 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とする．

(1) $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ の上への直交射影を $p_{\mathcal{M}}$ と書くと，$xp_{\mathcal{M}}=x$ であるための必要十分条件は，$\mathcal{M}$ が x の始空間を含むことである．
(2) $\mathcal{K}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{N}$ の上への直交射影を $q_{\mathcal{N}}$ と書くと，$q_{\mathcal{N}}x=x$ であるための必要十分条件は，$\mathcal{N}$ が x の終空間を含むことである．

3.2　随伴

定理 3.3　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，$x^* \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ であって任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して $\langle \xi | x^*\eta \rangle = \langle x\xi | \eta \rangle$ を満たすものが，一意に存在する．さらに，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto x^*$ は，等長共役線型同型である．

証明　$\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ 上の連続準双線型形式全体のなす Banach 空間 $\mathscr{S}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ を考える．$\Phi \in \mathscr{S}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ に対して $\Phi^* \in \mathscr{S}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ を $\Phi^*(\xi,\eta) = \overline{\Phi(\eta,\xi)}$ と定めると，写像 $\Phi \mapsto \Phi^*$ は $\mathscr{S}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ から $\mathscr{S}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ への等長共役線型同型である．定理 1.29 の等長同型作用素を通してこれに対応する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への等長共役線型同型を $x \mapsto x^*$ と書く．すると，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，$x^* \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ は，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して $\langle \xi | x^*\eta \rangle = \overline{\langle \eta | x\xi \rangle} = \langle x\xi | \eta \rangle$ を満たす唯一の元である．これで，主張が示された．　□

定義 3.4（随伴）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，定理 3.3 によって定まる $x^* \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ を，x の**随伴**（adjoint）と呼ぶ．随伴を表す記号 x^* は，特に断りなく用いる．

命題 3.5　$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，$x^{**} = x$ である．
(2) $1_{\mathcal{H}}^* = 1_{\mathcal{H}}$ である．
(3) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ に対して，$(yx)^* = x^*y^*$ である．
(4) $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ が可逆であることと $x^* \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ が可逆であることとは同値であり，これらの条件の下で，$(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$ が成り立つ．

証明　(1)　任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して $\langle \eta | x^{**}\xi \rangle = \langle x^*\eta | \xi \rangle = \langle \eta | x\xi \rangle$ だから，$x^{**} = x$ である．

(2)　任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \eta | 1_{\mathcal{H}}\xi \rangle = \langle \eta | \xi \rangle = \langle 1_{\mathcal{H}}\eta | \xi \rangle$ だから，$1_{\mathcal{H}}^* = 1_{\mathcal{H}}$ である．

(3)　任意の $\zeta \in \mathcal{L}$ と $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \xi | (yx)^*\zeta \rangle = \langle yx\xi | \zeta \rangle = \langle x\xi | y^*\zeta \rangle = \langle \xi | x^*y^*\zeta \rangle$ だから，$(yx)^* = x^*y^*$ である．

(4)　x が可逆ならば，(2) と (3) より，$(x^{-1})^*x^* = x^*(x^{-1})^*x^* = 1_{\mathcal{H}}^* = 1_{\mathcal{H}}$ である．よって，このとき，x^* も可逆であり，$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ が成り立つ．x を x^* に置き換えれば，(1) と合わせて，x^* が可逆ならば x も可逆であることもわかる．　□

命題 3.6　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，x^* の始空間・終空間は，それぞれ x の終空間・始空間に等しい．

証明　任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
\eta \in (\overline{x\mathcal{H}})^{\perp} &\iff \text{任意の } \xi \in \mathcal{H} \text{ に対して } \langle \eta | x\xi \rangle = 0 \\
&\iff \text{任意の } \xi \in \mathcal{H} \text{ に対して } \langle x^*\eta | \xi \rangle = 0 \\
&\iff \eta \in \operatorname{Ker} x^*
\end{aligned}$$

だから，$(\overline{x\mathcal{H}})^{\perp} = \operatorname{Ker} x^*$ である．よって，$\overline{x\mathcal{H}} = (\operatorname{Ker} x^*)^{\perp}$ である（命題 1.27 (1)）．この等式で x を x^* に置き換えれば，$\overline{x^*\mathcal{H}} = (\operatorname{Ker} x)^{\perp}$ であることもわかる．　□

命題 3.7　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x について，$\|x\|^2 = \|x^*x\|$ が成り立つ．

証明　随伴をとる写像は等長だから（定理 3.3），$\|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$ である．また，Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より，

$$\|x\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leq 1}\|x\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leq 1}\langle \xi | x^*x\xi\rangle \leq \sup_{\|\xi\|\leq 1}\|\xi\|\|x^*x\xi\| \leq \|x^*x\|$$

である．よって，$\|x\|^2 = \|x^*x\|$ が成り立つ．　□

命題 3.8　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ と $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して $x_i \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_i;\mathcal{K})$ とし，これらは $\sup_{i\in I}\|x_i\| < \infty$ を満たすとして，$x = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} x_i \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と置く．このとき，

$$x^* = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} x_i^*$$

が成り立つ．

証明　$y = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} x_i^*$ と置く．任意の $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$ と $\eta = (\eta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \eta | x\xi\rangle &= \langle (\eta_i)_{i\in I} | (x_i\xi_i)_{i\in I}\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\langle \eta_i | x_i\xi_i\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\langle x_i^*\eta_i | \xi_i\rangle \\
&= \langle (x_i^*\eta_i)_{i\in I} | (\xi_i)_{i\in I}\rangle \\
&= \langle y\eta | \xi\rangle
\end{aligned}$$

だから，$x^* = y$ である．　□

命題 3.9　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ と $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，各 $i \in I$ に対して $x_i \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_i;\mathcal{K}_i)$ とする．このとき，

$$\left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}} x_i\right)^* = \widehat{\bigotimes_{i\in I}} x_i^*$$

が成り立つ．

証明　各 $i \in I$ に対して $\xi_i \in \mathcal{H}_i$，$\eta_i \in \mathcal{K}_i$ とすると，

$$\begin{aligned}
\left\langle \bigotimes_{i\in I}\eta_i \middle| \left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}} x_i\right)\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i\right)\right\rangle &= \left\langle \bigotimes_{i\in I}\eta_i \middle| \bigotimes_{i\in I} x_i\xi_i\right\rangle \\
&= \prod_{i\in I}\langle \eta_i | x_i\xi_i\rangle \\
&= \prod_{i\in I}\langle x_i^*\eta_i | \xi_i\rangle \\
&= \left\langle \bigotimes_{i\in I} x_i^*\eta_i \middle| \bigotimes_{i\in I}\xi_i\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}} x_i^*\right)\left(\bigotimes_{i\in I}\eta_i\right) \middle| \left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ．このような $\bigotimes_{i\in I}\xi_i$ の全体は $\mathcal{H}$ を位相線型空間として生成し，$\bigotimes_{i\in I}\eta_i$ の全体は $\mathcal{K}$ を位相線型空間として生成するから，上式より，$(\widehat{\bigotimes}_{i\in I} x_i)^* = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} x_i^*$ が成り立つ．　□

3.3 連続自己随伴作用素

定義 3.10（連続自己随伴作用素） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x が**自己随伴**（self-adjoint）であるとは，$x^* = x$ であることをいう．

命題 3.11 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，次の条件 (a) と (b) は同値である．さらに，係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ ならば，これらは条件 (c) とも同値である．

(a) x は自己随伴である．
(b) $\mathcal{H}$ 上の準双線型形式 $(\eta, \xi) \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle$ は，Hermite である．
(c) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \xi | x\xi \rangle \in \mathbb{R}$ である．

証明 (a) $\iff$ (b) x が自己随伴であるための必要十分条件は，任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \eta | x\xi \rangle$ と $\langle \eta | x^*\xi \rangle = \overline{\langle \xi | x\eta \rangle}$ が等しいことである．これは，$\mathcal{H}$ 上の準双線型形式 $(\eta, \xi) \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle$ が Hermite であることを意味する．

(b) $\iff$ (c)（係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ である場合） 系 1.5 から従う． □

命題 3.12 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 x と y に対して，次の条件は同値である．

(a) $x = y$ である．
(b) 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \eta | x\xi \rangle = \langle \eta | y\xi \rangle$ である．
(c) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \xi | x\xi \rangle = \langle \xi | y\xi \rangle$ である．

証明 (a) $\iff$ (b) 明らかである．

(b) $\iff$ (c) $\mathcal{H}$ 上の準双線型形式 $(\eta, \xi) \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle$ と $(\eta, \xi) \mapsto \langle \eta | y\xi \rangle$ は Hermite だから（命題 3.11），主張は系 1.6 から従う． □

命題 3.13 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 x の固有値は，すべて実数である．

証明 $\lambda \in \mathbb{K}$ が x の固有値であるとして，固有ベクトル $\xi \neq 0$ をとると，$\lambda \|\xi\|^2 = \langle \xi | x\xi \rangle = \langle x\xi | \xi \rangle = \overline{\lambda} \|x\|^2$ だから，λ は実数である． □

命題 3.14 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ が x-安定ならば，その直交補空間 $\mathcal{M}^\perp$ も x-安定である．

証明 $\eta \in \mathcal{M}^\perp$ とすると，任意の $\xi \in \mathcal{M}$ に対して $\langle \xi | x\eta \rangle = \langle x\xi | \eta \rangle = 0$ だから，$x\eta \in \mathcal{M}^\perp$ である． □

命題 3.15 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathcal{H}$ のある閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ が存在して，x は $\mathcal{M}$ の上への直交射影である．
(b) x は冪等かつ自己随伴（すなわち，$x^2 = x = x^*$）である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) x が $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ の上への直交射影であるとする．すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$x\xi \in \mathcal{M}$ より $x^2\xi = x\xi$ だから，x は冪等である．また，ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ とすると，$x\xi - \xi \in \mathcal{M}^\perp$ かつ $x\eta \in \mathcal{M}$ であることより $\langle x\xi - \xi | x\eta \rangle = 0$ だから，$\langle \xi | x\eta \rangle = \langle \xi | x\eta \rangle + \langle x\xi - \xi | x\eta \rangle = \langle x\xi | x\eta \rangle$ である．同様に，

$\langle x\xi|\eta\rangle = \langle x\xi|x\eta\rangle$ も成り立つから，$\langle \xi|x\eta\rangle = \langle x\xi|\eta\rangle$ である．よって，x は自己随伴である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　x が冪等かつ自己随伴であるとして，$\mathcal{M} = \{\xi \in \mathcal{H} \mid x\xi = \xi\}$ と置く．$\mathcal{M}$ は，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間である．$\xi \in \mathcal{H}$ を任意にとる．すると，$x^2\xi = x\xi$ だから，$x\xi \in \mathcal{M}$ である．また，任意の $\eta \in \mathcal{M}$ に対して $\langle \eta|x\xi\rangle = \langle x\eta|\xi\rangle = \langle \eta|\xi\rangle$ より $\langle \eta|\xi - x\xi\rangle = 0$ だから，$\xi - x\xi \in \mathcal{M}^\perp$ である．よって，x は $\mathcal{M}$ の上への直交射影である（系 1.25 (1)）．□

定義 3.16（直交射影）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x が命題 3.15 の同値な条件を満たすとき，x は $\mathcal{H}$ 上の**直交射影**（orthogonal projection）あるいは単に**射影**であるという．

3.4　連続正規作用素

定義 3.17（連続正規作用素）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x が**正規**（normal）であるとは，$x^*x = xx^*$ であることをいう．

命題 3.18　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) x は正規である．
(b) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\|x\xi\| = \|x^*\xi\|$ である．

証明　x^*x と xx^* は自己随伴だから，これらが一致するための必要十分条件は，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \xi|x^*x\xi\rangle = \|x\xi\|^2$ と $\langle \xi|xx^*\xi\rangle = \|x^*\xi\|^2$ が等しいことである（命題 3.12）．すなわち，主張の同値性が成り立つ．□

系 3.19　x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とする．

(1) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x) = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} 1_\mathcal{H} - x^*)$ が成り立つ．特に，λ が x の固有値であることと，$\overline{\lambda}$ が x^* の固有値であることとは同値である．
(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)$ とその直交補空間 $\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)^\perp$ は，ともに x-安定かつ x^*-安定である．
(3) 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$，$\lambda \neq \mu$ に対して，固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)$ と $\mathrm{Ker}(\mu 1_\mathcal{H} - x)$ は直交する．

証明　(1)　x が正規であることより $\lambda 1_\mathcal{H} - x$ も正規だから，命題 3.18 より，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\|(\lambda 1_\mathcal{H} - x)\xi\| = \|(\overline{\lambda} 1_\mathcal{H} - x^*)\xi\|$ である．よって，$\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x) = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} 1_\mathcal{H} - x^*)$ が成り立つ．

(2)　(1) より $\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x) = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} 1_\mathcal{H} - x^*)$ であり，これは x-安定かつ x^*-安定である．また，$\eta \in \mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)^\perp$ とすると，任意の $\xi \in \mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)$ に対して $\langle \xi|x\eta\rangle = \langle x^*\xi|\eta\rangle = 0$ だから，$x\eta \in \mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)^\perp$ である．よって, $\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)^\perp$ は x-安定である．x を x^* に置き換えれば, $\mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)^\perp = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} 1_\mathcal{H} - x^*)^\perp$ が x^*-安定であることもわかる．

(3)　$\xi \in \mathrm{Ker}(\lambda 1_\mathcal{H} - x)$，$\eta \in \mathrm{Ker}(\mu 1_\mathcal{H} - x)$ とすると，(1) より $\eta \in \mathrm{Ker}(\overline{\mu} 1_\mathcal{H} - x^*)$ だから，$\lambda\langle \eta|\xi\rangle = \langle \eta|x\xi\rangle = \langle x^*\eta|\xi\rangle = \mu\langle \eta|\xi\rangle$ である．よって，$\langle \eta|\xi\rangle = 0$ である．□

注意 3.20　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 x について，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ が x-安定であっても，その直交補空間 $\mathcal{M}^\perp$ が x-安定であるとは限らない．たとえば，$\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$（その標準正規直交基底を $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ と書く）とし，その上の連続線型作用素 x を $x\epsilon_n = \epsilon_{n+1}$（$n \in \mathbb{Z}$）によって定める．すると，$x$ は正

規（より強く，ユニタリ）であり，その随伴は $x^*\epsilon_n = \epsilon_{n-1}$（$n \in \mathbb{Z}$）を満たす．$l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ の閉部分線型空間 $\overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は，x-安定だが x^*-安定ではない．

系 3.21 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 x について，x の始空間と終空間，x^* の始空間と終空間の四つは，すべて等しい．

証明 命題 3.6 より，x^* の始空間・終空間は，それぞれ x の終空間・始空間に等しい．また，系 3.19 (1) より $\operatorname{Ker} x = \operatorname{Ker} x^*$ だから，x と x^* の始空間は等しい．よって，x の始空間と終空間，x^* の始空間と終空間の四つは，すべて等しい． □

定義 3.22（台空間） x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とする．x の始空間と終空間（系 3.21 より，これらは等しい）を，x の**台空間**（support space）という．x の台空間の上への直交射影を，x の**台射影**（support projection）といい，$\mathrm{s}(x)$ と書く．

3.5 数域半径

定義 3.23（数域半径） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ の**数域半径**（numerical radius）を，

$$\|x\|_\nu = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \xi | x\xi \rangle|$$

と定める．ただし，$\mathcal{H} = 0$ である場合は，$\|x\|_\nu = 0$ と定める．

命題 3.24 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素とする．

(1) $\|x\|_\nu \le \|x\|$ である．
(2) 係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ ならば，$\|x\| \le 2\|x\|_\nu$ である．

証明 (1) ノルム 1 以下の任意のベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式より（命題 1.8），$|\langle \xi | x\xi \rangle| \le \|\xi\|\|x\xi\| \le \|x\|$ である．よって，$\|x\|_\nu \le \|x\|$ である．

(2) ノルム 1 以下の任意のベクトル $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，分極公式（命題 1.4 (2)）と中線定理（命題 1.7）より，

$$\begin{aligned}
|\langle \eta | x\xi \rangle| &= \frac{1}{4}|\langle \eta + \xi | x(\eta + \xi)\rangle - \langle \eta - \xi | x(\eta - \xi)\rangle - i\langle \eta + i\xi | x(\eta + i\xi)\rangle + i\langle \eta - i\xi | x(\eta - i\xi)\rangle| \\
&\le \frac{\|x\|_\nu}{4}(\|\eta + \xi\|^2 + \|\eta - \xi\|^2 + \|\eta + i\xi\|^2 + \|\eta - i\xi\|^2) \\
&= \frac{\|x\|_\nu}{2}(\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 + \|i\xi\|^2) \\
&\le 2\|x\|_\nu
\end{aligned}$$

である．ξ と η に関する上限をとることで，$\|x\| \le 2\|x\|_\nu$ を得る． □

命題 3.25 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 x に対して，$\|x\| = \|x\|_\nu$ が成り立つ．

証明 $\|x\|_\nu \le \|x\|$ は，命題 3.24 (1) で一般の連続線型作用素に対して示した．$\|x\| \le \|x\|_\nu$ を示す．ノルム

1 以下の任意のベクトル $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，分極公式（命題 1.4）と中線定理（命題 1.7）より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle\eta|x\xi\rangle &= \frac{1}{4}(\langle\eta+\xi|x(\eta+\xi)\rangle - \langle\eta-\xi|x(\eta-\xi)\rangle) \\ &\leq \frac{\|x\|_\nu}{4}(\|\eta+\xi\|^2 + \|\eta-\xi\|^2) \\ &= \frac{\|x\|_\nu}{2}(\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) \\ &\leq \|x\|_\nu\end{aligned}$$

である．λ を絶対値 1 のスカラーとして，ξ を $\lambda\xi$ に置き換えると，$\mathrm{Re}\,\lambda\langle\eta|x\xi\rangle \leq \|x\|_\nu$ を得る．絶対値 1 の任意のスカラー λ に対してこれが成り立つから，$|\langle\eta|x\xi\rangle| \leq \|x\|_\nu$ である．ξ と η に関する上限をとることで，$\|x\| \leq \|x\|_\nu$ を得る． □

本小節の以下の部分では，複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，

$$\mathrm{Re}\,x = \frac{x+x^*}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,x = \frac{x-x^*}{2i}$$

と書く．$\mathrm{Re}\,x$ と $\mathrm{Im}\,x$ は自己随伴であり，$x = \mathrm{Re}\,x + i\,\mathrm{Im}\,x$ を満たす．また，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle\xi|(\mathrm{Re}\,x)\xi\rangle = \frac{\langle\xi|x\xi\rangle + \langle\xi|x^*\xi\rangle}{2} = \frac{\langle\xi|x\xi\rangle + \overline{\langle\xi|x\xi\rangle}}{2} = \mathrm{Re}\langle\xi|x\xi\rangle$$

が成り立つ．

補題 3.26　複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x に対して，

$$\|x\|_\nu = \sup_{|\lambda|=1}\|\mathrm{Re}\,\lambda x\|$$

が成り立つ．

証明　λ を絶対値 1 の複素数とする．$\mathrm{Re}\,\lambda x$ は自己随伴だから，その作用素ノルムと数域半径は一致する（命題 3.25）．したがって，

$$\|\mathrm{Re}\,\lambda x\| = \sup_{\|\xi\|=1}|\langle\xi|(\mathrm{Re}\,\lambda x)\xi\rangle| = \sup_{\|\xi\|=1}|\mathrm{Re}\langle\xi|\lambda x\xi\rangle| = \sup_{\|\xi\|=1}|\mathrm{Re}\,\lambda\langle\xi|x\xi\rangle|$$

である．λ に関する上限をとることで，

$$\sup_{|\lambda|=1}\|\mathrm{Re}\,\lambda x\| = \sup_{|\lambda|=1}\sup_{\|\xi\|=1}|\mathrm{Re}\,\lambda\langle\xi|x\xi\rangle| = \sup_{\|\xi\|=1}|\langle\xi|x\xi\rangle| = \|x\|_\nu$$

を得る． □

補題 3.27　複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 x に対して，$\|x^2\|_\nu \leq \|x\|_\nu^2$ が成り立つ．

証明　$a = \mathrm{Re}\,x$，$b = \mathrm{Im}\,x$ と置くと，$x^2 = (a+ib)^2 = (a^2-b^2) + i(ab+ba)$ だから，$\mathrm{Re}\,x^2 = a^2 - b^2$ である．したがって，ノルム 1 以下の任意のベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\xi|(\mathrm{Re}\,x^2)\xi\rangle &= \langle\xi|a^2\xi\rangle - \langle\xi|b^2\xi\rangle \\ &= \|a\xi\|^2 - \|b\xi\|^2 \\ &\leq \|a\xi\|^2 \\ &\leq \|a\|^2 \\ &\leq \|x\|_\nu^2\end{aligned}$$

である（最後の不等式は，補題 3.26 から従う）．λ を絶対値 1 の複素数として，x を λx に置き換えると，$\langle\xi|(\operatorname{Re}\lambda^2x^2)\xi\rangle \leq \|x\|_\nu^2$ を得る．絶対値 1 の任意の複素数 λ に対してこれが成り立つから，補題 3.26 より，$\|x^2\|_\nu \leq \|x\|_\nu^2$ である． □

命題 3.28　複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 x に対して，$\|x\| = \|x\|_\nu$ が成り立つ．

証明　$\|x\|_\nu \leq \|x\|$ は，命題 3.24 (1) で一般の連続線型作用素に対して示した．$\|x\| \leq \|x\|_\nu$ を示す．命題 3.7 を繰り返し用いて，x の正規性に注意することで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\|x\|^{2\cdot 2^n} = \|x^*x\|^{2^n} = \|(x^*x)^{2^n}\| = \|(x^*)^{2^n}x^{2^n}\| = \|(x^{2^n})^*x^{2^n}\| = \|x^{2^n}\|^2$$

を得る．したがって，$\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$ である．また，命題 3.24 (2) と補題 3.27 より，

$$\|x^{2^n}\| \leq 2\|x^{2^n}\|_\nu \leq 2\|x\|_\nu^{2^n}$$

である．これらを合わせて，

$$\|x\|^{2^n} \leq 2\|x\|_\nu^{2^n}$$

を得る．これが任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つから，$\|x\| \leq \|x\|_\nu$ である． □

注意 3.29　実 Hilbert 空間上の連続線型作用素 x に対しても $\operatorname{Re} x = (x + x^*)/2$ と書くことにすれば，補題 3.26 は実 Hilbert 空間でも成り立ち，証明も同様にできる．一方で，命題 3.24 (2)，補題 3.27，命題 3.28 は，実 Hilbert 空間では成り立たない．たとえば，実 Hilbert 空間 $\mathbb{R}^2$ 上の連続線型作用素 $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ を考えると，x は正規であり $\|x\| = 1$ だが，任意の $\xi \in \mathbb{R}^2$ に対して $\langle\xi|x\xi\rangle = 0$ だから $\|x\|_\nu = 0$ であり，$x^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ だから $\|x^2\|_\nu = 1$ である．

3.6　連続正作用素

本小節では，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素全体のなす空間を，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ と書く．随伴をとる写像 $x \mapsto x^*$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ から自身への共役等長同型作用素であることより（定理 3.3），$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の閉部分実線型空間である．

定義 3.30（連続正作用素）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x が**正**（positive）であるとは，x が自己随伴であり，かつ任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle\xi|x\xi\rangle \geq 0$ を満たすことをいう．$\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 x, y に対して，$y - x$ が正であることを，$x \leq y$ あるいは $y \geq x$ と書く．

注意 3.31　複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 x については，x が任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle\xi|x\xi\rangle \geq 0$ を満たすならば，x は自動的に自己随伴である（命題 3.11）．一方で，実 Hilbert 空間では，このことは成り立たない．たとえば，実 Hilbert 空間 $\mathbb{R}^2$ 上の連続線型作用素 $x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は，任意の $\xi \in \mathbb{R}^2$ に対して $\langle\xi|x\xi\rangle = 0$ を満たすが，自己随伴ではない．

命題 3.32　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 x の固有値は，すべて 0 以上の実数である．

証明　$\lambda \in \mathbb{K}$ が x の固有値であるとして，固有ベクトル $\xi \neq 0$ をとると，$\lambda\|\xi\|^2 = \langle\xi|x\xi\rangle \geq 0$ だから，λ は 0 以上の実数である． □

命題 3.33　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と連続正作用用素 $x, y \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$sx + ty$ も正である．
(2) $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ について，x と $-x$ がともに正ならば，$x = 0$ である．
(3) $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素全体のなす集合は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ において閉である．

証明 (1) 明らかである．

(2) x と $-x$ がともに正であるとすると，x は自己随伴であり，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \xi | x\xi \rangle = 0$ だから，$x = 0$ である（命題 3.12）．

(3) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上の線型形式 $x \mapsto \langle \xi | x\xi \rangle$ は連続である．よって，$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素全体のなす集合

$$\{x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \mid \text{任意の } \xi \in \mathcal{H} \text{ に対して } \langle \xi | x\xi \rangle \geq 0\}$$

は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ において閉であり，したがって，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ においても閉である． □

系 3.34 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．関係 $\leq$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上の順序であり，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ の実位相線型空間の構造と整合する[*2]．

証明 関係 $\leq$ は，明らかに反射的であり，命題 3.33 (1) より推移的であり，命題 3.33 (2) より反対称的だから，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上の順序である．さらに，命題 3.33 (1), (3) より，順序 $\leq$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ の実位相線型空間の構造と整合する． □

命題 3.35 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$，$y \in \mathscr{L}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ とする．

(1) x が自己随伴ならば，y^*xy も自己随伴である．
(2) x が正ならば，y^*xy も正である．

証明 (1) $(y^*xy)^* = y^*x^*y^{**} = y^*x^*y$ であることから従う．

(2) x が正であるとする．x は自己随伴だから，(1) より，y^*xy も自己随伴である．また，任意の $\eta \in \mathcal{K}$ に対して，$\langle \eta | y^*xy\eta \rangle = \langle y\eta | xy\eta \rangle \geq 0$ が成り立つ．よって，y^*xy は正である． □

命題 3.36 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 x と $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について，$\|x\| \leq t$ であることと，$-t1_{\mathcal{H}} \leq x \leq t1_{\mathcal{H}}$ であることとは同値である．

証明 連続自己随伴作用素 x の作用素ノルム $\|x\|$ は数域半径 $\|x\|_\nu$ に等しいから（命題 3.25），

$$\begin{aligned} \|x\| \leq t &\iff \text{ノルム 1 以下の任意のベクトル } \xi \in \mathcal{H} \text{ に対して } |\langle \xi | x\xi \rangle| \leq t \\ &\iff -t1_{\mathcal{H}} \leq x \leq t1_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

である． □

系 3.37 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 x と $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について，x が作用素ノルム t 以下の連続正作用素であることと，$t1_{\mathcal{H}} - x$ が作用素ノルム t 以下の連続正作用素であることとは同値である．

[*2] 実線型空間 V 上の前順序 $\leq$ が V **の実線型空間の構造と整合する**とは，任意の $\xi, \eta, \zeta \in V$ に対して $\xi \leq \eta$ ならば $\xi + \zeta \leq \eta + \zeta$ であり，任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\xi \in V$ に対して $\xi \geq 0$ ならば $t\xi \geq 0$ であることをいう．実位相線型空間 V 上の前順序 $\leq$ が V **の実位相線型空間の構造と整合する**とは，$\leq$ が V の実線型空間の構造と整合し，かつ $\{\xi \in V \mid \xi \geq 0\}$ が V において閉であることをいう．

証明　命題 3.36 より，x が作用素ノルム t 以下の連続正作用素であることは，$0 \le x \le t1_{\mathcal{H}}$ であることと同値である．主張は，このことから従う．□

系 3.38　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素からなる集合 S について，S が作用素ノルムに関して有界であることと，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上の順序 $\le$ に関して有界（すなわち，ある $a, b \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ が存在して，任意の $x \in S$ に対して $a \le x \le b$）であることとは同値である．

証明　系 3.37 より，S が作用素ノルムに関して有界であることと，ある $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ が存在して任意の $x \in S$ に対して $-t1_{\mathcal{H}} \le x \le t1_{\mathcal{H}}$ であることとは同値である．さらに，系 3.37 より，任意の $a, b \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ に対して，$t = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ と置けば，$a \le t1_{\mathcal{H}}$ かつ $b \ge -t1_{\mathcal{H}}$ である．よって，主張の同値性が成り立つ．□

命題 3.39　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$(x_i)_{i\in I}$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上のネットであり，順序 $\le$ に関して増加（すなわち，$i \le j$ ならば $x_i \le x_j$）かつ上に有界（すなわち，ある $b \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して $x_i \le b$）であるとする．このとき，$(x_i)_{i\in I}$ は，順序 $\le$ に関する上限 x をもつ．さらに，この x は，任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle \eta | x\xi \rangle = \lim_{i\to\infty} \langle \eta | x_i \xi \rangle$$

を満たす[*3]．

証明　必要ならばネット $(x_i)_{i\in I}$ のある項から先だけに注目することで，一般性を失わず，$(x_i)_{i\in I}$ が順序 $\le$ に関して（上下ともに）有界であると仮定する．このとき，$C = \sup_{i\in I}\|x_i\|$ と置くと，$C < \infty$ である．（系 3.38）．

各 $i \in I$ に対して，$\Phi_i(\eta, \xi) = \langle \eta | x_i \xi \rangle$（$\xi$, $\eta \in \mathcal{H}$）と置く．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$(\Phi_i(\xi, \xi))_{i\in I}$ は有界な増加ネットだから，$\mathbb{R}$ において収束する．このことと分極公式（命題 1.4）より，任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して，極限

$$\Phi(\eta, \xi) = \lim_{i\to\infty} \langle \xi | x_i \eta \rangle \in \mathbb{K}$$

が存在する．これによって，写像 $\Phi\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ を定める．すると，各 Φ_i は $\mathcal{H}$ 上の Hermite 形式であり（命題 3.11），任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して $|\Phi_i(\eta, \xi)| \le C\|\xi\|\|\eta\|$ を満たすから，Φ も $\mathcal{H}$ 上の Hermite 形式であり，任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して $|\Phi(\eta, \xi)| \le C\|\xi\|\|\eta\|$ を満たす．したがって，定理 1.29 と命題 3.11 より，自己随伴作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \eta | x\xi \rangle = \Phi(\eta, \xi) = \lim_{i\to\infty} \langle \eta | x_i \xi \rangle$$

を満たすものが，（一意に）存在する．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \xi | x\xi \rangle = \lim_{i\to\infty}\langle \xi | x_i \xi \rangle = \sup_{i\in I}\langle \xi | x_i \xi \rangle$ が成り立つから，x は $(x_i)_{i\in I}$ の順序 $\le$ に関する上限である．これで，主張が示された．□

3.7　等長作用素，余等長作用素，ユニタリ作用素，部分等長作用素

命題 3.40　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) $x^*x = 1_{\mathcal{H}}$ である．
(b) 任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle x\xi | x\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ である．

[*3] すなわち，$(x_i)_{i\in I}$ は x に弱収束（定義 5.1）する．命題 5.17 で，より強く，$(x_i)_{i\in I}$ が x に超強対合収束することを示す．

(c) x は等長（すなわち，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\|x\xi\| = \|\xi\|$）である．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b)　$x^*x = 1_{\mathcal{H}}$ であることは，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \xi | x^*x\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ であることと同値であり，この等式の左辺は $\langle x\xi | x\eta \rangle$ と書き直せる．よって，条件 (a) と (b) は同値である．

(a) $\Longleftrightarrow$ (c)　x^*x は自己随伴だから，これが $1_{\mathcal{H}}$ に等しいことは，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \xi | x^*x\xi \rangle = \langle \xi | \xi \rangle$ であることと同値であり（命題 3.12），この等式は $\|x\xi\|^2 = \|\xi\|^2$ と書き直せる．よって，条件 (a) と (c) は同値である．□

定義 3.41（余等長作用素） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x が**余等長**（coisometric）であるとは，その随伴 x^* が等長であることをいう．

命題 3.42 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) $xx^* = 1_{\mathcal{K}}$ である．
(b) 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{K}$ に対して，$\langle x^*\xi | x^*\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ である．
(c) x は余等長である．

証明 命題 3.40 から従う．□

ユニタリ作用素の定義はすでに 2.4 節で述べたが，ここで改めて定義しておく．

定義 3.43（ユニタリ作用素） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x が**ユニタリ**（unitary）であるとは，x が線型同型であり，かつ任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle x\xi | x\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ を満たすことをいう．

命題 3.44 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) x はユニタリである．
(b) $x^*x = 1_{\mathcal{H}}$ かつ $xx^* = 1_{\mathcal{K}}$ である．
(c) x は等長かつ余等長である．
(d) x は Banach 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への等長同型作用素である．
(e) x は等長であり，その像は $\mathcal{K}$ において稠密である．
(f) x は余等長かつ単射である．

さらに，これらの条件の下で，$x^{-1} = x^*$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b)　命題 3.40 より，x がユニタリであるための必要十分条件は，x が線型同型であり，かつ $x^*x = 1_{\mathcal{H}}$ を満たすことである．これは，$x^*x = 1_{\mathcal{H}}$ かつ $xx^* = 1_{\mathcal{K}}$ であることと同値である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　命題 3.40 と命題 3.42 から従う．

(a) $\Longleftrightarrow$ (d)　命題 3.40 から従う．

(d) $\Longleftrightarrow$ (e)　x が等長であるとすると，x の像は完備であり，したがって，$\mathcal{K}$ において閉である．よって，このとき，x が全射であることと，x の像が $\mathcal{K}$ において稠密であることとは同値である．

(e) $\Longleftrightarrow$ (f)　x が余等長であることは x^* が等長であることと同値であり，x が単射であることは x^* の像が $\mathcal{K}$ において稠密であることと同値である（命題 3.6）．したがって，条件 (f) は，条件 (e) において x を x^* に置き換えたものに同値である．一方で，すでに示した (b) $\Longleftrightarrow$ (e) より，条件 (e) と，条件 (e) において x を x^* に置き換えたものとは同値である．よって，条件 (e) と (f) は同値である．

<u>最後の主張</u>　条件 (b) から明らかである． □

定義 3.45（部分等長作用素） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x が**部分等長**（partially isometric）であるとは，x の制限によって定まる x の始空間から終空間への連続線型作用素がユニタリであることをいう．

命題 3.46 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への部分等長作用素 x について，x^*x は始射影 $\mathrm{s_R}(x)$ に等しく，xx^* は終射影 $\mathrm{s_L}(x)$ に等しい．

証明 $\mathcal{H}$ 上の x の始空間 $(\operatorname{Ker} x)^\perp$ の上への直交射影（x の始射影）を $p\colon \mathcal{H} \to (\operatorname{Ker} x)^\perp$ と書き，x の終空間 $\overline{x\mathcal{H}}$ から $\mathcal{K}$ への包含写像を $j\colon \overline{x\mathcal{H}} \to \mathcal{K}$ と書く．容易に確かめられるように，$p^*\colon (\operatorname{Ker} x)^\perp \to \mathcal{H}$ は包含写像であり，$j^*\colon \mathcal{K} \to \overline{x\mathcal{H}}$ は直交射影（x の終射影）である．x が部分等長であるとすると，ユニタリ作用素 $u\colon (\operatorname{Ker} x)^\perp \to \overline{x\mathcal{H}}$ が存在して，$x = jup$ と書ける．よって，$x^*x = p^*u^*j^*jup = p^*u^*up = p^*p$ は x の始射影 $\mathrm{s_R}(x)$ に等しく，$xx^* = jupp^*u^*j^* = juu^*j^* = jj^*$ は x の終射影 $\mathrm{s_L}(x)$ に等しい． □

命題 3.47 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，次の条件は同値である．

(a) x は部分等長である．
(b) x^* は部分等長である．
(c) $xx^*x = x$ である．
(d) $x^*xx^* = x^*$ である．
(e) x^*x は直交射影である．
(f) xx^* は直交射影である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (c)　x が部分等長ならば，命題 3.46 より，$xx^*x = x\,\mathrm{s_R}(x) = x$ である．

(c) $\Longrightarrow$ (e) かつ (f)　$xx^*x = x$ であるとすると，$x^*xx^*x = x^*x$ だから x^*x は直交射影であり，$xx^*xx^* = xx^*$ だから xx^* は直交射影である．

(e) $\Longrightarrow$ (a)　$p = x^*x$ が直交射影であるとする．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\|x\xi\|^2 = \langle \xi | x^*x\xi \rangle = \langle \xi | p\xi \rangle$ だから，$\xi \in \operatorname{Ker} p$ ならば $x\xi = 0$ であり，$\xi \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$ ならば $\|x\xi\| = \|\xi\|$ である．よって，x は $(\operatorname{Ker} p)^\perp$ を始空間とする部分等長作用素である．

(b) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e) かつ (f)　すでに示した (a) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (e) かつ (f) において，x を x^* に置き換えればよい．

(f) $\Longrightarrow$ (b)　すでに示した (e) $\Longrightarrow$ (a) において，x を x^* に置き換えればよい． □

系 3.48 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素は，等長または余等長ならば，部分等長である．

証明 Hilbert 空間の間の連続線型作用素 x が等長であるための必要十分条件は $x^*x = 1_{\mathcal{H}}$ であり（命題 3.40），余等長であるための必要十分条件は $xx^* = 1_{\mathcal{K}}$ である．よって，主張は，命題 3.47 の (a) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longleftrightarrow$ (f) から従う． □

3.8 極分解

代数 A にノルムが定まっており，そのノルムが任意の $x, y \in A$ に対して $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ を満たすとき，A を**ノルム代数**（normed algebra）という．完備なノルム代数を，**Banach 代数**（Banach algebra）という．

補題 3.49　A を単位的 Banach 代数とする．ノルム 1 以下の任意の元 $x \in A$ に対して，ノルム 1 以下の元 $y \in \overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}_{\ge 0}}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ であって，$(1-y)^2 = 1-x$ を満たすものが存在する．

証明　$\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上の正則関数 $\lambda \mapsto (1-\lambda)^{1/2}$ の，0 を中心とする冪級数展開

$$(1-\lambda)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-\lambda)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \lambda^n \qquad (|\lambda| < 1)$$

を考える．上式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \lambda^n = 1 - (1-\lambda)^{1/2} \qquad (|\lambda| < 1)$$

だが，この等式で $\lambda \to 1-$ として単調収束定理を用いれば，この等式が $\lambda = 1$ でも成り立つことがわかる．よって，y を絶対収束する級数によって

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n \in \overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}_{\ge 0}}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

と定義でき，これは $\|y\| \le 1$ かつ $(1-y)^2 = 1-x$ を満たす．　□

定理 3.50　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 x に対して，$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 y であって $y^2 = x$ を満たすものが，一意に存在する．この y は，$\overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に属し，したがって特に，「$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素であって x と可換である任意のもの」と可換である．

証明　<u>存在</u>　一般性を失わず，$\|x\| \le 1$ であると仮定する．一般に，$a \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が作用素ノルム 1 以下の連続正作用素であることと，$1_{\mathcal{H}} - a$ が作用素ノルム 1 以下の連続正作用素であることとは同値である（系 3.37）．また，$a \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が正ならば，$\overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}_{\ge 0}}\{a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ の任意の元も正である（命題 3.33 (3)）．よって，補題 3.49 より，作用素ノルム 1 以下の連続正作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，作用素ノルム 1 以下の連続正作用素 $y \in 1_{\mathcal{H}} + \overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}_{\ge 0}}\{(1_{\mathcal{H}} - x)^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ であって，$y^2 = x$ を満たすものが存在する．さらに，

$$y \in 1_{\mathcal{H}} + \overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}_{\ge 0}}\{(1_{\mathcal{H}} - x)^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subseteq \overline{\mathrm{span}}_{\mathbb{R}}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

であり，したがって特に，y は「$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素であって x と可換である任意のもの」と可換である．

<u>一意性</u>　$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 y' が $y'^2 = x$ を満たすとする．すると，$y'x = y'^3 = xy'$ より y' は x と可換だから，y' は前項で定義した y とも可換であり，$(y+y')(y-y') = y^2 - y'^2 = 0$ が成り立つ．前項の結果より，$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 z と z' を，それぞれ $z^2 = y$ と $z'^2 = y'$ を満たすようにとれる．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\eta = (y-y')\xi$ と置くと，

$$\begin{aligned}
\|z\eta\|^2 + \|z'\eta\|^2 &= \langle \eta | y\eta \rangle + \langle \eta | y'\eta \rangle \\
&= \langle \eta | (y+y')\eta \rangle \\
&= \langle \eta | (y+y')(y-y')\xi \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから，$z\eta = z'\eta = 0$ である．したがって，$y\eta = y'\eta = 0$ だから，$(y-y')^2\xi = (y-y')\eta = 0$ である．よって，

$$\|(y-y')\xi\|^2 = \langle \xi | (y-y')^2 \xi \rangle = 0$$

である．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対してこれが成り立つから，$y' = y$ である． □

定義 3.51（連続正作用素の平方根） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 x に対して，$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 y であって $y^2 = x$ を満たすもの（定理 3.50 より，これは一意に存在する）を，x の**平方根**（square root）といい，$x^{1/2}$ と書く．

定義 3.52（連続線型作用素の絶対値） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 x^*x の平方根 $(x^*x)^{1/2}$ を，x の**絶対値**（absolute value）といい，$|x|$ と書く．

命題 3.53 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とする．

(1) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\||x|\xi\| = \|x\xi\|$ である．特に，$\||x|\| = \|x\|$ である．
(2) $|x|$ の台空間は，x の始空間に等しい．

証明 (1) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\||x|\xi\|^2 = \langle \xi | |x|^2 \xi \rangle = \langle \xi | x^*x\xi \rangle = \|x\xi\|^2$ だから，$\||x|\xi\| = \|x\xi\|$ である．

(2) (1) より $\operatorname{Ker}|x| = \operatorname{Ker} x$ だから，$(\operatorname{Ker}|x|)^\perp = (\operatorname{Ker} x)^\perp$ である．すなわち，$|x|$ の台空間は，x の始空間に等しい． □

定理 3.54 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 u であって，$x = u|x|$ かつ $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} x$ を満たすものが一意に存在する．さらに，この u は部分等長であり，x と同じ始空間・終空間をもつ．

証明 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $\||x|\xi\| = |x\xi|$ だから（命題 3.53 (1)），等長同型作用素 $v_0\colon |x|\mathcal{H} \to x\mathcal{H}$ を，$v_0|x|\xi = x\xi$（$\xi \in \mathcal{H}$）と定義できる．さらに，完備化の一意性より，v_0 はユニタリ作用素 $v\colon \overline{|x|\mathcal{H}} \to \overline{x\mathcal{H}}$ に一意に拡張される．

$u \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対する条件 $x = u|x|$ は，$u|_{\overline{|x|\mathcal{H}}} = v$ といいかえられる．また，$\overline{|x|\mathcal{H}}$ の直交補空間は $\operatorname{Ker} x$ に等しい（命題 3.53 (2)）．よって，$u \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ であって $x = u|x|$ かつ $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} x$ を満たすものが一意に存在し，それは，x と同じ始空間・終空間をもつ部分等長作用素である． □

定義 3.55（極分解） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x に対して，u を定理 3.54 で定まる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とするとき，$(u, |x|)$ を x の**極分解**（polar decomposition）という．

命題 3.56 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とする．a は $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素，u は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への部分等長作用素であり，$x = ua$ かつ $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} a$ を満たすとする．このとき，(u, a) は x の極分解である．

証明 命題 3.47 と仮定より $u^*u = \mathrm{s_L}(u) = \mathrm{s}(a)$ だから，$x^*x = au^*ua = a\,\mathrm{s}(a)a = a^2$ であり，したがって，$|x| = (x^*x)^{1/2} = (a^2)^{1/2} = a$ である．これより，$x = u|x|$ かつ $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}|x| = \operatorname{Ker} x$ だから（命題 3.53），極分解の一意性（定理 3.54）より，$(u, a) = (u, |x|)$ は x の極分解である． □

命題 3.57 x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素とし，その極分解を $(u, |x|)$ とする．

(1) $|x| = u^*x$ が成り立つ．

(2) x^* の極分解は $(u^*, |x^*|)$ であり，$|x^*| = u|x|u^*$ が成り立つ．

証明 (1) $u^*u = \mathrm{s_R}(u) = \mathrm{s_R}(x) = \mathrm{s}(|x|)$ だから（命題 3.46，定理 3.54，命題 3.53 (2)），$u^*x = u^*u|x| = \mathrm{s}(|x|)|x| = |x|$ が成り立つ．

(2) x^* と $(u^*, u|x|u^*)$ が命題 3.56 の条件を満たすことを示せばよい．u は部分等長だから u^* も部分等長であり（命題 3.47），$|x|$ は正だから $u|x|u^*$ も正である（命題 3.35 (2)）．(1) の証明で述べたように $u^*u = \mathrm{s}(|x|)$ だから，$x^* = (u|x|)^* = |x|u^* = u^*u|x|u$ である．最後に，$u|x|u^* = xu^*$ であり，u^* の終空間は x の始空間に等しいから（命題 3.6，定理 3.54）$\mathrm{Ker}(u|x|u^*) = \mathrm{Ker}(xu^*) = \mathrm{Ker}\, u^*$ である．よって，x^* と $(u^*, u|x|u^*)$ は，命題 3.56 の条件を満たす． □

4 Hilbert 空間上のコンパクト作用素

4.1 有限階数の連続線型作用素

「記号と用語」で述べたように，位相線型空間 V から W への有限階数の連続線型作用素全体のなす空間を，$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V;W)$ と書く．$V = W$ である場合には，これを単に $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V)$ と書く．

記法 4.1 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して，$u_{\eta,\xi} \in \mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を，

$$u_{\eta,\xi}\zeta = \langle \xi | \zeta \rangle \eta \qquad (\zeta \in \mathcal{H})$$

によって定める[*4]．

明らかに，$\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ から $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ への写像 $(\xi, \eta) \mapsto u_{\eta,\xi}$ は，準双線型である．

命題 4.2 $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．記法 4.1 について，次が成り立つ．

(1) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して，$u_{\eta,\xi}^* = u_{\xi,\eta}$ が成り立つ．

(2) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$，$\eta \in \mathcal{K}$，$a \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1;\mathcal{H})$，$b \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{K}_1)$ に対して，$bu_{\eta,\xi}a = u_{b\eta,a^*\xi}$ が成り立つ．

(3) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$，$\eta, \eta' \in \mathcal{K}$，$\zeta \in \mathcal{L}$ に対して，$u_{\zeta,\eta'}u_{\eta,\xi} = \langle \eta' | \eta \rangle u_{\zeta,\xi}$ が成り立つ．

(4) 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\zeta \in \mathcal{K}$ に対して，$|u_{\eta,\xi}| = \|\eta\|\|\xi\|^{-1}u_{\xi,\xi}$ が成り立つ．

証明 (1) 任意の $\xi' \in \mathcal{H}$ と $\eta' \in \mathcal{K}$ に対して

$$\langle \xi' | u_{\eta,\xi}^*\eta' \rangle = \langle u_{\eta,\xi}\xi' | \eta' \rangle = \langle \langle \xi | \xi' \rangle \eta | \eta' \rangle = \langle \xi' | \xi \rangle \langle \eta | \eta' \rangle = \langle \xi' | \langle \eta | \eta' \rangle \xi \rangle = \langle \xi' | u_{\xi,\eta}\eta' \rangle$$

だから，$u_{\eta,\xi}^* = u_{\xi,\eta}$ である．

(2) 任意の $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$ に対して

$$bu_{\eta,\xi}a\xi_1 = \langle \xi | a\xi_1 \rangle b\eta = \langle a^*\xi | \xi_1 \rangle b\eta = u_{b\eta,a^*\xi}\xi_1$$

だから，$bu_{\eta,\xi}a = u_{b\eta,a^*\xi}$ である．

(3) (2) より，$u_{\zeta,\eta'}u_{\eta,\xi} = u_{u_{\zeta,\eta'}\eta,\xi} = \langle \eta' | \eta \rangle u_{\zeta,\xi}$ である．

[*4] 物理学でよく用いられるブラ・ケット記法では，この $u_{\eta,\xi}$ を，$|\eta\rangle\langle\xi|$ と書く．

(4)　(1) と (3) より，$u_{\eta,\xi}^* u_{\eta,\xi} = u_{\xi,\eta} u_{\eta,\xi} = \|\eta\|^2 u_{\xi,\xi}$ である．また，$\|\eta\|\|\xi\|^{-1} u_{\xi,\xi}$ は正であり，(3) より $(\|\eta\|\|\xi\|^{-1} u_{\xi,\xi})^2 = \|\eta\|^2\|\xi\|^{-2} u_{\xi,\xi}^2 = \|\eta\|^2 u_{\xi,\xi}$ を満たす．よって，$|u_{\eta,\xi}| = (u_{\eta,\xi}^* u_{\eta,\xi})^{1/2} = \|\eta\|\|\xi\|^{-1} u_{\xi,\xi}$ である． □

命題 4.3　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．記法 4.1 について，次が成り立つ．

(1) $\{u_{\eta,\xi} \mid \xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \eta \in \mathcal{K} \setminus \{0\}\}$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への階数 1 の連続線型作用素全体のなす集合に等しい．

(2) $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K}) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{u_{\eta,\xi} \mid \xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \eta \in \mathcal{K} \setminus \{0\}\}$ が成り立つ．

証明　(1)　$\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ と $\eta \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ に対して $u_{\eta,\xi}$ が階数 1 の連続線型作用素であることは，明らかである．次に，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への階数 1 の連続線型作用素 x を任意にとる．x の像をある $\eta \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ を用いて $\mathbb{K}\eta$ と書くと，各 $\zeta \in \mathcal{H}$ に対してある $f(\zeta) \in \mathbb{K}$ が存在して $x\zeta = f(\zeta)\eta$ となるが，x が 0 でない連続線型作用素であることより，f は 0 でない連続線型形式である．したがって，Riesz の表現定理（定理 1.28）より，f はある $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ を用いて $f = \langle \xi | {-} \rangle$ と書ける．このとき，$x = u_{\eta,\xi}$ が成り立つ．

(2)　$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への階数 1 の連続線型作用素全体は $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を張るから，主張は (1) から従う． □

4.2　コンパクト作用素

「記号と用語」で述べたように，位相線型空間 V から W へのコンパクト作用素（すなわち，線型作用素であって，原点 $0 \in V$ のある近傍を W の相対コンパクト集合に移すもの）全体のなす空間を，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V;W)$ と書く．$V = W$ である場合には，これを単に $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V)$ と書く．

ノルム空間の間のコンパクト作用素に関する一般論については，「コンパクト作用素のノート」 [10] を参照のこと．

命題 4.4　V をノルム空間とし，$\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．このとき，コンパクト作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V;\mathcal{K})$ は，有限階数の連続線型作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V;\mathcal{K})$ の作用素ノルムに関する閉包に等しい．

証明　一般に，ノルム空間 V から W への有限階数の連続線型作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V;W)$ の作用素ノルムに関する閉包は，コンパクト作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V;W)$ に含まれる [10, 命題 1.6]．

任意の $x \in \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(V;\mathcal{K})$ が $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V;\mathcal{K})$ の作用素ノルムに関する閉包に属することを示す．V と $\mathcal{K}$ における単位閉球を，それぞれ B_V と $B_{\mathcal{K}}$ と書く．x のコンパクト性より，$x(B_V)$ は $\mathcal{K}$ において相対コンパクトだから，任意の $\epsilon > 0$ に対して，有限部分集合 $F \subseteq \mathcal{K}$ を $x(B) \subseteq F + \epsilon B_{\mathcal{K}}$ を満たすようにとれる．$\mathcal{K}$ の有限次元部分線型空間 $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} F$ の上への直交射影を p とすると，$px \in \mathscr{L}(V;\mathcal{K})$ である．さらに，任意の $\xi \in B_V$ に対して，ある $\eta \in F$ が存在して $\|x\xi - \eta\| \leq \epsilon$ となるから，

$$\begin{aligned}\|px\xi - x\xi\| &\leq \|px\xi - \eta\| + \|\eta - x\xi\| \\ &= \|p(x\xi - \eta)\| + \|\eta - x\xi\| \\ &\leq 2\epsilon\end{aligned}$$

である．したがって，$\|px - x\| \leq 2\epsilon$ が成り立つ．任意の $\epsilon > 0$ に対してこれが成り立つから，x は $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(V;\mathcal{K})$ の作用素ノルムに関する閉包に属する． □

命題 4.5　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．連続線型作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ がコンパクトであることと，その随

伴 $x^* \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ がコンパクトであることとは同値である．

証明　一般に，ノルム空間 V から W への連続線型作用素 $x \in \mathscr{L}(V;W)$ がコンパクトであることと，その双対作用素 $x^{\mathrm{T}} \in \mathscr{L}(W^*;V^*)$ がコンパクトであることとは同値である [10, 命題 1.8]．このことと Riesz の表現定理（定理 1.28）から，主張が従う．（あるいは，$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ が随伴に関して閉じていること注意して，命題 4.4 を用いてもよい．）□

命題 4.6　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x について，x, x^*, $|x|$, $|x^*|$ のうち一つがコンパクトならば，これらはすべてコンパクトである．

証明　x の極分解を $(u, |x|)$ とすると，$x = u|x|$ かつ $|x| = u^*x$ だから（命題 3.57 (1)），x がコンパクトであることと $|x|$ がコンパクトであることとは同値である [10, 命題 1.3 (2)]．同様に，x^* がコンパクトであることと $|x^*|$ がコンパクトであることとは同値である．また，x がコンパクトであることと x^* がコンパクトであることとは同値である（命題 4.5）．よって，主張が成り立つ．□

4.3　コンパクト正規作用素のスペクトル分解

補題 4.7　$\mathcal{H}$ を 0 でない Hilbert 空間，x を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト正規作用素とし，係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ ならば x は自己随伴であるとする．このとき，x は，絶対値が $\|x\|$ に等しい固有値をもつ．

証明　$x = 0$ ならば主張は明らかだから，そうでないとする．仮定より，作用素ノルム $\|x\|$ は数域半径 $\|x\|_\nu$ に等しいから（命題 3.25，命題 3.28），ノルム 1 のベクトルの列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって $|\langle\xi_n|x\xi_n\rangle| \to \|T\|$ を満たすものがとれる．必要ならば部分列をとることで，一般性を失わず，$(\langle\xi_n|x\xi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ はある $\lambda \in \mathbb{K}$（$|\lambda| = \|T\|$）に収束すると仮定する．すると，

$$
\begin{aligned}
\|(\lambda 1_{\mathcal{H}} - x)\xi_n\|^2 &= |\lambda|^2 + \|x\xi_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle\lambda\xi_n|x\xi_n\rangle \\
&= |\lambda|^2 + \|x\xi_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}\langle\xi_n|x\xi_n\rangle \\
&\le 2|\lambda|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}\langle\xi_n|x\xi_n\rangle \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

だから，$\lambda \in \operatorname{Sp}(x)$ である．$|\lambda| = \|T\| > 0$ より $\lambda \neq 0$ だから，コンパクト作用素の一般論 [10, 系 2.6] より，λ は x の固有値である．□

定理 4.8（コンパクト正規作用素のスペクトル分解定理）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，x を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト正規作用素とし，係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ ならば x は自己随伴であるとする．

(1) $0 \in \mathbb{K}$ の任意の近傍 U に対して，$\operatorname{Sp}(x) \setminus U$ は有限である．
(2) 任意の $\lambda \in \operatorname{Sp}(x) \setminus \{0\}$ は，x の重複度有限の固有値である．
(3) 任意の λ, $\mu \in \mathbb{K}$，$\lambda \neq \mu$ に対して，固有空間 $\operatorname{Ker}(\lambda 1_{\mathcal{H}} - x)$ と $\operatorname{Ker}(\mu 1_{\mathcal{H}} - x)$ は直交する．
(4) 各 $\lambda \in \operatorname{Sp}(x)$ に対して，固有空間 $\operatorname{Ker}(\lambda 1_{\mathcal{H}} - x)$ の上への直交射影を e_λ と書く．このとき，作用素ノルムが定める位相に関して，

$$
x = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(x)} \lambda e_\lambda
$$

が成り立つ．

証明　(1), (2)　コンパクト作用素の一般論 [10, 系 2.6, 定理 2.8] である．

(3)　系 3.19 (3) で，一般に，連続正規作用素に対して示した．

(4)　F を $\mathrm{Sp}(x) \setminus \{0\}$ の有限部分集合とし，$\mathcal{M}_F = \bigoplus_{\lambda \in F} \mathrm{Ker}(\lambda 1_{\mathcal{H}} - x)$ と置く．(2) より $\mathcal{M}_F$ は $\mathcal{H}$ の有限部分線型空間であり，系 3.19 (2) より $\mathcal{M}_F$ と $\mathcal{M}_F^{\perp}$ はともに x-安定である．$\mathcal{M}_F$ の上への直交射影を e_F と書くと，(3) より $\sum_{\lambda \in F} \lambda e_\lambda = xe_F$ だから，

$$x - \sum_{\lambda \in F} \lambda e_\lambda = x(1_{\mathcal{H}} - e_F)$$

である．$\mathcal{M}_F^{\perp} = 0$ ならば，明らかに $x(1_{\mathcal{H}} - e_F) = 0$ である．一方で，$\mathcal{M}_F^{\perp} \neq 0$ ならば，補題 4.7 より，$x(1_{\mathcal{H}} - e_F)$ は絶対値が $\|x(1_{\mathcal{H}} - e_F)\|$ に等しい固有値 λ をもつ．この λ は x の固有値でもあり，F の元ではありえないから，$\lambda \in \mathrm{Sp}(x) \setminus F$ である．よって，いずれにしても，

$$\left\| x - \sum_{\lambda \in F} \lambda e_\lambda \right\| = \|x(1_{\mathcal{H}} - e_F)\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(x) \setminus F\}$$

が成り立つ．(1) より，$F \to \mathrm{Sp}(x) \setminus \{0\}$ のとき上式の最右辺は 0 に収束する．よって，作用素ノルムが定める位相に関して，

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(x) \setminus \{0\}} \lambda e_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(x)} \lambda e_\lambda$$

が成り立つ． □

系 4.9　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，x を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素とし，x が自己随伴または「係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ であり，かつ x が正規」であるとする．このとき，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ とスカラーの族 $(\lambda_i)_{i \in I}$ であって，任意の $i \in I$ に対して

$$x\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$

を満たすものが存在する．さらに，スカラーの族 $(\lambda_i)_{i \in I}$ は，添字のとり方を除いて x から一意に定まり，任意の $r > 0$ に対して，$|\lambda_i| \geq r$ を満たす $i \in I$ は有限個である．

証明　定理 4.8 (3), (4) より，各 $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$ に対して $\mathrm{Ker}(\lambda 1_{\mathcal{H}} - x)$ の正規直交基底をとり，それらを合わせれば，主張の条件を満たす $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ が得られる．各 $i \in I$ に対して $x\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$ であるとすると，$\lambda_i = \lambda$ を満たす $i \in I$ の個数は固有空間 $\mathrm{Ker}(\lambda 1_{\mathcal{H}} - x)$ の Hilbert 次元に等しいから，x から一意に定まる．また，定理 4.8 (1), (2) より，任意の $r > 0$ に対して，$|\lambda_i| \geq r$ を満たす $i \in I$ は有限個である． □

4.4　トレース

命題 4.10　x を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素とする．$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ に対する値 $\sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ は，正規直交基底のとり方によらず一定である．

証明　$(\epsilon_i)_{i \in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j \in J}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とすると，Perseval の等式（系 2.19）より，

$$\sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle = \sum_{i \in I} \|x^{1/2}\epsilon_i\|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\langle \epsilon'_j | x^{1/2}\epsilon_i \rangle|^2,$$
$$\sum_{j \in J} \langle \epsilon'_j | x\epsilon'_j \rangle = \sum_{j \in J} \|x^{1/2}\epsilon'_j\|^2 = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |\langle \epsilon_i | x^{1/2}\epsilon'_j \rangle|^2$$

である．任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して $\langle \epsilon'_j | x^{1/2} \epsilon_i \rangle = \overline{\langle \epsilon_i | x^{1/2} \epsilon'_j \rangle}$ だから，これらは等しい． □

定義 4.11（連続正作用素のトレース） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 x の**トレース**（trace）を，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ を用いて，

$$\operatorname{tr} x = \sum_{i\in I} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

と定める（命題 4.10 より，これは正規直交基底のとり方によらない）．

命題 4.12 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素 x, y に対して，$\operatorname{tr}(sx + ty) = s \operatorname{tr} x + t \operatorname{tr} y$ が成り立つ．
(2) $\mathcal{H}$ 上の任意の連続正作用素 x と y に対して，$x \leq y$ ならば $\operatorname{tr} x \leq \operatorname{tr} y$ である．
(3) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ に対して，$\operatorname{tr}(x^*x) = \operatorname{tr}(xx^*)$ が成り立つ．
(4) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ に対して，$\operatorname{tr}(x^*x) = 0$ ならば $x = 0$ である．

証明 (1), (2) 明らかである．

(3) $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ のそれぞれの正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ をとる（定理 2.20）．すると，Perseval の等式（系 2.19）より

$$\operatorname{tr}(x^*x) = \sum_{i\in I} \langle \epsilon_i | x^*x\epsilon_i \rangle = \sum_{i\in I} \|x\epsilon_i\|^2 = \sum_{i\in I,\ j\in J} |\langle \epsilon'_j | x\epsilon_i \rangle|^2 \tag{$*$}$$

であり，x を x^* に置き換えて $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ を入れ替えれば

$$\operatorname{tr}(xx^*) = \sum_{i\in I,\ j\in J} |\langle \epsilon_i | x^*\epsilon'_j \rangle|^2 \tag{$**$}$$

を得る．任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して $\langle \epsilon'_i | x^*\epsilon_j \rangle = \overline{\langle \epsilon'_j | x\epsilon_i \rangle}$ だから，($*$) と ($**$) より，$\operatorname{tr}(x^*x) = \operatorname{tr}(xx^*)$ である．

(4) (3) の証明の状況で $\operatorname{tr}(x^*x) = 0$ であるとすると，($*$) より，任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して $\langle \epsilon'_j | x\epsilon_i \rangle = 0$ となる．これより，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して $\langle \eta | x\xi \rangle = 0$ だから，$x = 0$ となる． □

命題 4.13 $\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とし，

$$\begin{aligned} \mathscr{T}(\mathcal{H})_+ &= \{x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \mid x \text{ は正であり，} \operatorname{tr} x < \infty \text{ を満たす}\}, \\ \mathscr{T}(\mathcal{H}) &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \mathscr{T}(\mathcal{H})_+ \end{aligned}$$

と定める．

(1) $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ に属する連続正作用素全体のなす集合は，$\mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ に一致する．
(2) トレースを与える関数 $\operatorname{tr}\colon \mathscr{T}(\mathcal{H})_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は，$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ 上の線型形式に一意に拡張される．
(3) (2) の拡張をふたたび $\operatorname{tr}\colon \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ と書く．このとき，任意の $x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ に対して，$(\epsilon_i)_{i\in I}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とすると，$(\langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle)_{i\in I}$ は総和可能であり，

$$\operatorname{tr} x = \sum_{i\in I} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle$$

が成り立つ．

証明　(1)　$\mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ の各元が $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ に属する連続正作用素であることは明らかである．逆の包含を示すために，連続正作用素 $x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ を任意にとる．すると，$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ が存在して $x = x_1 - x_2 + ix_3 - ix_4$ と書けるが，x が自己随伴であることより $x_3 - x_4 = 0$ だから，$x = x_1 - x_2$ となる．したがって，$x \leq x_1$ だから，$\operatorname{tr} x \leq \operatorname{tr} x_1 < \infty$ である．よって，$x \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H}_+)$ である．

(2)　$x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ とすると，$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ が存在して $x = x_1 - x_2 + ix_3 - ix_4$ と書ける．これを用いて，

$$\operatorname{tr} x = \operatorname{tr} x_1 - \operatorname{tr} x_2 + i \operatorname{tr} x_3 - i \operatorname{tr} x_4 \in \mathbb{C}$$

と定める．これが x_1, x_2, x_3, x_4 のとり方によらず，$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ 上の線型形式の線型形式を定め，$\mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ に対してトレースを与える関数の拡張になることは，容易に確かめられる．$\mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ は線型空間 $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ を張るから，主張の条件を満たす線型形式は一意である．

(3)　$x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ とすると，$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ が存在して $x = x_1 - x_2 + ix_3 - ix_4$ と書ける．各 j に対して $\operatorname{tr} x_j = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x_j \epsilon_i \rangle$ は有限だから，$(\langle \epsilon_i | x \epsilon_i \rangle)_{i \in I}$ は総和可能であり，その値は $\operatorname{tr} x$ に一致する．　□

定義 4.14（有限のトレースをもつ連続線型作用素）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ である場合，$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ と $\operatorname{tr}\colon \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ を，命題 4.13 のとおりに定める．
(2) 係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ である場合，$\mathscr{T}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \mid x_{(\mathbb{C})} \in \mathscr{T}(\mathcal{H}_{(\mathbb{C})})\}$ と定め，$x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ に対して $\operatorname{tr} x = \operatorname{tr} x_{(\mathbb{C})}$ と定める．

$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素であって $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ に属するものは，**有限のトレースをもつ**という．$x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ に対して，$\operatorname{tr} x$ を，x の**トレース**（trace）という．

注意 4.15　$\mathcal{H}$ を実 Hilbert 空間とし，$(\epsilon_i)_{i \in I}$ をその正規直交基底とする．このとき，$(\epsilon_i)_{i \in I}$ は複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{(\mathbb{C})}$ の正規直交基底でもある．したがって，$x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ とすると，命題 4.13 (3) より，$(\langle \epsilon_i | x \epsilon_i \rangle)_{i \in I}$ は総和可能であり，

$$\operatorname{tr} x = \operatorname{tr} x_{(\mathbb{C})} = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x_{(\mathbb{C})} \epsilon_i \rangle_{\mathcal{H}_{(\mathbb{C})}} = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x \epsilon_i \rangle_{\mathcal{H}}$$

が成り立つ．特に，任意の $x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ に対して $\operatorname{tr} x \in \mathbb{R}$ であり，$\operatorname{tr}\colon \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ は実線型形式である．また，命題 4.13 (1) より，$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ に属する連続正作用素全体のなす集合は，連続正作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって $\operatorname{tr} x < \infty$ を満たすもの全体のなす集合に一致する．

例 4.16　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$u_{\eta,\xi}$（記法 4.1）が $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ に属し，$\operatorname{tr} u_{\eta,\xi} = \langle \xi | \eta \rangle$ を満たす．このことと命題 4.3 (2) より，$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{T}(\mathcal{H})$ である．

前段で述べた主張を示す．係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．まず，$\eta = \xi$ である場合，$u_{\xi,\xi}$ は正であり，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ をとると（定理 2.20），Perseval の等式（系 2.19）より

$$\operatorname{tr} u_{\xi,\xi} = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | u_{\xi,\xi} \epsilon_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | \langle \xi | \epsilon_i \rangle \xi \rangle = \sum_{i \in I} |\langle \epsilon_i | \xi \rangle|^2 = \|\xi\|^2 < \infty$$

が成り立つ．次に，一般の場合，分極公式（命題 1.4 (2)）より

$$u_{\eta,\xi} = u_{\xi+\eta,\xi+\eta} - u_{\xi-\eta,\xi-\eta} - iu_{\xi+i\eta,xi+i\eta} + iu_{\xi-i\eta,\xi-i\eta} \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$$

であり，直前の結果と合わせてふたたび分極公式（命題 1.4 (2)）を用いれば，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} u_{\eta,\xi} &= \operatorname{tr} u_{\xi+\eta,\xi+\eta} - \operatorname{tr} u_{\xi-\eta,\xi-\eta} - i \operatorname{tr} u_{\xi+i\eta,\xi+i\eta} + i \operatorname{tr} u_{\xi-i\eta,\xi-i\eta} \\ &= \|\xi+\eta\|^2 - \|\xi-\eta\|^2 - i\|\xi+i\eta\|^2 + i\|\xi-i\eta\|^2 \\ &= \langle \xi | \eta \rangle\end{aligned}$$

を得る．

命題 4.17　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ は随伴をとる操作で閉じており，任意の $x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ に対して，$\operatorname{tr} x^* = \overline{\operatorname{tr} x}$ が成り立つ．

証明　係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ は，連続正作用素からなる集合 $\mathscr{T}(\mathcal{H})_+ = \{x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \mid x$ は正であり，$\operatorname{tr} x < \infty$ を満たす$\}$ が張る線型空間だから，随伴に関して閉じている．また，$(\epsilon_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とすると，

$$\operatorname{tr} x^* = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x^* \epsilon_i \rangle = \sum_{i \in I} \overline{\langle \epsilon_i | x \epsilon_i \rangle} = \overline{\operatorname{tr} x}$$

である（命題 4.13）．□

命題 4.18　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ の有限次元部分線型空間 $\mathcal{M}$ に対してその上への直交射影を $p_{\mathcal{M}}$ と書き，$\mathcal{H}$ の有限次元部分線型空間全体のなす集合を包含関係によって有向集合とみなす．このとき，$\mathcal{H}$ 上の連続正作用素または有限のトレースをもつ連続線型作用素に対して，（例 4.16 より $xp_{\mathcal{M}}$，$p_{\mathcal{M}}x$，$p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}} \in \mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{T}(\mathcal{H})$ であり，）

$$\operatorname{tr}(xp_{\mathcal{M}}) = \operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}x) = \operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}}) \to \operatorname{tr} x$$

が成り立つ．

証明　係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ であり，x が $\mathcal{H}$ 上の連続正作用素である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．$\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ を $\mathcal{H}$ の有限次元部分線型空間とし，$\mathcal{M}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ であってその適当な有限部分族 $(\epsilon_i)_{i \in F}$ と $(\epsilon)_{i \in F'}$（$F \subseteq F' \subseteq I$）がそれぞれ $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ の正規直交基底となるものをとる（定理 2.20）．すると，

$$\operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}}) = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}}\epsilon_i \rangle = \sum_{i \in F} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle \leq \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle = \operatorname{tr} x$$

であり，$\operatorname{tr}(xp_{\mathcal{M}})$ と $\operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}x)$ についても同様である．また，

$$\operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}}) = \sum_{i \in F} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle \leq \sum_{i \in F'} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle = \operatorname{tr} x$$

である．したがって，$\mathcal{H}$ の任意の有限次元部分線型空間 $\mathcal{M}$ に対して $\operatorname{tr}(xp_{\mathcal{M}}) = \operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}x) = \operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}}) \leq \operatorname{tr} x$ であり，この値は $\mathcal{M}$ に関して増加である．さらに，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ をとり（定理 2.20），有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して $\mathcal{M}_F = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_i \mid i \in F\}$ と置くと，$F \to I$ のとき

$$\operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}_F}xp_{\mathcal{M}_F}) = \sum_{i \in F} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle \to \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | x\epsilon_i \rangle = \operatorname{tr} x$$

となる．以上より，増加ネット $(\operatorname{tr}(p_{\mathcal{M}}xp_{\mathcal{M}}))_{\mathcal{M}}$ は，$\operatorname{tr} x$ に収束する．□

4.5 Hilbert–Schmidt 作用素

定義 4.19（Hilbert–Schmidt 作用素） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x の **Hilbert–Schmidt ノルム**（Hilbert–Schmidt norm）を，

$$\|x\|_2 = (\operatorname{tr}|x|^2)^{1/2} = (\operatorname{tr}(x^*x))^{1/2} \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

と定める．$\|x\|_2 < \infty$ であるとき，x は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への **Hilbert–Schmidt 作用素**（Hilbert–Schmidt operator）であるという．$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への Hilbert–Schmidt 作用素全体のなす空間を，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と書く．$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ である場合には，これを単に $\mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ と書く．

$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間であり，Hilbert–Schmidt ノルム $\|{-}\|_2$ が実際に $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上のノルムであることは，命題 4.20 で示す．

命題 4.20 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間である．

(2) 任意の $x,\ y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，$x^*y \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ である．さらに，$x,\ y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して

$$\langle x|y\rangle_2 = \operatorname{tr}(x^*y)$$

と定めると，$\langle{-}|{-}\rangle_2$ は $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の非退化正値 Hermite 形式であり，それが定めるノルムは Hilbert–Schmidt ノルム $\|{-}\|_2$ に一致する．

証明 (1) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ と $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して

$$\|\lambda x\|_2^2 = \operatorname{tr}((\lambda x)^*(\lambda x)) = |\lambda|^2 \operatorname{tr}(x^*x) = |\lambda|^2\|x\|_2^2$$

だから，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ はスカラー倍に関して閉じている．また，任意の $x,\ y \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，中線定理（命題 1.7）より

$$(x+y)^*(x+y) \leq (x+y)^*(x+y) + (x-y)^*(x-y) = 2(x^*x + y^*y)$$

だから，

$$\|x+y\|_2^2 = \operatorname{tr}((x+y)^*(x+y)) \leq 2\operatorname{tr}(x^*x+y^*y) = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

である．よって，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は和に関して閉じている．

(2) 係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．各 $\lambda \in \{1,-1,i,-i\}$ に対して，(4) より $x+\lambda y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ だから，$(x+\lambda y)^*(x+\lambda y) \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ である．このことと分極公式（命題 1.4）より，

$$x^*y = \frac{1}{4}((x+y)^*(x+y) - (x-y)^*(x-y) - i(x+iy)^*(x+iy) + i(x-iy)^*(x-iy)) \in \mathscr{T}(\mathcal{H}) \qquad (*)$$

である．

$\langle{-}|{-}\rangle_2$ は準双線型であり，任意の $x \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して $\langle x|x\rangle_2 = \operatorname{tr}(x^*x) = \|x\|_2^2 \geq 0$ であり，$\langle x|x\rangle_2 = 0$ ならば $x = 0$ である（命題 4.12 (4)）．また，分極公式（命題 1.4）より，

$$yx^* = \frac{1}{4}((x+y)(x+y)^* - (x-y)(x-y)^* - i(x+iy)(x+iy)^* + i(x-iy)(x-iy)^*) \qquad (**)$$

である．($*$) と ($**$)，命題 4.12 (3)，命題 4.17 より，

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle_2 &= \operatorname{tr}(x^*y)\\ &= \frac{1}{4}(\operatorname{tr}((x+y)^*(x+y)) - \operatorname{tr}((x-y)^*(x-y)) - i\operatorname{tr}((x+iy)^*(x+iy)) + i(x-iy)^*(x-iy))\\ &= \frac{1}{4}(\operatorname{tr}((x+y)(x+y)^*) - \operatorname{tr}((x-y)(x-y)^*) - i\operatorname{tr}((x+iy)(x+iy)^*) + i\operatorname{tr}((x-iy)(x-iy)^*))\\ &= \operatorname{tr}(yx^*)\\ &= \overline{\operatorname{tr}(xy^*)}\\ &= \overline{\langle y|x\rangle_2}\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，$\langle -|-\rangle_2$ は非退化正値 Hermite 形式であり，それが定めるノルムは Hilbert–Schmidt ノルムに一致する． □

命題 4.20 で定義した $\langle -|-\rangle_2$ を，**Hilbert–Schmidt 内積**（Hilber–Schmidt inner product）という．特に断らなければ，Hilbert–Schmidt 作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，Hilbert–Schmidt 内積 $\langle -|-\rangle_2$ によって内積空間とみなす．

命題 4.21 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，$\|x\| \le \|x\|_2$ が成り立つ．
(2) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，$\|x^*\|_2 = \|x\|_2$ が成り立つ．特に，随伴をとる写像 $x \mapsto x^*$ は，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への共役等長同型作用素[*5] を定める．
(3) 任意の $a \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1;\mathcal{H})$，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$，$b \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{K}_1)$ に対して，$\|axb\|_2 \le \|a\|\|b\|\|x\|_2$ が成り立つ．

証明 (1) ノルム 1 の任意のベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，これを含む $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ がとれ（定理 2.20），

$$\|x\xi\|^2 \le \sum_{i\in I}\|x\epsilon_i\|^2 = \sum_{i\in I}\langle\epsilon_i|x^*x\epsilon_i\rangle = \|x\|_2^2$$

が成り立つ．上式の左辺において ξ に関する上限をとれば，$\|x\| \le \|x\|_2$ を得る．

(2) 命題 4.12 (3) のいいかえに過ぎない．

(3) $\|ax\|_2 \le \|a\|\|x\|_2$ と $\|xb\|_2 \le \|b\|\|x\|_2$ を示せば十分である．$a^*a \le \|a^*a\|1_{\mathcal{H}} = \|a\|^2 1_{\mathcal{H}}$（命題 3.36，命題 3.7）より $(ax)^*(ax) = x^*a^*ax \le \|a\|^2 x^*x$ だから（命題 3.35 (2)），

$$\|ax\|_2^2 = \operatorname{tr}((ax)^*(ax)) \le \|a\|^2\operatorname{tr}(x^*x) = \|a\|^2\|x\|_2^2$$

である（命題 4.12 (1), (2)）．よって，$\|ax\|_2 \le \|a\|\|x\|_2$ が成り立つ．また，この結果と (2) を合わせて，

$$\|xb\|_2 = \|(xb)^*\|_2 = \|b^*x^*\|_2 \le \|b^*\|\|x^*\|_2 = \|b\|\|x\|_2$$

を得る． □

系 4.22 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Hilbert–Schmidt 作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルであり，随伴に関して閉じている．

証明 命題 4.21 (2), (3) から従う． □

[*5] 定理 4.23 で示すように，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ は Hilbert 空間だから，共役ユニタリ作用素といってもよい．

定理 4.23　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は Hilbert 空間であり，そのノルムは Hilbert–Schmidt ノルムに一致する．

(2) $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ を，それぞれ $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の正規直交基底とする．このとき，任意の $x\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して $\Phi(x)=(\langle\epsilon'_j|x\epsilon_i\rangle)_{(j,i)\in J\times I}\in l^2(J\times I;\mathbb{K})$ であり，これによって定まる線型作用素 $\Phi\colon\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})\to l^2(J\times I;\mathbb{K})$ はユニタリである．

証明　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ のそれぞれの正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ をとり（定理 2.20），$x\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して $\Phi(x)=(\langle\epsilon'_j|x\epsilon_i\rangle)_{(j,i)\in J\times I}$ と定める．すると，任意の $x\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，Perseval の等式（系 2.19）より

$$\|x\|_2^2=\operatorname{tr}(x^*x)=\sum_{i\in I}\langle\epsilon_i|x^*x\epsilon_i\rangle=\sum_{i\in I}\|x\epsilon_i\|^2=\sum_{i\in I,\ j\in J}|\langle\epsilon'_j|x\epsilon_i\rangle|^2$$

だから，Φ は $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $l^2(J\times I;\mathbb{K})$ への等長作用素である．Φ が全射であることを示す．$(x_{ji})_{(j,i)\in J\times I}\in l^2(J\times I;\mathbb{K})$ を任意にとる．すると，任意の $(\lambda_i)_{i\in I}\in l^2(I;\mathbb{K})$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式（系 1.9 (1)）より

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}|x_{ji}||\lambda_i|\right)^2&\leq\sum_{j\in J}\left(\left(\sum_{i\in I}|x_{ji}|^2\right)\left(\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2\right)\right)\\&=\left(\sum_{i\in I,\ j\in J}|x_{ji}|^2\right)\left(\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2\right)\\&\leq\|(x_{ji})_{(j,i)\in J\times I}\|_{l^2(J\times I;\mathbb{K})}^2\|(\lambda_i)_{i\in I}\|_{l^2(I;\mathbb{K})}^2\end{aligned}$$

だから，任意の $j\in J$ に対して $(x_{ji}\lambda_i)_{i\in I}$ は総和可能であり，$(\sum_{i\in I}x_{ji}\lambda_i)_{j\in J}\in l^2(J;\mathbb{K})$ であり，

$$\left\|\left(\sum_{i\in I}x_{ji}\lambda_i\right)_{j\in J}\right\|_{l^2(J;\mathbb{K})}\leq\|(x_{ji})_{(j,i)\in J\times I}\|_{l^2(J\times I;\mathbb{K})}\|(\lambda_i)_{i\in I}\|_{l^2(I;\mathbb{K})}$$

が成り立つ．したがって，$x\in\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を

$$x\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\epsilon_i\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}x_{ji}\lambda_i\right)\epsilon'_j$$

によって定義でき（定理 2.17），この x は

$$\Phi(x)=(\langle\epsilon'_j|x\epsilon_i\rangle)_{(j,i)\in J\times I}=\left(\left\langle\epsilon'_j\middle|\sum_{j'\in J}x_{j'i}\epsilon'_{j'}\right\rangle\right)_{(j,i)\in J\times I}=(x_{ji})_{(j,i)\in J\times I}$$

を満たす．これで，Φ が全射であることが示された．

前段の結果と $l^2(J\times I;\mathbb{K})$ が Hilbert 空間であることより，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ も Hilbert 空間であり，$\Phi\colon\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})\to l^2(J\times I;\mathbb{K})$ はユニタリ作用素である．内積 $\langle -|-\rangle_2$ が定めるノルムが Hilbert–Schmidt ノルムに一致することは，明らかである． □

系 4.24　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の正規直交基底とすると，$(u_{\epsilon'_j,\epsilon_i})_{(j,i)\in J\times I}$（記法 4.1）は $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の正規直交基底である．

証明　$l^2(J\times I;\mathbb{K})$ の標準正規直交基底を $(\delta_{ji})_{(j,i)\in J\times I}$ と書く．容易に確かめられるように，定理 4.23 のユニタリ作用素 $\Phi\colon \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})\to l^2(J\times I;\mathbb{K})$ は，各 $u_{\epsilon'_j,\epsilon_i}$ を δ_{ji} に移す．よって，$(u_{\epsilon'_j,\epsilon_i})_{(j,i)\in J\times I}$ は $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の正規直交基底である．□

系 4.25　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．ユニタリ作用素 $U\colon \mathcal{K}\mathbin{\widehat{\otimes}}\overline{\mathcal{H}}\to\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ であって，任意の $\xi\in\mathcal{H}$ と $\eta\in\mathcal{K}$ に対して $U(\eta\otimes\overline{\xi})=u_{\eta,\xi}$（記法 4.1）を満たすものが，一意に存在する．

証明　一意性　$\eta\otimes\overline{\xi}$（$\xi\in\mathcal{H}$，$\eta\in\mathcal{K}$）の全体が張る線型空間は $\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}}$ であり，これは $\mathcal{K}\mathbin{\widehat{\otimes}}\overline{\mathcal{H}}$ において稠密である．よって，主張の条件を満たすユニタリ作用素は，たかだか一意である．

存在　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ のそれぞれの正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と $(\epsilon'_j)_{j\in J}$ をとる（定理 2.20）．$(\epsilon'_j\otimes\overline{\epsilon_i})_{(j,i)\in J\times I}$ は $\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}}$ の正規直交基底だから（系 2.33），$\zeta\in\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}}$ に対して $\Psi(\zeta)=(\langle\epsilon'_j\otimes\overline{\epsilon_i}|\zeta\rangle)_{(j,i)\in I\times J}$ と定めると，Ψ は $\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}}$ から $l^2(J\times I;\mathbb{K})$ へのユニタリ作用素である（定理 2.17）．これと定理 4.23 (2) のユニタリ作用素 $\Phi\colon\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})\to l^2(J\times I;\mathbb{K})$ を用いて，ユニタリ作用素 $U=\Phi^{-1}\circ\Psi\colon\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}}\to\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を定める．すると，任意の $\xi\in\mathcal{H}$ と $\eta\in\mathcal{K}$ に対して，

$$\Psi(\eta\otimes\overline{\xi})=(\langle\epsilon'_j\otimes\overline{\epsilon_i}|\eta\otimes\overline{\xi}\rangle)_{(j,i)\in J\times I}=(\langle\epsilon'_j|\eta\rangle\overline{\langle\epsilon_i|\xi\rangle})_{(j,i)\in J\times I}$$

かつ

$$\Phi(u_{\eta,\xi})=(\langle\epsilon'_j|u_{\eta,\xi}\epsilon_i\rangle)_{(j,i)\in J\times I}=(\langle\epsilon'_j|\eta\rangle\overline{\langle\epsilon_i|\xi\rangle})_{(j,i)\in J\times I}$$

だから，U は $\eta\otimes\overline{\xi}$ を $u_{\eta,\xi}$ に移す．よって，U は主張の条件を満たすユニタリ作用素である．□

系 4.26　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．Hilbert–Schmidt 作用素全体のなす Hilbert 空間 $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を稠密に含み，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に含まれる．

証明　系 4.25 のユニタリ作用素 $U\colon\mathcal{K}\mathbin{\widehat{\otimes}}\overline{\mathcal{H}}\to\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を考える．$\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{K}\mathbin{\widehat{\otimes}}\overline{\mathcal{H}}$ において稠密であり，$U(\mathcal{K}\otimes\overline{\mathcal{H}})=\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ だから（命題 4.3 (2)），$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において稠密である．さらに，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ への包含写像は連続であり（命題 4.21 (1)），$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を含み $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において閉だから [10, 命題 1.3 (1)]，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})\subseteq\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ である．□

定理 4.27　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の $x\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y\in\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$yx\in\mathscr{T}(\mathcal{H})$ かつ $xy\in\mathscr{T}(\mathcal{K})$ であり，$\operatorname{tr}(yx)=\operatorname{tr}(xy)$ が成り立つ．

(2) $y\in\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式 $\Phi_2(y)$ を

$$\Phi_2(y)(x)=\operatorname{tr}(yx)=\operatorname{tr}(xy)\qquad(x\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K}))$$

によって定める（(1) より，このように定義できる）．このとき，Φ_2 は，$\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ へのユニタリ作用素である．

証明　(1)　命題 4.20 (2) と命題 4.21 (2) より，$yx=y^{**}x\in\mathscr{T}(\mathcal{H})$ かつ $xy=x^{**}y\in\mathscr{T}(\mathcal{K})$ であり，$\operatorname{tr}(yx)=\langle y^*|x\rangle_2=\langle x^*|y\rangle_2=\operatorname{tr}(xy)$ が成り立つ．

(2)　命題 4.21 (2) より，随伴をとる写像 $y\mapsto y^*$ は，$\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ への共役ユニタリ作用素である．また，双対 Hilbert 空間の定義より，写像 $z\mapsto\langle z|-\rangle_2=\operatorname{tr}(z^*(-))$ は，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から自身への共役ユニタリ作用素である．Φ_2 は，これらの合成にほかならないから，$\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ へのユニタリ作用素である．□

系 4.28　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．任意の $x \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，（定理 4.27 (1) より $yx \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$，$xy \in \mathscr{T}(\mathcal{K})$ かつ $\mathrm{tr}(yx) = \mathrm{tr}(xy)$ であり，）

$$|\mathrm{tr}(yx)| = |\mathrm{tr}(xy)| \le \|y\|_2\|x\|_2$$

が成り立つ．

証明　定理 4.27 (2) のユニタリ作用素 $\Phi_2\colon \mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H}) \to \mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ を用いると，

$$|\mathrm{tr}(yx)| = |\Phi_2(y)(x)| \le \|\Phi_2(y)\|_{\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}\|x\|_2 = \|y\|_2\|x\|_2$$

である．□

次の命題は，次小節で用いられる．

命題 4.29　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して，

$$\mathscr{T}(\mathcal{H}) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{xy \mid x,\, y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})\}$$

が成り立つ．特に，$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．

証明　係数体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ である場合に示せば十分だから，以下ではそのように仮定する．

$\mathscr{T}(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{xy \mid x,\, y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})\}$　有限のトレースをもつ任意の連続正作用素 $x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})_+$ に対して，定義より $x^{1/2} \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ であり，$x = (x^{1/2})^2$ である．よって，$\mathscr{T}(\mathcal{H}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathscr{T}(\mathcal{H})_+ \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{xy \mid x,\, y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})\}$ である．

$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{xy \mid x,\, y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})\} \subseteq \mathscr{T}(\mathcal{H})$　定理 4.27 (1) から従う．

最後の主張　以上で示した等式と，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルであることより，$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．□

4.6　トレースクラス作用素

定義 4.30（トレースクラス作用素）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への連続線型作用素 x の**トレースノルム**（trace norm）を，

$$\|x\|_1 = \mathrm{tr}|x| \in \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$$

と定める．$\|x\|_1 < \infty$ であるとき，x は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**トレースクラス作用素**（trace-class operator）であるという．$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのトレースクラス作用素全体のなす空間を，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と書く．$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ である場合には，これを単に $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ と書く．

$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間であり，トレースノルム $\|{-}\|_1$ が実際に $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上のノルムであることは，命題 4.34 で示す．

例 4.31　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して，$u_{\eta,\xi}$（記法 4.1）は

$$\|u_{\eta,\xi}\|_1 = \mathrm{tr}|u_{\eta,\xi}| = \|\eta\|\|\xi\|^{-1}\,\mathrm{tr}\,u_{\xi,\xi} = \|\eta\|\|\xi\| < \infty$$

を満たす（命題 4.2 (4)，例 4.16）．よって，$u_{\eta,\xi} \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ である．

命題 4.32　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．トレースクラス作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ は，有限のトレースをもつ連続線型作用素全体のなす空間 $\mathscr{T}(\mathcal{H})$（定義 4.14）に一致する．さらに，任意の $x \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H}) = \mathscr{T}(\mathcal{H})$ に対して，$|\mathrm{tr}\, x| \leq \|x\|_1$ が成り立つ．

証明　$\underline{\mathscr{T}(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{L}^1(\mathcal{H})}$　$x \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ として，その極分解を $(u, |x|)$ とする．すると，$|x| = u^*x$ であり（命題 3.57 (1)），$\mathscr{T}(\mathcal{H})$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルだから（命題 4.29），$|x| \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ である．よって，$\|x\|_1 = \mathrm{tr}|x| < \infty$ だから（命題 4.13 (1)，注意 4.15），$x \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ である．

$\underline{\mathscr{L}^1(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{T}(\mathcal{H})\text{，最後の主張}}$　$x \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ として，その極分解を $(u, |x|)$ とする．すると，$|x|^{1/2} \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ であり，$\mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルだから（系 4.22），$u|x|^{1/2} \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ でもある．よって，$x = u|x|^{1/2}|x|^{1/2} \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ である（命題 4.29）．さらに，系 4.28 と命題 4.21 (3) より，

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{tr}\, x| &= |\mathrm{tr}(u|x|^{1/2}|x|^{1/2})| \\
&\leq \|u|x|^{1/2}\|_2 \||x|^{1/2}\|_2 \\
&\leq \|u\| \||x|^{1/2}\|_2^2 \\
&= \|u\| \|x\|_1 \\
&\leq \|x\|_1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．　□

命題 4.33　$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ に対して，$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ が成り立つ．
(2) 任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ に対して，$\|x^*\|_1 = \|x\|_1$ が成り立つ[*6]．
(3) 任意の $a \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H})$，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$，$b \in \mathscr{L}(\mathcal{K}; \mathcal{K}_1)$ に対して，$\|axb\|_1 \leq \|a\|\|b\|\|x\|_1$ が成り立つ．

証明　(1)　$\|x\| \leq \|x\|_2$ は，すでに命題 4.21 (1) で示した．$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ を示す．$\|x\|_1 = \infty$ ならば主張は明らかだから，そうでないとする．このとき，$|x|^{1/2} \in \mathscr{L}^2(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ だから（系 4.26），$|x| = (|x|^{1/2})^2 \in \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ である [10, 命題 1.3 (2)]．したがって，スペクトル分解定理（系 4.9）と命題 3.32 より，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i \in I}$ と 0 以上の実数の族 $(\lambda_i)_{i \in I}$ であって，任意の $i \in I$ に対して $|x|\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$ を満たすものが存在する．このとき，$p \in \{1, 2\}$ に対して

$$
\|x\|_p^p = \mathrm{tr}|x|^p = \sum_{i \in I} \langle \epsilon_i | |x|^p \epsilon_i \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i^p
$$

だから，

$$
\|x\|_2^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i^2 \leq \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \right)^2 = \|x\|_1^2
$$

であり，$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ が成り立つ．

[*6] 命題 4.34 で示すように，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ と $\mathscr{L}^1(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ はトレースノルム $\|{-}\|_1$ によってノルム空間をなす．よって，随伴をとる写像 $x \mapsto x^*$ は，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ への共役等長同型作用素を定める．

(2)　x の極分解を $(u,|x|)$ とすると，$|x^*|=u|x|u^*$ だから（命題 3.57 (2)），命題 4.21 (3) より

$$
\begin{aligned}
\|x^*\|_1 &= \mathrm{tr}|x^*| \\
&= \mathrm{tr}(u|x|u^*) \\
&= \||x|^{1/2}u^*\|_2^2 \\
&\leq \|u^*\|^2\||x|^{1/2}\|_2^2 \\
&= \|u^*\|^2\|x\|_1 \\
&\leq \|x\|_1
\end{aligned}
$$

である．x を x^* に置き換えれば，$\|x\|_1\leq\|x^*\|_1$ を得る．よって，$\|x^*\|_1=\|x\|_1$ である．

(3)　$\|ax\|_1\leq\|a\|\|x\|_1$ と $\|xb\|_1\leq\|b\|\|x\|_1$ を示せば十分である．$\|x\|_1=\infty$ ならば主張は明らかだから，そうでないとする．x の極分解を $(u,|x|)$ とし，ax の極分解を $(v,|ax|)$ とすると，$|ax|=v^*ax=v^*au|x|$ である（命題 3.57 (1)）．いま，$x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ より $|x|^{1/2}\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ であり，$v^*au|x|^{1/2}\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H})$ かつ

$$\|v^*au|x|^{1/2}\|_2\leq\|v^*au\|\||x|^{1/2}\|_2\leq\|a\|\||x|^{1/2}\|_2$$

である（命題 4.21 (3)）．よって，系 4.28 と合わせて，

$$
\begin{aligned}
\|ax\|_1 &= \mathrm{tr}|ax| \\
&= \mathrm{tr}(v^*au|x|^{1/2}|x|^{1/2}) \\
&\leq \|v^*au|x|^{1/2}\|_2\||x|^{1/2}\|_2 \\
&\leq \|a\|\||x|^{1/2}\|_2^2 \\
&= \|a\|\|x\|_1
\end{aligned}
$$

を得る．また，この結果と (2) を合わせて，

$$\|xb\|_1=\|(xb)^*\|_1=\|b^*x^*\|_1\leq\|b^*\|\|x^*\|_1=\|b\|\|x\|_1$$

を得る．□

命題 4.34　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのトレースクラス作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間であり，トレースノルム $\|{-}\|_1$ によってノルム空間をなす．

証明　任意の $\lambda\in\mathbb{K}$ と $x\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$\|\lambda x\|_1=\mathrm{tr}|\lambda x|=|\lambda|\,\mathrm{tr}|x|=|\lambda|\|x\|_1$ である（命題 4.12 (1)）．また，任意の $x\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$\|x\|_1=0$ ならば $|x|^{1/2}=0$ であり（命題 4.12 (4)），したがって，$x=0$ である（定理 3.54）．あとは，任意の $x,\,y\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して $\|x+y\|_1\leq\|x\|_1+\|y\|_1$ であることを示せばよい．$\|x\|_1$ または $\|y\|_1$ が ∞ ならば主張は明らかだから，そうでないとする．$x+y$ の極分解を $(u,|x+y|)$ とすると，$|x+y|=u^*(x+y)$ である（命題 3.57 (1)）．いま，$x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ より $u^*x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H})=\mathscr{T}(\mathcal{H})$ かつ

$$|\mathrm{tr}(u^*x)|\leq\|u^*x\|_1\leq\|u^*\|\|x\|_1\leq\|x\|_1$$

であり（命題 4.32，命題 4.33 (3)），y についても同様である．よって，

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \mathrm{tr}|x+y| \\
&= \mathrm{tr}(u^*(x+y)) \\
&= \mathrm{tr}(u^*x)+\mathrm{tr}(u^*y) \\
&\leq \|x\|_1+\|y\|_1
\end{aligned}
$$

である．□

特に断らなければ，トレースクラス作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，トレースノルム $\|{-}\|_1$ によってノルム空間とみなす．

系 4.35 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素全体のなす空間 $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の両側イデアルであり，随伴に関して閉じている．

証明 命題 4.33 (2), (3) と命題 4.34 から従う． □

命題 4.36 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのトレースクラス作用素全体のなすノルム空間 $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を稠密に含み，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に含まれる．

証明 $\underline{\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})\subseteq\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})}$ 命題 4.33 (2) と系 4.26 より，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})\subseteq\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})\subseteq\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ である．

$\underline{\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})\subseteq\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})}$ 任意の $\xi\in\mathcal{H}$ と $\eta\in\mathcal{K}$ に対して $u_{\eta,\xi}$（記法 4.1）は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に属するから（例 4.31），$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})=\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{u_{\eta,\xi}\mid \xi\in\mathcal{H},\ \eta\in\mathcal{K}\}$（命題 4.3）は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に含まれる．

<u>$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ が $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において稠密であること</u> 前々段の結果より $x\in\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ だから，$|x|\in\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ である（命題 4.6）．したがって，スペクトル分解定理（系 4.9）と命題 3.32 より，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と 0 以上の実数の族 $(\lambda_i)_{i\in I}$ であって，任意の $i\in I$ に対して $|x|\epsilon_i=\lambda_i\epsilon_i$ を満たすものが存在する．このとき，

$$\infty>\|x\|_1=\mathrm{tr}|x|=\sum_{i\in I}\langle\epsilon_i||x|\epsilon_i\rangle=\sum_{i\in I}\lambda_i$$

である．有限部分集合 $F\subseteq I$ に対して，$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\epsilon_i\mid i\in F\}$ の上への直交射影を p_F と置く．すると，$|x|p_F\in\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H})$ であり，$|x|-|x|p_F$ は正であり，$F\to I$ のとき

$$\||x|-|x|p_F\|_1=\mathrm{tr}(|x|-|x|p_F)=\sum_{i\in I}\langle\epsilon_i|(|x|-|x|p_F)\epsilon_i\rangle=\sum_{i\in I\setminus F}\lambda_i\to 0$$

である．そこで，x の極分解を $(u,|x|)$ とすると，各 F に対して $xp_F=u|x|p_F\in\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ であり，$F\to I$ のとき

$$\|x-xp_F\|_1=\|u(|x|-|x|p_F)\|_1\leq\|u\|\||x|-|x|p_F\|_1\to 0$$

である（命題 4.33 (3)）．よって，$\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において稠密である． □

命題 4.37 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．任意の $x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y\in\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$yx\in\mathscr{T}(\mathcal{H})$ かつ $xy\in\mathscr{T}(\mathcal{K})$ であり，

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(yx)=\mathrm{tr}(xy),\\&|\mathrm{tr}(yx)|=|\mathrm{tr}(xy)|\leq\|yx\|_1\leq\|y\|\|x\|_1,\\&|\mathrm{tr}(xy)|=|\mathrm{tr}(xy)|\leq\|xy\|_1\leq\|y\|\|x\|_1\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明 任意の $x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y\in\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$yx\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H})=\mathscr{T}(\mathcal{H})$ かつ $|\mathrm{tr}(yx)|\leq\|yx\|_1\leq\|y\|\|x\|_1$ であり，$xy\in\mathscr{L}^1(\mathcal{K})=\mathscr{T}(\mathcal{K})$ かつ $|\mathrm{tr}(xy)|\leq\|xy\|_1\leq\|y\|\|x\|_1$ である（命題 4.32, 命題 4.33 (3)）．したがって，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})\times\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ 上の連続双線型形式 $(y,x)\mapsto\mathrm{tr}(yx)$ と $(y,x)\mapsto\mathrm{tr}(xy)$ が定まる．$x=u_{\eta,\xi}$（記法 4.1，$\xi\in\mathcal{H}$，$\eta\in\mathcal{K}$）のときは

$$\mathrm{tr}(yu_{\eta,\xi})=\mathrm{tr}\,u_{y\eta,\xi}=\langle\xi|y\eta\rangle=\langle y^*\xi|\eta\rangle=\mathrm{tr}\,u_{\eta,y^*\xi}=\mathrm{tr}(u_{\eta,\xi}y)$$

であり（命題 4.2 (2)，例 4.16），$u_{\eta,\xi}$ 全体のなす集合は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において完全だから（命題 4.3，命題 4.36），任意の $x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対しても $\mathrm{tr}(yx)=\mathrm{tr}(xy)$ が成り立つ．これで，すべての主張が示された． □

注意 4.38　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y\in\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$\|yx\|_1=\|xy\|_1$ であるとは限らない．たとえば，$\mathcal{H}=\mathcal{K}=\mathbb{K}^2$（標準内積を考え，標準基底を (ϵ_1,ϵ_2) と書く）とし，$x=u_{\epsilon_1,\epsilon_1}$，$y=u_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ とすると，

$$\|yx\|_1=\|0\|_1=0,\qquad \|xy\|_1=\|u_{\epsilon_1,\epsilon_1}\|_1=1$$

である（命題 4.2 (3)，例 4.31）．

系 4.28 に関連して，次の主張を示しておく．

命題 4.39　$\mathcal{H}$，$\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．任意の $x\in\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $y\in\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ に対して，$\|yx\|_1\leq\|y\|_2\|x\|_2$ が成り立つ．

証明　$\|x\|_2$ または $\|y\|_2$ が ∞ ならば主張は明らかだから，そうでないとする．yx の極分解を $(u,|yx|)$ とすると，$|yx|=u^*yx$ である（命題 3.57 (1)）．いま，$x\in\mathscr{L}^2(\mathcal{H};\mathcal{K})$ であり，$y\in\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{L})$ より $u^*y\in\mathscr{L}^2(\mathcal{K};\mathcal{H})$ かつ

$$\|u^*y\|_2\leq\|u^*\|\|y\|_2\leq\|y\|_2$$

である（命題 4.21 (3)）．よって，系 4.28 と合わせて，

$$\|yx\|_1=\mathrm{tr}|yx|=\mathrm{tr}(u^*yx)\leq\|u^*y\|_2\|x\|_2\leq\|y\|_2\|x\|_2$$

を得る． □

次の命題は，命題 5.12 の証明に用いられる．

命題 4.40　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 任意の集合 I および $(\xi_i)_{i\in I}\in\mathcal{H}^{\widehat{\oplus}I}$ と $(\eta_i)_{i\in I}\in\mathcal{K}^{\widehat{\oplus}I}$ に対して，$(u_{\eta_i,\xi_i})_{i\in I}$（記法 4.1）は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において絶対総和可能である．

(2) 任意の $x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathbb{K})$ に対して，ある $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において $x=\sum_{n=0}^{\infty}u_{\eta_n,\xi_n}$ が成り立つ．

証明　(1)　例 4.31 と Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より，

$$\sum_{i\in I}\|u_{\eta_i,\xi_i}\|_1=\sum_{i\in I}\|\eta_i\|\|\xi_i\|\leq\left(\sum_{i\in I}\|\eta_i\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}<\infty$$

である．

(2)　x の極分解を $(u,|x|)$ とする．$x\in\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})\subseteq\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ だから（命題 4.36），$|x|\in\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ である（命題 4.6）．したがって，スペクトル分解定理（系 4.9）と命題 3.32 より，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $(\epsilon_i)_{i\in I}$ と 0 以上の実数の族 $(\lambda_i)_{i\in I}$ であって，任意の $i\in I$ に対して $|x|\epsilon_i=\lambda_i\epsilon_i$ を満たすものが存在する．このとき，

$$\infty>\|x\|_1=\mathrm{tr}|x|=\sum_{i\in I}\langle\epsilon_i|\,|x|\epsilon_i\rangle=\sum_{i\in I}\lambda_i\tag{$*$}$$

であり，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において

$$|x| = \sum_{i\in I} \lambda_i u_{\epsilon_i,\epsilon_i}$$

が成り立つ．$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から自身への線型写像 $y \mapsto uy$ は連続だから（命題 4.33 (3)），上式と命題 4.2 (2) より，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において

$$x = u|x| = \sum_{i\in I} \lambda_i u u_{\epsilon_i,\epsilon_i} = \sum_{i\in I} u_{\lambda_i^{1/2} u\epsilon_i, \lambda_i^{1/2}\epsilon_i}$$

が成り立つ．($*$) より，$(\lambda_i^{1/2}\epsilon_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ かつ $(\lambda_i^{1/2}u\epsilon_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus} I}$ である．$\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ および $\mathcal{K}^{\widehat{\oplus} I}$ のベクトルの成分は可算個を除いて 0 だから，適当に添字をとり直せば，x を主張のとおりに表示できる． □

4.7 トレースクラス作用素の空間とコンパクト作用素の空間の双対空間

定理 4.41 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$y \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式 $\Phi(y)$ を

$$\Phi(y)(x) = \operatorname{tr}(yx) = \operatorname{tr}(xy) \qquad (x \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K}))$$

によって定める（命題 4.37 より，このように定義できる）．このとき，Φ は，$\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ への等長同型作用素である．

証明 $y \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ とすると，任意の $x \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して $|\Phi(y)(x)| = |\operatorname{tr}(yx)| \le \|y\|\|x\|_1$ だから（命題 4.37），$\Phi(y) \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ かつ $\|\Phi(y)\|_{\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*} \le \|y\|$ である．よって，Φ は，$\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ へのノルム減少な線型作用素である．

Φ の逆となる $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ へのノルム減少な線型作用素 Ψ を構成しよう．$f \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ とすると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して

$$|f(u_{\xi,\eta})| \le \|f\|_{\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}\|u_{\eta,\xi}\|_1 \le \|f\|_{\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}\|\eta\|\|\xi\|$$

だから（記法 4.1，例 4.31），関数 $(\xi,\eta) \mapsto f(u_{\eta,\xi})$ は $\mathcal{H}\times\mathcal{K}$ 上の連続準双線型形式であり，そのノルムは $\|f\|_{\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}$ 以下である．したがって，$\Psi(f) \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ であって任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して

$$\langle \xi | \Psi(f)\eta \rangle = f(u_{\eta,\xi})$$

を満たすものが一意に存在し，その作用素ノルムは $\|f\|_{\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}$ 以下である（定理 1.29）．一意性を用いて容易に確かめられるように，Ψ は線型である．よって，Ψ は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ へのノルム減少な線型作用素である．

Ψ が Φ の逆を与えることを示す．$y \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ とすると，任意の $\eta \in \mathcal{K}$ と $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \xi | \Psi(\Phi(y))\eta \rangle = \Phi(y)(u_{\eta,\xi}) = \operatorname{tr}(yu_{\eta,\xi}) = \operatorname{tr} u_{y\eta,\xi} = \langle \xi | y\eta \rangle$$

だから（命題 4.2 (2)，例 4.16），$\Psi(\Phi(y)) = y$ である．また，$f \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ とすると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して

$$\Phi(\Psi(f))(u_{\eta,\xi}) = \operatorname{tr}(\Psi(f)u_{\eta,\xi}) = \operatorname{tr} u_{\Psi(f)\eta,\xi} = \langle \xi | \Psi(f)\eta \rangle = f(u_{\eta,\xi})$$

であり（命題 4.2 (2)，例 4.16），$u_{\eta,\xi}$ 全体のなす集合は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において完全だから（命題 4.3，命題 4.36），$\Phi(\Psi(f)) = f$ である．よって，Ψ が Φ の逆であることが示された．Φ と Ψ はともにノルム減少だから，これより，Φ は $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ への等長同型作用素である． □

定理 4.42　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$y \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対して，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式 $\Phi_1(y)$ を

$$\Phi_1(y)(x) = \mathrm{tr}(yx) = \mathrm{tr}(xy) \qquad (x \in \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K}))$$

によって定める（命題 4.37 より，このように定義できる）．このとき，Φ_1 は，$\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ への等長同型作用素である．

証明　$y \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ とすると，任意の $x \in \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して $|\Phi_1(y)(x)| = |\mathrm{tr}(yx)| \leq \|y\|_1\|x\|$ だから（命題 4.37），$\Phi_1(y) \in \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ かつ $\|\Phi_1(y)\|_{\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*} \leq \|y\|_1$ である．よって，Φ_1 は，$\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ へのノルム減少な線型作用素である．

Φ_1 の逆となる $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ へのノルム減少な線型作用素 Ψ_1 を構成しよう．$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に含まれ，包含写像 $j_{\mathrm{c}}\colon \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K}) \to \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は連続である（命題 4.33 (1)）．これの双対作用素 $j_{\mathrm{c}}^*\colon \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^* \to \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ と定理 4.41 の等長同型作用素の逆 $\Phi^{-1}\colon \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^* \to \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を用いて，$\Psi_1 = \Phi^{-1} \circ j_{\mathrm{c}}^*$ と定める．この Ψ_1 が，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ へのノルム減少な線型作用素であることを示す．$f \in \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ とし，$\Psi_1(f)$ の極分解を $(u, |\Psi_1(f)|)$ とすると，$|\Psi_1(f)| = u^*\Psi_1(f)$ である（命題 3.57 (1)）．$\mathcal{H}$ の有限次元部分線型空間 $\mathcal{M}$ の上への直交射影を $p_{\mathcal{M}}$ と書くと，

$$\|\Psi_1(f)\|_1 = \mathrm{tr}|\Psi_1(f)| = \mathrm{tr}(u^*\Psi_1(f)) = \lim_{\mathcal{M}} \mathrm{tr}(p_{\mathcal{M}}u^*\Psi_1(f))$$

であり（命題 4.18），各 $\mathcal{M}$ に対して $p_{\mathcal{M}}u^* \in \mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ かつ

$$|\mathrm{tr}(p_{\mathcal{M}}u^*\Psi_1(f))| = |f(p_{\mathcal{M}}u^*)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}\|p_{\mathcal{M}}u^*\| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*}$$

だから，$\|\Psi_1(f)\|_1 \leq \|f\|_{\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*} < \infty$ が成り立つ．よって，Ψ_1 は，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^*$ から $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ へのノルム減少な線型作用素である．

Ψ_1 が Φ_1 の逆を与えることを示す．$j\colon \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ と $j_{\mathrm{c}}\colon \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K}) \to \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を包含写像とすると，Φ_1 と Ψ_1 の定義より，次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Phi_1} & \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})^* \\ \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\downarrow{\scriptstyle j_{\mathrm{c}}^*} \\ \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})^*, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{K};\mathcal{H})^* & \xrightarrow{\Psi_1} & \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle j_{\mathrm{c}}^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H}). \end{array}$$

j は単射である．また，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は $\mathscr{L}^{\mathrm{f}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を含む（命題 4.36）から $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において稠密であり，したがって，j_{c}^* は単射である．よって，上の図式の下段にある Φ と Φ^{-1} が互いに他の逆であることより，上段にある Φ_1 と Ψ_1 も互いに他の逆である．　□

系 4.43　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのトレースクラス作用素全体のなすノルム空間 $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，Banach 空間である．

証明　$\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ は，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{K};\mathcal{H})^*$ に等長線型同型だから（定理 4.42），Banach 空間である．　□

5　作用素位相

5.1　弱位相，強位相，強対合位相

定義 5.1（弱位相，強位相，強対合位相）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式 $x \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle$ の全体が誘導する始位相を，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の**弱位相**（weak topology）という．

(2) $\xi \in \mathcal{H}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{K}$ への線型写像 $x \mapsto x\xi$ の全体が誘導する始位相を，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の**強位相**（strong topology）という．

(3) $\xi \in \mathcal{H}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{K}$ への線型写像 $x \mapsto x\xi$ と，$\eta \in \mathcal{K}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{H}$ への共役線型写像 $x \mapsto x^*\eta$ の全体が誘導する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の始位相を，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の**強対合位相**（strong-star topology）という．

弱・強・強対合位相が誘導する相対位相や積位相についても，同じ名称を用いる．

「弱」，「強」，「強対合」という語を，しばしば，位相に関する用語と組み合わせて用いる．たとえば，弱・強・強対合位相に関する収束をそれぞれ弱・強・強対合収束といい，弱・強・強対合位相に関する閉包をそれぞれ弱・強・強対合閉包という．

注意 5.2　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 弱位相，強位相，強対合位相はいずれも $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の Hausdorff な局所凸位相であり，弱位相，強位相，強対合位相，ノルム位相の順に細かくなる．

(2) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の強対合位相は，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の強位相と，随伴 $x \mapsto x^*$ による $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ の強位相の逆像との上限にほかならない．

命題 5.3　$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 合成をとる $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L}) \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ への写像 $(y,x) \mapsto yx$ は，
  (1-1) 弱分離連続，強分離連続，強対合分離連続であり，
  (1-2) $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $T \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ をノルム有界集合とすると，$T \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上で強連続，$T \times S$ 上で強対合連続であり，
  (1-3) 強点列連続かつ強対合点列連続である．

(2) 随伴をとる $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto x^*$ は，
  (2-1) 弱連続かつ強対合連続であり，
  (2-2) $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ である場合，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素全体のなす集合上で強連続である．

証明　(1-1)　$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を固定すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\zeta \in \mathcal{L}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ 上の線型形式 $y \mapsto \langle \zeta | yx\xi \rangle$ は弱連続だから，写像 $y \mapsto xy$ は弱連続である．$y \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ を固定すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\zeta \in \mathcal{L}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式 $x \mapsto \langle \zeta | yx\xi \rangle = \langle y^*\zeta | x\xi \rangle$ は弱連続だから，写像 $x \mapsto xy$ は弱連続である．

$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ を固定すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ から $\mathcal{L}$ への線型写像 $y \mapsto yx\xi$ は強連続だから，写像 $y \mapsto xy$ は強連続である．$y \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ を固定すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{L}$ への線型写像 $x \mapsto yx\xi$ は強連続だから，写像 $x \mapsto xy$ は強連続である．

前段の結果より，写像 $(y,x) \mapsto yx$ および $(y,x) \mapsto (yx)^* = x^*y^*$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L}) \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の強対合位相と $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{L})$ の強位相に関して分離連続である．よって，合成 $(y,x) \mapsto yx$ は，強対合分離連続である（注意 5.2 (2)）．

(1-2)　$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上のネット $(x_i)_{i \in I}$ が x に強収束し，$\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ 上のノルム有界なネット $(y_i)_{i \in I}$ が y に強

収束するとする．このとき，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|y_i x_i \xi - xy\xi\| \leq \|y_i\| \|x_i \xi - x\xi\| + \|y_i x\xi - yx\xi\| \to 0$$

だから，$(y_i x_i)_{i \in I}$ は yx に強収束する．よって，合成 $(y, x) \mapsto yx$ は，$S \times \mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上で強連続である．

前段の結果より，写像 $(y, x) \mapsto yx$ および $(y, x) \mapsto (yx)^* = x^* y^*$ は，$T \times S$ の強対合位相と $\mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{L})$ の強位相に関して連続である．よって，合成 $(x, y) \mapsto xy$ は，$T \times S$ 上で強対合連続である（注意 5.2 (2)）．

(1-3) $\mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ 上の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が強収束するならば，Banach–Steinhaus の定理より，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はノルム有界である．よって，主張は (1-2) から従う．

(2-1) 随伴が強対合連続であることは明らかである．また，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対して，$\mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ 上の共役線型形式 $x \mapsto \langle \xi | x^* \eta \rangle = \overline{\langle \eta | x\xi \rangle}$ は弱連続だから，写像 $x \mapsto x^*$ は弱連続である．

(2-2) $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素からなるネット $(x_i)_{i \in I}$ が連続正規作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に強収束するとする．$\xi \in \mathcal{H}$ とすると，x_i と x が正規であることより $\|x_i^* \xi\| = \|x_i \xi\|$ かつ $\|x^* \xi\| = \|x\xi\|$ だから（命題 3.18），

$$\begin{aligned}
\|(x_i^* - x^*)\xi\|^2 &= \|x_i^* \xi\|^2 + \|x^* \xi\|^2 - \langle x^* \xi | x_i^* \xi \rangle - \langle x_i^* \xi | x^* \xi \rangle \\
&= \|x_i^* \xi\|^2 + \|x^* \xi\|^2 - \langle \xi | x x_i^* \xi \rangle - \langle x x_i^* \xi | \xi \rangle \\
&= \|x_i^* \xi\|^2 - \|x^* \xi\|^2 - \langle \xi | (x_i - x) x^* \xi \rangle - \langle (x_i - x) x^* \xi | \xi \rangle \\
&= \|x_i \xi\|^2 - \|x\xi\|^2 - \langle \xi | (x_i - x) x^* \xi \rangle - \langle (x_i - x) x^* \xi | \xi \rangle \\
&\to 0
\end{aligned}$$

である．よって，写像 $x \mapsto x^*$ は，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素全体のなす集合上で強連続である． □

系 5.4 Hilbert 空間上の連続正規作用素全体のなす集合上では，強位相と強対合位相は一致する．

証明 命題 5.3 (2-2) のいいかえにすぎない． □

命題 5.5 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，A を $\mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ の部分線型空間とする．A 上の線型形式 ω に対して，次の条件は同値である．

(a) ω は弱連続である．
(b) ω は強連続である．
(c) ω は強対合連続である．
(d) ω は，$\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対する A 上の線型形式 $x \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle$ の有限線型結合として書ける．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) 弱位相，強位相，強対合位相がこの順に細かくなることの結果である．

(c) $\Longrightarrow$ (d) ω が強対合連続であるとすると，有限個のベクトル $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathcal{H}$ と $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{K}$ が存在して，任意の $x \in A$ に対して

$$|\omega(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|x\xi_i\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|x^* \eta_j\| \right)^{1/2}$$

が成り立つ．上式の右辺は，Hilbert 空間 $\mathcal{K}^{\oplus m} \oplus \overline{\mathcal{H}}^{\oplus n}$ における $(x\xi_1, \ldots, x\xi_m, \overline{x^* \eta_1}, \ldots, \overline{x^* \eta_n})$ のノルムに等しい．そこで，$\{(x\xi_1, \ldots, x\xi_m, \overline{x^* \eta_1}, \ldots, \overline{x^* \eta_n}) \mid x \in A\}$ が生成する $\mathcal{K}^{\oplus m} \oplus \overline{\mathcal{H}}^{\oplus n}$ の閉部分線型空間を $\mathcal{M}$ と置くと，$\mathcal{M}$ 上の連続線型形式であって，各 $x \in A$ に対して $(x\xi_1, \ldots, x\xi_m, \overline{x^* \eta_1}, \ldots, \overline{x^* \eta_n})$ を $\omega(x)$ に移すものが一意に存在する．この連続線型形式に対して Riesz の表現定理（定理 1.28）を適用することで，

$(\eta'_1,\dots,\eta'_m,\overline{\xi'_1},\dots,\overline{\xi'_n})\in\mathcal{M}$ であって，任意の $x\in A$ に対して

$$\begin{aligned}\omega(x)&=\langle(\eta'_1,\dots,\eta'_m,\overline{\xi'_1},\dots,\overline{\xi'_n})|(x\xi_1,\dots,x\xi_m,\overline{x^*\eta_1},\dots,\overline{x^*\eta_n})\rangle\\&=\sum_{i=1}^m\langle\eta'_i|x\xi_i\rangle+\sum_{j=1}^n\overline{\langle\xi'_j|x^*\eta_j\rangle}\\&=\sum_{i=1}^m\langle\eta'_i|x\xi_i\rangle+\sum_{j=1}^n\langle\eta_j|x\xi'_j\rangle\end{aligned}$$

を満たすものを得る．これで，主張が示された．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　弱位相の定義から従う． □

系 5.6　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．部分集合 $S\subseteq\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，その弱凸閉包，強凸閉包，強対合凸閉包は一致する．

証明　一般に，局所凸空間の部分集合の凸閉包は，その部分集合を含む閉半空間全体の交叉に等しい（Hahn–Banach の分離定理の系）．よって，主張は，命題 5.5 から従う． □

命題 5.7　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，$D_{\mathcal{H}}$ と $D_{\mathcal{K}}$ をそれぞれの完全な部分集合とする．S を $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ のノルム有界部分集合とする．

(1) S の弱位相は，$\xi\in D_{\mathcal{H}}$ と $\eta\in D_{\mathcal{K}}$ に対する S 上の関数 $x\mapsto\langle\eta|x\xi\rangle$ の全体が誘導する始位相に等しい．
(2) S の強位相は，$\xi\in D_{\mathcal{H}}$ に対する S から $\mathcal{K}$ への写像 $x\mapsto x\xi$ の全体が誘導する始位相に等しい．
(3) S の強対合位相は，$\xi\in D_{\mathcal{H}}$ に対する S から $\mathcal{K}$ への写像 $x\mapsto x\xi$ と，$\eta\in D_{\mathcal{K}}$ に対する S から $\mathcal{H}$ への写像 $x\mapsto x^*\eta$ の全体が誘導する始位相に等しい．

証明　(1)　$\xi\in\mathcal{H}$ と $\eta\in\mathcal{K}$ に対して，ξ に収束する $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}D_{\mathcal{H}}$ の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と，η に収束する $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}D_{\mathcal{K}}$ の点列 $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．すると，$n\to\infty$ のとき，$\langle\eta_n|x\xi_n\rangle$ は $x\in S$ に関して一様に $\langle\eta|x\xi\rangle$ に収束する．よって，S 上の関数 $x\mapsto\langle\eta|x\xi\rangle$ は，主張の始位相に関して連続である．よって，S の弱位相は，主張の始位相に等しい．

(2)　$\xi\in\mathcal{H}$ に対して，ξ に収束する $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}D_{\mathcal{H}}$ の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．すると，$n\to\infty$ のとき，$x\xi_n$ は $x\in S$ に関して一様に $x\xi$ に収束する．よって，S から $\mathcal{K}$ への写像 $x\mapsto x\xi$ は，主張の始位相に関して連続である．よって，S の強位相は，主張の始位相に等しい．

(3)　(2) から従う． □

5.2　超弱位相，超強位相，超強対合位相

定義 5.8（超弱位相，超強位相，超強対合位相）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 集合 I および $\boldsymbol{\xi}=(\xi_i)_{i\in I}\in\mathcal{H}^{\widehat{\oplus}I}$ と $\boldsymbol{\eta}=(\eta_i)_{i\in I}\in\mathcal{K}^{\widehat{\oplus}I}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式

$$x\mapsto\langle\boldsymbol{\eta}|x^{\widehat{\oplus}I}\boldsymbol{\xi}\rangle=\sum_{i\in I}\langle\eta_i|x\xi_i\rangle$$

の全体が誘導する始位相を，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の**超弱位相**（ultraweak topology）という．

(2) 集合 I および $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{K}^{\widehat{\oplus} I}$ への線型写像

$$x \mapsto x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi} = (x\xi_i)_{i\in I}$$

の全体が誘導する始位相を，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の**超強位相**（ultrastrong topology）という．

(3) $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{K}^{\widehat{\oplus} I}$ への線型写像

$$x \mapsto x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi} = (x\xi_i)_{i\in I}$$

と，$\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus} I}$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ への共役線型写像

$$x \mapsto (x^*)^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\eta} = (x^*\eta_i)_{i\in I}$$

の全体が誘導する始位相を，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の**超強対合位相**（ultrastrong-star topology）という．

超弱・超強・超強対合位相が誘導する相対位相や積位相についても，同じ名称を用いる．

「超弱」,「超強」,「超強対合」という語を，しばしば，位相に関する用語と組み合わせて用いる．たとえば，超弱・超強・超強対合位相に関する収束をそれぞれ超弱・超強・超強対合収束といい，超弱・超強・超強対合位相に関する閉包をそれぞれ超弱・超強・超強対合閉包という．

注意 5.9　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 超弱位相，超強位相，超強対合位相はいずれも $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の Hausdorff な局所凸位相であり，超弱位相，超強位相，超強対合位相，ノルム位相の順に細かくなる．また，超弱位相は弱位相よりも，超強位相は強位相よりも，超強対合位相は強対合位相よりも，それぞれ細かい．

(2) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超強対合位相は，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超強位相と，随伴 $x \mapsto x^*$ による $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ の超強位相の逆像との上限にほかならない．

(3) I を集合とし，$\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ とすると，$\sum_{i\in I}\|\xi_i\|^2 < \infty$ だから，$\xi_i \neq 0$ を満たす $i \in I$ は可算個である．したがって，超弱・超強・超強対合位相の定義において，任意の集合 I を考える代わりに $I = \mathbb{N}$ だけを考えても，定義は変わらない．このことからわかるように，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超弱・超強・超強対合位相は，それぞれ，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}};\mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}})$ への写像 $x \mapsto x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ による弱・強・強対合位相の逆像にほかならない．

命題 5.10　$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 合成をとる $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L}) \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{L})$ への写像 $(y, x) \mapsto yx$ は，
  (1-1) 超弱分離連続であり，
  (1-2) $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $T \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ をノルム有界集合とすると，$T \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上で超強連続，$T \times S$ 上で超強対合連続であり，
  (1-3) 超強点列連続かつ超強対合点列連続である．

(2) 随伴をとる $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto x^*$ は，
  (2-1) 超弱連続かつ超強対合連続であり，
  (2-2) $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ である場合，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素全体のなす集合上で超強連続である．

証明　注意 5.9 (3) より，主張は命題 5.3 に帰着される．　□

系 5.11　Hilbert 空間上の連続正規作用素全体のなす集合上では，超強位相と超強対合位相は一致する．

証明　命題 5.10 (2-2) のいいかえにすぎない． □

命題 5.12　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，A を $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間とする．A 上の線型形式 ω に対して，次の条件は同値である．

(a) ω は超弱連続である．
(b) ω は超強連続である．
(c) ω は超強対合連続である．
(d) ある $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して，$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \eta_n | x\xi_n\rangle$（$x\in A$）と書ける．
(e) ある $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ が存在して，$\omega(x) = \operatorname{tr}(tx)$（$x \in A$）と書ける．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c)　超弱位相，超強位相，超強対合位相がこの順に細かくなることの結果である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　ω が超強対合連続であるとすると，ある $\boldsymbol{\xi} = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と $\boldsymbol{\eta} = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $x \in A$ に対して

$$|\omega(x)| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\|x\xi_n\|^2 + \|x^*\eta_n\|^2)\right)^{1/2}$$

が成り立つ（注意 5.9 (3)）．上式の右辺は，Hilbert 空間 $\mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}} \oplus \overline{\mathcal{H}}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ における $(x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\xi}, \overline{(x^*)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\eta}})$ のノルムに等しい．そこで，$\{(x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\xi}, \overline{(x^*)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\eta}}) \mid x \in A\}$ が生成する $\mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}} \oplus \overline{\mathcal{H}}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ の閉部分線型空間を $\mathcal{M}$ と置くと，$\mathcal{M}$ 上の連続線型形式であって，各 $x \in A$ に対して $(x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\xi}, \overline{(x^*)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\eta}})$ を $\omega(x)$ に移すものが一意に存在する．この連続線型形式に対して Riesz の表現定理（定理 1.28）を適用することで，$(\boldsymbol{\eta}', \overline{\boldsymbol{\xi}'}) = ((\eta'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\overline{\xi'_n})_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{M}$ であって，任意の $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \langle(\boldsymbol{\eta}', \overline{\boldsymbol{\xi}'}) | (x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\xi}, \overline{(x^*)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\eta}})\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\langle \eta'_n | x\xi_n\rangle + \overline{\langle \xi'_n | x^*\eta_n\rangle}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\langle \eta'_n | x\xi_n\rangle + \langle \eta_n | x\xi'_n\rangle)
\end{aligned}$$

を満たすものを得る．これで，主張が示された．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　超弱位相の定義から従う．

(d) $\Longleftrightarrow$ (e)　命題 4.40 より，任意の $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ に対して $(u_{\xi_n,\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$（記法 4.1）は $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ において絶対総和可能であり，任意の $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対してある $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して $\mathscr{L}^1(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において $t = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\xi_n,\eta_n}$ が成り立つ．また，t がこのように表されているとき，任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して

$$\operatorname{tr}(tx) = \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{tr}(u_{\xi_n,\eta_n}x) = \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{tr}(u_{\xi_n,x^*\eta_n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x^*\eta_n | \xi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \eta_n | x\xi_n\rangle$$

である（命題 4.37，命題 4.2 (2)，例 4.16）．よって，主張が成り立つ． □

系 5.13　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．部分集合 $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，その超弱凸閉包，超強凸閉包，超強対合凸閉包は一致する．

証明　一般に，局所凸空間の部分集合の凸閉包は，その部分集合を含む閉半空間全体の交叉に等しい（Hahn–Banach の分離定理の系）．よって，主張は，命題 5.12 から従う．□

命題 5.14　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\Phi(x)(t) = \mathrm{tr}(tx) = \mathrm{tr}(xt)$ によって定まる等長線型同型作用素 $\Phi\colon \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K}) \to \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})^*$（定理 4.41）を通して，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超弱位相は $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})^*$ の汎弱位相に対応する．

証明　命題 5.12 の (d) $\iff$ (e) と注意 5.9 (3) より，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超弱位相は，$t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ に対する $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上の線型形式 $x \mapsto \mathrm{tr}(tx)$ の全体が誘導する始位相にほかならない．すなわち，Φ を通して，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超弱位相は $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})^*$ の汎弱位相に対応する．□

系 5.15　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の（作用素ノルムに関する）閉球は，弱コンパクトかつ超弱コンパクトである．

証明　命題 5.14 と Banach–Alaoglu の定理より，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の閉球は超弱コンパクトであり，したがって，弱コンパクトでもある．□

命題 5.16　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ のノルム有界集合上では，弱位相と超弱位相，強位相と超強位相，強対合位相と超強対合位相は，それぞれ一致する．

証明　<u>弱位相と超弱位相の一致</u>　I を集合とし，$\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$，$\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus} I}$ とする．任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して，Cauchy–Schwarz の不等式（命題 1.8）より，

$$\begin{aligned}\left|\langle \boldsymbol{\eta} | x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi}\rangle - \sum_{i\in F}\langle \eta_i | x\xi_i\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I\setminus F}\langle \eta_i | x\xi_i\rangle\right| \\ &\leq \|x\| \sum_{i\in I\setminus F}\|\xi_i\|\|\eta_i\| \\ &\leq \|x\|\left(\sum_{i\in I\setminus F}\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I\setminus F}\|\eta_i\|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

である．$F \to I$ のとき，上式の最右辺の二つの括弧の中身はともに 0 に収束するから，x がノルム有界集合上を動くとすると，$\sum_{i\in F}\langle \xi_i | x\eta_i\rangle$ は x に関して一様に $\langle \boldsymbol{\eta} | x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi}\rangle$ に収束する．したがって，関数 $x \mapsto \langle \boldsymbol{\eta} | x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\eta}\rangle$ は，ノルム有界集合上では弱連続である．よって，ノルム有界集合上では，弱位相と超弱位相は一致する．

<u>強位相と超強位相の一致</u>　I を集合とし，$\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ とする．有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して，$\boldsymbol{\xi}$ の成分のうち F に属する添字に対応するもの以外を 0 に置き換えて得られる $\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}$ のベクトルを，$\boldsymbol{\xi}^F$ と書く．すると，任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して，

$$\|x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi} - x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi}^F\| = \left(\sum_{i\in I\setminus F}\|x\xi_i\|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|\left(\sum_{i\in I\setminus F}\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}$$

である．$F \to I$ のとき，上式の最右辺の括弧の中身は 0 に収束するから，x がノルム有界集合上を動くとすると，$x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi}^F$ は x に関して一様に $x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi}$ に収束する．したがって，写像 $x \mapsto x^{\widehat{\oplus} I}\boldsymbol{\xi}$ は，ノルム有界集合上では強連続である．よって，ノルム有界集合上では，強位相と超強位相は一致する．

<u>強対合位相と超強対合位相の一致</u>　前段の結果および注意 5.2 (2) と注意 5.9 (2) から従う．□

次の命題では，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素全体のなす空間を $\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ と書き，$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上の順序 $\leq$（定義 3.30）を考える．

命題 5.17　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$(x_i)_{i\in I}$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上のネットであり，順序 $\leq$ に関して増加（すなわち，$i\leq j$ ならば $x_i\leq x_j$）かつ上に有界（すなわち，ある $b\in\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ が存在して，任意の $i\in I$ に対して $x_i\leq b$）であるとする．このとき，$(x_i)_{i\in I}$ は，順序 $\leq$ に関する上限 x をもつ．さらに，$(x_i)_{i\in I}$ は，x に超強対合収束する（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強収束もする）．

証明　$(x_i)_{i\in I}$ が順序 $\leq$ に関する上限 x をもち，$(x_i)_{i\in I}$ が x に超強対合収束することは，命題 3.39 で示した．

$(x_i)_{i\in I}$ が x に超強対合収束することを示す．必要ならばネット $(x_i)_{i\in I}$ のある項から先だけに注目することで，一般性を失わず，$(x_i)_{i\in I}$ が順序 $\leq$ に関して（上下ともに）有界であると仮定する．このとき，$(x_i)_{i\in I}$ は作用素ノルムに関して有界である（系 3.38）．$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上では超強位相と超強対合位相は一致し，ノルム有界な部分集合上では強位相と超強位相は一致するから（命題 5.16），$(x_i)_{i\in I}$ が x に強収束することを示せばよい．$\xi\in\mathcal{H}$ を任意にとると，

$$
\begin{aligned}
\|(x-x_i)\xi\|^2 &= \|(x-x_i)^{1/2}(x-x_i)^{1/2}\xi\|^2\\
&\leq \|(x-x_i)^{1/2}\|^2\|(x-x_i)^{1/2}\xi\|^2\\
&\leq \|x-x_i\|\langle\xi|(x-x_i)\xi\rangle
\end{aligned}
$$

である（命題 3.7）．$(x_i)_{i\in I}$ はノルム有界であり，$(x_i)_{i\in I}$ が x に弱収束することより $\langle\xi|(x-x_i)\xi\rangle\to 0$ だから，上式より $(x-x_i)\xi\to 0$ である．よって，$(x_i)_{i\in I}$ は x に強収束する．□

5.3　可分 Hilbert 空間の場合の作用素位相の性質

命題 5.18　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を可分 Hilbert 空間とする．

(1) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ のノルム有界な部分集合は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関して可分かつ距離化可能である．

(2) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の（作用素ノルムに関する）閉球は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関してポーランド空間をなす（すなわち，可分かつ完備距離化可能である）．

(3) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の任意の部分集合は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関して可分である．

証明　注意 5.9 (3) より，弱位相，強位相，強対合位相に関する主張だけを示せば十分である．$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ のそれぞれの完全な可算部分集合 $D_{\mathcal{H}}$ と $D_{\mathcal{K}}$ をとる．$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の単位閉球を B と書く．

(1)　S を $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ のノルム有界集合とする．命題 5.7 より，写像

$$
\begin{aligned}
&\iota_1\colon S\to\mathbb{K}^{D_{\mathcal{H}}\times D_{\mathcal{K}}}, && \iota_1(x)=(\langle\eta|x\xi\rangle)_{(\xi,\eta)\in D_{\mathcal{H}}\times D_{\mathcal{K}}},\\
&\iota_2\colon S\to\mathcal{K}^{D_{\mathcal{H}}}, && \iota_2(x)=(x\xi)_{\xi\in D_{\mathcal{H}}},\\
&\iota_3\colon S\to\mathcal{K}^{D_{\mathcal{H}}}\times\mathcal{H}^{D_{\mathcal{K}}}, && \iota_3(x)=((x\xi)_{\xi\in D_{\mathcal{H}}},(x^*\eta)_{\eta\in D_{\mathcal{K}}})
\end{aligned}
$$

はいずれも位相的埋め込みである．これらの埋め込み先の空間はいずれも可分かつ距離化可能だから，主張が成り立つ．

(2) (1) で $S = B$ として，埋め込み ι_1, ι_2, ι_3 を考える．埋め込み先の空間はいずれもポーランド空間だから，$\iota_1(B)$, $\iota_2(B)$, $\iota_3(B)$ がそれぞれの埋め込み先の空間において閉であることを示せばよい．

ι_1 に関する主張 B の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$n \to \infty$ のとき $\iota_1(x_n)$ が $(\Phi(\eta,\xi))_{(\xi,\eta)\in D_{\mathcal{H}}\times D_{\mathcal{K}}} \in \mathbb{K}^{D_{\mathcal{H}}\times D_{\mathcal{K}}}$ に収束するとする．すなわち，$n \to \infty$ のとき，任意の $\xi \in D_{\mathcal{H}}$ と $\eta \in D_{\mathcal{K}}$ に対して $\langle \eta | x_n\xi \rangle \to \Phi(\eta,\xi)$ であるとする．このとき，$\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}}$ と $\eta \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{K}}$ に対しても $\langle \eta | x_n\xi \rangle$ は収束するが，この極限も $\Phi(\eta,\xi) \in \mathbb{K}$ と書く．以上により定まる写像 $\Phi\colon \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{K}} \times \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}} \to \mathbb{K}$ は，任意の $\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}}$ と $\eta \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{K}}$ に対して $|\Phi(\eta,\xi)| \le \|\xi\|\|\eta\|$ を満たす準双線型形式だから，あるノルム減少な連続線型作用素 $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を用いて $\Phi(\eta,\xi) = \langle \eta | x\xi \rangle$ と表せる（定理 1.29）．この x について，$n \to \infty$ のとき $\iota_1(x_n) \to \iota_1(x)$ である．よって，$\iota_1(B)$ は $\mathbb{K}^{D_{\mathcal{H}}\times D_{\mathcal{K}}}$ において閉である．

ι_2 に関する主張 B の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$n \to \infty$ のとき $\iota_2(x_n)$ が $(\Phi(\xi))_{\xi\in D_{\mathcal{H}}} \in \mathcal{K}^{D_{\mathcal{H}}}$ に収束するとする．すなわち，$n \to \infty$ のとき，任意の $\xi \in D_{\mathcal{H}}$ に対して $x_n\xi \to \Phi(\xi)$ であるとする．このとき，$\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}}$ に対しても，$x_n\xi$ は収束するが，この極限も $\Phi(\xi) \in \mathcal{K}$ と書く．以上により定まる写像 $\Phi\colon \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}} \to \mathcal{K}$ は，ノルム減少な線型写像だから，ある $x \in B$ に拡張できる．この x について，$n \to \infty$ のとき $\iota_2(x_n) \to \iota_2(x)$ である．よって，$\iota_2(B)$ は $\mathcal{K}^{D_{\mathcal{H}}}$ において閉である．

ι_3 に関する主張 B の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$n \to \infty$ のとき $\iota_3(x_n)$ が $((\Phi(\xi))_{\xi\in D_{\mathcal{H}}}, (\Psi(\eta))_{\eta\in D_{\mathcal{K}}}) \in \mathcal{K}^{D_{\mathcal{H}}} \times \mathcal{H}^{D_{\mathcal{K}}}$ に収束するとする．すなわち，$n \to \infty$ のとき任意の $\xi \in D_{\mathcal{H}}$ に対して $x_n\xi \to \Phi(\xi)$ であり，任意の $\eta \in D_{\mathcal{K}}$ に対して $x_n^*\eta \to \Psi(\eta)$ であるとする．このとき，$\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}}$ に対しても $x_n\xi$ は収束し，$\eta \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}$ に対しても $x_n^*\eta$ は収束するが，これらの極限もそれぞれ $\Phi(\xi) \in \mathcal{K}$，$\Psi(\eta) \in \mathcal{H}$ と書く．以上により定まる写像 $\Phi\colon \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}} \to \mathcal{K}$ と $\Psi\colon \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}$ は，ともにノルム減少な線型写像であり，かつ任意の $\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{H}}$ と $\eta \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} D_{\mathcal{K}}$ に対して $\langle \eta | \Phi(\xi) \rangle = \langle \Psi(\eta) | \xi \rangle$ を満たすから，ある $x \in B$ が存在して，x と x^* はそれぞれ Φ と Ψ の拡張となる．この x について，$n \to \infty$ のとき $\iota_3(x_n) \to \iota_3(x)$ である．よって，$\iota_3(B)$ は $\mathcal{K}^{D_{\mathcal{H}}} \times \mathcal{H}^{D_{\mathcal{K}}}$ において閉である．

(3) S を $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分集合とする．(1) より $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の閉球 rB（$r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$）は弱位相，強位相，強対合位相に関して可分だから，$S = \bigcup_{r=0}^{\infty}(S \cap rB)$ も弱位相，強位相，強対合位相に関して可分である． □

命題 5.19 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす群を $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ と書き，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の単位閉球を B と書く．

(1) $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ の弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相は，すべて一致する．
(2) $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ は，(1) の共通の位相に関して位相群をなす．
(3) $\mathcal{H}$ が可分であるとする．このとき，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ は，B の弱位相に関する（したがって，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関しても）G_δ 集合である．特に，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相（(1) より，これらは一致する）に関してポーランド空間をなす（すなわち，可分かつ完備距離化可能である）．

証明 (1) $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ 上のネット $(u_i)_{i\in I}$ が $u \in \mathscr{U}(\mathcal{H})$ に弱収束するとすると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\|(u_i - u)\xi\|^2 &= \|u_i\xi\|^2 + \|u\xi\|^2 - 2\langle u_i\xi | u\xi \rangle \\ &\to 2\|\xi\|^2 - 2\langle u\xi | u\xi \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

だから，$(u_i)_{i\in I}$ は u に強収束もする．よって，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ の弱位相と強位相は一致する．随伴をとる写像は弱連続だから（命題 5.3 (1-1)），$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ 上では強連続でもある．すなわち，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ の強位相と強対合位相は一致す

る．さらに，命題 5.16 より，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ の弱位相と超弱位相，強位相と超弱位相，強対合位相と超強対合位相は，それぞれ一致する．よって，主張の六つの位相はすべて一致する．

(2)　ノルム有界な部分集合上では，合成をとる写像は強連続であり（命題 5.3 (1-2)），随伴をとる写像は弱連続である（命題 5.3 (2-1)）．よって，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ は，(1) の位相に関して位相群をなす．

(3)　$\mathcal{H}$ が可分であるとして，単位球面 $\{\xi \in \mathcal{H} \mid \|\xi\| = 1\}$ の可算稠密集合 D をとる．すると，$x \in B$ に対して，

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{U}(\mathcal{H}) &\iff x \text{ と } x^* \text{ がともに等長} \\ &\iff \text{任意の } \xi \in D \text{ に対して } \|x\xi\| = \|x^*\xi\| = 1 \\ &\iff \text{任意の } \xi \in D \text{ と } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ に対して } \|x\xi\|, \|x^*\xi\| > 1 - 1/n \end{aligned}$$

である．随伴をとる写像は弱連続であり（命題 5.3 (2-1)），写像 $x \mapsto \|x\xi\| = \sup_{\|\eta\| \le 1} |\langle \eta | x\xi \rangle|$ は弱下半連続だから，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ は B の弱位相に関する G_δ 集合である．

B は弱位相に関してポーランド空間をなすから（命題 5.18 (2)），その G_δ 集合である $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ もポーランド空間をなす．　□

5.4　閉部分線型空間への制限と作用素位相

本小節では，$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，e と f をそれぞれの上の直交射影とするとき，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，包含写像 $e\mathcal{H} \to \mathcal{H}$，$x\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$，直交射影 $\mathcal{K} \to f\mathcal{K}$ をこの順に合成して得られる連続線型作用素を，$[x]_{f,e} \in \mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ と書く．$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ かつ $e = f$ である場合は，これを単に $[x]_e \in \mathscr{L}(e\mathcal{H})$ と書く．

命題 5.20　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，e と f をそれぞれの上の直交射影とする．

(1) $f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e = \{fxe \mid x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})\}$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の弱閉な（したがって，強・強対合・超弱・超強・超強対合閉でもある）部分線型空間である．

(2) 写像 $x \mapsto [x]_{f,e}$ は，$f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ への弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合同相な線型同型を与える．

証明　(1)　$f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e = \{x \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K}) \mid fxe = x\}$ と書けるから，合成の弱分離連続性（命題 5.3 (1-1)）より，$f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ において弱閉である．

(2)　写像 $x \mapsto [x]_{f,e}$ が $f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ への線型同型を与えることは，容易に確かめられる．

同相性に関する主張を示す．注意 5.9 (3) より，弱位相，強位相，強対合位相に関する主張だけを示せば十分である．$f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e$ の弱位相は，$\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対する線型形式

$$x \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle = \langle \eta | fxe\xi \rangle = \langle f\eta | xe\xi \rangle = \langle e\eta | [x]_{f,e} e\xi \rangle$$

の全体が誘導する始位相であり，これは，線型同型写像 $x \mapsto [x]_{f,e}$ を通して $\mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ の弱位相に対応する．$f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e$ の強位相は，$\xi \in \mathcal{H}$ に対する線型写像

$$x \mapsto x\xi = xe\xi = [x]_{f,e} e\xi \tag{$*$}$$

の全体が誘導する始位相であり，これは，線型同型写像 $x \mapsto [x]_{f,e}$ を通して $\mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ の強位相に対応する．$f\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})e$ の強対合位相は，$\xi \in \mathcal{H}$ に対する線型写像 ($*$) と $\eta \in \mathcal{K}$ に対する共役線型写像

$$x \mapsto x^*\eta = (fx)^*\eta = x^* f\eta = [x^*]_{e,f} f\eta = [x]^*_{f,e} f\eta$$

の全体が誘導する始位相であり，これは，線型同型 $x \mapsto [x]_{f,e}$ を通して $\mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ の強対合位相に対応する．以上より，写像 $x \mapsto [x]_{f,e}$ は，$f\mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H}; f\mathcal{K})$ への弱・強・強対合同相を与える． □

系 5.21　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，e を $\mathcal{H}$ 上の直交射影とする．

(1) $e\mathscr{L}(\mathcal{H})e = \{exe \mid x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})\}$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の弱閉な（したがって，強・強対合・超弱・超強・超強対合閉でもある）部分対合代数であり，e を乗法単位元にもつ．

(2) 写像 $x \mapsto [x]_e$ は，$e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ への弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合同相な単位的対合同型を与える．

証明　$e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分対合代数であって e を乗法単位元にもつことと，写像 $x \mapsto [x]_e$ が $e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ への単位的対合同型を与えることは，容易に確かめられる．その他の主張は，命題 5.20 の特別な場合である． □

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 à 5*, Springer, 2007.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Théories spectrales, Chapitres 3 à 5*, Springer, 2023.

[3] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Springer, 1987.

[4] J. Dixmier, *C*-Algebras*, North-Holland, 2011.

[5] G. J. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[6] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, revised edition, Springer, 1989.

[7] M. Takesaki (竹崎正道), *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979.

[8] 戸松玲治,『作用素環論入門』共立出版，2024.

[9] 日合文雄，柳研二郎，『ヒルベルト空間と線型作用素』，牧野書店，1995.

[10] 箱，「コンパクト作用素のノート」，2021 年 6 月 1 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/compact-operator.html