無限和のノート

箱（@o_ccah）

2020 年 9 月 29 日

概要

可換分離位相群における無限和について解説する．無限和は「先頭 n 項の部分和の極限」として定式化されることが多いが，本稿では Bourbaki [1] に倣い，項を並べる順序に依存しない「総和可能性」という定式化を採用する．また，本稿の後半では，非負実数の族が総和可能性について特によい性質をもつことに着目して，ノルム型空間の元の族に対して「絶対総和可能性」を定義し，その性質を調べる．

目次

記号と用語

- 自然数，整数，実数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ と書く．0 は自然数に含める．また，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, \infty]$，$\overline{\mathbb{R}}_{>0} = (0, \infty)$ と書く．$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ の元を，拡張された非負実数という．
- $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ における加法・乗法を，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ における通常の加法・乗法に加えて $\infty + a = a + \infty = \infty$ $(a \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})$，$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ $(a \in \overline{\mathbb{R}}_{>0})$，$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0$ と約束することで定める．
- 集合 A の有限部分集合全体がなす集合を，$\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ と書く．
- 位相群とは，位相構造をもつ群であって，群の 2 項演算および逆元をとる操作が連続であるものをいう．本稿で扱う抽象的な位相群は，すべて可換分離位相群であり，その演算は加法的に書く．
- 体とは，可換とは限らない単位的環であって，零環ではなく，0 以外の元がすべて乗法に関する逆元をもつものをいう．体 K 上の絶対値とは，K から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像であって，非退化，乗法的，かつ三角不等式を満たすものをいう．体にその上の絶対値を 1 つ固定して考えたものを，付値体という．
- （可換とは限らない）体上の左線型空間を，単に線型空間という．
- 付値体上の位相線型空間のうち，その位相と整合するノルムが存在するものを，ノルム型空間という．

完備なノルム型空間を，Banach 型空間という．

- 付値体の絶対値は $|{-}|$ で，ノルム空間のノルムは $\|{-}\|$ で表す．
- 順序集合 $(X, \leq)$ に対して，その切片 $\{x \in X \mid x \geq a\}$（$a \in X$）の全体が生成する X 上のフィルタを，この順序集合の切片フィルタという．これが真フィルタであるための条件は，$(X, \leq)$ が上に有向である（任意の $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ に対してある $b \in A$ が存在して $a_0, \dots, a_{n-1} \leq b$ となる）ことである．

1　可換分離位相群における無限和

定義 1.1（無限和）　G を可換分離位相群，$\{x_i\}_{i \in I}$ を G の元の族とする．写像

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to G; \quad I' \mapsto \sum_{i \in I'} x_i$$

の，$(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I), \subseteq)$ の切片フィルタ（これは真フィルタである）による極限値が存在するとき，$\{x_i\}_{i \in I}$ は（G において）**総和可能**であるという．このとき，その極限値を $\{x_i\}_{i \in I}$ の**和**といい，$\sum_{i \in I} x_i$ と書く．

すなわち，$\{x_i\}_{i \in I}$ が総和可能でその和が $s \in G$ であるとは，$0 \in G$ の任意の近傍 U に対してある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在し，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I' \supseteq I_0$ ならば $\sum_{i \in I'} x_i \in s + U$ が成り立つことをいう．

定理 1.2（Cauchy の判定法）　G を可換分離位相群，$\{x_i\}_{i \in I}$ を G の元の族とする．次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，G が完備ならば，2 条件は同値となる．

(a) $\{x_i\}_{i \in I}$ は総和可能である．
(b) $0 \in G$ の任意の近傍 U に対してある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在し，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I_0 \cap I' = \emptyset$ ならば $\sum_{i \in I'} x_i \in U$ が成り立つ．

証明　(b) は，$\{x_i\}_{i \in I}$ の有限部分和をとる写像 $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to G$ による $(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I), \subseteq)$ の切片フィルタの像が Cauchy であるということに他ならない．よって，主張は Cauchy フィルタの一般論から従う．　□

系 1.3　G を可換分離位相群，$\{x_i\}_{i \in I}$ を G の元の無限族とする．$\{x_i\}_{i \in I}$ が総和可能ならば，写像 $I \to G$; $i \mapsto x_i$ は I 上の補有限フィルタに関して $0 \in G$ に収束する．

証明　結論は，$0 \in G$ の各近傍が有限個の $i \in I$ を除いて x_i を含む，ということに他ならない．これは，Cauchy の判定法（定理 1.2）の (a) $\Longrightarrow$ (b) から従う．　□

2　部分和と結合性

命題 2.1　完備な可換分離位相群において，総和可能な族の任意の部分族は総和可能である．

証明　Cauchy の判定法（定理 1.2）から従う．　□

注意 2.2　完備でない可換分離位相群においては，総和可能な族の部分族が総和可能であるとは限らない．たとえば，有理数の族 $\{x_i\}_{i \in I}$ と $I' \subseteq I$ を，$\{x_i\}_{i \in I}$ は $\mathbb{R}$ において総和可能で $\sum_{i \in I} x_i = 2$，$\{x_i\}_{i \in I'}$ は $\mathbb{R}$ において総和可能で $\sum_{i \in I'} x_i = \sqrt{2}$ となるようにとる．すると，$\{x_i\}_{i \in I}$ は $\mathbb{Q}$ において総和可能だが，$\{x_i\}_{i \in I'}$

は $\mathbb{Q}$ において総和可能でない．

定理 2.3（無限和の結合性） G を完備な可換分離位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族，$I=\bigsqcup_{j\in J}I_j$ を I の分割とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，各 $j\in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能であり，$\{\sum_{i\in I_j}x_i\}_{j\in J}$ も総和可能であって，

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}x_i=\sum_{i\in I}x_i$$

が成り立つ．

証明 $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとし，その和を $s\in G$ と置く．命題 2.1 より，各 $j\in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能である．その和を s_j と置く．$\{s_j\}_{j\in J}$ が総和可能で，その和が s であることを示したい．

$0\in G$ の近傍 U を任意にとる．$\sum_{i\in I}x_i=s$ だから，$I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ を，I_0 を含む任意の $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して $\sum_{i\in I'}x_i\in s+U$ が成り立つようにとれる．これを用いて $J_0=\{j\in J\mid I_j\cap I_0\neq\emptyset\}$ と置くと，$J_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(J)$ である．J_0 を含む任意の $J'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(J)$ に対して，

$$\sum_{j\in J'}s_j\in s+U+U \tag{$*$}$$

であることを示そう．$0\in G$ の近傍 V を $V+\cdots+V\subseteq U$（V は J' の元の個数だけ並ぶ）となるようにとり，各 $j\in J'$ に対して $I'_j\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ を

(i) $s_j-\sum_{i\in I'_j}x_i\in V$ かつ
(ii) $I_j\cap I_0\subseteq I'_j$

となるようにとる．$I'=\bigsqcup_{j\in J'}I'_j\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ と置くと，(ii) と $J'\supseteq J_0$ より $I'\supseteq I_0$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J'}s_j&=\sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'_j}x_i+\sum_{j\in J'}\left(s_j-\sum_{i\in I'_j}x_i\right)\\&=\sum_{i\in I'}x_i+\sum_{j\in J'}\left(s_j-\sum_{i\in I'_j}x_i\right)\\&\in s+U+V+\cdots+V\\&\subseteq s+U+U\end{aligned}$$

である（上式の $V+\cdots+V$ は V が J' の元の個数だけ並んだもの）．これで，($*$) が示された．よって，$\{s_j\}_{j\in J}$ は総和可能で，その和は s である． □

命題 2.4 G を可換分離位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の族，$I=\bigsqcup_{j\in J}I_j$ を I の有限分割（J は有限集合）とする．各 $j\in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ が総和可能ならば，$\{x_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}x_i$$

が成り立つ．

証明 各 $j\in J$ に対して $\{x_i\}_{i\in I_j}$ は総和可能で，その和は $s_j\in G$ であるとする．$0\in G$ の近傍 U を任意にとり，各 j に対して $I'_j\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ を，I'_j を含む任意の $I''_j\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ に対して $\sum_{i\in I''_j}x_i\in s_j+V$ となるよ

うにとる．$I' = I'_0 \sqcup \cdots \sqcup I'_{n-1}$ と置くと，I' を含む任意の $I'' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I''} x_i &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I'' \cap I_j} x_i \\ &\in \sum_{j \in J} (s_j + U) \\ &\subseteq \sum_{j \in J} s_j + U + \cdots + U\end{aligned}$$

が成り立つ（上式最右辺の U は J の元の個数だけ並ぶ）．よって，$\{x_i\}_{i \in I}$ は総和可能であり，その和は $\sum_{j \in J} s_j = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$ である． □

注意 2.5　J が有限集合でない場合，各 $j \in J$ に対して $\{x_i\}_{i \in I_j}$ が総和可能かつ $\{\sum_{i \in I_j} x_i\}_{j \in J}$ が総和可能であっても，$\{x_i\}_{i \in I}$ が総和可能であるとは限らない．たとえば，$j \in \mathbb{N}$ に対して $x_{j,0} = 1$，$x_{j,1} = -1$ と置くと，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $\{x_{j,b}\}_{b \in \{0,1\}}$ は総和可能かつ $\{x_{j,0} + x_{j,1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ は総和可能だが，$\{x_{j,b}\}_{j \in \mathbb{N},\, b \in \{0,1\}}$ は総和可能ではない．しかし，拡張された非負実数の無限和については肯定的な結果が成り立つ（命題 5.4）．

3　無限和と連続準同型

命題 3.1　$\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を可換分離位相群の族，$G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ をその積位相群とする．$\{x_i\}_{i \in I}$ を G の元の族とし，x_i の λ-成分を $x_{i,\lambda}$ と書く．このとき，次の 2 条件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i \in I}$ は G において総和可能である．
(b) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\{x_{i,\lambda}\}_{i \in I}$ は G_λ において総和可能である．

これらの条件の下で，

$$\sum_{i \in I} x_i = \left(\sum_{i \in I} x_{i,\lambda} \right)_{\lambda \in \Lambda}$$

が成り立つ．

証明　積空間における収束の一般論から従う． □

命題 3.2　G, H を可換分離位相群，$f \colon G \to H$ を連続準同型，$\{x_i\}_{i \in I}$ を G の元の族とする．$\{x_i\}_{i \in I}$ が G において総和可能ならば，$\{f(x_i)\}_{i \in I}$ は H において総和可能であり，

$$\sum_{i \in I} f(x_i) = f\left(\sum_{i \in I} x_i \right)$$

が成り立つ．

証明　$\{x_i\}_{i \in I}$ の有限部分和をとる写像を $S \colon \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to G$，$\{f(x_i)\}_{i \in I}$ の有限部分和をとる写像を $T \colon \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to H$ と書くと，f が準同型であることより，$T = f \circ S$ である．$\{x_i\}_{i \in I}$ が G において総和可能であり，その和が $s \in G$ であるとすると，$(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I), \subseteq)$ の切片フィルタの S による像は s に収束する．このことと f の連続性より，$(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I), \subseteq)$ の切片フィルタの $T = f \circ S$ による像は $f(s)$ に収束する．すなわち，

$\{f(x_i)\}_{i\in I}$ は H において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} f(x_i) = f\left(\sum_{i\in I} x_i\right)$$

が成り立つ． □

系 3.3　G を可換分離位相群とする．

(1) G の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ がともに総和可能ならば，$\{x_i + y_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$$

が成り立つ．

(2) $n \in \mathbb{Z}$ とする．G の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，$\{nx_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} nx_i = n\sum_{i\in I} x_i$$

が成り立つ．

証明　(1)　命題 3.1 に注意して，連続準同型 $G \times G \to G;\ (x, y) \mapsto x + y$ に対して命題 3.2 を適用すればよい．

(2)　連続準同型 $G \to G;\ x \mapsto nx$ に対して命題 3.2 を適用すればよい． □

系 3.4　K を付値体，E を K-位相線型空間とする．

(1) E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ がともに総和可能ならば，$\{x_i + y_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$$

が成り立つ．

(2) $\lambda \in K$ とする．E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能ならば，$\{\lambda x_i\}_{i\in I}$ も総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda\sum_{i\in I} x_i$$

が成り立つ．

証明　(1)　系 3.3 (1) の特別な場合である．

(2)　加法に関する連続準同型 $E \to E;\ x \mapsto \lambda x$ に対して命題 3.2 を適用すればよい． □

4　可換収束

定義 4.1（可換収束）　G を可換分離位相群，$\{x_i\}_{i\in I}$ を G の元の可算無限族とする．任意の全単射 $\sigma\colon \mathbb{N} \to I$ に対して極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)}$ が存在するとき，$\{x_i\}_{i\in I}$ は（G において）**可換収束**するという．

定理 4.2　可換分離位相群 G の元の可算無限族 $\{x_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能である．
(b) $\{x_i\}_{i\in I}$ は可換収束する．

これらの条件の下で，任意の全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_{\sigma(k)}=\sum_{i\in I}x_i$$

が成り立つ．特に，左辺の極限値は全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ のとり方によらない．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとし，その和を s と置く．任意の全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ に対して $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_{\sigma(k)}=s$ を示そう．$0\in G$ の近傍 U を任意にとり，これに対して $I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ を，I_0 を含む任意の $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して $\sum_{i\in I'}x_i\in s+U$ が成り立つようにとる．すると，$\sigma(\{0,\dots,n-1\})\supseteq I_0$ を満たす任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\sum_{k=0}^{n-1}x_{\sigma(k)}\in s+U$ となる．よって，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_{\sigma(k)}=s$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　背理法で示す．$\{x_i\}_{i\in I}$ は可換収束するが，総和可能ではないと仮定する．全単射 $\sigma\colon \mathbb{N}\to I$ を 1 つ固定し，写像 $\mathbb{N}\to G;\, n\mapsto\sum_{k=0}^{n-1}x_{\sigma(k)}$ による $\mathbb{N}$ 上の補有限フィルタの像を $\mathfrak{F}_\sigma$ とする．また，$\{x_i\}_{i\in I}$ の部分和をとる写像 $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\to G$ による $(\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I),\subseteq)$ の切片フィルタの像を $\mathfrak{F}$ とする．すると，

- $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{F}_\sigma$ よりも粗い．
- 仮定より，$\mathfrak{F}_\sigma$ は収束するが，$\mathfrak{F}$ は収束しない．

したがって，Cauchy フィルタの性質から，$\mathfrak{F}$ は Cauchy ではない．すなわち，次の条件を満たす $0\in G$ の近傍 U が存在する：どんな $I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対してもある $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在し，$I_0\cap I'=\emptyset$ かつ $\sum_{i\in I'}x_i\notin U$ が成り立つ．そこで，I を $I=\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}}I_j$（$I_j\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$）と可算無限個に分割し，無限個の $j\in\mathbb{N}$ に対して $\sum_{i\in I_j}x_i\notin U$ となるようにできる．I_0, I_1, ... の順番に対応をつける全単射 $\tau\colon\mathbb{N}\to I$ をとると，明らかに極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_{\tau(k)}$ は存在しない．これは，$\{x_i\}_{i\in I}$ が可換収束するという仮定に反する．　□

注意 4.3　$\{x_i\}_{i\in I}$（I は可算無限集合）が可換収束しない場合，2 つの全単射 σ, $\tau\colon\mathbb{N}\to I$ に対して極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_{\sigma(k)}$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_{\tau(k)}$ がともに存在したとしても，それらの値は等しいとは限らない．例として，実数の族 $\{(-1)^k/(k+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考えよう．よく知られているように，先頭 n 項の部分和の極限の意味で

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\log 2$$

が成り立つ．一方で，正の項 2 個と負の項 1 個を交互に並べると，

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

となる．詳しくは，杉浦 [7, p. 374] を参照のこと．

5　拡張された非負実数の族の無限和

命題 5.1　非負実数の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\{x_i\}_{i\in I}$ は（$\mathbb{R}$ において）総和可能である．
(b) $\left\{\sum_{i\in I'}x_i \,\middle|\, I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}$ は上に有界である．

これらの条件の下で，

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}$$

が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるとして，その和を $s\in\mathbb{R}$ と置く．$\sum_{i\in I} x_i = s$ だから，ある $I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して，I_0 を含む任意の $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して $|\sum_{i\in I''} x_i - s| \leq 1$ が成り立つ．したがって，任意の $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して

$$\sum_{i\in I'} x_i \leq \sum_{i\in I'\cup I_0} x_i \leq s+1$$

が成り立つ．よって，$\left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}$ は上に有界である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}$ が上に有界であるとして，その上界を s とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能であり，その和は s であることを示す．$\epsilon>0$ を任意にとる．$\sup\left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\} = s$ だから，ある $I_0\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して $\sum_{i\in I_0} x_i \geq s-\epsilon$ となる．このとき，I_0 を含む任意の $I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，

$$\sum_{i\in I'} x_i \geq \sum_{i\in I_0} x_i \geq s-\epsilon$$

が成り立つ．一方で，明らかに $\sum_{i\in I'} x_i \leq s$ である．よって，$\{x_i\}_{i\in I}$ は総和可能であり，その和は s に等しい． □

これを踏まえて，拡張された非負実数の無限和を次のように定義する．

定義 5.2（拡張された非負実数の無限和） 拡張された非負実数の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ に対して，その和 $\sum_{i\in I} x_i \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を，

$$\sum_{i\in I} x_i = \left\{\sum_{i\in I'} x_i \;\middle|\; I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}$$

と定める．

命題 5.1 より，非負実数の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が $\mathbb{R}$ において総和可能であることと定義 5.2 の意味で $\sum_{i\in I} x_i < \infty$ であることとは同値であり，これらの条件の下で，定義 1.1 の意味での和と定義 5.2 の意味での和とは一致する．

命題 5.3 $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}$ を拡張された非負実数の族とする．任意の $i\in I$ に対して $x_i\leq y_i$ ならば，

$$\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i$$

が成り立つ．

証明 明らかである． □

命題 5.4 $\{x_i\}_{i\in I}$ を拡張された非負実数の族，$I=\bigsqcup_{j\in J} I_j$ を I の分割とする．このとき，

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} x_i$$

が成り立つ．

証明　任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して

$$\sum_{i \in I'} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j \cap I'} x_i \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$$

であり，I' が動くときの上限をとることで

$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$$

を得る．一方で，$J' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(J)$ とし，各 $j \in J'$ に対して $I'_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_j)$ とすると，

$$\sum_{j \in J'} \sum_{j \in I'_j} x_i = \sum_{i \in \bigcup_{j \in J'} I'_j} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

であり，各 I'_j が動くときの上限をとることで

$$\sum_{j \in J'} \sum_{j \in I_j} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

を得る．さらに，J' が動くときの上限をとることで

$$\sum_{j \in J} \sum_{j \in I_j} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

を得る．これで示された．　□

命題 5.5　(1) 拡張された非負実数の族 $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_i\}_{i \in I}$ に対して，

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$$

が成り立つ．

(2) $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ と拡張された非負実数の族 $\{x_i\}_{i \in I}$ に対して，

$$\sum_{i \in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i$$

が成り立つ．

証明　(1)　$i \in I$ に対して $z_{i,0} = x_i$，$z_{i,1} = y_i$ と置くと，命題 5.4 より

$$\sum_{i \in I} \sum_{b \in \{0,1\}} z_{i,b} = \sum_{(i,b) \in I \times \{0,1\}} z_{i,b} = \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{i \in I} z_{i,b}$$

が成り立つ．これは，

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$$

を意味する．

(2)　式変形

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\lambda x_i &= \sup\left\{\sum_{i\in I'}\lambda x_i \;\middle|\; I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}\\ &= \lambda\sup\left\{\sum_{i\in I'}x_i \;\middle|\; I'\in\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)\right\}\\ &= \lambda\sum_{i\in I}x_i\end{aligned}$$

から従う． □

6　ノルム型空間における無限和

定義 6.1（絶対総和可能性）　K を付値体，E を K-ノルム型空間，$\{x_i\}_{i\in I}$ を E の元の族とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が（E において）**絶対総和可能**であるとは，E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ をとったとき，$\sum_{i\in I}\|x_i\|<\infty$ であることをいう．

同じ位相を定めるノルムはたかだか定数倍程度しか違わないから，上の定義は，E の位相と整合するノルムのとり方によらない．

命題 6.2　K を付値体とする．K-ノルム型空間 E において，絶対総和可能な族の任意の部分族は絶対総和可能である．

証明　明らかである． □

命題 6.3　K を付値体，E を K-ノルム型空間とする．

(1) E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば，$\{x_i+y_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である．
(2) $\lambda\in K$ とする．E の元の族 $\{x_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば，$\{\lambda x_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である．

証明　E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ を固定しておく．
(1)　命題 5.3 と命題 5.5 (1) より

$$\sum_{i\in I}\|x_i+y_i\|\le\sum_{i\in I}(\|x_i\|+\|y_i\|)=\sum_{i\in I}\|x_i\|+\sum_{i\in I}\|y_i\|$$

だから，$\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば $\{x_i+y_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である．
(2)　命題 5.5 (2) より

$$\sum_{i\in I}\|\lambda x_i\|=\sum_{i\in I}|\lambda|\|x_i\|=|\lambda|\sum_{i\in I}\|x_i\|$$

だから，$\{x_i\}_{i\in I}$ が絶対総和可能ならば $\{\lambda x_i\}_{i\in I}$ も絶対総和可能である． □

命題 6.4　K を付値体，E を K-ノルム空間，$\{x_i\}_{i\in I}$ を E の元の族とする．$\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能かつ絶対総和可能ならば，

$$\left\|\sum_{i\in I}x_i\right\|\le\sum_{i\in I}\|x_i\|$$

が成り立つ．

証明　有限和に対する三角不等式と，不等式延長の原理から結論を得る． □

命題 6.5　K を付値体とする．K-Banach 型空間 E において，絶対総和可能な族は総和可能である．

証明　E の位相と整合するノルム $\|{-}\|$ を固定しておく．$\{x_i\}_{i \in I}$ を E の点の絶対総和可能な族とする．$\epsilon > 0$ を任意にとる．Cauchy の判定法（定理 1.2）より，ある $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ が存在して，任意の $I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対して，$I_0 \cap I' = \emptyset$ ならば $\sum_{i \in I'} \|x_i\| \leq \epsilon$ が成り立つ．このとき，三角不等式より $\left\|\sum_{i \in I'} x_i\right\| \leq \epsilon$ である．E は完備だから，ふたたび Cauchy の判定法（定理 1.2）より，$\{x_i\}_{i \in I}$ は総和可能である． □

注意 6.6　完備でないノルム型空間においては，絶対総和可能な族が総和可能であるとは限らない．たとえば，コンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体のなす空間に一様ノルムを与えて得られる実ノルム空間を考え，$n \in \mathbb{N}$ に対してその空間の元 f_n を $\|f_n\| = 2^{-n}$ かつ $\operatorname{supp} f_n = [n, n+1]$ となるようにとる．すると，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は絶対総和可能だが総和可能ではない．

事実 6.7　有限次元実線型空間上のノルムは，すべて同値である．すなわち，E を有限次元実線型空間，p, q を E 上のノルムとすると，定数 a, $b > 0$ が存在して，任意の $x \in E$ に対して

$$ap(x) \leq q(x) \leq bp(x)$$

が成り立つ．

命題 6.8　有限次元実ノルム型空間 E の元の族 $\{x_i\}_{i \in I}$ に対して，次の 2 条件は同値である[*1]．

(a) $\{x_i\}_{i \in I}$ は総和可能である．
(b) $\{x_i\}_{i \in I}$ は絶対総和可能である．

証明　(b) $\Longrightarrow$ (a)　命題 6.5 の特別な場合である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　まず，$E = \mathbb{R}$ の場合に示す．対偶を示そう．$\{x_i\}_{i \in I}$ が絶対総和可能でないとすると，$\{|x_i|\}_{i \in I}$ の有限部分和全体は上に非有界だから（命題 5.1），$I_+ = \{i \in I \mid x_i \geq 0\}$，$I_- = \{i \in I \mid x_i < 0\}$ と置くと，$\{x_i\}_{i \in I_+}$ または $\{x_i\}_{i \in I_-}$ の有限部分和全体が非有界である．どちらでも同様だから，$\{x_i\}_{i \in I_+}$ の有限部分和全体が非有界であるとする．このとき，どんな $I_0 \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ に対しても，$I_+ \setminus I_0$ の十分大きい有限部分集合 I' をとれば，$\sum_{i \in I'} x_i \geq 1$ が成り立つ．よって，Cauchy の判定法（定理 1.2）より，$\{x_i\}_{i \in I}$ は総和可能ではない．

次に，E が有限次元実ノルム型空間の場合に示す．事実 6.7 より，$E = \mathbb{R}^n$ であり，$x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ のノルムが

$$\|x\| = |x_0| + \cdots + |x_{n-1}|$$

で与えられる場合を考えれば十分である．$\mathbb{R}^n$ の元の族 $\{x_i\}_{i \in I}$ が総和可能であるとする．すると，各 k に対

[*1] 一般に，離散でない完備付値体 K に対して，n（有限）次元の分離 K-位相線型空間はすべて（位相線型空間として）K^n に同型である（証明は，たとえば Bourbaki [4, p. 16] を参照のこと）．したがって，「有限次元実ノルム型空間」は「有限次元分離実位相線型空間」といっても同じである．

して $\{x_{i,k}\}_{i\in I}$（$x_{i,k}$ は x_i の k-成分）は $\mathbb{R}$ において総和可能だから（命題 3.1），命題 5.5 (1) より

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\|x_i\| &= \sum_{i\in I}(|x_{i,0}|+\cdots+|x_{i,n-1}|)\\ &= \sum_{i\in I}|x_{i,0}|+\cdots+\sum_{i\in I}|x_{i,n-1}|\\ &< \infty\end{aligned}$$

となる．よって，$\{x_i\}_{i\in I}$ は絶対総和可能である． □

注意 6.9　命題 6.8 は，一般の Banach 型空間では成り立たない．すなわち，Banach 型空間において，総和可能な族が絶対総和可能であるとは限らない．たとえば，無限遠で消える $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体のなす空間に一様ノルムを与えて得られる実 Banach 空間を考え，$n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対してその空間の元 f_n を $\|f_n\|=1/n$ かつ $\operatorname{supp} f_n\subseteq[n,n+1]$ となるようにとる．すると，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は総和可能だが絶対総和可能ではない．

実 Banach 型空間であって，その任意の総和可能な元の族が絶対総和可能であるようなものは，有限次元であることが知られている [6].

事実 6.10　K を離散でない付値体，E_0, ..., E_{n-1}, F を K-ノルム空間とする．n 重線型写像 $f\colon E_0\times\cdots\times E_{n-1}\to F$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) f は連続である．

(b) 定数 $a\geq 0$ が存在して，任意の $(x_0,\ldots,x_{n-1})\in E_0\times\cdots\times E_{n-1}$ に対して

$$\|f(x_0,\ldots,x_{n-1})\|\leq a\|x_0\|\cdots\|x_{n-1}\|$$

が成り立つ．

証明は，たとえば Bourbaki [3, pp. 40–41] を参照のこと．

定理 6.11　K を離散でない付値体，E_0, ..., E_{n-1}, F を K-ノルム型空間，$f\colon E_0\times\cdots\times E_{n-1}\to F$ を連続 n 重線型写像とし，$k\in\{0,\ldots,n-1\}$ に対して $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ を E_k の元の族とする．$I=I_0\times\cdots\times I_{n-1}$ と置き，$i\in I$ の成分を i_0, ..., i_{n-1} のように書く．各 $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ が E_k において絶対総和可能ならば，$\{f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において絶対総和可能である．さらに，F が Banach 型空間ならば，$\{f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I}f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})=f\left(\sum_{i_0\in I_0}x_{0,i_0},\ldots,\sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}}x_{n-1,i_{n-1}}\right)$$

が成り立つ．

証明　E_0, ..., E_{n-1}, F の位相と整合するノルムを固定しておき，それらをすべて $\|{-}\|$ と書く．

$f\colon E_0\times\cdots\times E_{n-1}\to F$ は連続 n 重線型写像だから，事実 6.10 より，定数 $a\geq 0$ が存在して，任意の $(x_0,\ldots,x_{n-1})\in E_0\times\cdots\times E_{n-1}$ に対して

$$\|f(x_0,\ldots,x_{n-1})\|\leq a\|x_0\|\cdots\|x_{n-1}\|$$

が成り立つ．以下，このような a を固定する．

各 $\{x_{k,i}\}_{i\in I_k}$ が E_k において絶対総和可能であるとする．$I' \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ を任意にとる．各 k に対して $I'_k \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(I_k)$ を選んで，$I' \subseteq I'_0 \times \cdots \times I'_{n-1}$ となるようにする．すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I'} \|f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\| &\leq \sum_{(i_0,\ldots,i_{n-1})\in I'_0\times\cdots\times I'_{n-1}} \|f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\| \\
&\leq \sum_{(i_0,\ldots,i_{n-1})\in I'_0\times\cdots\times I'_{n-1}} a\|x_{0,i_0}\|\cdots\|x_{n-1,i_{n-1}}\| \\
&\leq a\left(\sum_{i_0\in I'_0}\|x_{0,i_0}\|\right)\cdots\left(\sum_{i_{n-1}\in I'_{n-1}}\|x_{n-1,i_{n-1}}\|\right) \\
&\leq a\left(\sum_{i_0\in I_0}\|x_{0,i_0}\|\right)\cdots\left(\sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}}\|x_{n-1,i_{n-1}}\|\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，最右辺の $a(\sum_{i_0\in I_0}\|x_{0,i_0}\|)\cdots(\sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}}\|x_{n-1,i_{n-1}}\|)$ は I' によらない有限の値だから，命題 5.1 より，$\{f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において絶対総和可能である．

さらに，F が Banach 型空間であるとする．すると，命題 6.5 より $\{f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において総和可能である．また，定理 2.3 と命題 3.2 を繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}}) &= \sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}}\cdots\sum_{i_0\in I_0} f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}}) \\
&= f\left(\sum_{i_0\in I_0} x_{0,i_0},\ldots,\sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

を得る． □

系 6.12　E_0, ..., E_{n-1}, F を有限次元実ノルム型空間，$f\colon E_0\times\cdots\times E_{n-1}\to F$ を連続 n 重線型写像とし，$k\in\{0,\ldots,n-1\}$ に対して $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ を E_k の元の族とする．$I = I_0\times\cdots\times I_{n-1}$ と置き，$i\in I$ の成分を i_0, ..., i_{n-1} のように書く．各 $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ が E_k において総和可能ならば，$\{f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}})\}_{i\in I}$ は F において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} f(x_{0,i_0},\ldots,x_{n-1,i_{n-1}}) = f\left(\sum_{i_0\in I_0} x_{0,i_0},\ldots,\sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)$$

が成り立つ．

証明　有限次元実ノルム型空間は完備であり，また有限次元実ノルム型空間においては総和可能性と絶対総和可能性は同値だから（命題 6.8），主張は定理 6.11 から従う． □

系 6.13　$k\in\{0,\ldots,n-1\}$ に対して $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ を実数の族とする．$I = I_0\times\cdots\times I_{n-1}$ と置き，$i\in I$ の成分を i_0, ..., i_{n-1} のように書く．各 $\{x_{k,i_k}\}_{i_k\in I_k}$ が $\mathbb{R}$ において総和可能ならば，$\{x_{0,i_0}\cdots x_{n-1,i_{n-1}}\}_{i\in I}$ は $\mathbb{R}$ において総和可能であり，

$$\sum_{i\in I} x_{0,i_0}\cdots x_{n-1,i_{n-1}} = \left(\sum_{i_0\in I_0} x_{0,i_0}\right)\cdots\left(\sum_{i_{n-1}\in I_{n-1}} x_{n-1,i_{n-1}}\right)$$

が成り立つ．

証明　系 6.12 の特別な場合である． □

参考文献

[1] N. Bourbaki（著），土川 真夫，村田 全（訳），『ブルバキ数学原論 位相 2』，東京図書，1968.

[2] N. Bourbaki（著），笠原 晧司，清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 3』，東京図書，1968.

[3] N. Bourbaki（著），山崎 泰郎，清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 4』，東京図書，1969.

[4] N. Bourbaki（著），小針 晛宏（訳），『ブルバキ数学原論 位相線型空間 1』，東京図書，1986.

[5] J. Dieudonné（著），森 毅（訳），『現代解析の基礎 1』，東京図書，1971.

[6] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, “Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36**.3 (1950): 192–197.

[7] 杉浦 光夫，『解析入門 I』，東京大学出版会，1980.