逆関数の微分可能性についての定理と反例

箱（@o_ccah）

2020 年 3 月 15 日

$\mathbb{R}^m$ の開集合 U で定義され $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数 f について，f が $x_0 \in U$ で微分可能であるとは，ある $n \times m$ 実行列 A が存在して

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|(f(x) - f(x_0)) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

を満たすことをいいます．このとき，A（簡単な議論により，これは一意に定まることがわかります）を $Df(x_0)$ と書き，f の x_0 における微分係数といいます．

f が $\mathbb{R}^n$ の開集合の間の全単射である場合を考えましょう．このとき，f は逆関数 f^{-1} をもちます．逆関数の微分可能性については，逆関数定理（たとえば杉浦 [2, pp. 139–141], [3, pp. 17–18] を参照のこと）が有名ですが，導関数の連続性を仮定しなくても，1 点における微分可能性について次のことがいえます．

定理　U, V を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f \colon U \to V$ を全単射，$x_0 \in U$，$y_0 = f(x_0) \in V$ とする．2 条件

(i) f が x_0 で微分可能で，その微分係数 $Df(x_0)$ は可逆である．
(ii) 逆関数 $f^{-1} \colon V \to U$ は y_0 で連続である．

が満たされているならば，f^{-1} は y_0 で微分可能で，$Df^{-1}(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$ が成り立つ．

証明で用いるので，作用素ノルムについて説明しておきます．$n \times m$ 行列 A の作用素ノルムは，$\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|$ と定義されます．定義から簡単にわかるように，任意の $v \in \mathbb{R}^m$ に対して $|Av| \leq \|A\||v|$ が成り立ちます．

証明　y を $V \setminus \{y_0\}$ の点，$x = f^{-1}(y)$ とする．

$$\begin{aligned}(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) - (Df(x_0))^{-1}(y - y_0) &= (x - x_0) - (Df(x_0))^{-1}(f(x) - f(x_0)) \\ &= (Df(x_0))^{-1}(Df(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))),\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{|(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) - (Df(x_0))^{-1}(y - y_0)|}{|y - y_0|} \\ &\geq \|(Df(x_0))^{-1}\| \cdot \frac{|(Df(x_0))(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))|}{|y - y_0|} \\ &= \|(Df(x_0))^{-1}\| \cdot \frac{|x - x_0|}{|y - y_0|} \cdot \frac{|(Df(x_0))(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))|}{|x - x_0|} \qquad (*)\end{aligned}$$

である．y が y_0 に近づくとき，f^{-1} の連続性より，$x = f^{-1}(y)$ は $x_0 = f^{-1}(y_0)$ に近づく．よってこのと

き，微分係数 $Df(x_0)$ の定義より，$(*)$ の第 3 因子は 0 に収束する．また，

$$\begin{aligned}\frac{|y-y_0|}{|x-x_0|} &= \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \\ &= \frac{|Df(x_0)(x-x_0)+((f(x)-f(x_0))-Df(x_0)(x-x_0))|}{|x-x_0|} \\ &\geq \frac{|Df(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} - \frac{|(f(x)-f(x_0))-Df(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} \end{aligned} \tag{$**$}$$

である．x が x_0 に近づくとき，$(**)$ の第 1 項は $\inf_{|v|=1}|Df(x_0)v| > 0$ で下から抑えられ，第 2 項は 0 に収束する．よってこのとき，$|y-y_0|/|x-x_0|$ は正の有限値で下から抑えられ，したがって $(*)$ の第 1 因子 $|x-x_0|/|y-y_0|$ は有界である．以上より

$$\lim_{y\to y_0} \frac{|(f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0))-(Df(x_0))^{-1}(y-y_0)|}{|y-y_0|} = 0$$

であるから，f^{-1} は y_0 で微分可能で，$Df^{-1}(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$ が成り立つ． □

上の定理で，f^{-1} が y_0 で連続であるという条件は落とすことができません．それを見るために，以下で，全単射 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であって，$f(0)=0$ であり，0 で微分可能で $Df(0)=1$ だが，逆関数 f^{-1} が 0 で連続でないものを構成します．

整数 m と正の整数 n に対して実数 $a_{m,n}$ とり，条件

- $m \geq 0$ と任意の n に対して，$1/(n+1) \leq a_{m,n} \leq 1/n$ が成り立つ．
- $m < 0$ と任意の n に対して，$a_{m,n} > 1$ である．
- $a_{m,n}$ はすべて相異なる．

が満たされるようにします（構成は演習問題とします）．$S = \{a_{m,n} \mid m \text{ は整数，} n \text{ は正の整数}\}$ とおき，関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{R}\setminus S) \\ a_{m+1,n} & (x = a_{m,n}) \end{cases}$$

と定めます．すると，

- f は全単射で，$f(0)=0$ です．
- f は 0 で微分可能で，$Df(0)=1$ です．実際，$x \leq 0$ ならば $f(x)=x$ であり，$1/(n+1) \leq x \leq 1/n$（n は正の整数）ならば（$x\in S$ であってもなくても）$1/(n+1) \leq x \leq 1/n$ であることから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$$

  がわかります．
- 逆関数 f^{-1} は 0 で連続ではありません．実際，点列 $(a_{0,n})_{n\geq 1}$ は 0 に収束しますが，その f^{-1} による像 $(a_{-1,n})_{n\geq 1}$ は $f^{-1}(0)=0$ に収束しません．

よって，f が求める例になります．

いま構成した反例は，0 では微分可能ですが，0 のどんな近傍においても連続ではありません．では，局所的には連続であるような反例をつくることはできるでしょうか？ 次の事実（たとえば Hatcher [1, p. 172] を参照のこと）により，それは不可能であることがわかります．

事実（領域不変性定理） f を，$\mathbb{R}^n$ の開集合 U' から $\mathbb{R}^n$ への連続な単射とする．このとき，像 $f(U')$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，f は U' から $f(U')$ への同相写像を与える．

$\mathbb{R}^n$ の開集合の間の全単射 $f\colon U \to V$ が，$x_0 \in U$ の開近傍 U' では連続であるとします．すると，領域不変性定理より，$f(U')$ は $y_0 = f(x_0)$ の開近傍であり，f は U' から $f(U')$ への同相写像を与えます．したがって，逆写像 f^{-1} は $f(U')$ において連続，特に y_0 において連続です．この状況で，f が x_0 で微分可能かつ $Df(x_0)$ が可逆ならば，最初に述べた定理より，f^{-1} は y_0 で微分可能となってしまいます．

参考文献

[1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[2] 杉浦 光夫,『解析入門 I』，東京大学出版会，1980.

[3] 杉浦 光夫,『解析入門 II』，東京大学出版会，1985.