球面上の調和解析と接吻数問題

箱（@o_ccah）

2019 年 10 月 19 日

（最終更新日：2020 年 9 月 8 日）

概要

「1 つの n 次元球に触れるように，半径の同じ別の球たちを互いに重ならないように並べるとき，最大で何個を並べることができるか？」という問題を接吻数問題といい，その解を接吻数といいます．接吻数問題は，問題設定は単純であるにもかかわらず，解決は一般には非常に難しいことで有名です．たとえば，3 次元の接吻数問題の歴史は 1700 年頃まで遡りますが，それが完全に解決されたのは 1953 年でした．

1 次元，2 次元，3 次元，4 次元の接吻数は，それぞれ 2, 6, 12, 24 であることが知られています．5 次元以上の接吻数はほとんど確定していませんが，8 次元と 24 次元については，それぞれ 240, 196560 であることがわかっています．これは，Odlyzko–Sloane と Levenshtein による 1979 年の結果で，その証明は，球面上の調和解析に現れる Gegenbauer 多項式の性質を利用した非常に初等的なものでした．

本発表では，球面上の調和解析の初歩の初歩を解説し，それを用いて，Odlyzko–Sloane と Levenshtein による 8 次元と 24 次元の接吻数問題に対する解答を完全な形で紹介します．前提知識は，線型代数（内積空間を含む）と微積分です．

目次

記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．

- 整数 $n \geq 1$ に対して，$\mathbb{R}^n$ における単位球面を S^{n-1} と書く．すなわち，$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ である．
- 単に線型空間といったら，$\mathbb{C}$ 上の線型空間を表すものとする．
- 特に断らなければ，$\mathbb{R}^n$ の標準的な座標（関数）を $x_1, \ldots, x_n$ で表す．
- $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，x と y の標準的な内積を $x \cdot y$ で表す．
- 整数 n, k に対して，二項係数 $\binom{n}{k}$ を

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & (k \geq 0) \\ 0 & (k < 0) \end{cases}$$

と定める．

1 接吻数問題とは

「1 つの n 次元球に触れるように，半径の同じ別の球たちを互いに重ならないように並べるとき，最大で何個を並べることができるか？」という問題を接吻数問題といい，その解を接吻数という．現在得られている接吻数の評価を，文書末の表 1 にまとめた．

1, 2 次元の接吻数がそれぞれ 2, 6 であることは容易にわかる．ところが，3 次元以上になると，問題は途端に難しくなる．

3 次元の接吻数が 12 以上であることは，次のようにしてわかる．球に内接する正二十面体を考えよう．正二十面体は 12 個の頂点をもつ．さらに，正二十面体の異なる頂点どうしが球の中心に関してなす角は，最小のものでも 63° ほどである．したがって，正二十面体の各頂点において球が触れるように 12 個の球を配置すると，これらは互いに重ならない．

「63°」からわかるように，このように配置した 12 個の球の並びは緊密ではなく，球たちは多少は自由に動ける状態にある．では，これら 12 個の球をうまく動かして，13 個目の球が入る隙間を作ることはできるだろうか？ この問題の歴史は古く，1694 年に行われた Newton と Gregory との間の議論まで遡るが [6]，250 年以上のあいだ未解決のままだった．これを解決したのは，Schütte–van der Waerden (1952) [8] である．結論としては，13 個目の球を配置することはできない．すなわち，3 次元の接吻数は 12 である．

4 次元の接吻数は，ごく最近まで 24 か 25 のどちらかであるとしかわかっていなかったが，Musin (2003) [4] が 24 であることを証明した．

5 次元以上の接吻数はほとんど確定していないが，8 次元と 24 次元だけは，それぞれ 240, 196560 であることがわかっている．これは Odlyzko–Sloane (1979) [7] と Levenshtein (1979) [3] による結果で，その証明は，Gegenbauer 多項式の性質を利用した非常に初等的なものだった．

本発表では，Gegenbauer 多項式の背景にある球面上の調和解析について解説しつつ，8 次元と 24 次元の接吻数問題に対する解答を完全な形で紹介する．

2　球面調和関数

2.1　調和多項式

定義 2.1（多項式関数）　$n, k \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{R}^n$ 上の複素係数多項式関数全体のなす線型空間を $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ と書き，k 次斉次多項式関数全体のなす $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の部分線型空間を $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ と書く．また，便宜的に，$k < 0$ に対しては $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ と定める．

線型空間としての直和分解 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ が成立する．$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ の次元は，和が k である自然数の n 個組の総数に等しく，

$$\dim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k-1}{k}$$

である[*1]．

定義 2.2（調和多項式）　$n, k \in \mathbb{N}$ とする．ラプラシアン $\triangle$ を

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_n}$$

と定め，線型空間 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ を

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid \triangle f = 0\},$$
$$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) \mid \triangle f = 0\}$$

と定める．$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ の元を，**調和多項式**（harmonic polynomial）という．

多項式関数の場合と同様に，線型空間としての直和分解 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ が成立する．

例 2.3　$n = 2$ の場合を考える．座標（関数）を x, y と書くことにする．計算により，

$$\mathcal{H}_0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}1,$$
$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y,$$
$$\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}(x^2 - y^2) \oplus \mathbb{C}2xy,$$
$$\mathcal{H}_3(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}(x^3 - 3xy^2) \oplus \mathbb{C}(3x^2 y - y^3)$$

が確かめられる．一般に，$(x \pm \sqrt{-1}\, y)^k$ は k 次斉次の調和多項式であり，$k \geq 1$ ならば，これらの実部・虚部として 2 つの線型独立な実係数の $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^2)$ の元が得られる．後述の系 2.5 より $\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^2) = 2$（$k \geq 1$）だから，これらは $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^2)$ の基底になる．

以下，

$$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$$

という記号を用いる．

[*1] 「記号と用語」での約束より，$k < 0$ に対しては $\binom{n+k-1}{k} = 0$ であり，この場合も式は成立している．

命題 2.4　$n, k \in \mathbb{N}$ とする．線型空間としての直和分解

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \oplus r^2\mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$$

が成立する[*2]．

証明　$n = 0$ ならば明らかだから，$n \geq 1$ とする．

ラプラシアン $\triangle\colon \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$ に次元公式を適用して

$$\dim \operatorname{Ker} \triangle + \dim \operatorname{Im} \triangle = \dim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n),$$

したがって

$$\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) + \dim \mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n) \geq \dim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$$

を得る．そこで，主張を示すためには，$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \cap r^2\mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ を示せば十分である．

$f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \cap r^2\mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$ が 0 でないと仮定する．すると，f が r^2 で割り切れる最大回数 $l \geq 1$ が定まる．r^2 で割り切れない多項式関数 $g \in \mathcal{P}_{k-2l}(\mathbb{R}^n)$ を用いて，$f = r^{2l}g$ と表そう．$f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ だから，

$$0 = \triangle f = \triangle(r^{2l}g) = r^{2l}\triangle g + (\triangle r^{2l})g + 2\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r^{2l}}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{$*$}$$

である．計算により，

$$\begin{aligned}
\triangle r^{2l} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^l \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} 2x_i \cdot l(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{l-1} \\
&= 2l\sum_{i=1}^{n}((x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{l-1} + x_i \cdot 2x_i \cdot (l-1)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{l-2}) \\
&= 2l\sum_{i=1}^{n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(l-1)x_i^2)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{l-2} \\
&= 2l(n + 2(l-1))r^{2(l-1)}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r^{2l}}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} &= \sum_{i=0}^{n} 2x_i \cdot l r^{2(l-1)} \frac{\partial g}{\partial x_i} \\
&= 2l r^{2(l-1)} \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \\
&= 2l(k-2l)r^{2(l-1)}g
\end{aligned}$$

を得る．ここで，後者の式変形では，$g \in \mathcal{P}_{k-2l}(\mathbb{R}^n)$ より $(\sum_{i=1}^{n} x_i\, \partial/\partial x_i)g = (k-2l)g$ であることを用いた[*3]．これら 2 式を $(*)$ に代入すると，

$$0 = r^{2l}\triangle g + 2l(n + 2(l-1))r^{2(l-1)}g + 4l(k-2l)r^{2(l-1)}g,$$

[*2] 定義 2.1 での約束より，$k = 0, 1$ に対しては $\mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ だから，この場合も定理は成立している．

[*3] $\sum_{i=1}^{n} x_i\, \partial/\partial x_i$ には，Euler 作用素という名前が付いている．

すなわち

$$0 = r^2 \triangle g + (2l(n+2(l-1)) + 4l(k-2l))g$$

となる．$n,\, l \geq 1$ より $2l(n+2(l-1)) + 4l(k-2l) > 0$ だから，上式より g は r^2 で割り切れることになるが，これは g のとり方に矛盾する．よって，背理法より $f = 0$ である． □

系 2.5　$n,\, k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}.$$

である．

証明　命題 2.4 より，

$$\dim \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) = \dim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) - \dim \mathcal{P}_{k-2}(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}$$

である． □

系 2.6　$n,\, k \in \mathbb{N}$ とする．線型空間としての直和分解

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \oplus r^2\mathcal{H}_{k-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus r^{2\lfloor k/2 \rfloor}\mathcal{H}_{k-2\lfloor k/2 \rfloor}(\mathbb{R}^n)$$

が成立する．

証明　命題 2.4 を繰り返し用いればよい． □

2.2　球面調和関数

定義 2.7（球面調和関数）　$n \geq 1$，$k \in \mathbb{N}$ とする．線型空間 $\mathcal{H}(S^{n-1}),\, \mathcal{H}_k(S^{n-1})$ を，

$$\mathcal{H}(S^{n-1}) = \{f|_{S^{n-1}} \mid f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\},$$
$$\mathcal{H}_k(S^{n-1}) = \{f|_{S^{n-1}} \mid f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)\}$$

と定める．$\mathcal{H}(S^{n-1})$ の元を**球面調和関数**（spherical harmonics）という．

各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，写像 $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}_k(S^{n-1});\ f \mapsto f|_{S^{k-1}}$ は線型同型である．実際，斉次性より，$g \in \mathcal{H}_k(S^{n-1})$ に対して $x \mapsto |x|^k g(x/|x|)$ を与える対応が逆写像となる．実は，写像 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}(S^{n-1})$; $f \mapsto f|_{S^{k-1}}$ も線型同型となる（系 3.3）．

例 2.8　$n = 2$ の場合を考えよう．制限を与える写像 $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}_k(S^{n-1})$ が線型同型であることと例 2.3 より，

$$\mathcal{H}_0(S^1) = \mathbb{C}1,$$
$$\mathcal{H}_1(S^1) = \mathbb{C}\cos\theta \oplus \mathbb{C}\sin\theta,$$
$$\mathcal{H}_2(S^1) = \mathbb{C}\cos 2\theta \oplus \mathbb{C}\sin 2\theta,$$
$$\mathcal{H}_3(S^1) = \mathbb{C}\cos 3\theta \oplus \mathbb{C}\sin 3\theta$$

を得る．一般に，$k \geq 1$ に対して

$$\mathcal{H}_k(S^1) = \mathbb{C}\cos k\theta \oplus \mathbb{C}\sin k\theta$$

である．

実は，多項式関数の球面への制限は，必ず球面調和関数になる．

命題 2.9 $n \geq 1$ とする．任意の $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$f|_{S^{n-1}} \in \mathcal{H}(S^{n-1})$ である．

証明 $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ とする．系 2.6 より，$g_l \in \mathcal{H}_{k-2l}(\mathbb{R}^n)$（$l = 0, 1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor$）が存在して

$$f = g_0 + r^2 g_1 + \cdots + r^{2\lfloor k/2 \rfloor} g_{\lfloor k/2 \rfloor}$$

と書ける．S^{n-1} 上では $r^2 = 1$ であることに注意して，

$$f|_{S^{n-1}} = (g_0 + g_1 + \cdots + g_{\lfloor k/2 \rfloor})|_{S^{n-1}} \in \mathcal{H}(S^{n-1})$$

を得る． □

3 球面調和関数のなす空間の直交性

定義 3.1（L^2 内積） $n \geq 1$ とする．「性質のよい」関数（たとえば連続関数）$f, g\colon S^{n-1} \to \mathbb{C}$ に対して，f と g の L^2 内積を，

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi$$

と定める．ここで，$|S^{n-1}|$ は S^{n-1} の表面積を表す．

定理 3.2 $n \geq 1$ とする．L^2 内積に関して，球面調和関数のなす空間たち $\mathcal{H}_k(S^{n-1})$（$k \in \mathbb{N}$）は直交する．すなわち，$k, l \in \mathbb{N}$，$k \neq l$ とすると，任意の $f \in \mathcal{H}_k(S^{n-1})$，$g \in \mathcal{H}_l(S^{n-1})$ に対して

$$\langle f|g \rangle = 0$$

が成り立つ．

証明 $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$ とし，$f \in \mathcal{H}_k(S^{n-1})$, $g \in \mathcal{H}_l(S^{n-1})$ を任意にとる．f, g に対応する $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n), \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ の元を，それぞれそのまま f, g と書く．

$\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^n$ に値をとる関数

$$F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{g}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{g}\right)$$

に Gauss の発散定理を適用して，

$$\int_{D^n} \operatorname{div} F\, dx = \int_{S^{n-1}} F \cdot \nu\, d\xi \tag{$*$}$$

を得る．ここで，D^n は $\mathbb{R}^n$ における単位閉球を，ν は S^{n-1} の表面における外向き単位法線ベクトルを表

す．左辺と右辺をそれぞれ計算すると，

$$\begin{aligned}\int_{D^n} \operatorname{div} F\, dx &= \int_{D^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\overline{g}\right) dx \\ &= \int_{D^n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}\overline{g} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}\right) dx \\ &= \int_{D^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}\, dx\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} F\cdot\nu\, d\xi &= \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\overline{g}\, d\xi \\ &= \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} kf\overline{g}\, d\xi \\ &= k|S^{n-1}|\langle f|g\rangle\end{aligned}$$

となる．ここで，前者の式変形では $f\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ を，後者の式変形では $f\in\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ より $(\sum_{i=1}^n x_i\,\partial/\partial x_i)f = kf$ であることを用いた．これら 2 式を $(*)$ に代入して，

$$k|S^{n-1}|\langle f|g\rangle = \int_{D^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}\, dx$$

を得る．同様にして，

$$l|S^{n-1}|\langle f|g\rangle = \int_{D^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}\, dx$$

を得る．$k\neq l$ だから，ここから $\langle f|g\rangle = 0$ が従う． □

系 3.3　$n\geq 1$ とする．制限を対応させる写像 $\rho\colon \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{H}(S^{n-1});\ f\mapsto f|_{S^{n-1}}$ は線型同型である．

証明　ρ の全射性は明らかである．ρ の単射性は，各 $k\in\mathbb{N}$ に対して $\rho|_{\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)}\colon \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ が単射であることと，定理 3.2 より $\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ たちが「線型独立」であることから従う． □

系 3.4　$n\geq 1$ とする．Hilbert 空間としての直和分解

$$L^2(S^{n-1}) = \widehat{\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}}\mathcal{H}_k(S^{n-1})$$

が成立する．ここで，右辺は $\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ たちの Hilbert 直和を表す．

証明　直交性は定理 3.2 で示した．完全性，すなわち $\mathcal{H}(S^{n-1})$ が $L^2(S^{n-1})$ で稠密であることは，

- $\mathcal{H}(S^{n-1})$ が多項式関数の S^{n-1} への制限をすべて含むこと（命題 2.9），
- S^{n-1} 上の連続関数全体のなす空間 $C(S^{n-1})$ において，多項式関数の S^{n-1} への制限の全体は一様ノルムに関して稠密であり（Stone–Weierstrass の近似定理），したがって L^2 ノルムに関しても稠密であること，
- $C(S^{n-1})$ が $L^2(S^{n-1})$ において稠密であること

から従う． □

例 3.5 例 2.8 において，

$$\mathcal{H}_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{C}1 & (k=0) \\ \mathbb{C}\cos k\theta \oplus \mathbb{C}\sin k\theta & (k \geq 1) \end{cases}$$

であることを見た．加えて，$\cos k\theta$ と $\sin k\theta$ は，L^2 内積に関して直交している．したがって，定理 3.2 より，$1, \cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \ldots$ は $L^2(S^1)$ の完全直交系をなす（完全正規直交系にするためには，各 $\cos k\theta$, $\sin k\theta$ を $\sqrt{2}$ 倍すればよい）．これは，Fourier 級数展開の原理に他ならない．

4 帯球関数と Gegenbauer 多項式

以下，n 次直交群を $O(n)$ で表す．また，単射群準同型

$$O(n-1) \to O(n); \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

によって，$O(n-1)$ を $O(n)$ の部分群とみなす．

$\sigma \in O(n)$ と $\mathbb{R}^n$ や S^{n-1} 上で定義された関数 f に対して，関数 $L_\sigma f$ を，$L_\sigma f(x) = f(\sigma^{-1}x)$ によって定める．

4.1 帯球関数

定義 4.1（帯球関数） $n \geq 1$，$k \in \mathbb{N}$ とする．線型空間 $\mathcal{Z}_k(S^{n-1})$ を，

$$\mathcal{Z}_k(S^{n-1}) = \{f \in \mathcal{H}_k(S^{n-1}) \mid \text{任意の } \sigma \in O(n-1) \text{ に対して } L_\sigma f = f\}$$

と定める．すなわち，$\mathcal{Z}_k(S^{n-1})$ は，$\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ の $O(n-1)$-不変な元全体がなす部分線型空間である．$\mathcal{Z}_k(S^{n-1})$ の元を，k 次の**帯球関数**という．

球面調和関数 $f \in \mathcal{H}_k(S^{n-1})$ が帯球関数であるとは，f の $\xi \in S^{n-1}$ における値 $f(\xi)$ が，ξ の 1-成分のみに依存するということである．

補題 4.2 $n, k \in \mathbb{N}$ とする．$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ の $O(n)$-不変な元全体がなす部分線型空間

$$V_{n,k} = \{f \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) \mid \text{任意の } \sigma \in O(n) \text{ に対して } L_\sigma f = f\}$$

は，k が偶数ならば $\mathbb{C}r^k$ であり，k が奇数ならば $\{0\}$ である．

証明 $V_{n,k}$ が k の偶奇に応じて $\mathbb{C}r^k$ あるいは $\{0\}$ を含むことは明らかだから，逆の包含を示せばよい．$n=0$ ならば明らかだから，$n \geq 1$ とする．$f \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ が $O(n)$-不変であるとすると，f は S^{n-1} 上で定数である．その値を c とすると，f の k 次斉次性より，$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $f(x) = c|x|^k$ が成り立つ．もし $c \neq 0$ ならば，f が多項式関数であることより，k は偶数でなければならない．これで示された． □

定理 4.3 任意の $n \geq 2$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\dim \mathcal{Z}_k(S^{n-1}) = 1$ である．

証明 $\mathcal{Z}_k(S^{n-1})$ は

$$\mathcal{Z}_k(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \mid \text{任意の } \sigma \in O(n-1) \text{ に対して } L_\sigma f = f\}$$

と線型同型だから，$\dim \mathcal{Z}_k(\mathbb{R}^n) = 1$ を示せばよい．そのために，$\mathcal{Z}_k(\mathbb{R}^n)$ の元の形を決定したい．

まず，$f \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ が $O(n-1)$-不変であるための条件を考える．f を x_1 について整理して

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=0}^{k} x_1^l g_l(x_2, \ldots, x_n), \qquad g_l \in \mathcal{P}_{k-l}(\mathbb{R}^{n-1})$$

と表すと，f が $O(n-1)$-不変であることは，各 g_l が $O(n-1)$-不変であることと同値である．よって，補題 4.2 より，f が $O(n-1)$-不変であるための必要十分条件は，定数 $c_0, \ldots, c_{\lfloor k/2 \rfloor} \in \mathbb{C}$ を用いて

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} c_l x_1^{k-2l}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l \tag{$*$}$$

と書けることである．

次に，($*$) で定まる f が調和であるための条件を考える．$\triangle f$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\triangle f &= \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} c_l \frac{\partial^2 x_1^{k-2l}}{\partial^2 x_1}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l + \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} c_l x_1^{k-2l} \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} (k-2l)(k-2l-1) c_l x_1^{k-2l-2}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l + \sum_{l=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2l(n-1+2(l-1)) c_l x_1^{k-2l}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{l-1} \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} (k-2l)(k-2l-1) c_l x_1^{k-2l-2}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l + \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} 2(l+1)(n-1+2l) c_l x_1^{k-2l-2}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} ((k-2l)(k-2l-1) c_l + 2(l+1)(n-1+2l) c_{l+1}) x_1^{k-2l-2}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^l
\end{aligned}$$

となるから，$\triangle f = 0$ となるための条件は，$l = 0, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor - 1$ に対して

$$(k-2l)(k-2l-1)c_l + 2(l+1)(n-1+2l)c_{l+1} = 0$$

を満たすことである．$n \geq 2$ より $2(l+1)(n-1+2l) > 0$ であることに注意すると，このような数列 $c_0, \ldots, c_{\lfloor k/2 \rfloor}$ は初項 c_0 を定めるごとに一意に定まることがわかる．

以上より，$\dim \mathcal{Z}_k(\mathbb{R}^n) = 1$ である． □

定理 4.3 の証明中の式 ($*$) で定まる f について，c_0 は f の $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ における値に等しい．したがって，定理 4.3 の証明より，帯球関数 $f \in \mathcal{Z}_k(S^{n-1})$ は，$f(e_1)$ の値を指定するごとに一意に定まる．

例 4.4 $n = 2$ の場合を考える．$k \in \mathbb{N}$ に対して，$\cos k\theta$ は k 次の帯球関数である．よって，定理 4.3 より

$$\mathcal{Z}_k(S^1) = \mathbb{C} \cos k\theta$$

である．

4.2 Gegenbauer 多項式

定義 4.5（Gegenbauer 多項式） $n \geq 2$，$k \in \mathbb{N}$ とする．実係数 1 変数多項式 $Q_{n,k}$ を，

$$Q_{n,k}(t) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} c_l t^{k-2l}(1-t^2)^l$$

と定める．ただし，$c_0, \dots, c_{\lfloor k/2\rfloor}$ は

$$c_0 = 1, \qquad (k-2l)(k-2l-1)c_l + 2(l+1)(n-1+2l)c_{l+1} = 0 \quad (0 \le l \le \lfloor k/2\rfloor - 1)$$

によって定まる実数列である[*4]．$Q_{n,k}$ を，k 次の **Gegenbauer 多項式**という．

定理 4.3 の証明からわかるように，k 次の Gegenbauer 多項式とは，点 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ において値 1 をとる k 次の帯球関数を「潰した」ものである．

例 4.6 6 次までの Gegenbauer 多項式は,

$$\begin{aligned}
Q_{n,0}(t) &= 1, \\
Q_{n,1}(t) &= t, \\
Q_{n,2}(t) &= \frac{n}{n-1}\left(t^2 - \frac{1}{n}\right), \\
Q_{n,3}(t) &= \frac{n+2}{n-1}\left(t^3 - \frac{3}{n+2}t\right), \\
Q_{n,4}(t) &= \frac{(n+2)(n+4)}{(n-1)(n+1)}\left(t^4 - \frac{6}{n+4}t^2 + \frac{3}{(n+2)(n+4)}\right), \\
Q_{n,5}(t) &= \frac{(n+4)(n+6)}{(n-1)(n+1)}\left(t^5 - \frac{10}{n+6}t^3 + \frac{15}{(n+4)(n+6)}t\right), \\
Q_{n,6}(t) &= \frac{(n+4)(n+6)(n+8)}{(n-1)(n+1)(n+3)}\left(t^6 - \frac{15}{n+8}t^4 + \frac{45}{(n+6)(n+8)}t^2 - \frac{15}{(n+4)(n+6)(n+8)}\right)
\end{aligned}$$

となる．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$Q_{n,k}$ の次数はちょうど k である．

例 4.7 $n = 2$ の場合，点 $e_1 = (1, 0)$ で値 1 をとる k 次の帯球関数は $\cos k\theta$ であり，これを「潰し」て座標 x の式として表したものが Gegenbauer 多項式 $Q_{2,k}$ である．偏角 θ で表される S^1 の点の x 座標は $\cos\theta$ だから，$Q_{2,k}$ は

$$Q_{2,k}(\cos\theta) = \cos k\theta$$

を満たす．すなわち，$Q_{2,k}$ は Chebyshev 多項式 T_k に一致する．

例 4.8 $n = 3$ の場合の Gegenbauer 多項式 $Q_{3,k}$ は，Legendre 多項式 P_k に一致することが確かめられる．Legendre 多項式は，P_k たちが $L^2([-1,1])$（$[-1,1]$ には Lebesgue 測度を与える）において直交する，という性質をもつ．これは，$\mathcal{Z}_k(S^2)$ たちが L^2 内積に関して直交すること（定理 3.2）の帰結である．

定理 4.9（加法定理） $n \ge 2$，$k \in \mathbb{N}$ とする．$\phi_1, \dots, \phi_N$（$N = \dim \mathcal{H}_k(S^{n-1})$）を $\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ の L^2 内積に関する正規直交基底とすると，任意の $\xi, \eta \in S^{n-1}$ に対して,

$$Q_{n,k}(\xi\cdot\eta) = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} \phi_p(\xi)\overline{\phi_p(\eta)}$$

が成り立つ．

[*4] 坂内・坂内 [10] では，$c_0 = \dim \mathcal{H}_k(S^{n-1})$ とする定義を採用している．Gegenbauer 多項式の正規化のしかたには，いろいろな流儀があるようである．

証明　まず，示すべき等式の両辺が $O(n)$-不変であること，すなわち $\sigma \in O(n)$ に対して変数 ξ, η をそれぞれ $\sigma\xi, \sigma\eta$ で置き換えても値が変わらないことを示す．直交変換は内積を保つから，左辺 $Q_{n,k}(\xi \cdot \eta)$ が $O(n)$-不変であることは明らかである．右辺の $O(n)$-不変性を示す．$L_{\sigma^{-1}} \colon \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ は L^2 内積に関してユニタリだから，正規直交基底 $\phi_1, \ldots, \phi_N$ に関する $L_{\sigma^{-1}}$ の表現行列 $(a_{pq})_{1 \leq p,q \leq N}$ はユニタリである．これより，任意の $\xi, \eta \in S^{n-1}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{N} \phi_p(\sigma\xi)\overline{\phi_p(\sigma\eta)} &= \sum_{p=1}^{N} L_{\sigma^{-1}}\phi_p(\xi)\overline{L_{\sigma^{-1}}\phi_p(\eta)} \\
&= \sum_{p=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{pi}\phi_i(\xi) \right) \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{a_{pj}\phi_j(\eta)} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left(\sum_{p=1}^{N} a_{pi}\overline{a_{pj}} \right) \phi_i(\xi)\overline{\phi_j(\eta)} \\
&= \sum_{p=1}^{N} \phi_p(\xi)\overline{\phi_p(\eta)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，右辺も $O(n)$-不変である．

そこで，主張を示すためには，$\eta = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ の場合の等式

$$Q_{n,k}(\xi \cdot e_1) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \phi_p(\xi)\overline{\phi_p(e_1)} \tag{$*$}$$

を示せば十分である．$(*)$ の左辺は，e_1 において値 1 をとる k 次の帯球関数である．一方で，$(*)$ の右辺は，前段で示した不変性より，$O(n-1)$-不変かつ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \phi_p(e_1)\overline{\phi_p(e_1)} &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \sum_{p=1}^{N} \phi_p(e_1)\overline{\phi_p(e_1)}\, d\xi \\
&= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \sum_{p=1}^{N} \phi_p(\xi)\overline{\phi_p(\xi)}\, d\xi \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \langle \phi_p | \phi_p \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

を満たす．$\mathcal{Z}_k(S^{n-1})$ は 1 次元だったから（定理 4.3），これにより，等式 $(*)$ が示された．　□

例 4.10　$n = 2$ の場合を考える．$k \geq 1$ とし，$\mathcal{H}_k(S^1)$ の正規直交基底として $\sqrt{2}\cos k\theta$, $\sqrt{2}\sin k\theta$ をとる．これに定理 4.9 を適用しよう．$\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\eta = (\cos\beta, \sin\beta)$ と置くと，$\xi \cdot \eta = \cos(\beta - \alpha)$ だから，定理 4.9 の等式は

$$Q_{2,k}(\cos(\beta - \alpha)) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos k\alpha \cdot \sqrt{2}\cos k\beta + \sqrt{2}\sin k\alpha \cdot \sqrt{2}\sin k\beta)$$

となる．例 4.7 で見たように $Q_{2,k}(\cos\theta) = \cos k\theta$ だから，

$$\cos k(\beta - \alpha) = \cos k\alpha \cos k\beta + \sin k\alpha \sin k\beta$$

を得る．これは，三角関数の加法定理そのものである．これが，定理 4.9 を加法定理と呼ぶ理由である．

系 4.11　$n \geq 2$，$k \in \mathbb{N}$ とする．任意の有限個の点 $\xi_1, \ldots, \xi_m \in S^{n-1}$ に対して，

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} Q_{n,k}(\xi_i \cdot \xi_j) \geq 0$$

が成り立つ．

証明　$\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ の L^2 内積に関する正規直交基底 $\phi_1, \ldots, \phi_N$ をとると，加法定理（定理 4.9）より，

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq m} Q_{n,k}(\xi_i \cdot \xi_j) &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i,j \leq m} \sum_{p=1}^{N} \phi_p(\xi_i)\overline{\phi_p(\xi_j)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{m} \phi_p(\xi_i) \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{m} \phi_p(\xi_j) \right)} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

である．□

5　8 次元と 24 次元の接吻数の決定

定義 5.1（A-コード）　$n \geq 1$，$A \subseteq [-1,1]$ とする．有限個の（重複を許す）点の族 $\xi_1, \ldots, \xi_m \in S^{n-1}$ が A-コードであるとは，任意の $1 \leq i,j \leq m$，$i \neq j$ に対して $\xi_i \cdot \xi_j \in A$ が成り立つことをいう．

n 次元の接吻数とは，$[-1,1/2]$-コード $\xi_1, \ldots, \xi_m$ に対する m の最大値に他ならない．

定理 5.2 を述べるために，用語の準備をしておく．1 変数多項式を Gegenbauer の（有限）線型結合で表すことを，**Gegenbauer 展開**という．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $Q_{n,k}$ の次数はちょうど k だから，任意の 1 変数多項式は，一意な方法で Gegenbauer 展開される．

定理 5.2　$n \geq 2$，$A \subseteq [-1,1]$ とする．実係数 1 変数多項式 F が，2 条件

(i) 任意の $t \in A$ に対して，$F(t) \leq 0$ である．
(ii) F の Gegenbauer 展開 $F = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k Q_{n,k}$ について，$a_0 > 0$ かつ任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $a_k \geq 0$ である．

を満たすとする．このとき，任意の A-コード $\xi_1, \ldots, \xi_m \in S^{n-1}$ に対して，

$$m \leq \frac{F(1)}{a_0}$$

が成り立つ．

証明　$\xi_1, \ldots, \xi_m \in S^{n-1}$ を A-コードとする．$\sum_{1 \leq i,j \leq m} F(\xi_i \cdot \xi_j)$ を，2 つの方法で評価しよう．まず，条件 (i) より，任意の $1 \leq i,j \leq m$，$i \neq j$ に対して $F(\xi_i \cdot \xi_j) \leq 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq m} F(\xi_i \cdot \xi_j) &= mF(1) + \sum_{1 \leq i,j \leq m,\ i \neq j} F(\xi_i \cdot \xi_j) \\
&\leq mF(1)
\end{aligned}$$

と評価できる．一方で，F を Gegenbauer 展開して条件 (ii) と系 4.11 を用い，$Q_{n,0}=1$ に注意することで，

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le m} F(\xi_i\cdot\xi_j) &= \sum_{1\le i,j\le m}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k Q_{n,k}(\xi_i\cdot\xi_j) \\
&= a_0 \sum_{1\le i,j\le m} Q_{n,0}(\xi_i\cdot\xi_j) + \sum_{k\ge 1} a_k \sum_{1\le i,j\le m} Q_{n,k}(\xi_i\cdot\xi_j) \\
&\ge a_0 m^2
\end{aligned}
$$

と評価できる．これら 2 式より，

$$
m \le \frac{F(1)}{a_0}
$$

を得る． □

定理 5.2 を用いて，8 次元と 24 次元の接吻数を決定しよう．

定理 5.3 8 次元の接吻数は，240 である．

証明 $\mathbb{R}^8$ の標準基底を $e_1,\ldots,e_8$ で表す．E_8 ルート系を $1/\sqrt{2}$ 倍に縮小したもの

$$
\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm e_i \pm e_j) \;\middle|\; 1\le i<j\le 8\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{8}}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6\pm e_7\pm e_8) \;\middle|\; + \text{ の個数は偶数}\right\}
$$

は 240 点からなる $[-1,1/2]$-コードだから，8 次元の接吻数は 240 以上である．

一方で，多項式

$$
F(t) = (t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 t^2 \left(t-\frac{1}{2}\right)
$$

を考えると，その Gegenbauer 展開は

$$
F = \frac{3}{320}Q_{8,0} + \frac{3}{40}Q_{8,1} + \frac{15}{64}Q_{8,2} + \frac{39}{80}Q_{8,3} + \frac{399}{640}Q_{8,4} + \frac{9}{16}Q_{8,5} + \frac{33}{128}Q_{8,6}
$$

であり[*5]，F は定理 5.2 の条件 (i), (ii) を満たす．よって，8 次元の接吻数は

$$
\frac{F(1)}{3/320} = \frac{9/4}{3/320} = 240
$$

以下である．

以上より，8 次元の接吻数は 240 である． □

定理 5.4 24 次元の接吻数は，196560 である．

証明 Leech 格子[*6] において，原点以外で原点に最も近い点の全体を考え，これを 1/2 倍に縮小すると，196560 点からなる $[-1,1/2]$-コードが得られる．よって，24 次元の接吻数は 196560 以上である．

一方で，多項式

$$
F(t) = (t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2 t^2 \left(t-\frac{1}{4}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)
$$

[*5] 坂内・坂内 [10] の第 11 章に書かれている Gegenbauer 展開は，本稿と Gegenbauer 多項式の正規化のしかたが異なることを考慮しても，係数が間違っている．これは，坂内・坂内 [10] と原論文 [7] とで Gegenbauer 多項式の正規化のしかたが異なるにも関わらず，原論文に書かれている Gegenbauer 展開をそのまま写してしまったためだと思われる．

[*6] Leech 格子については，たとえば Wikipedia [11] を参照のこと．

を考えると，その Gegenbauer 展開は

$$F = \frac{15}{1490944}Q_{24,0} + \frac{45}{186368}Q_{24,1} + \frac{3795}{1949696}Q_{24,2} + \frac{10005}{905216}Q_{24,3} + \frac{3983025}{101384192}Q_{24,4} + \frac{56235}{487424}Q_{24,5} + \frac{2040905}{8716288}Q_{24,6} + \frac{270135}{661504}Q_{24,7} + \frac{16675}{34816}Q_{24,8} + \frac{150075}{330752}Q_{24,9} + \frac{310155}{1323008}Q_{24,10}$$

であり[*7]，F は定理 5.2 の条件 (i), (ii) を満たす．よって，24 次元の接吻数は

$$\frac{F(1)}{15/1490944} = \frac{2025/1024}{15/1490944} = 196560$$

以下である．

以上より，24 次元の接吻数は 196560 である． □

6 おわりに

8 次元と 24 次元の接吻数の決定の鍵となった定理 5.2 は，もともと代数的組合せ論の文脈で知られていたようである．たとえば，Delsarte–Goethals–Seidel [2] に記述がある．

定理 5.3 と定理 5.4 の証明における多項式がどこから出てきたのか気になるところであるが，Odlyzko–Sloane (1979) [7] はこれらの多項式を線型計画法による力技で得たようである．その他のサーベイにおいても，それ以上の説明は見つけられなかった．また，Odlyzko–Sloane (1979) [7] は 24 以下の各次元に対しても同様の力技を試みており，それによりたとえば 4 次元の接吻数が 25 以下であることを示しているが，exact な結果が得られるのは 8 次元と 24 次元だけのようである．その理由もはっきりしない．

最初にも述べたように，4 次元の接吻数問題を解決したのは Musin (2003) [4] だったが，その証明は，本発表で紹介した Odlyzko–Sloane (1979) [7] と Levenshtein (1979) [3] の方法を拡張したものであった．Musin (2003) [4] ではある制約付き最適化問題の数値解を利用していたが，後に Musin (2006) [5] や Musin (2008) [6] において，幾何学的考察によって計算を単純化した証明がなされている．

参考文献

本発表は，主に坂内・坂内 [10] の第 1, 2, 3, 11 章による．球面上の調和解析については，野村 [9] も参考にした．Boyvalenkov–Dodunekov–Musin [1] には，接吻数問題に関する進展がまとめられている．

[1] P. Boyvalenkov, S. Dodunekov, O. R. Musin, “A survey on the kissing numbers”, 2015.（2019 年 10 月 19 日アクセス）
`https://arxiv.org/abs/1507.03631`

[2] P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel, “Spherical codes and designs”, *Geometriae Dedicata*, **6**.3 (1977): 363–388.

[3] V. I. Levenshetein, “On bounds for packing in n-dimensional Euclidean space”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, **245**.6 (1979): 1299–1303.

[4] O. R. Musin, “The problem of the twenty-five spheres”, *Russian Mathematical Surveys*, **58**.4 (2003): 794–795.

*7 脚注 *5 に同じ．

[5] O. R. Musin, “The kissing problem in three dimensions”, *Discrete & Computational Geometry*, **35**.3 (2006): 375–384.

[6] O. R. Musin, “The kissing number in four dimensions”, *Annals of Mathematics*, **168**.1 (2008): 1–32.

[7] A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane, “New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **26**.2 (1979): 210–214.

[8] K. Schütte, B. L. van der Waerden, “Das Problem der dreizehn Kugeln”, *Mathematische Annalen*, **125**.1 (1952): 325–334.

[9] 野村 隆昭,『球面調和函数と群の表現』, 日本評論社，2018.

[10] 坂内 英一，坂内 悦子,『球面上の代数的組合せ理論』，シュプリンガー現代数学シリーズ，シュプリンガー・フェアラーク東京，1999.

[11] Wikipedia, ‘Leech lattice’.（2019 年 10 月 19 日アクセス）
https://en.wikipedia.org/wiki/Leech_lattice

表 1　24 次元までの接吻数についての，現在得られている最良の下界と上界 [1]．接吻数が確定している次元は **bold** 体で示した．

次元	下界	上界
1	**2**	**2**
2	**6**	**6**
3	**12**	**12**
4	**24**	**24**
5	40	44
6	72	78
7	126	134
8	**240**	**240**
9	306	364
10	500	554
11	582	870
12	840	1357
13	1154	2069
14	1606	3183
15	2564	4866
16	4320	7355
17	5346	11072
18	7398	16572
19	10668	24812
20	17400	36764
21	27720	54584
22	49896	82340
23	93150	124416
24	**196560**	**196560**