ノルム空間の射影極限として書けない分離局所凸空間の例

箱（@o_ccah）

2020 年 8 月 27 日

概要

「任意の分離局所凸空間はノルム空間の射影極限として書ける」という主張が複数の文献に見られるが，これは誤りである．本稿では，この主張に対する反例を挙げる．

記号と用語

- 自然数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．
- 本稿を通して，すべての線型空間は $\mathbb{K}$ 上のものとする．
- 積を含む一般的な「圏論的極限」を逆極限といい，添字圏が有向集合であるような図式（これを射影系と呼ぶ）の逆極限を射影極限という．

1　誤った主張とその「証明」

複数の文献に，次の主張とその「証明」が見られる（たとえば，Robertson–Robertson [1, Chap. V, Prop. 16] や Bogachev–Smolyanov [2, 2.1.6]）．

定理？　任意の分離局所凸空間はノルム空間の射影極限として書ける．

証明？　E を分離局所凸空間とする．$\mathcal{P}$ を E 上の連続半ノルム全体の集合とし，$p, q \in \mathcal{P}$ に対して p が定める位相が q が定める位相よりも弱いとき $p \preceq q$ と定めると，$\mathcal{P}$ は有向集合となる．$p \in \mathcal{P}$ に対して $E_p = E/p^{-1}(\{0\})$ と置き，p が誘導するノルムによって E_p をノルム空間とみなすと，$\{E_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ は自然にノルム空間の射影系をなす．自然な写像 $\phi\colon E \to \varprojlim E_p$ は位相線型空間の同型を与える．　□

上の「証明」は，「$\phi\colon E \to \varprojlim E_p$ は位相線型空間の同型を与える」という部分が正しくない．E の位相が分離な半ノルムの族 $\mathcal{P}$ から定まることから，ϕ が位相線型空間の埋め込みである（すなわち，ϕ は単射であり位相線型空間の同型 $E \cong \phi(E)$ を与える）ことはわかるが，ϕ が全射かどうかはわからない[*1]．

次節で，上の主張に対する反例，すなわちノルム空間の射影極限として書けない分離局所凸空間の例を与える（実際にはより強く，ノルム空間の逆極限として書けないことまで示される）．

[*1] $\varprojlim E_p$ の原点の近傍基として $p \in \mathcal{P}$ と $r > 0$ に対する $\{(x_p)_{p\in\mathcal{P}} \in \varprojlim E_p \mid \|x_p\| \le r\}$ の全体がとれること（射影極限の一般論）に注意すれば，ϕ の像が $\varprojlim E_p$ において稠密であることはわかる．さらに，この議論は各 E_p をその完備化で置き換えてもなお有効であることが確かめられる．したがって，「任意の分離局所凸空間は Banach 空間の射影極限に稠密に埋め込める」という主張は正しい．

2　反例

$E = \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0\}$ と置く．E 上の半ノルム p であってある $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n \subseteq p^{-1}(\{0\})$ となるものの全体を $\mathcal{P}$ とし，E に $\mathcal{P}$ が定める局所凸位相を与える．$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \{0\}$ より $\mathcal{P}$ は分離な半ノルムの族だから，E は分離局所凸空間である．

主張 1　$\mathcal{P}$ は E 上の連続半ノルム全体の集合と一致する．

証明　q を E 上の連続半ノルムとすると，定数 $C \geq 0$ と有限個の $p_0, \ldots, p_{k-1} \in \mathcal{P}$ が存在して

$$q \leq C \max\{p_0, \ldots, p_{k-1}\}$$

となる．各 j に対して $M_{n_j} \subseteq p_j^{-1}(\{0\})$ となる $n_j \in \mathbb{N}$ をとり，$n = \max\{n_0, \ldots, n_{k-1}\}$ と置くと，任意の j に対して $M_n \subseteq p_j^{-1}(\{0\})$ だから，上式より $M_n \subseteq q^{-1}(\{0\})$ である．よって，$q \in \mathcal{P}$ である．これで，$\mathcal{P}$ が E 上の連続半ノルム全体の集合と一致することが示された．　□

主張 2　E はノルム空間の逆極限としては書けない．特に，ノルム空間の射影極限としては書けない．

証明　$\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をノルム空間からなる図式とし，その位相線型空間としての逆極限を $F = \varprojlim F_\lambda$ とする．逆極限の構造射を $\pi_\lambda \colon F \to F_\lambda$ と書く．位相線型空間の同型 $\phi \colon E \to F$ がとれたとして矛盾を導く．

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，連続線型写像 $\pi_\lambda \circ \phi \colon E \to F_\lambda$ によって F_λ のノルムを引き戻して得られる E 上の半ノルムを q_λ と置くと，$\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は E の位相を定める．特に $\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}$ だから（主張 1），各 $\lambda \in \Lambda$ に対してある $n_\lambda \in \mathbb{N}$ が存在して $M_{n_\lambda} \subseteq q_\lambda^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}(\pi_\lambda \circ \phi)$ となる．そこで，$n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in E$ を「0, …, $(n-1)$-成分は 1，それ以外の成分は 0」であるような点とすると，$n \geq n_\lambda$ に対して $\pi_\lambda(\phi(x_n)) \in F_\lambda$ は一定である．この一定の点を $y_\lambda \in F_\lambda$ とする．$f \colon F_\lambda \to F_\mu$（$\lambda, \mu \in \Lambda$）を図式に含まれる射とすると，

$$f(y_\lambda) = f(\pi_\lambda(\phi(x_{\max\{n_\lambda, n_\mu\}}))) = \pi_\mu(\phi(x_{\max\{n_\lambda, n_\mu\}})) = y_\mu$$

が成り立つから，$y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は逆極限 F の点である．

ϕ は全射だから，$x \in E$ であって $\phi(x) = y$ となるものがとれる．各 $\lambda \in \Lambda$ と $n \geq n_\lambda$ に対して $\pi_\lambda(\phi(x)) = \pi_\lambda(y) = y_\lambda = \pi_\lambda(\phi(x_n))$ だから，$x - x_n \in \mathrm{Ker}(\pi_\lambda \circ \phi)$ である．$m \in \mathbb{N}$ を $x - x_m \notin M_m$ であるようにとり（たとえば，x の $(m-1)$-成分が 1 でないような m をとればよい），E 上の半ノルム p を $p^{-1}(\{0\}) = M_m$ となるようにとると，$p \in \mathcal{P}$ である．$\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は E の位相を定めるから，定数 $C \geq 0$ と有限個の $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1} \in \Lambda$ が存在して

$$p \leq C \max\{q_{\lambda_0}, \ldots, q_{\lambda_{k-1}}\}$$

となり，したがって

$$\bigcap_{j=0}^{k-1} \mathrm{Ker}(\pi_{\lambda_j} \circ \phi) = \bigcap_{j=0}^{k-1} q_{\lambda_j}^{-1}(\{0\}) \subseteq p^{-1}(\{0\}) = M_m$$

である．一方で，$m' = \max\{n_{\lambda_0}, \ldots, n_{\lambda_{k-1}}, m\}$ と置くと，任意の j に対して $m' \geq n_{\lambda_j}$ だから

$$x - x_{m'} \in \bigcap_{j=0}^{k-1} \mathrm{Ker}(\pi_{\lambda_j} \circ \phi)$$

である．これら 2 式より $x - x_{m'} \in M_m$ だが，これは m のとり方と $m' \geq m$ であることに反する．　□

参考文献

[1] A. P. Robertson, W. J. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press, 1964.

[2] V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov, *Topological Vector Spaces and Their Applications*, Springer, 2017.