Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds* の章末問題の解答

箱（@o_ccah）

2022 年 3 月 1 日

概要

本稿は，J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd edition の章末問題の非公式解答集である．現在，全 233 問中，102 問の解答を記載している．

目次

記号と用語

次の記号を用いる（本と異なるものには注意を付した）.

- $\{x \mid P(x)\}$ — 集合の内包的記法（本では $\{x : P(x)\}$）
- δ_{ij} — Kronecker のデルタ
- tr — 縮約
- tr_g — 計量を用いた縮約
- $L(\gamma)$, $L_g(\gamma)$ — 曲線の長さ（本では g は省略されないが，本稿ではしばしば省略する）
- $d(p,q)$, $d_g(p,q)$ — Riemann 距離（本では g は省略されないが，本稿ではしばしば省略する）
- dV, dV_g — Riemann 体積形式（本では g は省略されないが，本稿ではしばしば省略する）
- $\mathrm{Iso}(M)$ — 自己等長同型群
- $\mathrm{Iso}_p(M)$ — 自己等長同型群の等方部分群
- ∇ — 接続
- D_t — 曲線に沿った共変微分
- $\mathit{\Gamma}_{ij}^k$ — 接続係数，Christoffel 記号
- $R(X,Y)Z$, ${R_{ijk}}^l$ — 曲率，その成分
- $Rm(X,Y,Z,W)$, Rm_{ijkl} — Riemann 曲率テンソル，その成分（本では成分は R_{ijkl}）
- $Rc(X,Y)$, Rc_{ij} — Ricci 曲率，その成分（本では成分は R_{ij}）
- S — スカラー曲率
- $\sec(\mathit{\Pi})$, $\sec(v,w)$ — 断面曲率
- $\mathrm{II}(X,Y)$ — 第二基本形式
- $\mathscr{J}(\gamma)$ — Jacobi 場の空間
- $\mathrm{Cut}(p)$ — 切断軌跡
- $t_{\mathrm{cut}}(p,v)$ — 切断時刻
- $\mathrm{ID}(p)$ — 単射領域
- $\mathrm{inj}(p)$, $\mathrm{inj}(M)$ — 単射半径
- Einstein の縮約記法は用いない.

訳語はできるだけ標準的なものを用いたつもりだが，次に挙げるものはそこまで普及していないかもしれない.

- proper variation — 固有変分
- variation through geodesic — 測地変分
- cut locus — 切断軌跡
- cut time — 切断時刻
- evenly covered — 均等に被覆される

2 Riemannian Metrics

解答 2.1 M を 1 次元 Riemann 多様体とする．点 $p \in M$ を任意にとり，p のまわりのチャート $(U; x)$ を 1 つ固定する．M の Riemann 計量 g が U 上で $g = f\, dx^{\otimes 2}$（$f \in C^\infty(U)$，U 上で常に $f \neq 0$）と表されるとする．$h \in C^\infty(U)$ を $dh/dx = f^{1/2}$ となるようにとって $y = hx$ と置くと，U 上で

$$dy^{\otimes 2} = \left(\frac{dh}{dx}\, dx\right)^{\otimes 2} = f\, dx^{\otimes 2} = g$$

である．さらに，$(dh/dx)(p) = f(p)^{1/2} \neq 0$ だから，必要に応じて U を小さくとり直せば，$(U; y)$ は p のまわりのチャートとなる．任意の点 $p \in M$ のまわりでこのようなチャート $(U; y)$ がとれるから，M は平坦である．

解答 2.2 仮定より，任意の $x \in V$ に対して $|F(x)| = |x|$ である．したがって，任意の $x, y \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\langle F(x), F(y)\rangle &= \frac{1}{4}(|F(x+y)|^2 - |F(x-y)|^2)\\ &= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)\\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

である．そこで，$\dim V = \dim W = n$ と置いて V の正規直交基底 $(e_1, \dots, e_n)$ をとると，$(F(e_1), \dots, F(e_n))$ は W の正規直交基底である．$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in V$（$x^i \in \mathbb{R}$）とすると，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\langle F(x), F(e_i)\rangle = \langle x, e_i\rangle = x^i$$

だから，$(F(e_1), \dots, F(e_n))$ が W の正規直交基底であることより，

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x^i F(e_i)$$

となる．よって，F は等長線型同型写像である．

解答 2.3

解答 2.4

解答 2.5 (b) 命題 2.25 (a) の証明より，各点 $p \in \widetilde{M}$ のまわりで $T\widetilde{M}$ に対する滑らかな（正規直交）枠 $(E_1, \dots, E_m)$ であって $(E_{m-n+1}, \dots, E_m)$ が H を張るものがとれるから，H は $T\widetilde{M}$ の滑らかな部分ベクトル束である．

$\pi\colon \widetilde{M} \to M$ は滑らかな沈め込みだから，各点 $x \in \widetilde{M}$ において微分 $d\pi|_x\colon T_x\widetilde{M} \to T_{\pi(x)}M$ は $H_x = (\operatorname{Ker} d\pi|_x)^\perp$ から $T_{\pi(x)}M$ への線型同型を与える．したがって，$d\pi|_H\colon H \to TM$ が誘導する $\widetilde{M}$ 上のベクトル束の間の滑らかな写像 $\phi\colon H \to \pi^*TM$ は，ファイバーごとに線型同型である．よって，ϕ は $\widetilde{M}$ 上のベクトル束の同型を与える．$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，X の $\widetilde{M}$ への水平持ち上げとは，ベクトル束の同型 ϕ を通して π^*TM の大域切断 $x \mapsto X|_{\pi(x)}$ に対応する H の大域切断に他ならず，これは一意に存在して滑らかである．これで，主張が示された．

(c)　$X \in \mathfrak{X}(M)$ を $X|_{\pi(x)} = d\pi|_x(v)$ となるようにとり，その水平持ち上げを $\widetilde{X}$ とする．水平持ち上げの定義より $\widetilde{X}|_x \in H_x$ かつ

$$d\pi|_x(\widetilde{X}|_x) = X|_{\pi(x)} = d\pi|_x(v)$$

であり，$d\pi|_x$ は H_x から $T_{\pi(x)}M$ への線型同型を与えるから，$\widetilde{X}|_x = v$ である．

解答 2.6

解答 2.7

解答 2.8

解答 2.9　$\mathscr{R} \subseteq M$ は f の正則点全体の集合だから，陰写像定理より，$c \in \mathbb{R}$ に対して $M_c = f^{-1}(\{c\}) \cap \mathscr{R}$ は M における埋め込まれた滑らかな超平面である．

$\operatorname{grad} f$ が M_c に対して直交することを示す．$p \in M_c$ と $v \in T_pM_c$ を任意にとり，滑らかな曲線 $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M_c$（$\epsilon > 0$）を $\gamma(0) = p$ かつ $\gamma'(0) = v$ となるようにとる．すると，$f \circ \gamma$ の値は常に c だから，

$$\langle (\operatorname{grad} f)|_p, v \rangle = df(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = 0$$

である．よって，$\operatorname{grad} f$ は M_c に対して直交する．[*1]

解答 2.10　X はどの点でも消えないから，条件 $X = \operatorname{grad} f = (df)^\sharp$ と条件 $df(X) = Xf = |X|^2$ はともに df がどの点でも消えないこと，すなわち M のすべての点が f の正則点であることを導く．そこで，一般性を失わず，はじめから M のすべての点が f の正則点であると仮定する．

命題 2.40（証明は問題 2.9）より，X が f の等高集合（level set）に対して直交することは，各点で X が $\operatorname{grad} f$ の 0 でないスカラー倍であることと同値である．これが成り立つとすると，どの点でも消えない $a \in C^\infty(M)$ を用いて $\operatorname{grad} f = aX$ と書ける．条件 $Xf = |X|^2$ は $\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = \langle X, X \rangle$ と書き直せ，上の状況ではこれは $a = 1$ を意味する．よって，これらの 2 条件が成り立つことは，$X = \operatorname{grad} f$ であることと同値である．

解答 2.11

解答 2.12

解答 2.13

解答 2.14　M はコンパクトで $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ は被覆写像だから，均等に被覆される連結開集合からなる M の有限被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ がとれる．各 $i \in I$ に対して，$\pi^{-1}(U_i)$ の連結成分分解を $\pi^{-1}(U_i) = \coprod_{j=1}^{k} \widetilde{U}_{i,j}$ と書くと，各 $1 \leq j \leq k$ に対して $\pi|_{\widetilde{U}_{i,j}}\colon \widetilde{U}_{i,j} \to U$ は等長同型である．さらに，$\{U_i\}_{i \in I}$ に従属する M 上の滑らかな 1 の分割 $\{\rho_i\}_{i \in I}$ をとり，各 $i \in I$ と $1 \leq j \leq k$ に対して滑らかな関数 $\widetilde{\rho}_{i,j}\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ を

$$\widetilde{\rho}_{i,j}(x) = \begin{cases} \rho_i(\pi(x)) & (x \in \widetilde{U}_{i,j}) \\ 0 & (x \notin \widetilde{U}_{i,j}) \end{cases}$$

[*1] 証明からわかるように，擬 Riemann 多様体に対しても同じことが成り立つ．このことは，解答 2.35 で用いる．

と定めると，$\{\widetilde{\rho}_{i,j}\}_{i\in I, 1\le j\le k}$ は $\{\widetilde{U}_{i,j}\}_{i\in I, 1\le j\le k}$ に従属する $\widetilde{M}$ 上の滑らかな 1 の分割である．よって，体積について

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\widetilde{M}) &= \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{k}\int_{\widetilde{U}_{i,j}} \widetilde{\rho}_{i,j}\,dV \\ &= k\sum_{i\in I}\int_{U_i}\rho_i\,dV \\ &= k\mathrm{Vol}(M)\end{aligned}$$

が成り立つ．

解答 2.15

解答 2.16

解答 2.17

解答 2.18

解答 2.19　$(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の正の向きの正規直交枠だから，解答 2.18 (a) より，n 次の置換 σ と $0\le k\le n$ に対して

$$*(dx^{\sigma(1)}\wedge \dots dx^{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\,dx^{\sigma(k+1)}\wedge\cdots\wedge dx^{\sigma(n)} \tag{$*$}$$

である．

(a)　($*$) より，

$$*(dx^i) = (-1)^{i-1}\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

である．

(b)　$i=j$ のときは，明らかに $*(dx^i\wedge dx^j)=0$ である．$i\ne j$ のときは，($*$) より，

$$\begin{aligned}
*(dx^1\wedge dx^2) &= dx^3\wedge dx^4, & *(dx^2\wedge dx^1) &= -dx^3\wedge dx^4,\\
*(dx^1\wedge dx^3) &= -dx^2\wedge dx^4, & *(dx^3\wedge dx^1) &= dx^2\wedge dx^4,\\
*(dx^1\wedge dx^4) &= dx^2\wedge dx^3, & *(dx^4\wedge dx^1) &= -dx^2\wedge dx^3,\\
*(dx^2\wedge dx^3) &= dx^1\wedge dx^4, & *(dx^3\wedge dx^2) &= -dx^1\wedge dx^4,\\
*(dx^2\wedge dx^4) &= -dx^1\wedge dx^3, & *(dx^4\wedge dx^2) &= dx^1\wedge dx^3,\\
*(dx^3\wedge dx^4) &= dx^1\wedge dx^2, & *(dx^4\wedge dx^3) &= -dx^1\wedge dx^2
\end{aligned}$$

である．

解答 2.20　(a)　ω を M 上の 2-形式とする．問題 2.18 (c) より $**\omega = (-1)^{2\cdot(4-2)}\omega = \omega$ だから，$\alpha = (\omega + *\omega)/2$, $\beta = (\omega - *\omega)/2$ と置けば，α は自己双対（self-dual），β は反自己双対（anti-self-dual）であり，$\omega = \alpha+\beta$ が成り立つ．一方で，ω が自己双対形式 α' と反自己双対形式 β' との和に等しいとすると，

$$\omega = \alpha' + \beta', \qquad *\omega = \alpha' - \beta'$$

だから

$$\alpha' = \frac{\omega + *\omega}{2}, \qquad \beta' = \frac{\omega - *\omega}{2}$$

である．よって，ω は自己双対形式と反自己双対形式との和として一意に表せる．[*2]

(b)　解答 2.19 (b) より，$\mathbb{R}^4$ 上の 2-形式

$$\omega = f_{12}\,dx^1 \wedge dx^2 + f_{13}\,dx^1 \wedge dx^3 + f_{14}\,dx^1 \wedge dx^4 + f_{23}\,dx^2 \wedge dx^3 + f_{24}\,dx^2 \wedge dx^4 + f_{34}\,dx^3 \wedge dx^4$$

に対して

$$\begin{aligned}
*\omega &= f_{12}\,dx^3 \wedge dx^4 - f_{13}\,dx^2 \wedge dx^4 + f_{14}\,dx^2 \wedge dx^3 + f_{23}\,dx^1 \wedge dx^4 - f_{24}\,dx^1 \wedge dx^3 + f_{34}\,dx^1 \wedge dx^2 \\
&= f_{34}\,dx^1 \wedge dx^2 - f_{24}\,dx^1 \wedge dx^3 + f_{23}\,dx^1 \wedge dx^4 + f_{14}\,dx^2 \wedge dx^3 - f_{13}\,dx^2 \wedge dx^4 + f_{12}\,dx^3 \wedge dx^4
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\omega\text{ が自己双対} &\iff f_{12} = f_{34}\text{ かつ }f_{13} = -f_{24}\text{ かつ }f_{14} = f_{23}, \\
\omega\text{ が反自己双対} &\iff f_{12} = -f_{34}\text{ かつ }f_{13} = f_{24}\text{ かつ }f_{14} = -f_{23}
\end{aligned}$$

である．よって，$\mathbb{R}^4$ 上の自己双対形式は

$$\omega = f(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) + g(dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4) + h(dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3)$$

と書ける ω の全体であり，反自己双対形式は

$$\omega = f(dx^1 \wedge dx^2 - dx^3 \wedge dx^4) + g(dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4) + h(dx^1 \wedge dx^4 - dx^2 \wedge dx^3)$$

と書ける ω の全体である．

解答 2.21　$n = \dim M$ と置く．

div に関する式を示す．$n = 0$ ならば明らかだから，$n \geq 1$ とする．U には $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ を正の向きとする向きを入れ，この向きに関する U の体積形式を dV と書く．すると，

$$dV\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \sqrt{\det g}$$

である．また，$X = \sum_{i=1}^n X^i(\partial/\partial x^i) \in \mathfrak{X}(U)$（$X^i \in C^\infty(U)$）に対して，

$$\begin{aligned}
d(X \lrcorner\, dV)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}\right) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^i}\left((X \lrcorner\, dV)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(dV\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{\det g})
\end{aligned}$$

である[*3]．これら 2 式を比較して，

$$d(X \lrcorner\, dV) = \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{\det g})\right) dV$$

[*2] 証明からわかるように，一般に，向きづけられた $4k$ 次元 Riemann 多様体上の $2k$-形式について同じことがいえる．

[*3] 上付きハット（$\widehat{\ }$）は除外を表す．

を得る．よって，div の定義より，

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{\det g})$$

である．

△ に関する式を示す．$u \in C^\infty(U)$ に対して

$$\operatorname{grad} u = (du)^\sharp = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^j}\, dx^j \right)^\sharp = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

だから，(1) より

$$\triangle u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g}\, \frac{\partial u}{\partial x^j} \right)$$

である．

解答 2.22

解答 2.23　(a)　$u,\, v \in C^\infty(M)$ とする．問題 2.22 (b) と発散定理（問題 2.22 (a)）より，

$$\begin{aligned}
\int_M u \triangle v\, dV &= \int_M u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v)\, dV \\
&= \int_M \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)\, dV - \int_M \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle\, dV \\
&= \int_{\partial M} \langle u \operatorname{grad} v, N \rangle\, dV - \int_M \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle\, dV \\
&= \int_{\partial M} u N v\, dV - \int_M \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle\, dV
\end{aligned}$$

である．また，上式から上式で u と v を入れ替えたものを辺々引くと，

$$\int_M (u \triangle v - v \triangle u)\, dV = \int_{\partial M} (u N v - v N u)\, dV$$

となる．

(b)　M を境界をもちうるコンパクト Riemann 多様体とする．調和関数 $w \in C^\infty(M)$ が $w|_{\partial M} = 0$ を満たすとすると，(a) より

$$\int_M |\operatorname{grad} w|^2\, dV = 0$$

だから $\operatorname{grad} w = 0$ であり，したがって w は局所定値である．

M が連結で $\partial M \neq \emptyset$ であるとする．調和関数 $u,\, v \in C^\infty(M)$ が ∂M 上で一致するとすると，$u - v$ は調和で $(u - v)|_{\partial M} = 0$ を満たすから，前段の結果と M の連結性より $u - v$ は定値である．さらに，$\partial M \neq \emptyset$ 上で $u - v = 0$ だから，$u - v = 0$ である．

(c)　M が連結で $\partial M = \emptyset$ であるとする．(b) の第一段の結果より，M 上の調和関数は定値関数のみである．また，任意の $u \in C^\infty(M)$ に対して，(a) より

$$\int_M \triangle u\, dV = -\int_M \langle \operatorname{grad} 1, \operatorname{grad} u \rangle\, dV = 0$$

である．

解答 2.24　(a)　$u\colon M \to \mathbb{R}$ が固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対応する（恒等的には 0 でない滑らかな）固有関数であるとすると，Green の恒等式（問題 2.23 (a)）より

$$-\lambda \int_M |u|^2\, dV = \int_M u \triangle u\, dV = -\int_M |\operatorname{grad} u|^2\, dV \leq 0$$

だから，$\lambda \geq 0$ である．また，M が空でなければ[*4]，M は明らかに定数関数 1 を固有関数として 0 を固有値にもつ．

(b)　u, $v\colon M \to \mathbb{R}$ がそれぞれ異なる固有値 λ, $\mu \geq 0$ に対応する（恒等的には 0 でない滑らかな）固有関数であるとすると，Green の恒等式（問題 2.23 (a)）より

$$(-\lambda + \mu) \int_M uv\, dV = \int_M (u \triangle v - v \triangle u)\, dV = 0$$

だから，$\int_M uv\, dV = 0$ である．

解答 2.25　(b)　$\lambda \in \mathbb{R}$ が M に対する Neumann 固有値であるとして，恒等的には 0 でない滑らかな関数 $u\colon M \to \mathbb{R}$ であって $-\triangle u = \lambda u$ かつ $Nu|_{\partial M} = 0$ を満たすものをとる．すると，Green の恒等式（問題 2.23 (a)）より

$$-\lambda \int_M |u|^2\, dV = \int_M u \triangle u\, dV = -\int_M |\operatorname{grad} u|^2\, dV \leq 0$$

だから，$\lambda \geq 0$ である．また，定数関数 1 は明らかに上の条件を満たすから（$\partial M \neq \emptyset$ が仮定されていることに注意する），0 は M に対する Neumann 固有値である．

(a)　Dirichlet 固有値は Neumann 固有値でもあるから，(b) より，すべての Dirichlet 固有値は 0 以上である．また，問題 2.23 (b) より，$-\triangle u = 0$ かつ $u|_{\partial M} = 0$ を満たす滑らかな関数 $u\colon M \to \mathbb{R}$ は定数関数 0 のみだから，0 は M に対する Dirichlet 固有値ではない．

解答 2.26　M を境界をもちうるコンパクト Riemann 多様体とする[*5]．∂M 上で同じ値をとるものの中で $u \in C^\infty(M)$ が $\int_M |\operatorname{grad} u|^2\, dV$ が最小にするための必要十分条件は，∂M 上で消える任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$E_f(\epsilon) = \int_M |\operatorname{grad}(u + \epsilon f)|^2\, dV \qquad (\epsilon \in \mathbb{R})$$

が $\epsilon = 0$ で最小値をとることである．ここで，f が ∂M 上で消えることと問題 2.23 (a) より

$$\begin{aligned} E_f(\epsilon) &= \int_M |\operatorname{grad}(u + \epsilon f)|^2\, dV \\ &= \int_M |\operatorname{grad} u|^2\, dV + 2\epsilon \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} u \rangle\, dV + \epsilon^2 \int_M |\operatorname{grad} f|^2\, dV \\ &= \int_M |\operatorname{grad} u|^2\, dV - 2\epsilon \int_M f \triangle u\, dV + \epsilon^2 \int_M |\operatorname{grad} f|^2\, dV \end{aligned}$$

であり，$\int_M |\operatorname{grad} f|^2\, dV \geq 0$ だから，$E_f(\epsilon)$ が $\epsilon = 0$ で最小値をとるための必要十分条件は

$$\int_M f \triangle u\, dV = 0 \tag{$*$}$$

[*4] 「M が空でない」という条件は，本には書かれていないが，0 が M の固有値であるためには明らかに必要である．

[*5] 本では M の境界は空でないとしているが，以下の証明からわかるように，この条件は不要である．ただし，M の境界が空である場合，M 上の調和関数は局所定値関数のみであり（解答 2.23 (c) の証明からわかる），これを認めれば問題の主張は自明である．

である．u が調和ならば，($*$) は明らかに成り立つ．一方で，u が調和でないとすると，$\triangle u(p) \neq 0$ となる $p \in M \setminus \partial M$ がとれ，これに対して ∂M 上で消える $\phi \in C^\infty(M)$ を $\phi \geq 0$ かつ $\phi(p) > 0$ となるようにとれる．これを用いて $f = \phi \triangle u$ と置けば，f は ∂M 上で消え，($*$) は成り立たない．以上より，∂M 上で同じ値をとるものの中で $u \in C^\infty(M)$ が $\int_M |\mathrm{grad}\, u|^2 \, dV$ が最小にするための必要十分条件は，u が調和であることである．

解答 2.27

解答 2.28

解答 2.29　(a)　$\omega \in \Omega^k(M)$（$0 \leq k \leq n$）に対して，$d \circ d = 0$ と問題 2.18 (c) より

$$
\begin{aligned}
d^* d^* \omega &= (-1)^{nk+1}(-1)^{n(k+1)+1} {*d{*}{*}d{*}\omega} \\
&= (-1)^{nk+1}(-1)^{n(k+1)+1}(-1)^{(n-k+1)(k-1)} {*dd{*}\omega} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である．よって，$d^* \circ d^* = 0$ である．

(b)　$(-,-)$ が対称双線型形式であることは明らかである．また，任意の $\omega \in \Omega^k(M) \setminus \{0\}$ に対して，M 上で $\langle \omega, \omega \rangle > 0$ だから，

$$
(\omega, \omega) = \int_M \langle \omega, \omega \rangle \, dV > 0
$$

である（$M = \emptyset$ の場合，$\Omega^k(M) = 0$ だから，この主張は自明に成立する）．よって，$(-,-)$ は $\Omega^k(M)$ 上の内積である．

(c)　$\omega \in \Omega^k(M)$，$\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ とする．Hodge スター作用素の定義と性質（問題 2.18 (a), (c)）より，

$$
\begin{aligned}
(\eta, d^*\omega) &= \int_M \langle \eta, d^*\omega \rangle \, dV \\
&= (-1)^{n(k+1)+1} \int_M \langle \eta, {*d{*}\omega} \rangle \, dV \\
&= (-1)^{n(k+1)+1} \int_M \eta \wedge {*}{*}d{*}\omega \\
&= (-1)^{n(k+1)+1}(-1)^{(n-k+1)(k-1)} \int_M \eta \wedge d{*}\omega \\
&= (-1)^k \int_M \eta \wedge d{*}\omega
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
(d\eta, \omega) &= \int_M \langle d\eta, \omega \rangle \, dV \\
&= \int_M d\eta \wedge {*}\omega
\end{aligned}
$$

である．ここで，

$$
d(\eta \wedge {*}\omega) = d\eta \wedge {*}\omega + (-1)^{k-1} \eta \wedge d{*}\omega
$$

だから，Stokes の定理より

$$\begin{aligned}(d\eta,\omega)-(\eta,d^*\omega)&=\int_M(d\eta\wedge *\omega+(-1)^{k-1}\eta\wedge d{*\omega})\\&=\int_M d(\eta\wedge *\omega)\\&=0\end{aligned}$$

である．すなわち，$(d^*\omega,\eta)=(\omega,d\eta)$ が成り立つ．

解答 2.30　M の連結成分への分解を $M=\coprod_{i\in I}M_i$ とし，各 $i\in I$ に対して M_i の Riemann 計量が定める距離を d_i と書く．各 $i\in I$ に対して点 $p_i\in M$ を固定する．また，各 $i,\ j\in I$ に対して $c_{ij}>0$ を，次の 3 条件が満たされるようにとる[*6]．

(i) 任意の $i,\ j\in I$ に対して $c_{ij}=c_{ji}$ である．
(ii) 任意の $i,\ j,\ k\in I$ に対して $c_{ik}\le c_{ij}+c_{jk}$ である．
(iii) 任意の $i\in I$ に対して $c_i=\inf_{j\in I}c_{ij}>0$ である．

このとき，関数 $d\colon M\times M\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ を

$$d(x,y)=\begin{cases}d_i(x,y) & (x,\ y\in M_i)\\ d_i(x,p_i)+c_{ij}+d_j(p_j,y) & (x\in M_i,\ \ y\in M_j,\ \ i\neq j)\end{cases}$$

と定めると，d が条件を満たす距離であることを示す．各 $i\in I$ に対して $d|_{M_i\times M_i}=d_i$ であることは明らかだから，あとは d が距離であることと，d が定める位相が M のもとの位相に一致することをいえばよい．

d が距離であることを示す．非退化性と対称性は明らかである（対称性については (i) が必要である）．d が三角不等式

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)\qquad(x,\ y,\ z\in M)\tag{$*$}$$

を満たすことを示す．$x,\ y,\ z$ が属する連結成分をそれぞれ $M_i,\ M_j,\ M_k$ とし，5 つに場合分けする．

- $i=j=k$ のとき，$(*)$ は d_i に対する三角不等式から従う．
- $i=j\neq k$ のとき，d_i に対する三角不等式より

  $$\begin{aligned}d(x,z)&=d_i(x,p_i)+c_{ij}+d_k(p_k,z)\\&\le d_i(x,y)+d_i(y,p_i)+c_{ij}+d_k(p_k,z)\\&=d(x,y)+d(y,z)\end{aligned}$$

  である．
- $i\neq j=k$ のときも，$i=j\neq k$ のときと同様に $(*)$ が成り立つことがわかる．
- $i=k\neq j$ のとき，d_i に対する三角不等式より

  $$\begin{aligned}d(x,z)&=d_i(x,z)\\&\le d_i(x,p_i)+d_i(p_i,z)\\&\le d_i(x,p_i)+c_{ij}+d_j(p_j,y)+d_j(y,p_j)+c_{ji}+d_i(p_i,z)\\&=d(x,y)+d(y,z)\end{aligned}$$

[*6] 問題 2.30 を解くだけならば $c_{ij}=1$ と固定してもよいが，後に問題 6.9 で必要になるから，一般の形で主張しておく．

である．

- i, j, k がすべて異なるとき，(ii) より

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d_i(x,p_i) + c_{ik} + d_k(p_k,z) \\ &\leq d_i(x,p_i) + c_{ij} + d(p_j,y) + d(y,p_k) + c_{jk} + d_k(p_k,z) \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

である．

よって，d は三角不等式 ($*$) を満たす．

$p \in M_i$ とすると，任意の $q \in M \setminus M_i$ に対して $d(p,q) \geq c_{ij} = c_i$ だから，p を中心とする半径 c_{ij} 未満の d に関する球は，同じ中心・半径の d_i に関する球に一致する．すなわち，d が定める位相と d_i が定める位相とで，p の近傍基は同じものがとれる．よって，d が定める位相は M のもとの位相に一致する．

解答 2.31　$\gamma\colon I \to M$（I は有界閉区間）が x から y への許容曲線ならば，$\phi \circ \gamma\colon I \to \widetilde{M}$ は $\phi(x)$ から $\phi(y)$ への許容曲線であり，

$$L_{\widetilde{g}}(\phi \circ \gamma) = \int_I |(\phi \circ \gamma)'(t))|\,dt = \int_I |\gamma'(t)|\,dt = L_g(\gamma)$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{g}}(\phi(x),\phi(y)) &= \inf\{L_{\widetilde{g}}(\widetilde{\gamma}) \mid \widetilde{\gamma} \text{ は } \phi(x) \text{ から } \phi(y) \text{ への許容曲線}\} \\ &\leq \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \text{ は } x \text{ から } y \text{ への許容曲線}\} \\ &= d_g(x,y) \end{aligned}$$

である．

$\mathbb{R}$ の標準的な Riemann 計量を g と書き，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に商写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が Riemann 被覆写像になるような Riemann 計量 $\widetilde{g}$ を入れる（命題 2.32）．このとき，ϕ は局所等長同型だが，

$$d_{\widetilde{g}}(\phi(0),\phi(1)) = 0 < 1 = d_g(0,1)$$

である．

解答 2.32

解答 2.33

解答 2.34

解答 2.35　いずれの場合も $M = f^{-1}(\{c\})$ 上で $\operatorname{grad} f \neq 0$ だから，c は f の正則値である．したがって，命題 2.37（証明は問題 2.9）と脚注 $*1$ より，M は $\widetilde{M}$ における埋め込まれた滑らかな超平面であり，$\operatorname{grad} f$ は M に対して直交する．

M 上で $\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle > 0$ であるとして，点 $p \in M$ と 0 でない法ベクトル $\nu \in N_pM$ を任意にとる．$(\operatorname{grad} f)|_p$ も 0 でない法ベクトルだから，$\nu = a(\operatorname{grad} f)|_p$（$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$）と書け，

$$\langle \nu, \nu\rangle = a^2 \langle (\operatorname{grad} f)|_p, (\operatorname{grad} f)|_p\rangle > 0$$

となる．よって，命題 2.70 より，M は $\widetilde{M}$ の符号数 $(r-1,s)$ の埋め込まれた部分擬 Riemann 多様体である．同様に，M 上で $\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle < 0$ ならば，M は $\widetilde{M}$ の符号数 $(r, s-1)$ の埋め込まれた部分擬 Riemann 多様体である．これで，主張が示された．

3 Model Riemannian Manifolds

解答 3.1 $\mathrm{E}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用

$$(b, A) \cdot x = b + Ax$$

が滑らかかつ等長であることは明らかである．

上の作用から誘導される $\mathrm{E}(n)$ の正規直交枠束 $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ への作用が推移的であることを示す．任意の点 $p \in \mathbb{R}^n$ と $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に対して，

$$b = p, \qquad A = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n)$$

と置くと，(b, A) の作用によって

$$\left(0, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_0, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_0\right) \mapsto (p, e_1, \dots, e_n)$$

となる．よって，$\mathrm{E}(n)$ は $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ に推移的に作用する．

解答 3.2 $\mathrm{O}(n+1)$ の $\mathbb{S}^n$ への自然な等長作用は商写像 $q\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ と可換だから，これは $\mathrm{O}(n+1)$ の $\mathbb{RP}^n$ への等長作用を誘導する．$\mathrm{O}(n+1)$ の正規直交枠束 $\mathrm{O}(\mathbb{S}^n)$ への作用は推移的だから（命題 3.2），任意の $(x, v_1, \dots, v_n)$, $(y, w_1, \dots, w_n) \in \mathrm{O}(\mathbb{S}^n)$ に対してある $A \in \mathrm{O}(n+1)$ が存在し，A の作用は $(x, v_1, \dots, v_n)$ を $(y, w_1, \dots, w_n)$ に移す．このとき，$\mathbb{S}^n$ の正規直交枠束では，A の作用は $(q(x), dq_x(v_1), \dots, dq_x(v_n))$ を $(q(y), dq_y(w_1), \dots, dq_y(w_n))$ に移す．q は全射であり，各点 $x \in \mathbb{S}^n$ において微分 $dq_x\colon T_x\mathbb{S}^n \to T_{q(x)}\mathbb{RP}^n$ は等長線型同型だから，$\mathrm{O}(n+1)$ の $\mathrm{O}(\mathbb{RP}^n)$ への作用も推移的である．よって，$\mathbb{RP}^n$ は枠等質である．

解答 3.3 $n = \dim M$ と置く．

(a) M が等質かつ 1 点 $p \in M$ において等方的であるとする．点 $q \in M$ と 2 つの単位接ベクトル v, $w \in T_qM$ を任意にとる．M は等質だから，$\phi(q) = p$ を満たす $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ が存在する．この ϕ について，$d\phi|_q(v)$, $d\phi|_q(w) \in T_pM$ は単位接ベクトルである．M は p において等方的だから，$d\psi_p(d\phi|_q(v)) = d\phi|_q(w)$ を満たす $\psi \in \mathrm{Iso}_p(M)$ が存在する．この ϕ, ψ について，$\phi^{-1} \circ \psi \circ \phi \in \mathrm{Iso}_q(M)$ かつ $d(\phi^{-1} \circ \psi \circ \phi)_q(v) = w$ である．よって，M は等方的である．

(b) M が枠等質であるとする．任意の 2 点 p, $q \in M$ に対して，T_pM と T_qM の正規直交基底をそれぞれ 1 つずつ固定すると，ある $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ が存在して，ϕ の正規直交枠束 $\mathrm{O}(M)$ への作用は固定された T_pM の正規直交基底を固定された T_qM の正規直交基底に移す．このとき，特に $\phi(p) = q$ である．よって，M は等質である．また，任意の点 $p \in M$ と 2 つの単位接ベクトル v, $w \in T_pM$ に対して，$v_1 = v$ を満たす T_pM の正規直交基底 $(v_1, \dots, v_n)$ と $w_1 = w$ を満たす T_pM の正規直交基底 $(w_1, \dots, w_n)$ をとると，ある $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ が存在して，ϕ の $\mathrm{O}(M)$ への作用は $(v_1, \dots, v_n)$ を $(w_1, \dots, w_n)$ に移す．このとき，特に $d\phi|_p(v) = w$ である．よって，M は等方的である．

解答 3.4 $\mathbb{B}^n(R)$ 上の標準的な座標関数を $u = (u^1, \dots, u^n)$ と書き，$\mathbb{U}^n(R)$ 上の標準的な座標関数を $(x', y) = (x^1, \dots, x^{n-1}, y)$ と書く．また，$x^n = y + R$ と置き，$x = (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n)$ と書く．$\mathbb{B}^n(R)$ の Riemann 計量

$$\breve{g}_R^3 = \frac{4R^4}{(R^2 - |u|^2)^2} \sum_{j=1}^n (du^j)^{\otimes 2}$$

と $\mathbb{U}^n(R)$ の Riemann 計量

$$\breve{g}^4_R = \frac{R^2}{y^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(dx^j)^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}\right) = \frac{R^2}{(x^n-R)^2}\sum_{j=1}^{n-1}(dx^j)^{\otimes 2}$$

とが，

$$\begin{aligned}\kappa(x,y) &= \left(2R^2\frac{x'}{|x'|^2+(y+R)^2}, R\frac{|x'|^2+y^2-R^2}{|x'|^2+(y+R)^2}\right)\\ &= \left(2R^2\frac{x'}{|x|^2}, R-2R^2\frac{x^n}{|x|^2}\right)\end{aligned}$$

で定まる一般化 Cayley 変換 $\kappa\colon \mathbb{U}^n(R)\to\mathbb{B}^n(R)$ によって対応すること，すなわち

$$\kappa^*\breve{g}^3_R = \breve{g}^4_R \tag{$*$}$$

を示したい．

まず，$\mathbb{B}^n(R)$ 上の 1-形式 du^j（$1\le j\le n$）の κ による引き戻しを計算する．$1\le j\le n-1$ に対しては

$$\kappa^*(du^j) = d(u^j\circ\kappa) = d\!\left(2R^2\frac{x^j}{|x|^2}\right) = \frac{2R^2}{|x|^2}\left(dx^j - \frac{2x^j}{|x|^2}\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)$$

であり，$j=n$ に対しては

$$\kappa^*(du^n) = d(u^n\circ\kappa) = d\!\left(R-2R^2\frac{x^n}{|x|^2}\right) = -\frac{2R^2}{|x|^2}\left(dx^n - \frac{2x^n}{|x|^2}\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)$$

である．いずれにせよ，

$$\kappa^*((du^j)^{\otimes 2}) = (\kappa^*(du^j))^{\otimes 2} = \frac{4R^4}{|x|^4}\left(dx^j - \frac{2x^j}{|x|^2}\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2} \tag{$**$}$$

が成り立つ．次に，$\mathbb{B}^n(R)$ 上の関数 $4R^4/(R^2-|u|^2)^2$ の κ による引き戻しを計算すると，

$$\begin{aligned}\kappa^*\!\left(\frac{4R^4}{(R^2-|u|^2)^2}\right) &= \frac{4R^4}{(R^2-|\kappa|^2)^2}\\ &= \frac{4R^4}{(R^2-(2R^2x'/|x|^2)^2-(R-2R^2x^n/|x|^2)^2)^2}\\ &= \frac{4}{(1-4R^2|x'|^2/|x|^4-(1-2Rx^n/|x|^2)^2)^2}\\ &= \frac{4|x|^8}{(|x|^4-4R^2|x'|^2-(|x|^2-2Rx^n)^2)^2}\\ &= \frac{4|x|^8}{(|x|^4-4R^2|x'|^2-(|x|^4-4R|x|^2x^n+4R^2(x^n)^2))^2}\\ &= \frac{4|x|^8}{(-4R^2|x|^2+4R|x|^2x^n)^2}\\ &= \frac{|x|^4}{4R^2(x^n-R)^2}\end{aligned} \tag{$***$}$$

である．以上 (**), (***) より，$\mathbb{B}^n(R)$ の Riemann 計量 $\breve{g}_R^3$ の κ による引き戻しは,

$$
\begin{aligned}
&\kappa^*\breve{g}_R^3\\
&=\kappa^*\left(\frac{4R^4}{(R^2-|u|^2)^2}\sum_{j=1}^n (du^j)^{\otimes 2}\right)\\
&=\kappa^*\left(\frac{4R^4}{(R^2-|u|^2)^2}\right)\sum_{j=1}^n \kappa^*((du^j)^{\otimes 2})\\
&=\frac{R^2}{(x^n-R)^2}\sum_{j=1}^n\left(dx^j-\frac{2x^j}{|x|^2}\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2}\\
&=\frac{R^2}{(x^n-R)^2}\sum_{j=1}^n\left((dx^j)^{\otimes 2}-\frac{2x^j}{|x|^2}\sum_{i=1}^n x^i\,dx^j\otimes dx^i-\frac{2x^j}{|x|^2}\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\otimes dx^j+\frac{4(x^j)^2}{|x|^4}\left(\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2}\right)\\
&=\frac{R^2}{(x^n-R)^2}\left(\sum_{j=1}^n (dx^j)^{\otimes 2}-\frac{2}{|x|^2}\sum_{i,j=1}^n x^ix^j(dx^j\otimes dx^i+dx^i\otimes dx^j)+\frac{4}{|x|^2}\left(\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2}\right)\\
&=\frac{R^2}{(x^n-R)^2}\left(\sum_{j=1}^n (dx^j)^{\otimes 2}-\frac{4}{|x|^2}\sum_{i,j=1}^n x^ix^jdx^i\otimes dx^j+\frac{4}{|x|^2}\left(\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2}\right)\\
&=\frac{R^2}{(x^n-R)^2}\left(\sum_{j=1}^n (dx^j)^{\otimes 2}-\frac{4}{|x|^2}\left(\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2}+\frac{4}{|x|^2}\left(\sum_{i=1}^n x^i\,dx^i\right)^{\otimes 2}\right)\\
&=\frac{R^2}{(x^n-R)^2}\left(\sum_{j=1}^n (dx^j)^{\otimes 2}\right)\\
&=\breve{g}_R^4
\end{aligned}
$$

と計算できる．これで，(*) が示された.

解答 3.5　(a)　$\mathbb{R}^{n+1}$ の Riemann 計量を $\overline{g}$ と書く．$(\mathbb{S}^n(R),\mathring{g}_R)$ は $(\mathbb{R}^{n+1},\overline{g})$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体である．また，$(\mathbb{S}^n,\mathring{g})$ は $(\mathbb{R}^{n+1},\overline{g})$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体だから，$(\mathbb{S}^n,R^2\mathring{g})$ は $(\mathbb{R}^{n+1},R^2\overline{g})$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体である．写像 $x\mapsto Rx$ は Riemann 多様体 $(\mathbb{R}^{n+1},R^2\overline{g})$ から $(\mathbb{R}^{n+1},\overline{g})$ への等長同型を与え，これによって $\mathbb{S}^n$ は $\mathbb{S}^n(R)$ に移されるから，$(\mathbb{S}^n,R^2\mathring{g})$ と $(\mathbb{S}^n(R),\mathring{g}_R)$ は等長同型である.

(b)　$\mathbb{R}^{n,1}$ の擬 Riemann 計量を $\overline{q}$ と書く．$(\mathbb{H}^n(R),\breve{g}_R)$ は $(\mathbb{R}^{n,1},\overline{q})$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体である．また，$(\mathbb{H}^n,\breve{g})$ は $(\mathbb{R}^{n,1},\overline{q})$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体だから，$(\mathbb{H}^n,R^2\breve{g})$ は $(\mathbb{R}^{n,1},R^2\breve{g})$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体である．写像 $x\mapsto Rx$ は擬 Riemann 多様体 $(\mathbb{R}^{n,1},R^2\overline{q})$ から $(\mathbb{R}^{n,1},\overline{q})$ への等長同型を与え，これによって $\mathbb{H}^n$ は $\mathbb{H}^n(R)$ に移されるから，$(\mathbb{H}^n,R^2\breve{g})$ と $(\mathbb{H}^n(R),\breve{g}_R)$ は等長同型である.

(c)　写像 $x\mapsto Rx$ が Riemann 多様体 $(\mathbb{R}^n,\overline{g}_R)=(\mathbb{R}^n,R^2\overline{g})$ から $(\mathbb{R}^n,\overline{g})$ への等長同型を与えるから.

解答 3.6

解答 3.7

解答 3.8

解答 3.9

解答 3.10　(a)　$\phi = \left(\begin{smallmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(2)$（$w,\, z \in \mathbb{C}$，$|w|^2 + |z|^2 = 1$）に対して，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\phi)X &= \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w} & -z \\ \overline{z} & w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i \operatorname{Im} w\overline{z} & w^2 + z^2 \\ -\overline{w}^2 - \overline{z}^2 & -2i \operatorname{Im} w\overline{z} \end{pmatrix} \\
&= (\operatorname{Re}(w^2 + z^2))X + (\operatorname{Im}(w^2 + z^2))Y + (2 \operatorname{Im} w\overline{z})Z, \\
\mathrm{Ad}(\phi)Y &= \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w} & -z \\ \overline{z} & w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i \operatorname{Re} w\overline{z} & i(w^2 - z^2) \\ i(\overline{w}^2 - \overline{z}^2) & -2i \operatorname{Re} w\overline{z} \end{pmatrix} \\
&= (-\operatorname{Im}(w^2 - z^2))X + (\operatorname{Re}(w^2 - z^2))Y + (2 \operatorname{Re} w\overline{z})Z, \\
\mathrm{Ad}(\phi)Z &= \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w} & -z \\ \overline{z} & w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i(|w|^2 - |z|^2) & -2iwz \\ -2i\overline{wz} & -i(|w|^2 - |z^2|) \end{pmatrix} \\
&= (2 \operatorname{Im} wz)X + (-2 \operatorname{Re} zw)Y + (|w|^2 - |z|^2)Z
\end{aligned}$$

だから，$\mathfrak{su}(2)$ の基底 (X, Y, aZ) に関する $\mathrm{Ad}(\phi)$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w^2 + z^2) & -\operatorname{Im}(w^2 - z^2) & 2a \operatorname{Im} wz \\ \operatorname{Im}(w^2 + z^2) & \operatorname{Re}(w^2 - z^2) & -2a \operatorname{Re} wz \\ 2 \operatorname{Im} w\overline{z}/a & 2 \operatorname{Re} w\overline{z}/a & |w|^2 - |z|^2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

である．命題 3.12 より，SU(2) 上の左不変 Riemann 計量 g_a が両側不変であるための必要十分条件は，任意の $w,\, z \in \mathbb{C}$，$|w|^2 + |z|^2 = 1$ に対して ($*$) が直交行列であることである．$a = 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Re}(w^2 + z^2))^2 + (\operatorname{Im}(w^2 + z^2))^2 + (2 \operatorname{Im} w\overline{z})^2 &= |w^2 + z^2|^2 - (w\overline{z} - \overline{w}z)^2 \\
&= (|w|^2 + |z|^2)^2 \\
&= 1, \\
(-\operatorname{Im}(w^2 - z^2))^2 + (\operatorname{Re}(w^2 - z^2))^2 + (2 \operatorname{Re} w\overline{z})^2 &= |w^2 - z^2|^2 + (w\overline{z} + \overline{w}z)^2 \\
&= (|w|^2 + |z|^2)^2 \\
&= 1, \\
(2 \operatorname{Im} wz)^2 + (-2 \operatorname{Re} wz)^2 + (|w|^2 - |z|^2)^2 &= 4|wz|^2 + (|w|^2 - |z|^2)^2 \\
&= (|w|^2 + |z|^2)^2 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{$**$}$$

かつ

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(w^2+z^2)\cdot(-\operatorname{Im}(w^2-z^2))+\operatorname{Im}(w^2+z^2)\cdot\operatorname{Re}(w^2-z^2)+2\operatorname{Im}w\overline{z}\cdot 2\operatorname{Re}w\overline{z}\\
&=\operatorname{Im}((w^2+z^2)(\overline{w}^2-\overline{z}^2))+2\operatorname{Im}w^2\overline{z}^2\\
&=\operatorname{Im}(\overline{w}^2z^2-w^2\overline{z}^2)+2\operatorname{Im}w^2\overline{z}^2\\
&=0,\\
&\operatorname{Re}(w^2+z^2)\cdot 2\operatorname{Im}wz+\operatorname{Im}(w^2+z^2)\cdot(-2\operatorname{Re}wz)+2\operatorname{Im}w\overline{z}\cdot(|w|^2-|z|^2)\\
&=-2\operatorname{Im}(w^2+z^2)\overline{wz}+2\operatorname{Im}w\overline{z}\cdot(|w|^2-|z|^2)\\
&=0,\\
&-\operatorname{Im}(w^2-z^2)\cdot 2\operatorname{Im}wz+\operatorname{Re}(w^2-z^2)\cdot(-2\operatorname{Re}wz)+2\operatorname{Re}w\overline{z}\cdot(|w|^2-|z|^2)\\
&=-2\operatorname{Re}(w^2+z^2)\overline{wz}+2\operatorname{Re}w\overline{z}\cdot(|w|^2-|z|^2)\\
&=0
\end{aligned}
$$

だから，$(*)$ は直交行列である．逆に，$(*)$ が直交行列であるためには $(\operatorname{Re}(w^2+z^2))^2+(\operatorname{Im}(w^2+z^2))^2+(2\operatorname{Im}w\overline{z}/a)^2=1$ が必要だが，$(**)$ より，これは $a=1$ でなければ成り立たない．よって，g_a が両側不変であるための必要十分条件は $a=1$ である．

(b) $\mathbb{S}^3$, $\mathrm{SU}(2)$ をそれぞれ $\mathring{g}$, g_1 によって Riemann 多様体とみなす．また，$\mathbb{S}^3=\{(w,z)\in\mathbb{C}^2\mid |w|^2+|z|^2=1\}$ とみなし，$\mathbb{S}^3$ から $\mathrm{SU}(2)$ への微分同相写像 $(w,z)\mapsto\left(\begin{smallmatrix} w & z\\ -\overline{z} & \overline{w}\end{smallmatrix}\right)$ を f と書く．

f の微分によって $T_{(1,0)}\mathbb{S}^3$ の正規直交基底 $((\partial/\partial z)|_{(1,0)}, i(\partial/\partial z)|_{(1,0)}, (\partial/\partial w)|_{(1,0)})$ は $T_e\mathrm{SU}(2)$ の正規直交基底 $(X|_e, Y|_e, Z|_e)$ に移されるから（$e=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SU}(2)$ は単位元），$df|_{(1,0)}\colon T_{(1,0)}\mathbb{S}^3\to T_e\mathrm{SU}(2)$ は等長線型同型である．また，$\phi\in\mathrm{SU}(2)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&R^{\mathbb{S}^3}_\phi\colon\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3, && (w,z)\mapsto(w,z)\phi,\\
&R^{\mathrm{SU}(2)}_\phi\colon\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SU}(2), && \psi\mapsto\psi\phi
\end{aligned}
$$

はそれぞれ $\mathbb{S}^3$, $\mathrm{SU}(2)$ の自己等長同型写像であり，$f\circ R^{\mathbb{S}^3}_\phi=R^{\mathrm{SU}(2)}_\phi\circ f$ を満たす．そこで，任意の点 $(w,z)\in\mathbb{S}^3$ に対して，$\phi\in\mathrm{SU}(2)$ を $R^{\mathbb{S}^3}(1,0)=(w,z)$ となるようにとれば

$$df|_{(w,z)}=dR^{\mathrm{SU}(2)}|_\phi\circ df|_{(1,0)}\circ dR^{\mathbb{S}^3}_{\phi^{-1}}$$

だから，$df|_{(w,z)}\colon T_{(w,z)}\mathbb{S}^3\to T_{f(w,z)}\mathrm{SU}(2)$ は等長線型同型である．よって，$f\colon\mathbb{S}^3\to\mathrm{SU}(2)$ は等長同型である．

解答 3.11 n 次実行列 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ に対して

$$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(A^TB)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

だから，$\langle -,-\rangle$ は $\mathfrak{o}(n)$ 上の内積である．また，任意の $\phi\in\mathrm{O}(n)$ と A, $B\in\mathfrak{o}(n)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle\operatorname{Ad}(\phi)A,\operatorname{Ad}(\phi)B\rangle&=\operatorname{tr}((\phi A\phi^{-1})^T(\phi B\phi^{-1}))\\
&=\operatorname{tr}(\phi A^T\phi^{-1}\phi B\phi^{-1})\\
&=\operatorname{tr}(A^TB)\\
&=\langle A,B\rangle
\end{aligned}
$$

だから，この内積は Ad-不変である．よって，命題 3.12 より，この内積に対応する $\mathrm{O}(n)$ 上の左不変な Riemann 計量は両側不変である．

解答 3.12

解答 3.13

解答 3.14

解答 3.15

解答 3.16

解答 3.17　G の単位元を e と書く．$\phi \in G$ に対して，ϕ を左から掛ける写像を $L_\phi \colon G \to G$，右から掛ける写像を $R_\phi \colon G \to G$ と書く．$\tau = (\phi, \psi) \in G \times G$ の G への作用を $A_\tau = R_{\psi^{-1}} \circ L_\phi \colon G \to G$ と書く．

任意の $\phi \in G$ に対して $(\phi, e) \cdot e = \phi$ だから，$G \times G$ の G への作用は推移的である．また，$(\phi, \psi) \in G \times G$ に対して $(\phi, \psi) \cdot e = \phi\psi^{-1}$ が e に等しいための必要十分条件は $\phi = \psi$ だから，e の等方部分群は $\varDelta = \{(\phi, \phi) \mid \phi \in G\}$ である．

等方表現 $I_e \colon \varDelta \to \mathrm{GL}(T_e G)$ について

$$I_e(\phi, \phi) = (dA_{(\phi,\phi)})_e = (d(R_{\phi^{-1}} \circ L_\phi)))_e = \mathrm{Ad}(\phi)$$

だから，与えられた図式は可換である．

定理 3.14 の別証明を与える．前段の結果と補題 3.13 より，$\mathrm{Ad}(G)$ が $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ において相対コンパクトであることは，等方表現 I_e を等長にする $T_e G$ 上の内積が存在することと同値である．これがさらに両側不変 Riemann 計量の存在と同値であることをいえばよい．g が G 上の両側不変 Riemann 計量ならば，$G \times G$ の G への作用は g に関して等長だから，特に等方表現 I_e は内積 $g|_e$ に関して等長である．逆に，$T_e G$ 上の内積 g_e に関して等方表現 I_e が等長であるとする．$G \times G$ の G への作用は推移的だから，$\phi \in G$ に対して，ϕ を e に移す $\tau \in G \times G$ がとれる．この作用 A_τ による $T_e G$ 上の内積 g_e の $T_\phi G$ への引き戻しを，g_ϕ と定める．$\tau' \in G \times G$ も ϕ を e に移すとすると，$\tau\tau'^{-1}$ は e の等方部分群 $\varDelta$ に属し，仮定より $A_\tau \circ A_{\tau'}^{-1} = I_e(\tau\tau'^{-1}) \in \mathrm{GL}(T_e G)$ は内積 g_e に関して等長だから，

$$A_{\tau'}^* g_e = A_{\tau'}^* (A_\tau \circ A_{\tau'}^{-1})^* g_e = A_{\tau'}^* (A_{\tau'}^{-1})^* A_\tau^* g_e = A_\tau^* g_e$$

である．したがって，g_ϕ は τ のとり方によらずに定まる．このようにして G の各接空間上に定まった内積について，任意の $\tau \in G \times G$ と $\phi \in G$ に対して

$$A_\tau^* g_\phi = A_\tau^* A_{(\phi^{-1},e)}^* g_e = (A_{(\phi^{-1},e)} \circ A_\tau)^* g_e = A_{(\phi^{-1},e)\tau}^* g_e = g_{\tau^{-1}\cdot\phi}$$

である．よって，$\phi \in G$ に対する g_ϕ の全体は，G 上の両側不変 Riemann 計量を定める．これで，同値性が示された．

解答 3.18　$k, l \in \mathbb{Z}$ と $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について，$(x + k, (-1)^k y + l) = (x, y)$ ならば $k = l = 0$ だから，与えられた作用は自由である．また，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $k_n, l_n \in \mathbb{Z}$，$(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ とし，$\mathbb{R}^2$ 上の点列 $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$，$((x_n + k_n, (-1)^{k_n} y_n + l_n))_{n \in \mathbb{N}}$ がともに収束するとすると，十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対しては k_n, l_n は一定でなければならないから，$((k_n, l_n))_{n \in \mathbb{N}}$ も収束する．よって，命題 C.15 より，与えられた作用は固有である．

軌道空間 $\mathbb{R}^2/\Gamma$ が Klein の壺 $[0,1]^2/{\sim}$（$\sim$ は (3.19) で定めた $[0,1]^2$ 上の同値関係）に同相であることを示す．$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ を商写像とする．任意の点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$k \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq x+k \leq 1$ となるようにとれ，続けて $l \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq (-1)^k y + l \leq 1$ となるようにとれるから，$\pi([0,1]^2) = \mathbb{R}^2/\Gamma$ である．また，Γ の作用が定める $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係の $[0,1]^2$ への制限は，$\sim$ に他ならない．したがって，π の制限 $\pi|_{[0,1]^2}\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ は，Klein の壺 $[0,1]^2/{\sim}$ から $\mathbb{R}^2/\Gamma$ への連続全単射を誘導する．この連続全単射が同相であることを示す．そのためには，$\pi|_{[0,1]^2}$ が閉写像であることをいえば十分である．閉集合 $A \subseteq [0,1]^2$ に対して

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \Gamma \cdot A = \bigcup_{\phi \in \Gamma} \phi \cdot A$$

だが，$\{\phi \cdot A\}_{\phi \in \Gamma}$ は $\mathbb{R}^2$ の局所有限な閉集合族だから，その合併は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．したがって，$\pi^{-1}(\pi(A))$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であり，$\pi(A)$ は $\mathbb{R}^2/\Gamma$ の閉集合である．よって，$\pi|_{[0,1]^2}$ は閉写像である．これで，軌道空間 $\mathbb{R}^2/\Gamma$ が Klein の壺 $[0,1]^2/{\sim}$ に同相であることが示された．

Γ の $\mathbb{R}^2$ への滑らかな等長作用は自由かつ固有だから，命題 2.32 より，$\mathbb{R}^2/\Gamma$ には $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ が Riemann 被覆写像になるような Riemann 計量が入る．$\mathbb{R}^2$ は平坦だから，この Riemann 計量も平坦である．前段の結果より，Klein の壺にも同じ性質をもつ Riemann 計量が入る．

解答 3.19　$\mathbb{S}^{2n+1}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ における単位球面とみなし，$p\colon \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ を自然な写像とする．Riemann 多様体は，等質かつある 1 点において等方的ならば等方的であり（命題 3.1 (a)．証明は問題 3.3），等方的ならば対称だから，$\mathbb{CP}^n$ が等質かつある 1 点において等方的であることを示せば十分である．

$\mathrm{U}(n+1)$ の $\mathbb{S}^{2n+1}$ への自然な等長作用は p と可換だから，これは $\mathrm{U}(n+1)$ の $\mathbb{CP}^n$ への等長作用を誘導する．$\mathrm{U}(n)$ の $\mathbb{S}^{2n+1}$ への作用は推移的だから，任意の 2 点 z, $w \in \mathbb{S}^{2n+1}$ に対してある $U \in \mathrm{U}(n+1)$ が存在し，U の作用は z を w に移す．このとき，$\mathbb{CP}^n$ では，U の作用は $p(z)$ を $p(w)$ に移す．p は全射だから，$\mathrm{U}(n)$ の $\mathbb{CP}^n$ への作用も推移的である．よって，$\mathbb{CP}^n$ は等質である．

$z_0 = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ と置く．単射群準同型 $V \mapsto \left(\begin{smallmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ によって $\mathrm{U}(n)$ を $\mathrm{U}(n+1)$ の部分群とみなすと，$\mathrm{U}(n)$ の $\mathbb{S}^{2n+1}$ への作用は点 z_0 を固定し，したがって $\mathrm{U}(n)$ の $\mathbb{CP}^n$ への作用は点 $p(z_0)$ を固定する．$\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ の標準実座標を $(x^1, y^1, \dots, x^{n+1}, y^{n+1})$ と書くと，

$$T_{z_0}\mathbb{S}^{2n+1} = \bigoplus_{j=1}^{n} \left(\mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{z_0} \oplus \mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{z_0} \right) \oplus \left.\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right|_{z_0}, \qquad \operatorname{Ker} dp_{z_0} = \mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right|_{z_0}$$

だから

$$(\operatorname{Ker} dp_{z_0})^{\perp} = \bigoplus_{j=1}^{n} \left(\mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{z_0} \oplus \mathbb{R} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{z_0} \right)$$

であり，$(\operatorname{Ker} dp_{z_0})^{\perp}$ は $\mathbb{C}^n$ と同一視できる．2 つの単位接ベクトル v, $w \in (\operatorname{Ker} dp_{z_0})^{\perp} \cong \mathbb{C}^n$ に対して，$V \in \mathrm{U}(n)$ を $Vv = w$ となるようにとると，V の作用の微分は v を w に移す．このとき，$\mathbb{CP}^n$ では，V の作用の微分は $dp_{z_0}(v)$ を $dp_{z_0}(w)$ に移す．微分 $dp_{z_0}\colon T_{z_0}\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ は等長線型同型だから，$\mathbb{CP}^n$ の $p(z_0)$ における任意の 2 つの単位接ベクトルは，$\mathrm{U}(n)$ の作用の微分によって移り合う．よって，$\mathbb{CP}^n$ は $p(z_0)$ において等方的である．これで，主張が示された．

解答 3.20

解答 3.21

解答 3.22　$\mathbb{S}^{r,s}(R)$ が $\mathbb{R}^{r+1,s}$ の符号数 (r,s) の埋め込まれた部分擬 Riemann 多様体であることを示す．$\mathbb{R}^{r+1,s}$ の標準座標を $(\xi,\tau)=(\xi^1,\dots,\xi^{r+1},\tau^1,\dots,\tau^s)$ と書く．関数 $f\colon\mathbb{R}^{r+1,s}\to\mathbb{R}$ を

$$f(\xi,\tau)=|\xi|^2-|\tau|^2 \qquad ((\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{r+1,s})$$

と定めると，f は滑らかで $\mathbb{S}^{r,s}(R)=f^{-1}(\{R^2\})$ であり，

$$\operatorname{grad} f=\left(2\left(\sum_{i=1}^{r+1}\xi^i\,d\xi^i-\sum_{j=1}^{s}\eta^j\,d\eta^j\right)\right)^\sharp=2\left(\sum_{i=1}^{r+1}\xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\sum_{j=1}^{s}\eta^j\frac{\partial}{\partial\eta^j}\right)$$

より

$$\langle\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f\rangle=4\left(\sum_{i=1}^{r+1}(\xi^i)^2+\sum_{j=1}^{s}(\eta^j)^2\right)=4(|\xi|^2-|\tau|^2)$$

である．よって，$\mathbb{S}^{r,s}(R)$ 上では $\langle\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f\rangle=4R^2>0$ だから，系 2.71（証明は問題 2.35）より，$\mathbb{S}^{r,s}(R)$ は $\mathbb{R}^{r+1,s}$ の符号数 (r,s) の埋め込まれた部分擬 Riemann 多様体である．

$\mathbb{H}^{r,s}(R)$ が $\mathbb{R}^{r,s+1}$ の符号数 (r,s) の埋め込まれた部分擬 Riemann 多様体であることを示す．$\mathbb{R}^{r,s+1}$ の標準座標を $(\xi,\tau)=(\xi^1,\dots,\xi^r,\tau^1,\dots,\tau^{s+1})$ と書く．関数 $f\colon\mathbb{R}^{r,s+1}\to\mathbb{R}$ を

$$f(\xi,\tau)=|\xi|^2-|\tau|^2 \qquad ((\xi,\tau)\in\mathbb{R}^{r,s+1})$$

と定めると，f は滑らかで $\mathbb{H}^{r,s}(R)=f^{-1}(\{-R^2\})$ であり，

$$\operatorname{grad} f=\left(2\left(\sum_{i=1}^{r}\xi^i\,d\xi^i-\sum_{j=1}^{s+1}\eta^j\,d\eta^j\right)\right)^\sharp=2\left(\sum_{i=1}^{r}\xi^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}+\sum_{j=1}^{s+1}\eta^j\frac{\partial}{\partial\eta^j}\right)$$

より

$$\langle\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f\rangle=4\left(\sum_{i=1}^{r}(\xi^i)^2+\sum_{j=1}^{s+1}(\eta^j)^2\right)=4(|\xi|^2-|\tau|^2)$$

である．よって，$\mathbb{H}^{r,s}(R)$ 上では $\langle\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f\rangle=-4R^2<0$ だから，系 2.71（証明は問題 2.35）より，$\mathbb{H}^{r,s}(R)$ は $\mathbb{R}^{r,s+1}$ の符号数 (r,s) の埋め込まれた部分擬 Riemann 多様体である．

解答 3.23　準備として，次の補題を示す．

補題　(1) 任意の点 $p\in\mathbb{S}^{r,s}(R)$ において，接空間 $T_p\mathbb{S}^{r,s}(R)$ は $T_p\mathbb{R}^{r+1,s}\cong\mathbb{R}^{r+1,s}$ において $\mathbb{R}p$ の直交補空間である．

(2) 任意の点 $p\in\mathbb{H}^{r,s}(R)$ において，接空間 $T_p\mathbb{H}^{r,s}(R)$ は $T_p\mathbb{R}^{r,s+1}\cong\mathbb{R}^{r,s+1}$ において $\mathbb{R}p$ の直交補空間である．

補題の証明　解答 3.22 の関数 f を考える．解答 3.22 で計算したように，自然な線型同型による同一視の下で，$(\operatorname{grad} f)|_p=2p$ である．命題 2.37（証明は問題 2.9）と脚注 $*1$ より，$\operatorname{grad} f$ は $\mathbb{S}^{r,s}(R)$ あるいは $\mathbb{H}^{r,s}(R)$ に対して直交するから，これで主張が示された．　□

本題に入る．以下，$n=r+s$ と置き，$\mathbb{R}^{r,s}$ の標準座標を $(x^1,\dots,x^n)$，$\mathbb{R}^{r+1,s}$ や $\mathbb{R}^{r,s+1}$ の標準座標を $(x^1,\dots,x^{n+1})$ と書く．

$\mathbb{R}^{r,s}$ が枠等質であることを示す．$\mathbb{R}^n$ のアフィン変換群の部分群 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(r,s)$ は $\mathbb{R}^{r,s}$ に等長に作用するが，この作用から誘導される $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(r,s)$ の正規直交枠束 $\mathrm{O}(\mathbb{R}^{r,s})$ への作用が推移的であることを示す．任意の点 $p \in \mathbb{R}^{r,s}$ と $T_p\mathbb{R}^{r,s} \cong \mathbb{R}^{r,s}$ の標準順序の正規直交基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に対して，

$$b = p, \qquad A = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(r,s)$$

と置くと，(b, A) の作用によって

$$\left(0, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_0, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_0\right) \mapsto (p, e_1, \dots, e_n)$$

となる．よって，$\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(r,s)$ は $\mathrm{O}(\mathbb{R}^{r,s})$ に推移的に作用する．

$\mathbb{S}^{r,s}(R)$ が枠等質であることを示す．$\mathrm{O}(r+1,s)$ は $\mathbb{S}^{r,s}(R)$ に自然に作用するが，この作用から誘導される $\mathrm{O}(r+1,s)$ の正規直交枠束 $\mathrm{O}(\mathbb{S}^{r,s}(R))$ への作用が推移的であることを示す．点 $p \in \mathbb{S}^{r,s}(R)$ と $T_p\mathbb{S}^{r,s}(R)$ の標準順序の正規直交基底 $(e_1, \dots, e_n)$ を任意にとる．上の補題より，$T_p\mathbb{S}^{r,s}(R)$ は $T_p\mathbb{R}^{r+1,s} \cong \mathbb{R}^{r+1,s}$ において $\mathbb{R}p$ の直交補空間だから，$(p/R, e_1, \dots, e_n)$ は $\mathbb{R}^{r+1,s}$ の標準順序の正規直交基底である．そこで，

$$A = \begin{pmatrix} p/R & e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(r+1,s)$$

と置くと，A の作用によって

$$\left((1,0,\dots,0), \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_{(1,0,\dots,0)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right|_{(1,0,\dots,0)}\right) \mapsto (p, e_1, \dots, e_n)$$

となる．よって，$\mathrm{O}(r+1,s)$ は $\mathrm{O}(\mathbb{S}^{r,s}(R))$ に推移的に作用する．

$\mathbb{H}^{r,s}(R)$ が枠等質であることを示す．$\mathrm{O}(r,s+1)$ は $\mathbb{H}^{r,s}(R)$ に自然に作用するが，この作用から誘導される $\mathrm{O}(r,s+1)$ の正規直交枠束 $\mathrm{O}(\mathbb{H}^{r,s}(R))$ への作用が推移的であることを示す．点 $p \in \mathbb{H}^{r,s}(R)$ と $T_p\mathbb{H}^{r,s}(R)$ の標準順序の正規直交基底 $(e_1, \dots, e_n)$ を任意にとる．上の補題より，$T_p\mathbb{H}^{r,s}(R)$ は $T_p\mathbb{R}^{r,s+1} \cong \mathbb{R}^{r,s+1}$ において $\mathbb{R}p$ の直交補空間だから，$(p/R, e_1, \dots, e_n)$ は $\mathbb{R}^{r,s+1}$ の標準順序の正規直交基底である．そこで，

$$A = \begin{pmatrix} p/R & e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(r,s+1)$$

と置くと，A の作用によって

$$\left((0,\dots,0,1), \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{(0,\dots,0,1)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{(0,\dots,0,1)}\right) \mapsto (p, e_1, \dots, e_n)$$

となる．よって，$\mathrm{O}(r,s+1)$ は $\mathrm{O}(\mathbb{H}^{r,s}(R))$ に推移的に作用する．

解答 3.24 $\mathbb{H}^{r,s}(R)$ が $\mathbb{R}^r \times \mathbb{S}^s$ に微分同相であることを示す．写像 $\phi\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{r,s+1}$ を

$$\phi(x,y) = (Rx, (\sqrt{1+|x|^2})Ry) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s+1})$$

と定めると，ϕ は逆写像

$$\phi^{-1}(x', y') = \left(\frac{x'}{R}, \frac{y'}{\sqrt{R^2 + |x'|^2}}\right) \qquad ((x', y') \in \mathbb{R}^{r,s+1})$$

をもつ微分同相写像であり，$(x,y)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{s+1}$ に対して

$$\begin{aligned}\phi(x,y)\in\mathbb{H}^{r,s}(R) &\iff R^2|x|^2-(1+|x|^2)R^2|y|^2=-R^2\\ &\iff |y|^2=1\\ &\iff (x,y)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{S}^s\end{aligned}$$

である．よって，ϕ は $\mathbb{R}^r\times\mathbb{S}^s$ から $\mathbb{H}^{r,s}(R)$ への微分同相を与える．

$\mathbb{S}^{s,r}(R)$ が $\mathbb{R}^r\times\mathbb{S}^s$ に微分同相であることを示す．写像 $\psi\colon\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{s+1}\to\mathbb{R}^{s+1,r}$ を

$$\psi(x,y)=((\sqrt{1+|x|^2})Ry,Rx)\qquad((x,y)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{s+1})$$

と定めると，ψ は逆写像

$$\psi^{-1}(y',x')=\left(\frac{x'}{R},\frac{y'}{\sqrt{R^2+|x'|^2}}\right)\qquad((y',x')\in\mathbb{R}^{s+1,r})$$

をもつ微分同相写像であり，$(x,y)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{s+1}$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(x,y)\in\mathbb{S}^{s,r}(R) &\iff (1+|x|^2)R^2|y|^2-R^2|x|^2=R^2\\ &\iff |y|^2=1\\ &\iff (x,y)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{S}^s\end{aligned}$$

である．よって，ψ は $\mathbb{R}^r\times\mathbb{S}^s$ から $\mathbb{S}^{s,r}(R)$ への微分同相を与える．

解答 3.25

4 Connections

解答 4.1 (a) $\widetilde{Y}_1=\sum_{i=1}^n\widetilde{Y}_1^i\partial_i$，$\widetilde{Y}_2=\sum_{i=1}^n\widetilde{Y}_2^i\partial_i$ がともに $\mathbb{R}^n$ の開集合上の滑らかなベクトル場であって Y を拡張するものであるとする．各 i に対して，M 上では $\widetilde{Y}_1^i=\widetilde{Y}_2^i$ だから，$v\in T_pM$ より $v\widetilde{Y}_1^i=v\widetilde{Y}_2^i$ である（命題 A.28）．したがって，

$$\nabla_v^\top Y_1=\sum_{i=1}^n v\widetilde{Y}_1^i\partial_i|_p=\sum_{i=1}^n v\widetilde{Y}_2^i\partial_i|_p=\nabla_v^\top Y_2$$

である．よって，$\nabla_v^\top Y$ は Y の拡張 $\widetilde{Y}$ のとり方によらない．

(b) $\widetilde{Y}=\sum_{i=1}^n\widetilde{Y}^i\partial_i$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合上の滑らかなベクトル場であって Y を拡張するものとすると，$F_*\widetilde{Y}=\sum_{i=1}^n(\widetilde{Y}^i\circ F^{-1})F_*\partial_i$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合上の滑らかなベクトル場であって F_*Y を拡張するものである．

よって，

$$
\begin{aligned}
dF|_p(\nabla_v^\top Y) &= dF|_p\left(\sum_{i=1}^n v\widetilde{Y}^i\partial_i|_p\right) \\
&= \sum_{i=1}^n v\widetilde{Y}^i(F_*\partial_i)|_{F(p)} \\
&= \sum_{i=1}^n v(\widetilde{Y}^i\circ F^{-1}\circ F)(F_*\partial_i)|_{F(p)} \\
&= dF|_p(v)(\widetilde{Y}^i\circ F^{-1})(F_*\partial_i)|_{F(p)} \\
&= \nabla_{dF|_p(v)}^\top(F_*Y)
\end{aligned}
$$

である．

解答 4.2　(a)　一般に，$f\in C^\infty(M)$ と $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して $\mathscr{L}_{fX}Y=f\mathscr{L}_XY-(Yf)X$ である．M が空でない 1 次元以上の多様体ならば[*7]，f,X,Y を $(Yf)X\neq 0$ となるようにとれる．たとえば，点 $p\in M$ とそのまわりのチャート $(U;x^1,\dots,x^n)$ をとり（$n=\dim M$ と置いた），p の近傍で $f=x^1$ かつ $X=Y=\partial_1$ となるようにとればよい．よって，Lie 微分 $\mathscr{L}_XY$ は X に関して $C^\infty(M)$-線型でないから，これは接続ではない．

(b)　$\mathbb{R}^2$ の標準座標を (x^1,x^2) と書く．$X=\partial_1$，$Y=(1+x^2)\partial_1$ と置けば，x^1 軸に沿って $X=Y=\partial_1$ だが，$\mathscr{L}_X(\partial_2)=0$ と $\mathscr{L}_Y(\partial_2)=-(\partial_2(1+x^2))\partial_1=-\partial_1$ とは x^1 軸上で等しくない．

解答 4.3　$n=\dim M$ と置く．変換則 $\widetilde{E}_i=\sum_{j=1}^n A_i^jE_j$ と接続係数 $\varGamma_{qr}^p$ の定義より

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\widetilde{E}_i}\widetilde{E}_j &= \sum_{q=1}^n A_i^q\nabla_{E_q}\widetilde{E}_j \\
&= \sum_{q=1}^n A_i^q\nabla_{E_q}\left(\sum_{r=1}^n A_j^rE_r\right) \\
&= \sum_{q,r=1}^n A_i^qA_j^r\nabla_{E_q}E_r+\sum_{q,r=1}^n A_i^qE_q(A_j^r)E_r \\
&= \sum_{p,q,r=1}^n A_i^qA_j^r\varGamma_{qr}^pE_p+\sum_{q,r=1}^n A_i^qE_q(A_j^r)E_r \\
&= \sum_{p=1}^n\left(\sum_{q,r=1}^n A_i^qA_j^r\varGamma_{qr}^p+\sum_{q=1}^n A_i^qE_q(A_j^p)\right)E_p \\
&= \sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^n\left(\sum_{q,r=1}^n A_i^qA_j^r\varGamma_{qr}^p+\sum_{q=1}^n A_i^qE_q(A_j^p)\right)(A^{-1})_p^k\widetilde{E}_k \\
&= \sum_{k=1}^n\left(\sum_{p,q,r=1}^n (A^{-1})_p^kA_i^qA_j^r\varGamma_{qr}^p+\sum_{p,q=1}^n (A^{-1})_p^kA_i^qE_q(A_j^p)\right)\widetilde{E}_k
\end{aligned}
$$

*7 「M が空でない」という条件は，本には書かれていないが，明らかに必要である．

だから，接続係数 $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ の定義より

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \sum_{p,q,r=1}^{n} (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p + \sum_{p,q=1}^{n} (A^{-1})_p^k A_i^q E_q(A_j^p)$$

である．

解答 4.4　∇^0 は接続で $D \in \Gamma(T^{(1,2)}TM)$ を $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ から $\mathfrak{X}(M)$ への写像とみなしたものは $C^\infty(M)$-双線型だから，$f \in C^\infty(M)$ と $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}(\nabla^0 + D)_{fX} Y &= \nabla^0_{fX} Y + D(fX, Y) \\ &= f\nabla^0_X Y + fD(X, Y) \\ &= f(\nabla^0 + D)_X Y\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}(\nabla^0 + D)_X (fY) &= \nabla^0_X (fY) + D(X, fY) \\ &= f\nabla^0_X Y + (Xf)Y + fD(X, Y) \\ &= f(\nabla^0 + D)_X Y + (Xf)Y\end{aligned}$$

である．よって，$\nabla^0 + D$ は接続である．逆に，∇ を TM における接続とすると，$D(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla^0_X Y$（$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$）と定めるとき $D \in \Gamma(T^{(1,2)}TM)$ であり（命題 4.13），この D について $\nabla = \nabla^0 + D$ となる．以上より，TM における接続全体の集合 $\mathscr{A}(TM)$ は

$$\mathscr{A}(TM) = \{\nabla^0 + D \mid D \in \Gamma(T^{(1,2)}TM)\}$$

と書ける．

解答 4.5　$n = \dim M$ と置く．

(a)　$X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ を滑らかなベクトル場，$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \epsilon^i$ を滑らかな 1-形式とする．各 $1 \leq k \leq n$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \omega, E_k \rangle &= X\langle \omega, E_k \rangle - \langle \omega, \nabla_X E_k \rangle \\ &= X\omega_k - \sum_{j=1}^{n} X^j \langle \omega, \nabla_{E_j} E_k \rangle \\ &= X\omega_k - \sum_{i,j=1}^{n} X^j \Gamma_{jk}^i \langle \omega, E_i \rangle \\ &= X\omega_k - \sum_{i,j=1}^{n} X^j \omega_i \Gamma_{jk}^i\end{aligned}$$

だから，

$$\nabla_X \omega = \sum_{k=1}^{n} \left(X\omega_k - \sum_{i,j=1}^{n} X^j \omega_i \Gamma_{jk}^i \right) \epsilon^k$$

である．

(b)　記号の簡略化のため，$i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_l}$$

と書く．$X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ を滑らかなベクトル場，$F = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ を滑らかな (k,l)-テンソル場とすると，

$$\begin{aligned} \nabla_X F &= \nabla_X \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n X(F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}) E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} + \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \nabla_X E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \end{aligned} \tag{$*$}$$

である．接続係数の定義より

$$\nabla_X E_i = \sum_{m,p=1}^n X^m \mathit{\Gamma}^p_{mi} E_p$$

であり，(a) より

$$\nabla_X \epsilon_j = - \sum_{m,p=1}^n X^m \mathit{\Gamma}^j_{mp} \epsilon^p$$

だから，各 $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned} \nabla_X E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} &= \sum_{s=1}^k E_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nabla_X E_{i_s} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_l} \\ &\quad + \sum_{s=1}^l E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \nabla_X \epsilon_{j_s} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_l} \\ &= \sum_{s=1}^k \sum_{m,p=1}^n X^m \mathit{\Gamma}^p_{mi} E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots p \ldots i_k} - \sum_{s=1}^l \sum_{m,p=1}^n X^m \mathit{\Gamma}^j_{mp} E^{j_1 \ldots p \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \end{aligned}$$

である．これを $(*)$ に代入すれば，

$$\begin{aligned} &\nabla_X F \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n X(F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}) E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \\ &\quad + \sum_{s=1}^k \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l,m,p=1}^n X^m F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \mathit{\Gamma}^p_{mi_s} E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots p \ldots i_k} - \sum_{s=1}^l \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l,m,p=1}^n X^m F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \mathit{\Gamma}^{j_s}_{mp} E^{j_1 \ldots p \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n X(F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}) E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \\ &\quad + \sum_{s=1}^k \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l,m,p=1}^n X^m F^{i_1 \ldots p \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \mathit{\Gamma}^{i_s}_{mp} E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} - \sum_{s=1}^l \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l,m,p=1}^n X^m F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots p \ldots j_l} \mathit{\Gamma}^p_{mj_s} E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l=1}^n \left(X(F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}) + \sum_{s=1}^k \sum_{m,p=1}^n X^m F^{i_1 \ldots p \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \mathit{\Gamma}^{i_s}_{mp} - \sum_{s=1}^l \sum_{m,p=1}^n X^m F^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots p \ldots j_l} \mathit{\Gamma}^p_{mj_s} \right) E^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} \end{aligned}$$

を得る．

解答 4.6 (a) τ は明らかに反対称だから，$\tau(X,Y)$ が X に関して $C^\infty(M)$-線型であることを示せば十分である．$f \in C^\infty(M)$，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}\tau(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - (f\nabla_Y X + (Yf)X) - (f[X,Y] - (Yf)X) \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X,Y] \\ &= f\tau(X,Y)\end{aligned}$$

だから，$\tau(X,Y)$ は X に関して $C^\infty(M)$-線型である．

(b) $(U; x^1, \dots, x^n)$ を M 上のチャートとし，このチャートに関する接続係数を Γ_{ij}^k と書く．τ は $(1,2)$-テンソル場だから，τ が U 上で 0 であるための必要十分条件は，任意の i, j に対して $\tau(\partial_i, \partial_j) = 0$ であることである．$\tau(\partial_i, \partial_j)$ は接続係数を用いて

$$\tau(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i - [\partial_i, \partial_j] = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k$$

と書けるから，τ が U 上で 0 であることは，任意の i, j, k に対して $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ であることと同値である．よって，M を被覆するチャートの族があるとき，∇ が対称であるための必要十分条件は，これらののチャートに関する ∇ の接続係数 Γ_{ij}^k が $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ を満たすことである．特に，チャートの族として M 上のチャート全体をとれば，主張を得る．

(c) $(U; x^1, \dots, x^n)$ を M 上のチャートとし，このチャートに関する接続係数を Γ_{ij}^k と書く．$u \in C^\infty(M)$ に対して，U 上では

$$\nabla^2 u = \sum_{i,j=1}^n \left(\partial_j\partial_i u - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k \partial_k u\right) dx^i \otimes dx^j$$

である（例 4.22）．∇ が対称ならば，(b) より $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$ だから，$\nabla^2 u$ は対称 2-テンソル場である．逆に，任意の $u \in C^\infty(M)$ に対して $\nabla^2 u$ が対称 2-テンソル場であるとする．このとき，$1 \leq k \leq n$ と点 $p \in U$ に対して，$u \in C^\infty(M)$ を $\partial_l u(p) = \delta_{kl}$ となるようにとれば，上式から $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$ がわかる．よって，(b) より ∇ は対称である．以上より，∇ が対称であるための必要十分条件は，任意の $u \in C^\infty(M)$ に対して $\nabla^2 u$ が対称 2-テンソル場であることである．

(d) $\mathbb{R}^n$ の標準座標に関する Euclid 接続 $\overline{\nabla}$ の接続係数は $\Gamma_{ij}^k = 0$ だから，(b) で示したことより，$\overline{\nabla}$ は対称である．

解答 4.7 $\mathbb{R}^2$ の各点における接ベクトルを，標準的な方法で $\mathbb{R}^2$ の元と同一視する．

γ は明らかに滑らかであり，容易にわかるように単射である．また，任意の $t \in (-\pi, \pi)$ に対して $\gamma'(t) = (2\cos 2t, \cos t) \neq 0$ だから，γ ははめ込みである．

γ の速度ベクトル場 γ' が $\mathbb{R}^2$ の開集合上の滑らかなベクトル場 $\widetilde{V}$ に拡張されたと仮定すると，

$$\widetilde{V}|_{(0,0)} = \widetilde{V}|_{\gamma(0)} = \gamma'(0) = (1,1)$$

だが，一方で

$$\widetilde{V}|_{(0,0)} = \lim_{t\to\pi-0} \widetilde{V}|_{\gamma(t)} = \lim_{t\to\pi-0} \gamma'(t) = (2,-1)$$

であり，これは不可能である．よって，γ' は拡張可能（extendible）ではない．

解答 4.8

解答 4.9

解答 4.10

解答 4.11

解答 4.12

解答 4.13

解答 4.14　(a)　$\nabla_X E_i$ は $X \in \mathfrak{X}(U)$ に関して $C^\infty(M)$-線型だから，$\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^n {\omega_i}^j(X) E_j$ と書くとき，各 ${\omega_i}^j \colon \mathfrak{X}(U) \to \mathbb{R}$ は $C^\infty(M)$-線型である．よって，各 ${\omega_i}^j$ は 1-形式を定める．

(b)　各 $k,\, l \in \{1, \dots, n\}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
d\epsilon^j(E_k, E_l) &= E_k(\epsilon^j(E_l)) - E_l(\epsilon^j(E_k)) - \epsilon^j([E_k, E_l]) \\
&= -\epsilon^j([E_k, E_l]), \\
\sum_{i=1}^n (\epsilon^i \wedge {\omega_i}^j)(E_k, E_l) &= \sum_{i=1}^n (\epsilon^i(E_k){\omega_i}^j(E_l) - \epsilon^i(E_l){\omega_i}^j(E_k)) \\
&= {\omega_k}^j(E_l) - {\omega_l}^j(E_k), \\
\tau^j(E_k, E_l) &= \epsilon^j(\nabla_{E_k} E_l - \nabla_{E_l} E_k - [E_k, E_l]) \\
&= {\omega_l}^j(E_k) - {\omega_k}^j(E_l) - \epsilon^j([E_k, E_l])
\end{aligned}
$$

だから

$$
d\epsilon^j(E_k, E_l) = \sum_{i=1}^n (\epsilon^i \wedge {\omega_i}^j)(E_k, E_l) + \tau^j(E_k, E_l)
$$

である．よって，

$$
d\epsilon^j = \sum_{i=1}^n \epsilon^i \wedge {\omega_i}^j + \tau^j
$$

が成り立つ．

5　The Levi-Civita Connection

解答 5.1　Levi-Civita 接続は計量と整合するから，任意の $X,\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$
\begin{aligned}
D^\flat(X, Y, Z) + D^\flat(X, Z, Y) &= \langle \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \widetilde{\nabla}_X Z - \nabla_X Z, Y \rangle \\
&= (\langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z \rangle) - (\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z \rangle) \\
&= \langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z \rangle - X\langle Y, Z \rangle
\end{aligned}
$$

である．よって，$\widetilde{\nabla}$ が計量と整合するための必要十分条件は，$D^\flat$ が最後の 2 つの引数に関して反対称であることである．

M 上の滑らかな $(1,2)$-テンソル場 D であって $D^\flat$ が最後の 2 つの引数に関して反対称であるもの全体のなす線型空間を $\mathscr{D}$ と書くと，定理 4.14 と前段の結果より，計量と整合する M 上の接続全体のなす空間は

$$
\nabla + \mathscr{D} = \{\nabla + D \mid D \in \mathscr{D}\}
$$

である．$\dim M \geq 2$ ならば，$\mathscr{D}$ は無限次元であり，したがって $\nabla + \mathscr{D}$ は無限次元アフィン空間となる．

解答 5.2　命題 5.5 で示したように，∇ が計量と整合するための必要十分条件は，任意の滑らかな局所枠 $(E_1, \dots, E_n)$ に対して，対応する計量の行列表示の成分を g_{ij}，Christoffel 記号を Γ_{ij}^k と書くとき，任意の i, j, l に対して

$$\sum_{k=1}^n (\Gamma_{li}^k g_{jk} + \Gamma_{lj}^k g_{ik}) = E_l g_{ij}$$

が成り立つことである．この式は，対応する接続 1-形式 ${\omega_i}^j$（問題 4.14）を用いて

$$\sum_{k=1}^n (g_{jk} {\omega_i}^k(E_l) + g_{ik} {\omega_j}^k(E_l)) = dg_{ij}(E_l)$$

と書き直せる．これが任意の l に対して成り立つことは，1-形式の等式

$$\sum_{k=1}^n (g_{jk} {\omega_i}^k + g_{ik} {\omega_j}^k) = dg_{ij} \tag{$*$}$$

が成り立つことと同値である．

局所枠 $(E_1, \dots, E_n)$ が正規直交ならば $g_{ij} = \delta_{ij}$ だから，($*$) は

$${\omega_i}^j + {\omega_j}^i = 0$$

となる．これは，行列 $({\omega_i}^k)$ が歪対称であることを意味する．

解答 5.3　問題中で定義された $\mathbb{R}^3$ 上の接続を ∇ と書く．Euclid 計量の標準座標に関する各成分は $g_{ij} = \delta_{ij}$ (i, $j \in \{1, 2, 3\}$) だから，与えられた Christoffel 記号 Γ_{ki}^j は明らかに

$$\sum_{l=1}^3 (\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}) = \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{kj}^i = 0 = E_k g_{ij}$$

を満たす．よって，∇ は Euclid 計量と整合する（命題 5.5）[*8]．一方で，$\Gamma_{12}^3 = 1 \neq -1 = \Gamma_{21}^3$ だから，∇ は対称ではない（問題 4.6 (b)）．

解答 5.4

解答 5.5

解答 5.6　点 $x \in \widetilde{M}$ における垂直接空間を V_x，水平接空間を H_x と書く．

(a)　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする．

第一の主張を示す．$\pi \colon \widetilde{M} \to M$ は Riemann 沈め込みだから，各点 $x \in \widetilde{M}$ において微分 $d\pi|_x \colon T_x\widetilde{M} \to T_{\pi(x)}M$ は H_x から $T_{\pi(x)}M$ への計量線型同型を与える．よって，

$$\langle \widetilde{X}|_x, \widetilde{Y}|_x \rangle = \langle d\pi|_x(\widetilde{X}|_x), d\pi|_x(\widetilde{Y}|_x) \rangle = \langle X|_{\pi(x)}, Y|_{\pi(x)} \rangle \qquad (x \in \widetilde{M})$$

[*8] 正確には，命題 5.5 で主張されているのは，「任意の滑らかな局所枠に関して $\sum_l (\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}) = E_k g_{ij}$ が成り立つならば，その接続は計量と整合する」ということである．しかし，命題 5.5 の証明からわかるように，仮定は「滑らかな局所枠の族であってその全体が Riemann 多様体を被覆するものが存在して，それらの局所枠に関して $\sum_l (\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il}) = E_k g_{ij}$ が成り立つ」ことだけで十分である．

が成り立つ．

第二の主張を示す．$\widetilde{X}$ と X，$\widetilde{Y}$ と Y はそれぞれ π-関連しているから，$[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ と $[X,Y]$ は π-関連している．よって，

$$d\pi|_x([\widetilde{X},\widetilde{Y}]^H|_x) = d\pi|_x([\widetilde{X},\widetilde{Y}]|_x) = [X,Y]|_{\pi(x)} \qquad (x \in \widetilde{M})$$

である．すなわち，$[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^H$ は $[X,Y]$ の水平持ち上げである．

第三の主張を示す．$W \in \mathfrak{X}(M)$ が垂直ならば，$\widetilde{X}$ と X，W と 0（M 上の零ベクトル場）はそれぞれ π-関連しているから，$[\widetilde{X},W]$ と $[X,0]=0$ は π-関連している．すなわち，各点 $x \in \widetilde{M}$ において $d\pi|_x([\widetilde{X},W]|_x)=0$ である．これは，$[\widetilde{X},W]$ が垂直であることを意味する．[*9]

(b)　準備として，次の補題を示す．

補題　M を多様体，$\widetilde{M}$ を Riemann 多様体，$\pi\colon \widetilde{M} \to M$ を沈め込みとする．X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ と垂直ベクトル場 $W \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ に対して，

$$W\langle \widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle = 0$$

である．

補題の証明　(a) の第一の主張と W が垂直であることより，各点 $x \in \widetilde{M}$ において

$$\begin{aligned}(W\langle \widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle)|_x &= W|_x(\langle X,Y\rangle \circ \pi)\\ &= d\pi|_x(W|_x)\langle X,Y\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

である．これで，主張が示された．　□

本題に入る．$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ の水平成分が $\widetilde{\nabla_X Y}$ であり，垂直成分が $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V/2$ であることを示せばよい．

$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ の水平成分が $\widetilde{\nabla_X Y}$ であることを示す．任意の点 $x \in \widetilde{M}$ と水平接ベクトル $v \in H_x$ に対して $Z \in \mathfrak{X}(M)$ であって $\widetilde{Z}|_x = v$ を満たすものが存在するから（命題 2.25 (c)，証明は問題 2.5），そのためには，任意の $Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle = \langle \widetilde{\nabla_X Y},\widetilde{Z}\rangle \tag{$*$}$$

をいえばよい．Koszul の公式（系 5.11 (a)）より，($*$) の左辺は

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle = \frac{1}{2}(\widetilde{X}\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle + \widetilde{Y}\langle \widetilde{Z},\widetilde{X}\rangle - \widetilde{Z}\langle \widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle - \langle \widetilde{Y},[\widetilde{X},\widetilde{Z}]\rangle - \langle \widetilde{Z},[\widetilde{Y},\widetilde{X}]\rangle + \langle \widetilde{X},[\widetilde{Z},\widetilde{Y}]\rangle) \tag{$**$}$$

と書ける．(a) の第一の主張より

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle)(x) &= \widetilde{X}|_x(\langle Y,Z\rangle \circ \pi)\\ &= d\pi|_x(\widetilde{X}|_x)\langle Y,Z\rangle\\ &= X|_{\pi(x)}\langle Y,Z\rangle\\ &= (X\langle Y,Z\rangle)(\pi(x)) \qquad (x \in \widetilde{M})\end{aligned}$$

だから

$$\widetilde{X}\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle = (X\langle Y,Z\rangle)\circ\pi$$

[*9] 証明からわかるように，第二・第三の主張は，M が単に（Riemann 計量をもたない）多様体で，$\pi\colon \widetilde{M} \to M$ は単に滑らかな沈め込みであるとしても成り立つ．

であり，$\widetilde{Y}\langle\widetilde{Z},\widetilde{X}\rangle$, $\widetilde{Z}\langle\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle$ についても同様の式が成り立つ．また，$\widetilde{Y}$ が水平であること，(a) の第二の主張，第一の主張を順に用いることで

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{Y},[\widetilde{X},\widetilde{Z}]\rangle &= \langle\widetilde{Y},[\widetilde{X},\widetilde{Z}]^H\rangle \\
&= \langle\widetilde{Y},\widetilde{[X,Z]}\rangle \\
&= \langle Y,[X,Z]\rangle\circ\pi
\end{aligned}
$$

が得られ，$\langle\widetilde{Z},[\widetilde{Y},\widetilde{X}]\rangle$, $\langle\widetilde{X},[\widetilde{Z},\widetilde{Y}]\rangle$ についても同様の式が成り立つ．これらを $(*)$ に代入すると，

$$
\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle)\circ\pi
$$

となる．一方で，(a) の第一の主張と Koszul の公式（系 5.11 (a)）より，$(*)$ の右辺は

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{\nabla_X Y},\widetilde{Z}\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle\circ\pi \\
&= \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle)\circ\pi
\end{aligned}
$$

と書ける．以上 2 式より，$(*)$ が示された．

$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ の垂直成分が $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V/2$ であることを示す．任意の点 $x\in\widetilde{M}$ と垂直接ベクトル $v\in V_x$ に対して垂直ベクトル場 $W\in\mathfrak{X}(\widetilde{M})$ であって $W|_x=v$ を満たすものが存在するから（v を値にもつ $\mathfrak{X}(\widetilde{M})$ の元を 1 つとり，その垂直成分をとればよい)，そのためには，任意の垂直ベクトル場 $W\in\mathfrak{X}(\widetilde{M})$ に対して

$$
\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},W\rangle = \frac{1}{2}\langle[X,Y]^V,W\rangle \tag{$***$}
$$

をいえばよい．Koszul の公式（系 5.11 (a)）より，$(***)$ の左辺は

$$
\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},W\rangle = \frac{1}{2}(\widetilde{X}\langle\widetilde{Y},W\rangle + \widetilde{Y}\langle W,\widetilde{X}\rangle - W\langle\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle - \langle\widetilde{Y},[\widetilde{X},W]\rangle - \langle W,[\widetilde{Y},\widetilde{X}]\rangle + \langle\widetilde{X},[W,\widetilde{Y}]\rangle)
$$

と書ける．W は垂直であり，(a) の第三の主張より $[\widetilde{X},W]$, $[W,\widetilde{Y}]$ も垂直だから，$\langle\widetilde{Y},W\rangle$, $\langle W,\widetilde{X}\rangle$, $\langle\widetilde{Y},[\widetilde{X},W]\rangle$, $\langle\widetilde{X},[W,\widetilde{Y}]\rangle$ はすべて 0 である．また，上の補題より $W\langle\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle=0$ である．これらを上式に代入して，

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},W\rangle &= -\frac{1}{2}\langle W,[\widetilde{Y},\widetilde{X}]\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],W\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V,W\rangle
\end{aligned}
$$

を得る．これで，$(***)$ が示された．

解答 5.7

解答 5.8 (a) G に与えられた Riemann 計量は両側不変だから，命題 3.12 より，対応する $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle -,-\rangle$ は Ad-不変である．そこで，X, Y, $Z\in\mathfrak{g}$ とすると，$\langle \mathrm{Ad}(\exp^G tX)Y, \mathrm{Ad}(\exp^G tY)Z\rangle$ は $t\in\mathbb{R}$ によらず定値だから，

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\langle \mathrm{Ad}(\exp^G tX)Y, \mathrm{Ad}(\exp^G tY)Z\rangle \\
&= \langle \mathrm{Ad}_*(X)Y,Z\rangle + \langle Y,\mathrm{Ad}_*(X)Z\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}(X)Y,Z\rangle + \langle Y,\mathrm{ad}(X)Z\rangle
\end{aligned}
$$

である．これが示すべき式であった．

(b)　X, Y を G 上の左不変ベクトル場とする．すると，$[X,Y]$ も左不変であり，また G に与えられた Riemann 計量は左不変だから $\nabla_X Y$ も左不変である．そこで，$\nabla_X Y = [X,Y]$ を示すためには，G 上の任意の左不変ベクトル場 Z に対して

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\langle [X,Y], Z\rangle$$

を示せばよい．Koszul の公式（系 5.11 (a)）と (a) より，

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle)$$

である．ここで，G に与えられた Riemann 計量および X, Y, Z は左不変だから $\langle Y,Z\rangle$, $\langle Z,X\rangle$, $\langle X,Y\rangle$ はすべて定値であり，したがって上式の最初の 3 項は 0 である．また，(a) より $\langle Y,[X,Z]\rangle = \langle X,[Z,Y]\rangle$ である．よって，

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = -\frac{1}{2}\langle Z,[Y,X]\rangle = \frac{1}{2}\langle [X,Y], Z\rangle$$

である．これが示すべき式であった．

(c)　$\gamma\colon \mathbb{R}\to G$ を G の 1-径数部分群とし，G 上の左不変ベクトル場 X を $X|_e = \gamma'(0)$（$e\in G$ は単位元）となるようにとる．γ は X の積分曲線だから

$$D_t\gamma'(t) = \nabla_{\gamma'(t)}X = (\nabla_X X)|_{\gamma(t)} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

だが，(b) より $\nabla_X X = [X,X]/2 = 0$ だから上式の最右辺は 0 であり，γ は測地線である．測地線の一意性より，e を始点とする G の測地線の全体と G の 1-係数部分群の全体とは一致する．また，これより，Riemann 多様体としての e における制限指数写像 $\exp_e$ と Lie 群としての指数写像 $\exp^G$ とは一致する．

(d)　正の実数の全体 $\mathbb{R}_{>0}$ を，乗法を演算として群とみなす*10．この群は可換であり，$s\in\mathbb{R}_{>0}$ による演算 $L_s\colon \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$, $t\mapsto st$ について

$$L_s^* g = L_s^*(t^{-2}dt^{\otimes 2}) = (st)^{-2}d(st)^{\otimes 2} = t^{-2}dt^{\otimes 2} = g$$

だから，g は両側不変である．

$c\in\mathbb{R}$ とすると，写像 $\gamma_c\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$, $t\mapsto e^{ct}$ は $\gamma_c'(1) = c\,(\partial/\partial t)|_1$ を満たす $\mathbb{R}_{>0}$ の 1-径数部分群である．(c) より，$\mathbb{R}_{>0}$ を g によって Riemann 多様体とみなすとき，γ_c は測地線である．よって，この Riemann 多様体 $\mathbb{R}_{>0}$ の 1 における制限指数写像は

$$\exp_1\left(c\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_1\right) = \gamma_c(1) = e^c$$

で与えられる．

解答 5.9

解答 5.10　ϕ, $\psi\colon M\to\widetilde{M}$ を局所等長同型写像として，

$$X = \{p\in M \mid \phi(p)=\psi(p) \text{ かつ } d\phi|_p = d\psi_p\}$$

*10 本では記号 $\mathbb{R}^+$ を用いているが，本稿では $\mathbb{R}_{>0}$ で表す．

と置く．ϕ, ψ は滑らかだから，X は M の閉集合である．次に，$p \in X$ とする．命題 5.20 より，$\exp_p$ の定義域の任意の元 v に対して，$d\phi|_p(v) = d\psi_p(w)$ は $\exp_{\phi(p)} = \exp_{\psi(p)}$ の定義域に属し，

$$\phi(\exp_p(v)) = \exp_{\phi(p)}(d\phi|_p(v)) = \exp_{\psi(p)}(d\psi_p(w)) = \psi(\exp_p(w))$$

が成り立つ．したがって，ϕ と ψ は p のまわりで一致し，X は p を内点にもつ．よって，X は M の開集合である．以上より，X は M の開かつ閉な部分集合だが，M は連結だから，$X \neq \emptyset$ ならば $X = M$，すなわち $\phi = \psi$ である．これで，主張が示された．

解答 5.11　M を $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n(R)$, $\mathbb{H}^n(R)$ のいずれかとし，それぞれに応じて G を $\mathrm{E}(n)$, $\mathrm{O}^+(n,1)$ とする．

(a), (c)　U を M の連結開集合とし，1 点 $p \in U$ を固定する．G は $\mathrm{O}(M)$ に推移的に作用するから（$\mathbb{R}^n$ については明らか，$\mathbb{S}^n(R)$ については命題 3.2，$\mathbb{H}^n(R)$ については命題 3.9），任意の局所等長同型写像 $\phi\colon U \to M$ に対して，ある $\psi \in G$ が存在して $\phi(p) = \psi(p)$ かつ $d\phi|_p = d\psi_p$ を満たす．このとき，命題 5.22（証明は問題 5.10）より $\psi|_U = \phi$ である．特に，$U = M$ の場合を考えれば $\mathrm{Iso}(M) = G$ を得る．

(b)　M は枠等質だから（$\mathbb{R}^n$ については明らか，$\mathbb{S}^n(R)$ については命題 3.2，$\mathbb{H}^n(R)$ については命題 3.9），特に等質である（命題 3.1 (b)，証明は問題 3.3）．したがって，ある 1 点 $p \in M$ に対して

$$\{\phi \in G \mid \phi(p) = p\} \cong \mathrm{O}(n)$$

を示せばよい．$\mathbb{R}^n$ についてはたとえば $p = 0$ とし，$\mathbb{S}^n(R)$, $\mathbb{H}^n(R)$ についてはたとえば $p = (0, \dots, 0, R)$ とすれば，これは容易に確かめられる．

解答 5.12　n に関する帰納法で，$\dim G \leq n(n+1)/2$ を示す．以下では，G の元とそれが定める M の自己等長同型写像とをしばしば同一視する．

$n = 0$ の場合，M は 1 点だから，G の作用が効果的であるためには，G は自明群でなければならない．よって，$\dim G = 0$ である．

$n \geq 1$ とし，$n-1$ の場合に主張が成り立つとして，n の場合を考える．M は連結であり，特に空でないから，1 点 $p_0 \in M$ を固定できる．p_0 の固定部分群 G_{p_0} を考える．まず，G/G_{p_0} は自然に多様体構造をもつが [2, Thm. 21.17]，G/G_{p_0} から M への滑らかな単射 $\phi G_{p_0} \mapsto \phi(p_0)$ が存在するから，

$$\dim G/G_{p_0} \leq \dim M = n \tag{$*$}$$

が成り立つ．次に，p_0 を中心とする半径 ϵ の測地球面が定義されるように $\epsilon > 0$ をとり，その測地球面を $S = \exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ と置く．S は $n-1$ 次元連結 Riemann 多様体である．また，S は p_0 からの Riemann 距離が ϵ である点の全体だから（系 6.13）[*11]，任意の $\phi \in G_{p_0}$ に対して $\phi(S) = S$ であり，これにより G_{p_0} は S に滑らかかつ等長に作用する．この作用が効果的であることを示す．単位元でない $\phi \in G_{p_0}$ を任意にとる．G の M への作用が効果的であることより $\phi \neq \mathrm{id}_M$ だから，M の連結性および問題 5.10 と合わせて，$d\phi|_p \neq \mathrm{id}_{T_pM}$ を得る．そこで，単位ベクトル $v \in T_pM$ を $d\phi|_p(v) \neq v$ となるようにとると，

$$\phi(\exp_p(\epsilon v)) = \exp_p(d\phi|_p(\epsilon v)) \neq \exp_p(\epsilon v)$$

である．これで，G_{p_0} の S への作用が効果的であることが示された．したがって，帰納法の仮定より，

$$\dim G_{p_0} \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{$**$}$$

[*11] これは第 5 章の章末問題だから，系 6.13 を使わない解答が想定されているのかもしれない．

が成り立つ．以上の 2 式 $(*)$, $(**)$ より，

$$\dim G = \dim G/G_{p_0} + \dim G_{p_0} \leq n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

である．これで，帰納法が完成した．

解答 5.13

解答 5.14　(a), (b) ともに，後半の等式は前半の等式を成分表示したものだから，前半の等式だけ示せばよい．点 $p \in M$ を任意にとり，両辺の p における値が等しいことを示す．p を中心とする正規座標 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を 1 つ固定する．

(a)　$X \in \mathfrak{X}(M)$ を U 上で $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$（$X^i \in C^\infty(U)$）と表すと，命題 2.46（証明は問題 2.21）と正規座標の性質 $\partial_i(\sqrt{\det g})(p) = 0$（命題 5.24 (e) から従う）より，

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} X)(p) &= \frac{1}{\sqrt{\det g(p)}} \sum_{i=1}^n \partial_i(X^i \sqrt{\det g})(p) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g(p)}} \sum_{i=1}^n \partial_i X^i(p) \sqrt{\det g(p)} + X^i(p) \partial_i(\sqrt{\det g})(p) \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_i X^i(p)
\end{aligned}$$

である．一方で，正規座標の性質 $\Gamma_{ji}^k(p) = 0$（命題 5.24 (d)）より

$$\begin{aligned}
\nabla X|_p &= \sum_{i=1}^n \partial_i|_p \otimes dX^i|_p + X^i(p) \nabla \partial_i|_p \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_i|_p \otimes dX^i|_p + X^i(p) \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ji}^k \, \partial_k|_p \otimes dx^j|_p \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_i|_p \otimes dX^i|_p
\end{aligned}$$

だから，

$$(\operatorname{tr}(\nabla X))(p) = \sum_{i=1}^n \partial_i X^i(p)$$

である．よって，$(\operatorname{div} X)(p) = (\operatorname{tr}(\nabla X))(p)$ が成り立つ．

(b)　$u \in C^\infty(M)$ とする．命題 2.46（証明は問題 2.21）と正規座標の性質 $\partial_i g^{ij}(p) = 0$, $\partial_i(\sqrt{\det g})(p) = 0$（命題 5.24 (e) から従う）より，

$$\begin{aligned}
&\triangle u(p) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g(p)}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (g^{ij} \sqrt{\det g} \, \partial_j u)(p) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g(p)}} \sum_{i,j=1}^n (\partial_i g^{ij}(p) \, \sqrt{\det g(p)} \partial_j u(p) + g^{ij}(p) \partial_i(\sqrt{\det g})(p) \partial_j u(p) + g^{ij}(p) \sqrt{\det g(p)} \, \partial_i \partial_j u(p)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \partial_i \partial_j u(p)
\end{aligned}$$

である．一方で，例 4.22 と正規座標の性質 $\Gamma^k_{ij}(p)=0$（命題 5.24 (d)）より

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(p) &= \sum_{i,j=1}^n \left(\partial_j\partial_i u(p) - \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}(p)\partial_k u(p)\right) dx^i|_p \otimes dx^j|_p \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_j\partial_i u(p)\, dx^i|_p \otimes dx^j|_p\end{aligned}$$

だから，

$$(\mathrm{tr}_g(\nabla^2 u))(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p)\partial_j\partial_i u(p)$$

である．よって，$\triangle u(p) = (\mathrm{tr}_g(\nabla^2 u))(p)$ が成り立つ．

解答 5.15

解答 5.16

解答 5.17

解答 5.18　P の M における法指数写像を $E\colon \mathscr{E}_P \to M$ と書く．V を $\mathscr{E}_P$ の開集合であって任意の $x\in P$ に対して $V\cap N_xP$ が $0\in N_xP$ に関して星形であるものとし，E は V から M の開集合 U への微分同相を与えるとする．(W_0,ψ) を P 上のチャート，$(E_1,\dots,E_{n-p})$ を NP に対する W_0 上の正規直交枠とし，これに対応する Fermi 座標を $(U_0,\phi)=(U_0;x^1,\dots,x^p,v^1,\dots,v^{n-p})=(U_0;x^1,\dots,x^n)$ とする．

(a)　NP の零切断を O と書くと $E(O)=P$ であり，点 $q\in U_0$ について $E|_V^{-1}(q)\in O$ であるための必要十分条件は $x^{p+1}(q)=\cdots=x^n(q)=0$ だから，

$$P\cap U_0 = \{q\in U_0 \mid x^{p+1}(q)=\cdots=x^n(q)=0\}$$

である．

(b)　$q\in P\cap U_0$ とする．Fermi 座標の定義より，$1\le i\le p$ に対しては $\partial_i|_q\in T_qP$ であり，$p+1\le i\le n$ に対しては $\partial_i|_q = E_{i-p}|_q \in N_qP$ である．よって，

$$g_{ij}(q) = \langle \partial_i|_q, \partial_j|_q\rangle = \begin{cases} 0 & (1\le i\le p \text{ かつ } p+1\le j\le n) \\ \delta_{ij} & (i,\, j\ge p+1)\end{cases}$$

である．

(c)　$q\in P\cap U_0$ を初期位置，$v=\sum_{i=1}^{n-p} v^iE_i|_q\in N_qP$ を初速度とする M 上の測地線は $t\mapsto \exp_q(tv)=E(q,tv)$ であり，これは Fermi 座標では $t\mapsto (x^1(q),\dots,x^p(q),tv^1,\dots,tv^{n-p})$ と書かれる．

(d)　(c) より，任意の $v^1,\,\dots,\,v^{n-p}\in\mathbb{R}$ に対して，$t\mapsto(x^1(q),\dots,x^p(q),tv^1,\dots,tv^{n-p})$ は測地方程式

$$\sum_{i,j=p+1}^n \Gamma^k_{ij}(\phi^{-1}(x^1(q),\dots,x^p(q),tv^1,\dots,tv^{n-p}))v^{i-p}v^{j-p}$$

を満たす．特に，$t=0$ として

$$\sum_{i,j=p+1}^n \Gamma^k_{ij}(q)v^{i-p}v^{j-p}$$

を得る．これが任意の v^1, …, $v^{n-p} \in \mathbb{R}$ に対して成り立つから，各 i, $j \in \{p+1, \dots, n\}$ に対して $\Gamma^k_{ij}(p) + \Gamma^k_{ji}(p) = 0$ である．一方で，Levi-Civita 接続は対称だから，問題 4.6 より $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ である．よって，各 i, $j \in \{p+1, \dots, n\}$ に対して $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ である．

(e)　任意の i, j, $k \in \{p+1, \dots, n\}$ に対して，Levi-Civita 接続が Riemann 計量と整合することと (b), (d) より，

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jk}(p) &= (\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle)(p) \\
&= \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k \rangle \\
&= \Gamma^k_{ij}(p) + \Gamma^j_{ik}(p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

である．

解答 5.19

解答 5.20

解答 5.21

解答 5.22　Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする．命題 B.9 より，

$$(\mathscr{L}_X g)(Y, Z) = X\langle Y, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \tag{$*$}$$

である．一方で，Koszul の公式（系 5.11 (a)）より

$$\begin{aligned}
(\nabla X)^\flat(Y, Z) &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle \\
&= \frac{1}{2}(Z\langle X, Y \rangle + X\langle Y, Z \rangle - Y\langle Z, X \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle)
\end{aligned}$$

であり，Y と Z を入れ替えると

$$(\nabla X)^\flat(Z, Y) = \frac{1}{2}(Y\langle X, Z \rangle + X\langle Z, Y \rangle - Z\langle Y, X \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle)$$

となるから，辺々足して

$$(\nabla X)^\flat(Y, Z) + (\nabla X)^\flat(Z, Y) = X\langle Y, Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle \tag{$**$}$$

を得る．($*$), ($**$) より

$$(\mathscr{L}_X g)(Y, Z) = (\nabla X)^\flat(Y, Z) + (\nabla X)^\flat(Z, Y)$$

であり，これが任意の Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して成り立つから，X が Killing ベクトル場であることと $(\nabla X)^\flat$ が反対称であることとは同値である．

解答 5.23

6　Geodesics and Distance

解答 6.1

解答 6.2

解答 6.3

解答 6.4

解答 6.5　主張はすべて 1 つの連結成分の中で完結するから，連結 Riemann 多様体 M に対して示せばよい．M の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

(a)　点 $p \in M$ を固定し，W を p の一様 δ-正規近傍とする（$\delta > 0$）．また，$\epsilon > 0$ を十分小さくとって，p を中心とする半径 3ϵ の測地開球が定義されて W に含まれ，かつ $2\epsilon \leq \delta$ であるようにとる[*12]．制限指数写像 $\exp_p$ が与える開球 $B_{3\epsilon}(0) \subseteq T_pM$ から測地開球 $B_{3\epsilon}(p)$ への微分同相写像の逆を ϕ と書く．問題中の関数 $f\colon W_\epsilon \to \mathbb{R}$ について，$(q, v, t) \in W_\epsilon$ とすると

$$d(p, \exp_q(tv)) \leq d(p, q) + d(q, \exp_q(tv)) < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon,$$

すなわち $\exp_q(tv) \in B_{3\epsilon}(p)$ だから，系 6.12 より

$$f(q, v, t) = d(p, \exp_q(tv))^2 = |\phi(\exp_q(tv))|^2$$

である．よって，f は滑らかである．

(b)　$q \in M$ を初期位置，$v \in T_qM$ を初速度とする測地線を $\gamma_{q,v}$ と書く．(a) より，$(q, v, t) \in W_\epsilon$ に対して，

$$\begin{aligned}
f(q, v, t) &= |\phi(\gamma_{q,v}(t))|^2, \\
\frac{d}{dt} f(q, v, t) &= 2\left\langle \phi(\gamma_{q,v}(t)), \frac{\partial}{\partial t}\phi(\gamma_{q,v}(t)) \right\rangle, \\
\frac{d^2}{dt^2} f(q, v, t) &= 2\left(\left| \frac{\partial}{\partial t}\phi(\gamma_{q,v}(t)) \right|^2 + \left\langle \phi(\gamma_{q,v}(t)), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\gamma_{q,v}(t)) \right\rangle \right) \\
&= 2\left(|d\phi_{\gamma_{q,v}(t)}(\gamma'_{q,v}(t))|^2 + \left\langle \phi(\gamma_{q,v}(t)), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\gamma_{q,v}(t)) \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

である．特に，$q = p$，$t = 0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(p, v, 0) &= 2\left(|d\phi|_p(v)|^2 + \left\langle \phi(p), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\gamma_{p,v}(t)) \right\rangle \right) \\
&= 2|v|^2
\end{aligned}$$

となる（命題 5.19 (d) より $d\phi|_p = \mathrm{id}_{T_pM}$ であることを用いた）．したがって，W_ϵ の開集合

$$\left\{ (q, v, t) \in W_\epsilon \;\middle|\; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} > 0 \right\}$$

は，コンパクト集合

$$\{(p, v, 0) \mid v \in T_pM,\ |v| = 1\}$$

を含む．よって，Tube Lemma より，ϵ を小さくとり直せば，W_ϵ 上で $\partial^2 f/\partial t^2 > 0$ となる．

[*12] 本には最後の仮定「$2\epsilon \leq \delta$」は書かれていないが，関数 $f\colon W_\epsilon \to \mathbb{R}$ の定義式に現れる $\exp_p(tv)$（$|v| = 1$，$|t| < 2\epsilon$）が定義されるために必要ではないかと思う．

(c)　q_1, $q_2 \in B_\epsilon(p)$ とし，$\gamma\colon [0,a] \to M$ を q_1 から q_2 への最短測地線分とする．$[0,a]$ 上の関数 $t \mapsto d(p,\gamma(t))$ が $t=0$ または $t=a$ で最大値をとることを示したい．必要ならば径数をとり直して，γ は単位速であるとしてよい．このとき，$v=\gamma'(0) \in T_{q_1}M$ は単位ベクトルであり，

$$a = d(q_1,a_2) \geq d(q_1,p) + d(p,q_2) < 2\epsilon$$

である．したがって，任意の $t \in [0,a]$ に対して，$(q_1,v,t) \in W_\epsilon$ かつ

$$d(p,\gamma(t))^2 = d(p,\exp_{q_1}(tv))^2 = f(q_1,v,t)$$

である．ϵ のとり方より W_ϵ 上で $\partial^2 f/\partial t^2 > 0$ だから，t が $[0,a]$ の範囲を動くとき，上式の右辺は $t=0$ または $t=a$ で最大値をとる．よって，$d(p,\gamma(t))$ も $t=0$ または $t=a$ で最大値をとる．

(d)　2 点 q_1, $q_2 \in B_\epsilon(p)$ を任意にとる．q_1, $q_2 \in W$ かつ W は一様 δ-正規近傍だから，q_1 を中心とする半径 δ の測地開球が定義され，$q_2 \in W \subseteq B_\delta(q_1)$ となる．したがって，命題 6.11 より，q_1 から q_2 への単位速最短測地線分 $\gamma\colon [0,a] \to M$（$a=d(q_1,q_2)$）が一意に存在する．さらに，(c) より

$$d(p,\gamma(t)) \leq \max\{d(p,q_1), d(p,q_2)\} < \epsilon \qquad (t \in [0,a])$$

だから，γ の像は $B_\epsilon(p)$ に含まれる．よって，$B_\epsilon(p)$ は測地的凸である．

解答 6.6

解答 6.7

解答 6.8

解答 6.9　M の連結成分への分解を $M = \coprod_{i \in I} M_i$ とし，各 $i \in I$ に対して M_i の Riemann 計量が定める距離を d_i と書く．解答 2.30 で示したように，各 $i \in I$ に対して点 $p_i \in M$ を固定し，各 i, $j \in I$ に対して $c_{ij} > 0$ を 3 条件

(i) 任意の i, $j \in I$ に対して $c_{ij} = c_{ji}$ である．
(ii) 任意の i, j, $k \in I$ に対して $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$ である．
(iii) 任意の $i \in I$ に対して $c_i = \inf_{j \in I} c_{ij} > 0$ である．

が満たされるようにとると，

$$d(x,y) = \begin{cases} d_i(x,y) & (x,\ y \in M_i) \\ d_i(x,p_i) + c_{ij} + d_j(p_j,y) & (x \in M_i,\ \ y \in M_j,\ \ i \neq j) \end{cases}$$

によって問題 2.30 の条件を満たす距離 d が定まる．

各連結成分 M_i が測地的完備であるとする．Hopf–Rinow の定理（定理 6.19）より，このとき各距離 d_i は完備である．任意の i, $j \in I$ に対して $c_{ij} = 1$ とするとき（これは 3 条件 (i), (ii), (iii) を満たす），距離 d が完備であることを示す．d に関する Cauchy 列 $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ を任意にとる．すると，十分大きい m, $m' \in \mathbb{N}$ に対しては $d(x_m, x_{m'}) < 1$ だから，有限個の m を除いて x_m はすべてある 1 つの連結成分 M_i に属する．$d|_{M_i \times M_i} = d_i$ は完備だから，$(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ は収束する．よって，d は完備である．

さらに，I が無限集合であるとする．i_0, i_1, $\ldots \in I$ をどの 2 つも異なるようにとり[*13]，m, $m' \in \mathbb{N}$ に対しては $c_{i_m i_{m'}} = |2^{-m} - 2^{-m'}|$，$i$ または j が i_m の形に書けないときは $c_{ij} = 1$ とするとき（これは 3 条件 (i),

[*13] 本の立場では多様体に第二可算性を課しているから $I = \mathbb{N}$ ととれるが，ここではそのことは必要ない．

(ii), (iii) を満たす)，距離 d は完備でない．実際，任意の $m,\, m' \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(p_{i_m}, p_{i_{m'}}) = c_{i_m i_{m'}} = |2^{-m} - 2^{-m'}|$$

だから点列 $(p_{i_m})_{m\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列だが，p_{i_m} が属する連結成分 M_{i_m} はすべて異なるからこの点列は収束しない．

解答 6.10

解答 6.11 (a) $p,\, q \in M$ とする．「p から q への P 上の許容曲線」はすべて「p から q への M 上の許容曲線」でもあり，P 上の許容曲線 γ に対して $L_{\widehat{g}}(\gamma) = L_g(\gamma)$ だから，

$$\begin{aligned} d_{\widehat{g}}(p,q) &= \inf\{L_{\widehat{g}}(\gamma) \mid \gamma \text{ は } p \text{ から } q \text{ への } P \text{ 上の許容曲線}\} \\ &\geq \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \text{ は } p \text{ から } q \text{ への } M \text{ 上の許容曲線}\} \\ &= d_g(p,q) \end{aligned}$$

である．

(b) $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を P 上の点列とする．(a) より，$(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $(P, d_{\widehat{g}})$ 上の Cauchy 列ならば，$(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は (M, d_g) 上の Cauchy 列でもある．一方で，P は位相空間として M の閉部分空間だから，$(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が P 上で収束することと M 上で収束することとは同値である．よって，(M, d_g) が完備ならば $(P, d_{\widehat{g}})$ も完備である．

(c) 関数 $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ と滑らかな曲線 $\gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(t) = \cos\frac{1}{t}, \qquad \gamma(t) = (t, f(t)) \qquad (t \in \mathbb{R}_{>0})$$

と定め，$M = \mathbb{R}^2$，$P = \gamma(\mathbb{R}_{>0})$ と置く．すると，P は M の埋め込まれた部分 Riemann 多様体だが，P は M において閉でない．

P が完備であることを示す．そのために，写像 $F\colon P \to \mathbb{R}$ を

$$F(\gamma(t)) = \int_{1/\pi}^{t} \sqrt{1 + f'(s)^2}\, ds \qquad (t \in \mathbb{R}_{>0})$$

と定め，これが P から $\mathbb{R}$ への等長同型を与えることを示す．F が滑らかであることは明らかである．また，上式を t に関して微分すると

$$dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \frac{d}{dx} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

となるが，$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2} \neq 0$ だから，P の各点における F の微分 $dF_{\gamma(t)}\colon T_{\gamma(t)}P \to T_{F(\gamma(t))}\mathbb{R}$ は等長線型同型である．さらに，$F(\gamma(t))$ は t に関して狭義単調増加であり，

$$F(\gamma(t)) = \int_{1/\pi}^{t} \sqrt{1 + f'(s)^2}\, ds \geq t - \frac{1}{\pi} \to \infty \quad (t \to \infty)$$

かつ

$$\begin{aligned}
F\left(\gamma\left(\frac{1}{k\pi}\right)\right) &= \int_{1/\pi}^{1/k\pi} \sqrt{1+f'(s)^2}\,ds \\
&= -\sum_{j=1}^{k-1}\int_{1/(j+1)\pi}^{1/j\pi} \sqrt{1+f'(s)^2}\,ds \\
&\geq -\sum_{j=1}^{k-1}\int_{1/(j+1)\pi}^{1/j\pi} |f'(s)|\,ds \\
&= -\sum_{j=1}^{k-1}\left|f\left(\frac{1}{j\pi}\right)-f\left(\frac{1}{(j+1)\pi}\right)\right| \\
&= -2(k-1) \\
&\to -\infty \qquad\qquad (k\to\infty)
\end{aligned}$$

だから，$F\colon P\to\mathbb{R}$ は全単射である．以上より，F は P から $\mathbb{R}$ への等長同型を与える．これで，主張が示された．

解答 6.12　(a)　点 $p\in M$ と単位接ベクトル $v\in T_pM$ を任意にとり，$\gamma\colon I\to M$ を $\gamma(0)=p$ かつ $\gamma'(0)=v$ を満たす極大測地線とする．$T=\sup I<\infty$ と仮定する．$|\gamma'(T-\delta/2)|=|\gamma'(0)|=|v|=1$ だから，$\sigma(0)=\gamma(T-\delta/2)$ かつ $\sigma'(0)=\gamma'(T-\delta/2)$ を満たす測地線 σ が $(-\delta,\delta)$ 上で定義されるが，測地線の一意性より，両辺が定義される範囲で $\gamma(t)=\sigma(t-(T-\delta/2))$ である．そこで，曲線 $\widetilde{\gamma}\colon I\cup(T-3\delta/2,T+\delta/2)\to M$ を

$$\widetilde{\gamma}(t)=\begin{cases}\gamma(t) & (t\in I)\\ \sigma(t-(T-\delta/2)) & (t\in(T-3\delta/2,T+\delta/2))\end{cases}$$

と定めると，$\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}(0)=p$ かつ $\widetilde{\gamma}'(0)=v$ を満たす測地線である．ところが，これは γ が極大測地線であることに反する．よって，背理法より，$\sup I=\infty$ である．同様に，$\inf I=-\infty$ である．任意の点 $p\in M$ と単位接ベクトル $v\in T_pM$ に対してこれがいえるから，M は完備である．

(b)　M の単射半径が正（正の無限大を含む）ならば，(a) の仮定は満たされるから，M は完備である．

(c)　M が等質ならば，M の 1 点における単射半径は点によらず等しいから，M の単射半径は正（正の無限大を含む）となる．よって，(b) より，M は完備である．

(d)　$\phi\in C^\infty(\mathbb{R})$ を

- $\mathbb{R}$ 上で常に $\phi>0$，かつ
- 任意の $k\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して，$k\in\mathbb{R}$ のある近傍上で $\phi=1/k$

となるようにとり，

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y^2+z^2=\phi(x)^2\}$$

と定める．すると，M は $\mathbb{R}^3$ の埋め込まれた連結閉部分 Riemann 多様体である．$\mathbb{R}^3$ は完備だから，問題 6.11 (b) より，M も完備である．

M の単射半径が 0 であることを示す．各 $k\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して，写像 $\gamma_k\colon\mathbb{R}\to M$ を

$$\gamma_k(t)=\left(k,\frac{\cos kt}{k},\frac{\sin kt}{k}\right)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

と定める．すると，$\gamma_k(0) = (k, 1/k, 0)$ かつ $|\gamma_k'(0)| = |(0,0,1)| = 1$ である．また，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma''(t) = (0, -k^2 \cos kt, k^2 \sin kt)$$

は

$$T_{\gamma(t)}M = \mathbb{R}\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)} \oplus \mathbb{R}\left((-\sin t)\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)} + (\cos t)\,\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{\gamma(t)}\right)$$

に対して直交するから，系 5.2 より γ_k は測地線である．これらのことと $\gamma_k(0) = \gamma_k(2\pi/k)$ より，制限指数写像 $\exp_{(k,1/k,0)}$ は閉球 $\overline{B}_{2\pi/k}(0) \subseteq T_{(k,1/k,0)}M$ 上で単射でないから，M の $(k, 1/k, 0)$ における単射半径は $2\pi/k$ 未満である．これが任意の $k \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して成り立つから，M の単射半径は 0 である．これで，主張が示された．

解答 6.13　系 3.15 より，G 上には両側不変な Riemann 計量が存在する．これによって G を Riemann 多様体とみなすとき，問題 5.8 より，G の Lie 群としての指数写像 $\exp^G$ は，Riemann 多様体としての単位元 $e \in G$ における制限指数写像 $\exp_e$ に一致する．いま G はコンパクト（特に完備）かつ連結だから，系 6.21 より，G の任意の点は e と測地線分によって結べる．すなわち，$\exp_e$ は全射である．よって，$\exp^G$ も全射である．

解答 6.14　M の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

(a)　M のコンパクト集合が有界閉であることは，距離空間の一般論であり，M の完備性とは関係なく成り立つ．M が完備であるとして，M の有界閉集合がコンパクトであることを示す．K を M の有界閉集合として，1 点 $p \in M$ を固定する．K は有界だから，$R = \sup_{q \in K} d(p, q) < \infty$ である．このことと系 6.21 より，任意の $q \in K$ に対して，p から q への長さ R 以下の測地線分が存在する．すなわち，$K \subseteq \exp_p(\overline{B}_R(0))$ である．$\exp_p(\overline{B}_R(0))$ はコンパクト集合の連続像だからコンパクトであり，K はその閉集合だから，K はコンパクトである．よって，M の有界閉集合はコンパクトである．

逆に，M の有界閉集合がコンパクトであるとする．$(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を M 上の Cauchy 列とすると，$K = \overline{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$ は有界閉集合だから，仮定よりコンパクトである．$(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は K 上の Cauchy 列でもあるから，K 上収束し，特に M 上収束する．よって，M は完備である．

(b)　M がコンパクトならば完備かつ有界であることは，距離空間の一般論である．逆に，M が完備かつ有界であるとすると，(a) より M はコンパクトである．

解答 6.15

解答 6.16

解答 6.17

解答 6.18　M を Riemann 多様体とし[*14]，M の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

まず，M が連結かつ等方的であるとして，M が 2 点等質であることを示す．p_1，p_2，q_1，$q_2 \in M$ が $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2) = a$ を満たすとする．M は連結かつ等方的だから特に Riemann 対称空間であり，した

[*14] 本では連結 Riemann 多様体に対してのみ k 点等質性を定義しているが，この定義は自然に一般の Riemann 多様体に対して拡張される．

がって問題 6.19 より等質である[*15]．よって，p_1 を q_1 に移す $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ がとれる．$p_2' = \phi(p_2)$ と置くと，

$$d(q_1, p_2') = d(\phi(p_1), \phi(p_2)) = d(p_1, p_2) = a$$

である．M の等質性と問題 6.12 (c) より M は完備だから，系 6.21 より，q_1 から p_2' への単位速最短測地線 $\gamma\colon [0,a] \to M$ と，q_1 から q_2 への単位速最短測地線 $\sigma\colon [0,a] \to M$ がとれる．M は等方的だから $\psi \in \mathrm{Iso}_{q_1}(M)$ を $d\psi_{q_1}(\gamma'(0)) = \sigma'(0)$ となるようにとれるが，この ψ は測地線 γ を測地線 σ に移すから，特に

$$\psi(p_2') = \psi(\gamma(a)) = \sigma(a) = q_2$$

である．以上で構成した ϕ, ψ について，$\psi \circ \phi$ は M の自己等長同型写像であり，

$$(\psi \circ \phi)(p_1) = \psi(q_1) = q_1, \qquad (\psi \circ \phi)(p_2) = \psi(p_2') = q_2$$

を満たす．よって，M は 2 点等質である．

次に，M が 2 点等質であるとして，M が等方的であることを示す[*16]．点 $p \in M$ と単位接ベクトル v, $v' \in T_pM$ を任意にとる．p を中心とする半径 ϵ の測地閉球が定義されるように $\epsilon > 0$ をとり，$q = \exp_p(\epsilon v)$, $q' = \exp_p(\epsilon v')$ と置く．すると，系 6.12 より $d(p,q) = d(p,q') = \epsilon$ だから，M の 2 点等質性より，$\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ を $\phi(p) = p$ かつ $\phi(q) = q'$ となるようにとれる．この ϕ について

$$\exp_p(\epsilon\, d\phi|_p(v)) = \phi(\exp_p(\epsilon v)) = \phi(q) = q' = \exp_p(\epsilon v')$$

だが，$\exp_p$ は閉球 $\overline{B}_\epsilon(0) \subseteq T_pM$ 上で単射だから，これより $d\phi|_p(v) = v'$ である．よって，M は等方的である．

解答 6.19　M を Riemann 対称空間とする．まず，任意の点 $p \in M$ と制限指数写像 $\exp_p$ の像に属する点 q に対して，$\phi(p) = q$ を満たす $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ が存在することを示す．$v \in T_pM$ が制限指数写像 $\exp_p$ の定義域に属するとして，$q = \exp_p(v)$ と置き，測地線 $\gamma\colon [0,1] \to M$ を

$$\gamma(t) = \exp_p(tv) \qquad (t \in [0,1])$$

と定義する．M の $\gamma(1/2)$ における点鏡映 $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ をとる．すると，$\phi \circ \gamma$ は $(\phi \circ \gamma)(1/2) = \gamma(1/2)$ かつ $(\phi \circ \gamma)'(1/2) = -\gamma'(1/2)$ を満たす測地線だから，測地線の一意性より，$(\phi \circ \gamma)(t) = \gamma(1-t)$ である．特に，

$$\phi(p) = \phi(\gamma(0)) = \gamma(1) = q$$

が成り立つ．これで，主張が示された．

次に，M が等質であることを示す．M は Riemann 対称空間だから連結であり，特に空でない．そこで，1 点 $p_0 \in M$ を固定して

$$X = \{p \in M \mid \text{ある } \phi \in \mathrm{Iso}(M) \text{ が存在して } \phi(p_0) = p\}$$

と置くと，前段の結果より，X と $M \setminus X$ はともに M の開集合である．$p_0 \in X$ より X は空でないから，M の連結性より $X = M$ である．すなわち，M は等質である．

[*15] 順番が前後するが，解答 6.19 では問題 6.18 の結果は使っていないから，問題はない．

[*16] 以下の証明からわかるように，この含意については，M の連結性は不要であり，また 2 点等質性よりも弱く「点 p, q, $q' \in M$ が $d(p,q) = q(p,q')$ を満たすならば，ある $\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ であって $\phi(p) = p$ かつ $\phi(q) = q'$ を満たすものが存在する」と仮定するだけでも十分である．

解答 6.20

解答 6.21　M を完備かつ連結な多様体とし，1 点 $p \in M$ を固定する．p を始点とする射線（ray）が存在しないとすると，任意の単位ベクトル $v \in T_pM$ に対して切断時刻 $t_{\mathrm{cut}}(p,v)$ は有限である．単位ベクトル $v \in T_pM$ に対して $t_{\mathrm{cut}}(p,v)$ を与える関数は連続だから（定理 10.33）[*17]，いまの状況ではこの関数は有界である．したがって，p の単射領域の閉包

$$\overline{\mathrm{ID}(p)} = \{0\} \cup \left\{ v \in T_pM \setminus \{0\} \;\middle|\; |v| \le t_{\mathrm{cut}}\left(p, \frac{v}{|v|}\right) \right\}$$

はコンパクトである．よって，$M = \exp_p(\overline{\mathrm{ID}(p)})$（定理 10.34 (b)）もコンパクトである．対偶をとれば，示すべき主張を得る．

解答 6.22

解答 6.23　(a)　$\mathit{\Gamma}\colon J \times [a,b] \to M$（$J$ は 0 を含む開区間）を γ の変分とし，その変分場を V とする．$\mathit{\Gamma}$ に対する $[a,b]$ の許容分割 $(a_0,\dots,a_k)$ をとる．各 $0 \le i < k$ に対して，

$$E(\mathit{\Gamma}(s,-)|_{[a_i,a_{i+1}]}) = \frac{1}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\partial_t \mathit{\Gamma}|^2\,dt$$

は積分記号下で微分できて

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}E(\mathit{\Gamma}(s,-)|_{[a_i,a_{i+1}]}) &= \frac{1}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d}{ds}|\partial_t \mathit{\Gamma}|^2\,dt \\
&= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle D_s\partial_t\mathit{\Gamma}, \partial_t\mathit{\Gamma}\rangle\,dt \\
&= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle D_t\partial_s\mathit{\Gamma}, \partial_t\mathit{\Gamma}\rangle\,dt
\end{aligned}$$

となり（最後の等号で補題 6.2 を用いた），したがって特に

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(\mathit{\Gamma}(s,-)|_{[a_i,a_{i+1}]}) &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle D_tV, \gamma'\rangle\,dt \\
&= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{d}{dt}\langle V,\gamma'\rangle - \langle V, D_t\gamma'\rangle\right)dt \\
&= \langle V(a_{i+1}), \gamma'(a_{i+1}^-)\rangle - \langle V(a_i), \gamma'(a_i^+)\rangle - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle V, D_t\gamma'\rangle\,dt
\end{aligned}$$

である．よって，$1 \le i \le k-1$ に対して $\mathit{\Delta}_i\gamma' = \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-)$ と置くと，

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(\mathit{\Gamma}(s,-)) = -\int_a^b \langle V, D_t\gamma'\rangle\,dt - \sum_{i=1}^{k-1}\langle V(a_i), \mathit{\Delta}_i\gamma'\rangle + \langle V(b),\gamma'(b)\rangle - \langle V(a),\gamma'(a)\rangle$$

が成り立つ．特に，$\mathit{\Gamma}$ が固有変分ならば

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(\mathit{\Gamma}(s,-)) = -\int_a^b \langle V, D_t\gamma'\rangle\,dt - \sum_{i=1}^{k-1}\langle V(a_i), \mathit{\Delta}_i\gamma'\rangle \tag{$*$}$$

[*17] これは第 6 章の章末問題だから，定理 10.33 を使わない解答が想定されているのかもしれない．なお，証明の以下の部分で用いている定理 10.34 (b) は，完備かつ連結な Riemann 多様体 M の任意の 2 点が最短測地線で結べること（系 6.21）からただちに従う．

である．

以上のことと補題 6.1 より，γ が固有変分に関して E の臨界点であるための必要十分条件は，γ に沿った任意の区分的に滑らかな固有ベクトル場 V に対して $(*)$ の右辺が 0 であることである．定理 6.4 の証明で見たように，これは γ が測地線であることと同値である．

(b)　準備として，次の補題を示す．

補題　Riemann 多様体 M 上の許容曲線 $\sigma\colon [a,b] \to M$ に対して

$$L(\sigma)^2 \leq 2(b-a)E(\sigma)$$

であり，等号成立条件は σ が定速であることである．

補題の証明　Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}
L(\sigma)^2 &= \left(\int_a^b |\sigma'(t)|\,dt\right)^2 \\
&\leq \left(\int_a^b dt\right)\left(\int_a^b |\sigma'(t)|^2\,dt\right) \\
&\leq 2(b-a)E(\sigma)
\end{aligned}$$

であり，等号成立条件は $|\sigma'|$ が定数であること，すなわち σ が定速であることである．　□

本題に入る．許容曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ がエネルギーを最小にするとする．(a) より，γ は定速である．許容曲線 $\sigma\colon [a,b] \to M$ を任意にとる．σ の径数付けをとりかえて定速にしたものを $\sigma_0\colon [a,b] \to M$ とすると，上の補題より

$$L(\gamma)^2 = 2(b-a)E(\gamma) \leq 2(b-a)E(\sigma_0) = L(\sigma_0)^2 = L(\sigma)^2$$

である．よって，γ は最短である．

(c)　γ がエネルギーを最小にするならば，(a) より γ は定速である．逆に，γ が最短かつ定速ならば，上の補題より γ はエネルギーを最小にする．

解答 6.24　$X \in \mathfrak{X}(M)$ を Killing ベクトル場とする．

(a)　$\gamma\colon I \to M$ を 1 点でない区間上で定義された測地線とすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle X|_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle &= \langle D_t X|_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle + \langle X|_{\gamma(t)}, D_t\gamma'(t)\rangle \\
&= \langle \nabla_{\gamma'(t)} X, \gamma'(t)\rangle \\
&= (\nabla X)^\flat(\gamma'(t), \gamma'(t)) \qquad\qquad (t \in I)
\end{aligned}$$

だが，問題 5.22 より $(\nabla X)^\flat$ は反対称だから，上式の最右辺は 0 である．よって，$\langle X|_{\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle$ は t によらず定値である．特に，ある $t \in I$ に対して $X|_{\gamma(t)} \perp \gamma'(t)$ ならば，これはすべての $t \in I$ に対して成り立つ．

(b)　$X|_p = 0$ であるとして，p を中心とする半径 $\epsilon > 0$ の測地球面 $\partial B_\epsilon(p)$ が定義されるとする．点 $q \in \partial B_\epsilon(p)$ を任意にとり，単位接ベクトル $v \in T_pM$ を用いて $q = \exp_p(tv)$ と表す．X は測地線 $t \mapsto \exp_p(tv)$ と $t=0$ において直交するから，(a) より $t=\epsilon$ においても直交する．すなわち，$X|_q \perp \partial_r|_q$ である（∂_r は動径ベクトル場を表す）．Gauss の補題（定理 6.9）より，これは $X|_q \in T_q\partial B_\epsilon(p)$ を意味する．よって，X は $\partial B_\epsilon(p)$ に接する．

(c)　M が奇数次元であるとする．X が孤立零点 $p \in M$ をもつとすると，$\epsilon > 0$ を十分小さくとって，p を中心とする半径 ϵ の測地球面 $\partial B_\epsilon(p)$ が定義され，かつ X がその上に零点をもたないようにできる．(b) より，このとき $\partial B_\epsilon(p)$ 上の零点をもたない滑らかなベクトル場が得られる．ところが，$\partial B_\epsilon(p)$ は偶数次元の球面に微分同相だから，つむじの定理 [1, Thm. 13.32] よりこれは不可能である．よって，背理法より，X は孤立零点をもたない．

解答 6.25　$p \in M$ とする．$(\operatorname{grad} f)|_p \neq 0$ より微分 $df|_p \colon T_pM \to \mathbb{R}$ は 0 でないから全射であり，したがって $(\operatorname{Ker} df|_p)^\perp$ は 1 次元である．任意の $v \in \operatorname{Ker} df|_p$ に対して

$$\langle (\operatorname{grad} f)|_p, v\rangle = df|_p(v) = 0$$

だから，$(\operatorname{grad} f)|_p \in (\operatorname{Ker} df|_p)^\perp$ である．また，$|(\operatorname{grad} f)|_p| = 1$ かつ

$$df|_p((\operatorname{grad} f)|_p) = \langle (\operatorname{grad} f)|_p, (\operatorname{grad} f)|_p\rangle = 1$$

である．よって，$df|_p$ は $(\operatorname{Ker} df|_p)^\perp$ から $\mathbb{R}$ への線型同型を与える．これで，f が Riemann 沈め込みであることが示された．

解答 6.26　M の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

(a)　S を M の空でない開集合とし*18，$p \in M \setminus S$ とする．距離空間の一般論より，$d(p,q) = d(p,S)$ を満たす $q \in S$ が存在し，系 6.21 より，p から q への最短測地線 γ が存在する．この γ が条件を満たす．

(b)　S が M の埋め込まれた閉部分多様体であるとし，$\gamma\colon [a,b] \to M$（$a < b$）を p から $q \in S$ への測地線分であって $L(\gamma) = d(p,q)$ を満たすものとする．q の一様 δ-正規近傍 W をとり（補題 6.14），$a_0 \in [a,b)$ を b に十分近くとって $\gamma([a_0,b]) \subseteq W$ となるようにする．$p_0 = \gamma(a_0)$ と置くと，p_0 を中心とする半径 δ の測地開球 U が定義され，$\gamma([a_0,b]) \subseteq U$ となる．U 上の動径距離関数を $r\colon U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，動径ベクトル場を $\partial_r \in \mathfrak{X}(U \setminus \{p_0\})$ と書く．すると，

$$d(p,q) = d(p,p_0) + d(p_0,q) = d(p,p_0) + r(q)$$

であり，任意の $q' \in S \cap U$ に対して

$$\begin{aligned} d(p,q) &\leq d(p,q') \\ &\leq d(p,p_0) + d(p_0,q') \\ &= d(p,p_0) + r(q') \end{aligned}$$

だから，$r|_{S\cap U}$ は点 q において最小値をとる．したがって，任意の $v \in T_qS$ に対して

$$0 = dr_q(v) = \langle (\operatorname{grad} f)|_q, v\rangle$$

だが，系 6.10 と γ が測地線であることより

$$(\operatorname{grad} f)|_q = \partial_r|_q = \gamma'(b)$$

だから，$\gamma'(b)$ は S に対して直交する．これで，主張が示された．

(c)　$M = \mathbb{R}$，$S = \mathbb{R}_{>0}$ とすると，$d(-1,S) = 1$ だが，任意の $x \in S$ に対して $d(-1,x) = x + 1 > 1$ だから，-1 から S の点への長さ 1 の測地線は存在しない．

*18 「S が空でない」という条件は，本には書かれていないが，明らかに必要である．

解答 6.27　準備として，次の補題を示す．

補題　M を Riemann 多様体，$f\colon M \to \mathbb{R}$ を滑らかな局所距離関数，$\gamma\colon I \to M$ を 1 点でない区間上で定義された単位速測地線とする．ある $t_0 \in I$ が存在して $\gamma'(t_0) = (\operatorname{grad} f)|_{\gamma(t_0)}$ となるならば，γ は $\operatorname{grad} f$ の積分曲線である．

補題の証明　I の部分集合 X を

$$X = \{t \in I \mid \gamma'(t) = (\operatorname{grad} f)|_{\gamma(t)}\}$$

と定める．γ と f は滑らかだから X は I の閉集合であり，仮定より X は空でない．X が I の開集合であることを示す．$t_0 \in X$，すなわち $\gamma'(t_0) = (\operatorname{grad} f)|_{\gamma(t_0)}$ とする．t_0 を含む開区間上で定義された $\operatorname{grad} f$ の積分曲線 $\sigma\colon J \to M$ であって $\sigma(t_0) = \gamma(t_0)$ を満たすものがとれる．この σ は，命題 6.32 より測地線であり，かつ

$$\sigma'(t_0) = (\operatorname{grad} f)|_{\sigma(t_0)} = (\operatorname{grad} f)|_{\gamma(t_0)} = \gamma'(t_0)$$

を満たす．したがって，測地線の一意性より $I \cap J$ 上で $\gamma = \sigma$ となるから，$I \cap J \subseteq X$ である．よって，X は I の開集合である．以上より，X は I の空でない開かつ閉な部分集合だから，I の連結性より $X = I$ である．すなわち，γ は $\operatorname{grad} f$ の積分曲線である．これで，主張が示された．　□

本題に入る．M を完備かつ連結な Riemann 多様体，S を M の閉集合とする．また，$f\colon M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は連続関数であり[*19]，$f^{-1}(\{0\}) = S$ を満たし，$M \setminus S$ 上で滑らかかつ $|\operatorname{grad} f| = 1$ であるとする．

まず，S が空でないことを示す．S が空であるとすると，f は M 上の局所距離関数である．そこで，1 点 $p \in M$ を固定して，γ を $\gamma(0) = p$ かつ $\gamma'(0) = (\operatorname{grad} f)|_p$ を満たす測地線とすると，M の完備性より γ は $\mathbb{R}$ 上で定義され，上の補題より γ は $\operatorname{grad} f$ の積分曲線である．したがって

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df|_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \langle (\operatorname{grad} f)|_{\gamma(t)}, (\operatorname{grad} f)|_{\gamma(t)} \rangle = 1$$

だから，$a \in \{\pm 1\}$ と $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$f(\gamma(t)) = at + b \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書ける．ところが，これは $f^{-1}(\{0\}) = S = \emptyset$ に反する．よって，背理法より，S は空でない．

次に，M の Riemann 計量が定める距離を d と書き，M 上で $f = d(-, S)$ であることを示す．定理 6.34 で $U = M$ とした場合を考える．その証明では，各点 $p \in S$ に対して $\epsilon_p, \delta_p > 0$ を，p を中心とする半径 ϵ_p の測地開球が定義されかつ一様 δ_p-正規近傍となるようにとり，このとき

$$U_0 = \bigcup_{p \in S} \{q \in M \mid d(p, q) < \epsilon_p\}$$

上で $f = d(-, S)$ であることを示している．ところが，証明の第 2 段以降で使われている ϵ_p の性質は，「p との Riemann 距離が ϵ_p 以下の任意の点 q に対して，制限指数写像 $\exp_q$ は $B_{\epsilon_p}(0)$ 上で定義されている」ということのみである．したがって，M が完備ならば，$\epsilon_p > 0$ をどのようにとっても，上式で定まる U_0 上で $f = d(-, S)$ となる．M は連結で S は空でないから，これより，M 上で $f = d(-, S)$ が成り立つ．

[*19] 本には「$f\colon M \to \mathbb{R}$」と書かれており，「$f \geq 0$」という条件は書かれていないが，この条件は明らかに必要である．

解答 6.28　M の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

(a)　$m \to \infty$ のとき，

$$\begin{aligned} d(\phi_m(p_0), q_0) &\leq d(\phi_m(p_0), \phi_m(p_m)) + d(\phi_m(p_m), q_0) \\ &\leq d(p_0, p_m) + d(\phi_m(p_m), q_0) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

だから，$\phi_m(p_0) \to q_0$ である．

(b)　$1 \leq i \leq n$ を固定する．(a) より $m \to \infty$ のとき $\phi_m(p_0) \to q_0$ であり，各 $d\phi_m|_{p_0}(b_i) \in T_{\phi_m(p_0)}M$ は単位接ベクトルだから，$\{d\phi_m|_{p_0}(b_i) \mid m \in \mathbb{N}\}$ は接束 TM において相対コンパクトである．したがって，ある部分列 $(\phi_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ が存在し，$(d\phi_m|_{p_0}(b_i))_{m\in\mathbb{N}}$ は TM において収束して，極限 $b'_i = \lim_{j\to\infty} d\phi_{m_j}|_{p_0}(b_i)$ は点 q_0 における単位接ベクトルになる．この操作を繰り返すことで，$1 \leq i \leq n$ に対してこれが成り立つとしてよい．このとき，$1 \leq i, i' \leq n$ に対して

$$\langle b'_i, b'_{i'} \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle d\phi_{m_j}|_{p_0}(b_i), d\phi_{m_j}|_{p_0}(b_{i'}) \rangle = \langle b_i, b_{i'} \rangle = \delta_{ii'}$$

だから，$(b'_1, \dots, b'_n)$ は $T_{q_0}M$ の正規直交基底である．そこで，等長線型同型 $A\colon T_{p_0}M \to T_{q_0}M$ を

$$Ab_i = b'_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

によって定めると，各 $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} \phi_{m_j}(p_i) &= \phi_{m_j}(\exp_{p_0}(\epsilon b_i)) \\ &= \exp_{\phi_{m_j}(p_0)}(\epsilon d\phi_{m_j}|_{p_0}(b_i)) \\ &\to \exp_{q_0}(\epsilon b'_i) \\ &= \exp_{q_0}(\epsilon A b_i) \qquad\qquad (j \to \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ（第二の等号は命題 5.20 から，極限移行の部分は (a) と b'_i の定義から従う）．これで，主張が示された．

(c)　$v = \sum_{i=1}^n v^i b_i \in T_{p_0}M$（$v^i \in \mathbb{R}$）とする．$j \to \infty$ のとき，(b) における等長線型同型 $A\colon T_{p_0}M \to T_{q_0}M$ の定義より

$$d\phi_{m_j}|_{p_0}(v) = \sum_{i=1}^n v^i d\phi_{m_j}|_{p_0}(b_i) \to \sum_{i=1}^n v^i b'_i = Av$$

だから，(a) と合わせて

$$\phi_{m_j}(\exp_{p_0}(v)) = \exp_{\phi_{m_j}(p_0)}(d\phi_{m_j}|_{p_0}(v)) \to \exp_{q_0}(Av)$$

を得る．M が完備かつ連結であることより制限指数写像 $\exp_{p_0}\colon T_{p_0}M \to M$，$\exp_{q_0}\colon T_{q_0}M \to M$ は全射だから（系 6.21），上式より，写像 $\phi\colon M \to M$ を

$$\phi(p) = \lim_{j\to\infty} \phi_{m_j}(p) \qquad (p \in M)$$

と定義でき，これは全射になる．さらに，任意の $p, q \in M$ に対して

$$d(\phi(p), \phi(q)) = \lim_{j\to\infty} d(\phi_{m_j}(p), \phi_{m_j}(q)) = d(p, q)$$

である．よって，問題 6.7 より，$\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ である．

(d)

解答 6.29

解答 6.30

解答 6.31

7 Curvature

解答 7.1　$f \in C^\infty(M)$ と $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\
&= \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Z + f\nabla_X Z) - [X,Y]f - f\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z \\
&\quad - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - [X,Y]f - f\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= fR(X,Y)Z
\end{aligned}$$

だから，$R(X,Y)Z$ は Z に関して $C^\infty(M)$-線型である．

解答 7.2　$n = \dim M$ と置く．$i, j, k \in \{1,\dots,n\}$ に対して

$$\begin{aligned}
R(\partial_i,\partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{jk}^m\partial_m\right) - \nabla_{\partial_j}\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m\partial_m\right) \\
&= \sum_{m=1}^n ((\partial_i\Gamma_{jk}^m)\partial_m + \Gamma_{jk}^m\nabla_{\partial_i}\partial_m - (\partial_j\Gamma_{ik}^m)\partial_m - \Gamma_{ik}^m\nabla_{\partial_i}\partial_m) \\
&= \sum_{m=1}^n \left((\partial_i\Gamma_{jk}^m)\partial_m + \Gamma_{jk}^m\sum_{l=1}^n\Gamma_{im}^l\partial_l - (\partial_j\Gamma_{ik}^m)\partial_m - \Gamma_{ik}^m\sum_{l=1}^n\Gamma_{jm}^l\partial_l\right) \\
&= \sum_{l=1}^n\left(\partial_i\Gamma_{jk}^l - \partial_j\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n(\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l)\right)\partial_l
\end{aligned}$$

だから，$i, j, k, l \in \{1,\dots,n\}$ に対して

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i\Gamma_{jk}^l - \partial_j\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n(\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l)$$

である．

解答 7.3　M を局所対称空間とする．任意の点 $p \in M$ に対して，p の開近傍 U と U の p における点鏡映 $\phi\colon U \to U$ がとれる．この ϕ について，$d\phi|_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$ であり，また ϕ は等長同型だから $\phi^*(\nabla Rm|_U) = \nabla Rm|_U$ である．したがって，任意の $x, y, z, v, w \in T_pM$ に対して

$$(\nabla Rm)(x,y,z,v,w) = (\nabla Rm)(-x,-y,-z,-v,-w) = -(\nabla Rm)(x,y,z,v,w),$$

すなわち $(\nabla Rm)(x,y,z,v,w) = 0$ である．よって，$\nabla Rm = 0$ である．

解答 7.4　命題 7.4（証明は問題 7.2）より

$$Rm_{ijkl} = \sum_{m=1}^{n} g_{lm} R_{ijk}{}^{m} = \sum_{m=1}^{n} g_{lm} \left(\partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik} + \sum_{\mu=1}^{n} (\Gamma^\mu_{jk} \Gamma^m_{i\mu} - \Gamma^\mu_{ik} \Gamma^m_{j\mu}) \right)$$

であり，正規座標の性質（命題 5.24 (d)）より $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ だから，

$$Rm_{ijkl}(p) = \sum_{m=1}^{n} g_{lm}(p)(\partial_i \Gamma^m_{jk}(p) - \partial_j \Gamma^m_{ik}(p)) \tag{$*$}$$

である．また，系 5.11 より

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} g^{m\mu} (\partial_j g_{k\mu} + \partial_k g_{j\mu} - \partial_\mu g_{jk})$$

だから

$$\partial_i \Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} (\partial_i g^{m\mu} (\partial_j g_{k\mu} + \partial_k g_{j\mu} - \partial_\mu g_{jk}) + g^{m\mu} (\partial_i \partial_j g_{k\mu} + \partial_i \partial_k g_{j\mu} - \partial_i \partial_\mu g_{jk}))$$

であり，正規座標の性質（命題 5.24 (e)）より $\partial_i g^{m\mu}(p) = 0$ だから，

$$\partial_i \Gamma^m_{jk}(p) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} g^{m\mu}(p) (\partial_i \partial_j g_{k\mu}(p) + \partial_i \partial_k g_{j\mu}(p) - \partial_i \partial_\mu g_{jk}(p))$$

である．上式から上式で i と j を入れ替えたものを辺々引くと，

$$\partial_i \Gamma^m_{jk}(p) - \partial_j \Gamma^m_{ik}(p) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} g^{m\mu}(p) (\partial_i \partial_k g_{j\mu}(p) - \partial_j \partial_k g_{i\mu}(p) - \partial_i \partial_\mu g_{jk}(p) + \partial_j \partial_\mu g_{ik}(p)) \tag{$**$}$$

となる．($**$) を ($*$) に代入して，

$$\begin{aligned}
Rm_{ijkl}(p) &= \frac{1}{2} \sum_{m,\mu=1}^{n} g_{lm}(p) g^{m\mu}(p) (\partial_i \partial_k g_{j\mu}(p) - \partial_j \partial_k g_{i\mu}(p) - \partial_i \partial_\mu g_{jk}(p) + \partial_j \partial_\mu g_{ik}(p)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} \delta^\mu_l (\partial_i \partial_k g_{j\mu}(p) - \partial_j \partial_k g_{i\mu}(p) - \partial_i \partial_\mu g_{jk}(p) + \partial_j \partial_\mu g_{ik}(p)) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_k g_{jl}(p) - \partial_j \partial_k g_{il}(p) - \partial_i \partial_l g_{jk}(p) + \partial_j \partial_l g_{ik}(p))
\end{aligned}$$

を得る．これが示すべきことであった．

解答 7.5 各 $k, l, i \in \{1, \dots, n\}$ に対して，$R(E_k, E_l)E_i$ を接続 1-形式（問題 4.14）を用いて展開すると，

$$
\begin{aligned}
&R(E_k, E_l)E_i \\
&= \nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i - \nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{[E_k,E_l]}E_i \\
&= \sum_{j'} \nabla_{E_k}({\omega_i}^{j'}(E_l)E_{j'}) - \sum_{j'} \nabla_{E_l}({\omega_i}^{j'}(E_k)E_{j'}) - \sum_j {\omega_i}^j([E_k, E_l])E_j \\
&= \sum_{j'}({\omega_i}^{j'}(E_l)\nabla_{E_k}E_{j'} + E_k({\omega_i}^{j'}(E_l))E_{j'}) - \sum_{j'}({\omega_i}^{j'}(E_k)\nabla_{E_l}E_{j'} + E_l({\omega_i}^{j'}(E_k))E_{j'}) \\
&\qquad - \sum_j {\omega_i}^j([E_k, E_l])E_j \\
&= \sum_{j'}\left({\omega_i}^{j'}(E_l)\sum_j {\omega_{j'}}^j(E_k)E_j + E_k({\omega_i}^{j'}(E_l))E_{j'}\right) \\
&\qquad - \sum_{j'}\left({\omega_i}^{j'}(E_k)\sum_j {\omega_{j'}}^j(E_l)E_j + E_l({\omega_i}^{j'}(E_k))E_{j'}\right) \\
&\qquad - \sum_j {\omega_i}^j([E_k, E_l])E_j \\
&= \sum_j\left(\sum_{j'}({\omega_i}^{j'}(E_l){\omega_{j'}}^j(E_k) - {\omega_i}^{j'}(E_k){\omega_{j'}}^j(E_l)) + E_k({\omega_i}^j(E_l)) - E_l({\omega_i}^j(E_k)) - {\omega_i}^j([E_k, E_l])\right)E_j \\
&= \sum_j\left(-\sum_{j'}({\omega_i}^{j'} \wedge {\omega_{j'}}^j)(E_k, E_l) + d{\omega_i}^j(E_k, E_l)\right)E_j
\end{aligned}
$$

となる．よって，曲率 2-形式 ${\Omega_i}^j$ は任意の $k, l \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$
{\Omega_i}^j(E_k, E_l) = d{\omega_i}^j(E_k, E_l) - \sum_{j'}({\omega_i}^{j'} \wedge {\omega_{j'}}^j)(E_k, E_l)
$$

を満たし，したがって

$$
{\Omega_i}^j = d{\omega_i}^j - \sum_{j'} {\omega_i}^{j'} \wedge {\omega_{j'}}^j
$$

である．

解答 7.6

解答 7.7

解答 7.8

解答 7.9 (e) V の基底を 1 つ固定する．$T \in \mathscr{R}(V^*)$，$h \in \Sigma^2(V^*)$ と V 上のスカラー積 g に対して，

$$\begin{aligned}
\langle T, h \owedge g\rangle_g &= \sum_{i,i',j,j',k,k',l,l'} g^{ii'}g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'j'k'l'}(h \owedge g)_{ijkl} \\
&= \sum_{i,i',j,j',k,k',l,l'} g^{ii'}g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'j'k'l'}(h_{il}g_{jk} + h_{jk}g_{il} - h_{ik}g_{jl} - h_{jl}g_{ik}) \\
&= \sum_{i,i',j',k,k',l,l'} g^{ii'}\delta_k^{j'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'j'k'l'}h_{il} + \sum_{i',j,j',k,k',l,l'} \delta_l^{i'}g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'j'k'l'}h_{jk} \\
&\quad - \sum_{i,i',j',k,k',l,l'} g^{ii'}\delta_l^{j'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'j'k'l'}h_{ik} - \sum_{i',j,j',k,k',l,l'} \delta_k^{i'}g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'j'k'l'}h_{jl} \\
&= \sum_{i,i',k,k',l,l'} g^{ii'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'kk'l'}h_{il} + \sum_{j,j',k,k',l,l'} g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{lj'k'l'}h_{jk} \\
&\quad - \sum_{i,i',k,k',l,l'} g^{ii'}g^{kk'}g^{ll'}T_{i'lk'l'}h_{ik} - \sum_{j,j',k,k',l,l'} g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{kj'k'l'}h_{jl} \\
&= \sum_{i,i',k,k',l,l'} g^{ii'}g^{kk'}g^{ll'}T_{k'l'i'k}h_{il} + \sum_{j,j',k,k',l,l'} g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{lj'k'l'}h_{jk} \\
&\quad + \sum_{i,i',k,k',l,l'} g^{ii'}g^{kk'}g^{ll'}T_{li'k'l'}h_{ik} + \sum_{j,j',k,k',l,l'} g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}T_{kj'l'k'}h_{jl} \\
&= \sum_{i,i',l,l'} g^{ii'}g^{ll'}(\mathrm{tr}_g\,T)_{l'i'}h_{il} + \sum_{j,j',k,k'} g^{jj'}g^{kk'}(\mathrm{tr}_g\,T)_{j'k'}h_{jk} \\
&\quad + \sum_{i,i',k,k'} g^{ii'}g^{kk'}(\mathrm{tr}_g\,T)_{i'k'}h_{ik} + \sum_{j,j',l,l'} g^{jj'}g^{ll'}(\mathrm{tr}_g\,T)_{j'l'}h_{jl} \\
&= 4\langle \mathrm{tr}_g\,T, h\rangle_g
\end{aligned}$$

である．

(f) 補題 7.22 (a) より，$h \in \Sigma^2(V^*)$ と V 上のスカラー積 g に対して，$h \owedge g \in \mathscr{R}(V^*)$ である．そこで，(e) で $T = h \owedge g$ と置き，さらに $\mathrm{tr}_g(h \owedge g) = (n-2)h + (\mathrm{tr}_g\,h)g$（補題 7.22 (c)）を用いれば，

$$\begin{aligned}
\langle h \owedge g, h \owedge g\rangle_g &= 4\langle \mathrm{tr}_g(h \owedge g), h\rangle_g \\
&= 4(n-2)\langle h, h\rangle_g + 4(\mathrm{tr}_g\,h)\langle g, h\rangle_g \\
&= 4(n-2)\langle h, h\rangle_g + 4(\mathrm{tr}_g\,h)^2
\end{aligned}$$

を得る．特に，g が正定値ならば，

$$|h \owedge g|_g^2 = 4(n-2)|h|_g^2 + 4(\mathrm{tr}_g\,h)^2$$

である．

解答 7.10

解答 7.11

解答 7.12

解答 7.13 問題 5.8 (b) で示したように，G 上の左不変ベクトル場 X, Y に対して

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

である．このことと Jacobi 恒等式より，G 上の左不変ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= -\frac{1}{4}[Z,[X,Y]] + \frac{1}{2}[Z,[X,Y]] \\ &= \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]\end{aligned}$$

が成り立つ．

解答 7.14　準備として，次の補題を示す．

補題　M を多様体，$\widetilde{M}$ を Riemann 多様体，$\pi\colon \widetilde{M} \to M$ を滑らかな沈め込みとする．X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ と垂直ベクトル場 $A \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ に対して，次が成り立つ．

(a) $\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} A, \widetilde{Y} \rangle = -\langle A, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V \rangle/2$.
(b) $\langle \widetilde{\nabla}_A \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle = -\langle A, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V \rangle/2$.

補題の証明　(a)　Koszul の公式（系 5.11 (a)）より，

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} A, \widetilde{Y} \rangle = \frac{1}{2}(\widetilde{X}\langle A, \widetilde{Y}\rangle + A\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle - \widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, A\rangle - \langle A, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle - \langle \widetilde{Y}, [A, \widetilde{X}]\rangle + \langle \widetilde{X}, [\widetilde{Y}, A]\rangle)$$

である．A は垂直であり，問題 5.6 (a) より $[A, \widetilde{X}]$, $[\widetilde{Y}, A]$ も垂直だから，$\langle A, \widetilde{Y}\rangle$, $\langle \widetilde{X}, A\rangle$, $\langle \widetilde{Y}, [A, \widetilde{X}]\rangle$, $\langle \widetilde{X}, [\widetilde{Y}, A]\rangle$ はすべて 0 である．また，解答 5.6 (b) で示した補題より $A\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle = 0$ である．よって，上式より

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} A, \widetilde{Y} \rangle = -\frac{1}{2}\langle A, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle = -\frac{1}{2}\langle A, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V\rangle$$

となる．

(b)　Koszul の公式（系 5.11 (a)）より，

$$\langle \widetilde{\nabla}_A \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle = \frac{1}{2}(A\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle - \widetilde{X}\langle \widetilde{Y}, A\rangle - \widetilde{Y}\langle A, \widetilde{X}\rangle - \langle \widetilde{X}, [A, \widetilde{Y}]\rangle - \langle \widetilde{Y}, [\widetilde{X}, A]\rangle + \langle A, [\widetilde{Y}, \widetilde{X}]\rangle)$$

である．A は垂直であり，問題 5.6 (a) より $[A, \widetilde{Y}]$, $[\widetilde{X}, A]$ も垂直だから，$\langle \widetilde{Y}, A\rangle$, $\langle A, \widetilde{X}\rangle$, $\langle \widetilde{X}, [A, \widetilde{Y}]\rangle$, $\langle \widetilde{Y}, [\widetilde{X}, A]\rangle$ はすべて 0 である．また，解答 5.6 (b) で示した補題より $A\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle = 0$ である．よって，上式より

$$\langle \widetilde{\nabla}_A \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle = \frac{1}{2}\langle A, [\widetilde{Y}, \widetilde{X}]\rangle = -\frac{1}{2}\langle A, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V\rangle$$

となる．□

本題に入る．M, $\widetilde{M}$ の曲率をそれぞれ R, $\widetilde{R}$ と書く．W, X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする．問題 5.6 (b) より，

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}(\widetilde{\nabla_X Y}) + \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V) \\ &= \widetilde{\nabla_W\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\widetilde{W}, \widetilde{\nabla_X Y}]^V + \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V)\end{aligned}$$

である．W と X を入れ替えれば，

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla_X\nabla_W Y} + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{\nabla_W Y}]^V + \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}([\widetilde{W}, \widetilde{Y}]^V)$$

となる．一方で，$[\widetilde{W},\widetilde{X}]=\widetilde{[W,X]}+[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V$（問題 5.6 (a)）と問題 5.6 (b) より，

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]}\widetilde{Y}&=\widetilde{\nabla}_{\widetilde{[W,X]}}\widetilde{Y}+\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V}\widetilde{Y}\\&=\widetilde{\nabla_{[W,X]}Y}+\frac{1}{2}[\widetilde{[W,X]},\widetilde{Y}]^V+\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V}\widetilde{Y}\end{aligned}$$

である．これら 3 式より，

$$\begin{aligned}&\widetilde{R}(\widetilde{W},\widetilde{X})\widetilde{Y}\\&=\widetilde{\nabla_W\nabla_XY}-\widetilde{\nabla_X\nabla_WY}-\widetilde{\nabla_{[W,X]}Y}+\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}([\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V)-\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}([\widetilde{W},\widetilde{Y}]^V)-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V}\widetilde{Y}\\&\qquad+(\text{垂直ベクトル場})\\&=\widetilde{R(W,X)Y}+\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}([\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V)-\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}([\widetilde{W},\widetilde{Y}]^V)-\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V}\widetilde{Y}\\&\qquad+(\text{垂直ベクトル場})\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$\widetilde{Z}$ が水平であることと問題 5.6 (a) の第一の主張に注意して，上の補題を用いれば，

$$\begin{aligned}&\widetilde{Rm}(\widetilde{W},\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z})\\&=\langle\widetilde{R}(\widetilde{W},\widetilde{X})\widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle\\&=\langle\widetilde{R(W,X)Y},\widetilde{Z}\rangle+\frac{1}{2}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}([\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V),\widetilde{Z}\rangle-\frac{1}{2}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}([\widetilde{W},\widetilde{Y}]^V),\widetilde{Z}\rangle-\langle\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle\\&=Rm(W,X,Y,Z)\circ\pi+\frac{1}{2}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}}([\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V),\widetilde{Z}\rangle-\frac{1}{2}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}([\widetilde{W},\widetilde{Y}]^V),\widetilde{Z}\rangle-\langle\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle\\&=Rm(W,X,Y,Z)\circ\pi-\frac{1}{4}\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V,[\widetilde{W},\widetilde{Z}]^V\rangle+\frac{1}{4}\langle[\widetilde{W},\widetilde{Y}]^V,[\widetilde{X},\widetilde{Z}]^V\rangle+\frac{1}{2}\langle[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V,[\widetilde{Y},\widetilde{Z}]^V\rangle\end{aligned}$$

となる．移項すれば，示すべき式

$$\begin{aligned}&Rm(W,X,Y,Z)\circ\pi\\&=\widetilde{Rm}(\widetilde{W},\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z})-\frac{1}{2}\langle[\widetilde{W},\widetilde{X}]^V,[\widetilde{Y},\widetilde{Z}]^V\rangle-\frac{1}{4}\langle[\widetilde{W},\widetilde{Y}]^V,[\widetilde{X},\widetilde{Z}]^V\rangle+\frac{1}{4}\langle[\widetilde{W},\widetilde{Z}]^V,[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^V\rangle\end{aligned}$$

を得る．

解答 7.15　(a)　p のまわりの滑らかな局所枠 (E,F) であって，$\langle E,E\rangle=\langle F,F\rangle=0$ かつ $\langle E,F\rangle=2$ を満たすものを構成する[*20]．命題 2.66 より，p のまわりの滑らかな標準順序の正規直交枠 (e,f) が存在する．この (e,f) は $\langle e,e\rangle=1$，$\langle f,f\rangle=-1$，$\langle e,f\rangle=0$ を満たすから，

$$E=e+f,\qquad F=e-f$$

と置けば，(E,F) は条件を満たす．

(b)　ベクトル場の一般論（命題 A.45）より，p のまわりの 2 つのチャート $(U;u^1,u^2)$, $(U;v^1,v^2)$ を，U 上で $E=\partial/\partial u^1$ かつ $F=\partial/\partial v^1$ となるようにとれる．$E|_p\neq 0$ だから，Ev^1 または Ev^2 は p において 0 でない．$Ev^1(p)\neq 0$ かつ $Ev^2(p)=0$ のならば v^1+v^2 を改めて v^2 と置き直すことで，$Ev^2(p)\neq 0$ としてよい．さらに，必要ならば v^2 の符号を反転させて，$Ev^2(p)>0$ としてよい．同様に，$Fv^1(p)>0$ としてよい．これらを用いて，

$$x=u^2+v^2,\qquad y=u^2-v^2$$

[*20] 本での記号は (E_1,E_2) だが，見やすさのため，(E,F) とした．また，本では $\langle E,F\rangle=2$ は主張されていないが，(b) で用いるため，これも示しておく．

と定める．$E=\partial/\partial u^1$，$F=\partial/\partial v^1$ および $\partial u^2/\partial u^1=\partial v^2/\partial v^1=0$ より

$$Ex = Ev^2, \qquad Fx = Fu^2, \qquad Ey = -Ev^2, \qquad Fy = Fu^2$$

だから，

$$\det\begin{pmatrix} Ex & Fx \\ Ey & Fy \end{pmatrix} = 2(Ev^2)(Fu^2)$$

であり，これは p において正の値をとる．(E_p, F_p) は T_pM の基底だから，逆写像定理より，U を小さくとり直せば，$(U;x,y)$ の p のまわりのチャートとなる．このチャート $(U;x,y)$ について，

$$\begin{aligned} dx^{\otimes 2} - dy^{\otimes 2} &= (du^2+dv^2)^{\otimes 2} - (du^2-dv^2)^{\otimes 2} \\ &= 2(du^2\otimes dv^2 + dv^2\otimes du^2) \end{aligned}$$

だから，$du^2(E)=\partial u^2/\partial u^1=0$，$dv^2(F)=\partial v^2/\partial v^1=0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} (dx^{\otimes 2} - dy^{\otimes 2})(E,E) &= 2(du^2(E)dv^2(E) + dv^2(E)du^2(E)) = 0, \\ (dx^{\otimes 2} - dy^{\otimes 2})(F,F) &= 2(du^2(F)dv^2(F) + dv^2(F)du^2(F)) = 0, \\ (dx^{\otimes 2} - dy^{\otimes 2})(E,F) &= 2(du^2(E)dv^2(F) + dv^2(E)du^2(F)) = 2(Ev^2)(Fu^2) \end{aligned}$$

を得る．一方で，(E,F) は $g(E,E)=g(F,F)=0$ かつ $g(E,F)=2$ を満たす局所枠だったから，$f=(Ev^2)(Fu^2)$ と置けば，U 上で $dx^{\otimes 2}-dy^{\otimes 2}=fg$ である．さらに，$f(p)=Ev^2(p)Fu^2(p)>0$ だから，必要ならば U を小さくとり直して，U 上で $f>0$ としてよい．このとき，$(U;x,y)$ は条件を満たすチャートである．

(c)　(b) で構成したチャート $(U;x,y)$ は，p の開近傍 U と $\mathbb{R}^{1,1}$ の開集合との間の共形同値を与える．任意の $p\in M$ に対してこのようなチャートが存在するから，M は局所共形平坦である．

8 Riemannian Submanifolds

解答 8.1　$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準座標を $(x^1,\dots,x^{n+1})$，M のグラフ座標を $u=(u^1,\dots,u^n)$ と書く．

(a)　M 上の上向きの単位法ベクトル場 N は，

$$N|_{(u,f(u))} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i f(u)}{F(u)}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{(u,f(u))} + \frac{1}{F(u)}\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\bigg|_{(u,f(u))} \qquad (u\in U)$$

と書ける．ここで，

$$F(u) = \sqrt{1+\sum_{k=1}^{n}|\partial_k f(u)|^2} \qquad (u\in U)$$

と置いた．N に伴う形状作用素を s，$\mathbb{R}^{n+1}$ の Euclid 接続が誘導する $T\mathbb{R}^{n+1}|_M$ 上の接続を $\overline{\nabla}$ と書くと，超平面に対する Weingarten 方程式（定理 8.13 (c)）より，$1\le j\le n$ に対して

$$s\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = -\overline{\nabla}_{\partial/\partial u^j}N = \sum_{i=1}^{n}\partial_j\left(\frac{\partial_i f}{F}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_M - \partial_j\left(\frac{1}{F}\right)\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\bigg|_M$$

である．各 j に対して

$$\frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_M + \partial_j f\,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\bigg|_M$$

だから，枠 $(\partial/\partial u^1,\dots,\partial/\partial u^n)$ に関する $s(\partial/\partial u^j)$ の i-成分は

$$\begin{aligned}\partial_j\left(\frac{\partial_i f}{F}\right) &= -\frac{\partial_j F}{F^2}\cdot\partial_i f+\frac{1}{F}\cdot\partial_j\partial_i f\\ &= -\frac{1}{F^3}\partial_i f\sum_{k=1}^n\partial_k f\cdot\partial_j\partial_k f+\frac{1}{F}\partial_j\partial_i f\\ &= -\left(1+\sum_{k=1}^n|\partial_k f|^2\right)^{-3/2}\partial_i f\sum_{k=1}^n\partial_k f\cdot\partial_j\partial_k f+\left(1+\sum_{k=1}^n|\partial_k f|^2\right)^{-1/2}\partial_j\partial_i f\end{aligned}$$

である．これが，枠 $(\partial/\partial u^1,\dots,\partial/\partial u^n)$ に関する形状作用素 s の行列表示の (i,j)-成分である．

(b)　$f(u)=|u|^2$（$u\in U$）のとき，枠 $(\partial/\partial u^1,\dots,\partial/\partial u^n)$ に関する形状作用素 s の行列表示の (i,j)-成分は，(a) より

$$\begin{aligned}&-\left(1+\sum_{k=1}^n|\partial_k f|^2\right)^{-3/2}\partial_i f\sum_{k=1}^n\partial_k f\cdot\partial_j\partial_k f+\left(1+\sum_{k=1}^n|\partial_k f|^2\right)^{-1/2}\partial_j\partial_i f\\ &= -(1+4|u|^2)^{-3/2}2u^i\sum_{k=1}^n 2u^k\cdot 2\delta_{jk}+(1+4|u|^2)^{-1/2}\cdot 2\delta_{ij}\\ &= -8(1+4|u|^2)^{-3/2}u^iu^j+2(1+4|u|^2)^{-1/2}\delta_{ij}\end{aligned}$$

である．したがって，$A_u=(u^iu^j)_{1\le i,j\le n}$ と置くと，枠 $(\partial/\partial u^1,\dots,\partial/\partial u^n)$ に関する形状作用素 s の行列表示は

$$-8(1+4|u|^2)^{-3/2}A_u+2(1+4|u|^2)^{-1/2}I$$

である（I は n 次単位行列を表す）．u を列ベクトルとみなすと $A_u=uu^T$ だから，$Au=|u|^2u$ であり，u に直交するベクトル $v\in\mathbb{R}^n$ に対しては $Av=0$ である．したがって，A の固有値は，$|u|^2$（重複度 1）と 0（重複度 $n-1$）である．よって，点 $(u,f(u))$（$u\in U$）における M の主曲率は，

- $-8(1+4|u|^2)^{-3/2}|u|^2+2(1+4|u|^2)^{-1/2}=2(1+4|u|^2)^{-3/2}$（重複度 1）と
- $2(1+4|u|^2)^{-1/2}$（重複度 $n-1$）

である[*21]．

解答 8.2

解答 8.3　(a)　$\mathbb{R}^3$ の標準座標を (x,y,z) と書く．S_C の径数付け

$$X(t,\theta)=(a(t)\cos\theta,a(t)\sin\theta,b(t))$$

は TS_C に対する枠 $(\partial/\partial t,\partial/\partial\theta)$ を定め，これらのベクトル場は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=a'(t)(\cos\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{S_C}+a'(t)(\sin\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{S_C}+b'(t)\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{S_C},\\ \frac{\partial}{\partial\theta}&=-a(t)(\sin\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{S_C}+a(t)(\cos\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{S_C}\end{aligned}$$

*21 正確には，これは $n\ge 1$ の場合の結果である．$n=0$ の場合は，主曲率は存在しない．

と表示される．

$N \in \Gamma(T\mathbb{R}^3|_{S_C})$ を

$$N = -b'(t)(\cos\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{S_C} - b'(t)(\sin\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{S_C} + a'(t)\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{S_C}$$

と定めると，N は S_C 上の滑らかな単位法ベクトル場である．この N に伴う形状作用素を s と書くと，$\mathbb{R}^3$ の Euclid 接続が誘導する $T\mathbb{R}^3|_{S_C}$ 上の接続を $\overline{\nabla}$ と書くと，超平面に対する Weingarten 方程式（定理 8.13 (c)）より，

$$\begin{aligned} s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= -\overline{\nabla}_{\partial/\partial t}N \\ &= b''(t)(\cos\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{S_C} + b''(t)(\sin\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{S_C} - a''(t)\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{S_C} \\ &= c(t)\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} s\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= -\overline{\nabla}_{\partial/\partial \theta}N \\ &= -b'(t)(\sin\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{S_C} + b'(t)(\cos\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{S_C} \\ &= \frac{b'(t)}{a(t)}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

である．ここで，

$$c(t) = \begin{cases} b''(t)/a'(t) & (a'(t) \neq 0) \\ -a''(t)/b'(t) & (b'(t) \neq 0) \end{cases}$$

と置いた（$(a')^2 + (b')^2 = |\gamma'|^2 = 1$ より，a' と b' が同時に 0 になることはない．また，$(a')^2 + (b')^2 = 1$ の両辺を微分すれば $a'a'' + b'b'' = 0$ となるから，$a'(t) \neq 0$ かつ $b'(t) \neq 0$ ならば $b''(t)/a'(t) = -a''(t)/b'(t)$ である）．よって，形状作用素 s は枠 $(\partial/\partial t, \partial/\partial\theta)$ に関して

$$\begin{pmatrix} c(t) & 0 \\ 0 & b'(t)/a(t) \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

と行列表示され，その主曲率は $c(t)$（対応する主方向は $\partial/\partial t$）と $b'(t)/a(t)$（対応する主方向は $\partial/\partial\theta$）である[*22]．

(b)　(a) より，S_C の点 $X(t,\theta)$ における Gauss 曲率は，$b'(t) \neq 0$ ならば

$$c(t) \cdot \frac{b'(t)}{a(t)} = -\frac{a''(t)}{b'(t)} \cdot \frac{b'(t)}{a(t)} = -\frac{a''(t)}{a(t)}$$

であり，$a'(t) \neq 0$ ならばやはり

$$c(t) \cdot \frac{b'(t)}{a(t)} = \frac{b''(t)}{a'(t)} \cdot \frac{b'(t)}{a(t)} = \frac{-a'(t)a''(t)}{a(t)a'(t)} = -\frac{a''(t)}{a(t)}$$

である（$a'a'' + b'b'' = 0$ を用いた）．

[*22] $-N$ に伴う形状作用素を考える場合，行列表示 ($*$) の各成分および主曲率の符号が反転する．

解答 8.4　解答 8.3 より，$H = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}$ 上の埋め込まれた滑らかな曲線を径数付けるような単位速の滑らかな曲線 $\gamma = (a, b)$ であって，$-a''/a = 1$ だが b'/a が定値でないものを見つければよい．定数 $0 < k < 1$ を固定し，a, b を

$$a(t) = k \cos t, \qquad b(t) = \int_0^t \sqrt{1 - k^2 (\sin s)^2}\, ds \qquad (t \in (-\pi/2, \pi/2))$$

と定めれば，条件は満たされる．

解答 8.5　準備として，次の補題を示す．

補題　2 次元 Riemann 多様体 M が点 $p \in M$ において等方的ならば，M の Gauss 曲率 K について，$dK|_p = 0$ である．

補題の証明　M が p において等方的であるとすると，任意の単位接ベクトル v, $w \in T_pS$ に対して，$\phi \in \mathrm{Iso}_p(M)$ であって $d\phi|_p(v) = w$ を満たすものが存在する．この ϕ について，$\phi^* K = K$ だから

$$dK|_p(w) = dK|_p(d\phi|_p(v)) = d(\phi^* K)_p(v) = dK|_p(v)$$

となる．したがって，$dK|_p \in T_p^* M$ は $\{v \in T_p M \mid |v| = 1\}$ 上で一定値をとるが，このような線型形式は 0 のみである．よって，$dK|_p = 0$ である．□

本題に入る．解答 8.1 より，S の点 $p = (x, y, x^2 + y^2)$（$(x, y) \in \mathbb{R}^2$）における主曲率は

$$8(1 + 4(x^2 + y^2))^{-3/2}(x^2 + y^2) - 2(1 + 4(x^2 + y^2))^{-1/2}, \qquad -2(1 + 4(x^2 + y^2))^{-1/2}$$

（それぞれ重複度 1）だから，S の p における Gauss 曲率は

$$\begin{aligned} K(p) &= (8(1 + 4(x^2 + y^2))^{-3/2}(x^2 + y^2) - 2(1 + 4(x^2 + y^2))^{-1/2}) \cdot (-2(1 + 4(x^2 + y^2))^{-1/2}) \\ &= -\frac{16(x^2 + y^2)}{(1 + 4(x^2 + y^2))^2} + \frac{4}{1 + 4(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

である．S が p において等方的であるとすると，上の補題より $dK|_p = 0$ だが，

$$\frac{\partial K}{\partial x}(p) = -\frac{64x}{(1 + 4(x^2 + y^2))^3}, \qquad \frac{\partial K}{\partial y}(p) = -\frac{64y}{(1 + 4(x^2 + y^2))^3}$$

だから，これは $x = y = 0$ を意味する．よって，S が等方的でありうる点は $(0, 0, 0)$ のみである．

S が点 $(0, 0, 0)$ において等方的であることを示す．直交行列 $A \in \mathrm{O}(2)$ に対して，行列 $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ で表される $\mathbb{R}^3$ 上の線型変換は，S の自己等長同型写像 ϕ_A を誘導する．任意の単位接ベクトル v, $w \in T_{(0,0,0)} S \cong \mathbb{R}^2$ に対して，$A \in \mathrm{O}(2)$ を $Av = w$ となるようにとれば，$d\phi_A|_{(0,0,0)}(v) = w$ となる．よって，S は点 $(0, 0, 0)$ において等方的である．

解答 8.6

解答 8.7

解答 8.8

解答 8.9

解答 8.10

解答 8.11

解答 8.12　M, $\widetilde{M}$ を Riemann 多様体，$\pi\colon \widetilde{M} \to M$ を全射な Riemann 沈め込みとする[*23]．点 $p \in M$ と正規直交な 2 つの接ベクトル x, $y \in T_pM$ を任意にとり，X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ を $X|_p = x$，$Y|_p = y$ となるようにとる．O'Neill の公式（問題 7.14）より，

$$\begin{aligned}
&Rm(X, Y, Y, X) \circ \pi \\
&= \widetilde{Rm}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Y}, \widetilde{X}) - \frac{1}{2}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, [\widetilde{Y}, \widetilde{X}]^V \rangle - \frac{1}{4}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, [\widetilde{Y}, \widetilde{X}]^V \rangle + \frac{1}{4}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{X}]^V, [\widetilde{Y}, \widetilde{Y}]^V \rangle \\
&= \widetilde{Rm}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Y}, \widetilde{X}) + \frac{3}{4}|[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V|^2
\end{aligned}$$

である．そこで，点 $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ を $\pi(\widetilde{p}) = p$ となるようにとって $\widetilde{x} = \widetilde{X}|_{\widetilde{p}}$，$\widetilde{y} = \widetilde{Y}|_{\widetilde{p}}$ と置けば，

$$\begin{aligned}
\sec(x, y) &= Rm(x, y, y, x) \\
&= \widetilde{Rm}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{y}, \widetilde{x}) + \frac{3}{4}|[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V|_p|^2 \\
&\geq \sec(\widetilde{x}, \widetilde{y})
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\widetilde{M}$ の断面曲率が c で下から抑えられるならば，M の断面曲率も c で下から抑えられる．

解答 8.13

解答 8.14　(M, g) を 3 次元 Riemann 多様体とする．M が定断面曲率 $c \in \mathbb{R}$ をもつならば，命題 8.36（証明は問題 8.29）より $Rc = 2cg$ だから，M は Einstein である．逆に，M が Einstein であり，$\lambda \in \mathbb{R}$ として $Rc = \lambda g$ が成り立つとする．点 $p \in M$ と T_pM の正規直交基底 (b_1, b_2, b_3) をとると，命題 8.32 (a) と仮定より

$$\sec(b_1, b_2) + \sec(b_1, b_3) = Rc(b_1, b_1) = \lambda g(b_1, b_1) = \lambda$$

であり，同様に

$$\begin{aligned}
\sec(b_2, b_3) + \sec(b_2, b_1) &= \lambda, \\
\sec(b_3, b_1) + \sec(b_3, b_2) &= \lambda
\end{aligned}$$

である．これら 3 式より，

$$\sec(b_1, b_2) = \frac{\lambda}{2}$$

が成り立つ．任意の 2 次元部分線型空間 $\Pi \subseteq T_pM$ に対して，Π の正規直交基底 (b_1, b_2) と Π に直交する単位接ベクトル $b_3 \in T_pM$ をとれば (b_1, b_2, b_3) は T_pM の正規直交基底となるから，上の結果より $\sec(\Pi) = \lambda/2$ を得る．よって，M は定断面曲率 $\lambda/2$ をもつ．

解答 8.15　解答 8.24 (b)（脚注 *26 も参照のこと）で示したように[*24]，等質かつ等方的[*25] な Riemann 多様体は Einstein である．また，解答 8.14 で示したように，3 次元 Riemann 多様体が Einstein であることと

---

*23 「π が全射である」という条件は，本には書かれていないが，明らかに必要である．

*24 順番が前後するが，解答 8.24 では問題 8.15 の結果は使っていないから，問題はない．

*25 等方的な連結 Riemann 多様体は等質だから（問題 6.18），連結 Riemann 多様体だけを考える場合には，「等質かつ等方的」は単に「等方的」といっても同値である．

定断面曲率をもつこととは同値である．よって，等質かつ等方的な 3 次元 Riemann 多様体は，定断面曲率をもつ．

$\mathbb{CP}^2$ に Fubini–Study 計量を入れて得られる 4 次元 Riemann 多様体は，等質かつ等方的だが（問題 3.19），その断面曲率は一定ではない（問題 8.13 (e)）．

解答 8.16　$(\mathrm{SU}(2), g_a)$ の Levi-Civita 接続を ∇^a と書く．

(U, V, W) を (X, Y, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) のいずれかとする．(U, V, W) は $(\mathrm{SU}(2), g_a)$ 上の左不変な直交枠であり，$[U, V] = 2W$，$[V, W] = 2U$，$[W, U] = 2V$ である．まず，$\nabla^a_U V$ と $\nabla^a_V U$ を計算する．∇^a が計量と整合することと対称であることから，

$$\langle \nabla^a_U V, V\rangle_{g_a} = \frac{1}{2} U\langle V, V\rangle_{g_a} = 0$$

および

$$\begin{aligned}\langle \nabla^a_U V, U\rangle_{g_a} &= \langle \nabla^a_V U, U\rangle_{g_a} + \langle [U, V], U\rangle_{g_a} \\ &= \frac{1}{2} V\langle U, U\rangle_{g_a} + 2\langle W, U\rangle_{g_a} \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る．また，Koszul の公式（系 5.11 (a)）より，

$$\begin{aligned}\langle \nabla^a_U V, W\rangle_{g_a} &= \frac{1}{2}(U\langle V, W\rangle_{g_a} + V\langle W, U\rangle_{g_a} - W\langle U, V\rangle_{g_a} - \langle V, [U, W]\rangle_{g_a} - \langle W, [V, U]\rangle_{g_a} + \langle U, [W, V]\rangle_{g_a}) \\ &= |V|^2_{g_a} + |W|^2_{g_a} - |U|^2_{g_a}\end{aligned}$$

である．以上より，

$$\nabla^a_U V = \frac{|V|^2_{g_a} + |W|^2_{g_a} - |U|^2_{g_a}}{|W|^2_{g_a}} W = \left(\frac{|V|^2_{g_a} - |U|^2_{g_a}}{|W|^2_{g_a}} + 1\right) W \tag{$*$}$$

である．また，($*$) と ∇^a の対称性より

$$\nabla^a_V U = \nabla^a_U V - [U, V] = \nabla^a_U V - 2W = \left(\frac{|V|^2_{g_a} - |U|^2_{g_a}}{|W|^2_{g_a}} - 1\right) W \tag{$**$}$$

である．

次に，$\nabla^a_U U$ を計算する．∇^a が計量と整合することより，

$$\langle \nabla^a_U U, U\rangle_{g_a} = \frac{1}{2} U\langle U, U\rangle_{g_a} = 0$$

である．また，($*$) より $\nabla^a_U V$ は W のスカラー倍であり，($**$) で (U, V, W) を (W, U, V) に置き換えた式より $\nabla^a_U W$ は V のスカラー倍だから，∇^a が計量と整合することと合わせて

$$\begin{aligned}\langle \nabla^a_U U, V\rangle_{g_a} &= U\langle U, V\rangle_{g_a} - \langle U, \nabla^a_U V\rangle_{g_a} = 0, \\ \langle \nabla^a_U U, W\rangle_{g_a} &= U\langle U, W\rangle_{g_a} - \langle U, \nabla^a_U W\rangle_{g_a} = 0\end{aligned}$$

よって，

$$\nabla^a_U U = 0 \tag{$***$}$$

である．

$|X|^2_{g_a} = |Y|^2_{g_a} = 1$，$|Z|^2_{g_a} = a^{-2}$ だから，$(*)$, $(**)$, $(***)$ より

$$\nabla^a_X X = \nabla^a_Y Y = \nabla^a Z = 0$$

および

$$\begin{aligned} \nabla^a_X Y &= Z, & \nabla^a_Y X &= -Z, \\ \nabla^a_Y Z &= a^{-2} X, & \nabla^a_Z Y &= (a^{-2} - 2)X, \\ \nabla^a_Z X &= (2 - a^{-2})Y, & \nabla^a_X Z &= -a^2 Y \end{aligned}$$

が成り立つ．これらを用いて断面曲率を計算すると，

$$\begin{aligned} \sec(X, Y) &= Rm(X, Y, Y, X) \\ &= \langle \nabla^a_X \nabla^a_Y Y - \nabla^a_Y \nabla^a_X Y - \nabla^a_{[X,Y]} Y, X \rangle_{g_a} \\ &= \langle -\nabla^a_Y Z - 2\nabla^a_Z Y, X \rangle_{g_a} \\ &= \langle -a^{-2} X - 2(a^{-2} - 2)X, X \rangle_{g_a} \\ &= -3a^{-2} + 4, \\ \sec(Y, Z) &= Rm(Y, aZ, aZ, Y) \\ &= a^2 \langle \nabla^a_Y \nabla^a_Z Z - \nabla^a_Z \nabla^a_Y Z - \nabla^a_{[Y,Z]} Z, Y \rangle_{g_a} \\ &= a^2 \langle -a^{-2} \nabla^a_Z X - 2\nabla^a_X Z, Y \rangle_{g_a} \\ &= a^2 \langle -a^{-2}(2 - a^{-2})Y + 2a^{-2} Y, Y \rangle_{g_a} \\ &= a^{-2}, \\ \sec(Z, X) &= Rm(aZ, X, X, aZ) \\ &= a^2 \langle \nabla^a_Z \nabla^a_X X - \nabla^a_X \nabla^a_Z X - \nabla^a_{[Z,X]} X, Z \rangle_{g_a} \\ &= a^2 \langle -(2 - a^{-2}) \nabla^a_X Y - 2\nabla^a_Y X, Z \rangle_{g_a} \\ &= a^2 \langle -(2 - a^{-2}) Z + 2Z, Z \rangle_{g_a} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

となる．

g_a は SU(2) 上の左不変 Riemann 計量だから，$(\mathrm{SU}(2), g_a)$ は等質である．$a \neq 1$ として，$(\mathrm{SU}(2), g_a)$ がどの点においても等方的でないことを示す．$(\mathrm{SU}(2), g_a)$ が点 $p \in \mathrm{SU}(2)$ において等方的であると仮定すると，ある $\phi \in \mathrm{Iso}_p(\mathrm{SU}(2), g_a)$ が存在して $d\phi|_p(aZ|_p) = X|_p$ となる．$d\phi|_p$ は計量線型同型だから，$(aZ|_p)^\perp = \mathrm{span}\{X|_p, Y|_p\}$ を $(X|_p)^\perp = \mathrm{span}\{Y|_p, Z|_p\}$ に移す．このような $(\mathrm{SU}(2), g_a)$ の自己等長同型が存在することより，断面曲率 $\sec(X|_p, Y|_p)$ と $\sec(Y|_p, Z|_p)$ は等しくなければならない．前段の結果より，これは $-3a^{-2} + 4 = a^{-2}$ を意味し，$a \neq 1$ に矛盾する．よって，背理法より，$(\mathrm{SU}(2), g_a)$ はどの点においても等方的でない．

解答 8.17 (a) 解答 7.13 と解答 5.8 (c) より，任意の線型独立な $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ と点 $p \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
\sec(X|_p, Y|_p) &= \frac{1}{|X|_p \wedge Y|_p|^2} Rm(X|_p, Y|_p, Y|_p, X|_p) \\
&= \frac{1}{4|X|_p \wedge Y|_p|^2} \langle [Y, [X, Y]]|_p, X|_p \rangle \\
&= \frac{1}{4|X|_p \wedge Y|_p|^2} \langle [Y, [X, Y]], X \rangle \\
&= -\frac{1}{4|X|_p \wedge Y|_p|^2} |[X, Y]|^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

である．特に，(X, Y) が正規直交ならば

$$\sec(X|_p, Y|_p) = \frac{1}{4} |[X, Y]|^2$$

が成り立ち，G の断面曲率はすべて非負である．

(b) H を G の部分 Lie 群とし，これを G の部分 Riemann 多様体とみなす．G 上に与えられた両側不変 Riemann 計量は，H 上の両側不変 Riemann 計量を誘導する．問題 5.8 (c) より，G, H の単位元 e における制限指数写像はそれぞれ Lie 群としての指数写像 $\exp^G$, $\exp^H$ に等しく，これらは $\mathrm{Lie}(H) \cong T_e H$ 上で一致する．したがって，e を始点とする H 上の測地線は，G 上の測地線でもある．群演算による平行移動を考えれば，これが H の任意の点においてもいえることがわかる．よって，命題 8.12 (b) より，H は G において全測地的である．

(c) Riemann 多様体が平坦であることはその曲率が 0 であることと同値であり（定理 7.10），これはさらにその断面曲率がすべて 0 であることと同値である（命題 8.31）．両側不変 Riemann 計量を備えた Lie 群を考える場合，($*$) より，これは G の Lie 代数 $\mathrm{Lie}(G)$ が可換であることと同値である．G が連結ならば，これはさらに G が可換であることと同値である [2, Prob. 20-7 (b)].

解答 8.18

解答 8.19 $\langle N, N \rangle = -1$ であり，したがって $h = -\mathrm{II}_N$，$s = -W_N$ であることに注意する．W, X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする．

(a) Gauss の公式（定理 8.2）より，

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y) = \nabla_X Y + h(X, Y) N$$

である．

(b) 曲線に沿った Gauss の公式（系 8.3）より，

$$\widetilde{D}_t X = D_t X + \mathrm{II}(\gamma', X) = D_t X + h(\gamma', X) N$$

である．

(c) $\langle N, N \rangle = -1$ より

$$0 = X\langle N, N \rangle = 2\langle \widetilde{\nabla}_X N, N \rangle$$

だから，$\widetilde{\nabla}_X N$ は M 上の接ベクトル場である．このことと Weingarten 方程式（命題 8.4）より，

$$\widetilde{\nabla}_X N = (\widetilde{\nabla}_X N)^\top = -W_N(X) = s(X)$$

である．

(d) Gauss 方程式（定理 8.5）より，

$$\begin{aligned}
\widetilde{Rm}(W,X,Y,Z) &= Rm(W,X,Y,Z) - \langle \mathrm{II}(W,Z), \mathrm{II}(X,Y)\rangle + \langle \mathrm{II}(W,Y), \mathrm{II}(X,Z)\rangle \\
&= Rm(W,X,Y,Z) - h(W,Z)h(X,Y)\langle N,N\rangle + h(W,Y)h(X,Z)\langle N,N\rangle \\
&= Rm(W,X,Y,Z) + h(W,Z)h(X,Y) - h(W,Y)h(X,Z) \\
&= Rm(W,X,Y,Z) + \frac{1}{2}(h \owedge h)(W,X,Y,Z)
\end{aligned}$$

である．

(e) 命題 8.6 で定まる法束 NM 上の接続 $\nabla^{\perp}$ は計量と整合するから，$\langle N,N\rangle = -1$ より

$$0 = W\langle N,N\rangle = 2\langle \nabla^{\perp}_W N, N\rangle$$

であり，したがって $\nabla^{\perp}_W N = 0$ である．これより，命題 8.6 の直後に定義した接続 ∇^F は

$$\begin{aligned}
(\nabla^F_W \mathrm{II})(X,Y) &= \nabla^{\perp}_W(\mathrm{II}(X,Y)) - \mathrm{II}(\nabla_W X, Y) - \mathrm{II}(X, \nabla_W Y) \\
&= \nabla^{\perp}_W(h(X,Y)N) - h(\nabla_W X, Y)N - h(X, \nabla_W Y)N \\
&= (W(h(X,Y)) - h(\nabla_W X, Y) - h(X, \nabla_W Y))N \\
&= (\nabla_W h)(X,Y)N
\end{aligned}$$

を満たす（第三の等号で $\nabla^{\perp}_W N = 0$ を用いた）．よって，Codazzi 方程式（定理 8.9）より

$$\begin{aligned}
(\widetilde{R}(W,X)Y)^{\perp} &= (\nabla^F_W \mathrm{II})(X,Y) - (\nabla^F_X \mathrm{II})(X,Y) \\
&= ((\nabla_W h)(X,Y) - (\nabla_X h)(W,Y))N \\
&= ((\nabla h)(X,Y,W) - (\nabla h)(W,Y,X))N \\
&= ((\nabla h)(Y,X,W) - (\nabla h)(Y,W,X))N \\
&= (Dh)(Y,W,X)N
\end{aligned}$$

であり（ここで，$\widetilde{R}$ は $\widetilde{\nabla}$ の曲率を表す），したがって

$$\begin{aligned}
\widetilde{Rm}(W,X,Y,N) &= \langle \widetilde{R}(W,X)Y, N\rangle \\
&= \langle (\widetilde{R}(W,X)Y)^{\perp}, N\rangle \\
&= (Dh)(Y,W,X)\langle N,N\rangle \\
&= -(Dh)(Y,W,X)
\end{aligned}$$

である．

解答 8.20

解答 8.21

解答 8.22

解答 8.23

解答 8.24 M を Riemann 多様体とする[*26]．

[*26] 本では M を連結 Riemann 多様体としているが，以下の証明からわかるように，(a), (b), (c) のいずれについても連結性は不要である（脚注 *14 で述べたように，k 点等質性は連結とは限らない Riemann 多様体に対しても定義される）．

(a)　M が等質であるとする．すると，任意の 2 点 $p, q \in M$ に対して，$\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ であって $\phi(p) = q$ を満たすものが存在するが，M のスカラー曲率 S はこの ϕ に関して不変（すなわち，$\phi^* S = S$）だから，

$$S(q) = S(\phi(p)) = \phi^* S(p) = S(p)$$

である．よって，このときスカラー曲率 S は定値である．

(b)　解答 6.18（脚注 *16 も参照のこと）より，2 点等質な Riemann 多様体は等質かつ等方的である．したがって，等質かつ等方的な Riemann 多様体が Einstein であることを示せば十分である．M が等質かつ等方的であるとする．すると，任意の 2 点 $p, q \in M$ と単位接ベクトル $v \in T_pM$，$w \in T_qM$ に対して，$\phi \in \mathrm{Iso}(M)$ であって $\phi(p) = q$ かつ $d\phi|_p(v) = w$ を満たすものが存在するが，M の Ricci 曲率 Rc はこの ϕ に関して不変（すなわち，$\phi^* Rc = Rc$）だから，

$$Rc(w, w) = Rc(d\phi|_p(v), d\phi|_p(v)) = \phi^* Rc(v, v) = Rc(v, v)$$

である．したがって，ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の点 $p \in M$ と単位接ベクトル $v \in T_pM$ に対して

$$Rc(v, v) = \lambda = \lambda g(v, v)$$

が成り立つ．このことと分極公式より $Rc = \lambda g$ だから，M は Einstein である．

(c)

解答 8.25

解答 8.26

解答 8.27

解答 8.28　$\mathbb{H}^n(R)$ は枠等質だから（命題 3.9），補題 8.33 より定断面曲率をもつ．したがって，$\mathbb{H}^n(R)$ の 1 つの断面曲率が $-1/R^2$ であることを示せば十分である．

(a)　$\mathbb{R}^{n,1}$ の標準座標を $(\xi, \tau) = (\xi^1, \dots, \xi^n, \tau)$ と書き，双曲面モデル

$$\mathbb{H}^n(R) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n,1} \mid |\xi|^2 - \tau^2 = -R^2,\ \tau > 0\}$$

を考える（$\mathbb{H}^n(R)$ は $\mathbb{R}^{n,1}$ の埋め込まれた部分 Riemann 多様体である）．関数 $F\colon \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \tau > 0\} \to \mathbb{R}$ を $F(\xi, \tau) = |\xi|^2 - \tau^2$ と定めると，F は滑らかで $-R^2$ を正則値にもち，$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(\{-R^2\})$ であり，

$$\operatorname{grad} F = \sum_{i=1}^n 2\xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} - 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}$$

である．解答 2.9 と脚注 *1 より，$\mathbb{H}^n(R)$ 上の単位法ベクトル場として

$$N = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|_{\mathbb{R}^{n,1}}} = \frac{1}{R} \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Bigg|_{\mathbb{H}^n(R)}$$

がとれる．

N に伴う形状作用素を s，スカラー第二基本形式を h と書く．点 $p \in \mathbb{H}^n(R)$ における接ベクトル

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\bigg|_p + v^{n+1} \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_p, \qquad w = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\bigg|_p + w^{n+1} \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_p$$

に対して，$h(v,w)$ を計算しよう．$\mathbb{R}^{n,1}$ の Euclid 接続が誘導する $T\mathbb{R}^{n,1}|_{\mathbb{H}^n(R)}$ 上の接続を $\overline{\nabla}$ と書くと，Lorentz 多様体における超平面に対する Weingarten 方程式（問題 8.19 (c)）より，

$$s(v) = \overline{\nabla}_v N = \frac{1}{R}\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right|_p - v^{n+1} \left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_p \right)$$

である．したがって，

$$h(v,w) = \langle s(v), w\rangle_{\mathbb{R}^{n,1}} = \frac{1}{R}\left(\sum_{i=1}^{n} v^i w^i - v^{n+1} w^{n+1} \right) \tag{$*$}$$

となる．

Lorentz 多様体における超平面に対する Gauss 方程式（問題 8.19 (d)）より，点 $p \in \mathbb{H}^n(R)$ と接ベクトル v, $w \in \mathbb{H}^n(R)$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= Rm(v,w,w,v) + \frac{1}{2}(h \owedge h)(v,w,w,v) \\ &= Rm(v,w,w,v) + h(v,v)h(w,w) - h(v,w)^2, \end{aligned}$$

すなわち

$$Rm(v,w,w,v) = -h(v,v)h(w,w) + h(v,w)^2,$$

である．特に，$p = (0,\dots,0,R)$，$v = (\partial/\partial\xi^1)|_p$，$w = (\partial/\partial\xi^2)|_p$ と置くと，v, w は正規直交であり，命題 8.29 および ($*$) と合わせて

$$\begin{aligned} \sec\left(\left.\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right|_p \right) &= Rm\left(\left.\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right|_p \right) \\ &= -h\left(\left.\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right|_p \right) h\left(\left.\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right|_p \right) + h\left(\left.\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right|_p \right)^2 \\ &= -\frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

を得る．これで，主張が示された．

(b)　$\mathbb{R}^n$ の標準座標を $u = (u^1,\dots,u^n)$，Euclid 計量を $\overline{g}$ と書き，Poincaré の球モデル

$$\mathbb{B}^n(R) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid |u| < R\}, \qquad \breve{g}^3_R = \frac{4R^4}{(R^2 - |u|^2)^2}\overline{g}$$

を考える．関数 $f\colon \mathbb{B}^n(R) \to \mathbb{R}$ を

$$f(u) = \log 2R^2 - \log(R^2 - |u|^2) \qquad (u \in \mathbb{B}^n(R))$$

と定めると $\breve{g}^3_R = e^{2f}$ だから，定理 7.30 より，$\breve{g}^3_R$ の Riemann 曲率テンソル Rm は

$$Rm = \frac{4R^4}{(R^2 - |u|^2)}\left(-(\overline{\nabla}^2 f) \owedge \overline{g} + (df \otimes df) \owedge \overline{g} - |df|^2_{\overline{g}}(\overline{g} \owedge \overline{g}) \right)$$

と書ける．$df|_0 = 0$ だから，点 $0 \in \mathbb{B}^n(R)$ においては

$$Rm|_0 = -4(\overline{\nabla}^2 f)|_0 \owedge g|_0$$

である．

点 $0 \in \mathbb{B}^n(R)$ における 2 つの接ベクトル $(1/2)(\partial/\partial u^1)|_0$, $(1/2)(\partial/\partial u^2)|_0 \in T_0\mathbb{B}^n(R)$ が正規直交であることに注意して，断面曲率 $\sec((1/2)(\partial/\partial u^1)|_0, (1/2)(\partial/\partial u^2)|_0)$ を計算しよう．命題 8.29 より，

$$\begin{aligned}\sec\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0\right) &= \frac{1}{16}Rm\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0\right)\\
&= -\frac{1}{4}((\overline{\nabla}^2 f) \owedge \overline{g})\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left((\overline{\nabla}^2 f)\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0\right) + (\overline{\nabla}^2 f)\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0, \frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0\right)\right) \qquad (**)\end{aligned}$$

である（最後の等式は，Kulkarni–野水積の定義と $\overline{g}(\partial/\partial u^i, \partial/\partial u^j) = \delta_{ij}$ から従う）．ここで，

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}^2 f &= \overline{\nabla}(df)\\
&= \overline{\nabla}\left(\sum_{i=1}^n \frac{2u^i}{R^2 - |u|^2}\, du^i\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{4u^i u^j}{(R^2 - |u|^2)^2} + \frac{\delta^i_j}{R^2 - |u|^2}\right) du^i \otimes du^j\end{aligned}$$

より

$$(\overline{\nabla}^2 f)|_0 = \frac{2}{R^2}\sum_{i=1}^n (du^i|_0)^{\otimes 2}$$

だから，これを $(**)$ に代入して

$$\sec\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_0, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_0\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^2}\right) = -\frac{1}{R^2}$$

を得る．これで，主張が示された．

解答 8.29　点 $p \in M$ と接ベクトル v, $w \in T_pM$ に対して

$$\frac{1}{2}(g \owedge g)(v, w, w, v) = g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2 = |v \wedge w|^2$$

であることに注意する．$Rm = (c/2)g \owedge g$ ならば，任意の点 $p \in M$ と線型独立な 2 つの接ベクトル v, $w \in T_pM$ に対して

$$\sec(v, w) = \frac{Rm(v, w, w, v)}{|v \wedge w|^2} = \frac{(c/2)(g \owedge g)(v, w, w, v)}{|v \wedge w|^2} = c$$

だから，M は定断面曲率 c をもつ．逆に，M が定断面曲率 c をもつとすると，任意の点 $p \in M$ と線型独立な 2 つの接ベクトル v, $w \in T_pM$ に対して

$$\frac{Rm(v, w, w, v)}{|v \wedge w|^2} = \sec(v, w) = c = \frac{(c/2)(g \owedge g)(v, w, w, v)}{|v \wedge w|^2}$$

だから，命題 8.31 より $Rm = (c/2)g \owedge g$ である．

M が定断面曲率 c をもつとする．すると，前段の結果より $Rm = (c/2)g \owedge g$ だから，Ricci 曲率は

$$Rc = \operatorname{tr}_g Rm = \frac{1}{2}c\operatorname{tr}_g(g \owedge g) = (n-1)cg$$

と書け（tr_g は最初と最後の成分に関する縮約を表す．また，最後の等号は補題 7.22 (d) から従う），スカラー曲率は

$$S = \mathrm{tr}_g Rc = (n-1)c\,\mathrm{tr}_g\, g = n(n-1)c$$

と書ける．また，$p \in M$，v, w, $x \in T_pM$ とすると，任意の $y \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle R(v,w)x, y\rangle &= Rm(v,w,x,y)\\
&= \frac{1}{2}c(g|_p \owedge g|_p)(v,w,x,y)\\
&= c(\langle v,y\rangle\langle w,x\rangle - \langle v,x\rangle\langle w,y\rangle)\\
&= \langle c(\langle w,x\rangle v - \langle v,x\rangle w), y\rangle
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$R(v,w)x = c(\langle w,x\rangle v - \langle v,x\rangle w)$$

である．

接空間の基底を 1 つ固定するとき，等式 $Rm = (c/2)g \owedge g$ と $Rc = (n-1)cg$ を成分表示すると，それぞれ

$$Rm_{ijkl} = c(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}), \qquad Rc_{ij} = (n-1)cg_{ij}$$

となる．

解答 8.30

解答 8.31

解答 8.32

解答 8.33

9 The Gauss–Bonnet Theorem

解答 9.1

解答 9.2

解答 9.3

解答 9.4

解答 9.5

解答 9.6

解答 9.7

解答 9.8

解答 9.9

解答 9.10

解答 9.11

解答 9.12

解答 9.13

10　Jacobi Fields

解答 10.1　$(U,\phi)=(U;x^1,\dots,x^n)$ を p を中心とする正規座標とする．Taylor の定理より

$$g_{ij}=g_{ij}(p)+\sum_{k=1}^n \partial_k g_{ij}(p)x^k+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^n \partial_k\partial_l g_{ij}(p)x^k x^l+O(|x|^3)$$

だから，示すべきことは

$$g_{ij}(p)=\delta_{ij},\qquad \partial_k g_{ij}(p)=0,\qquad \partial_k\partial_l g_{ij}(p)=-\frac{1}{3}(Rm_{iklj}+Rm_{ilkj})(p)$$

である．$g_{ij}(p)$ と $\partial_k g_{ij}(p)$ に関する式は，正規座標の性質（命題 5.24 (b), (e)）としてすでに示した．以下，$\partial_k\partial_l g_{ij}(p)$ に関する式を示す．

T_pM の 2 元 $v=\sum_{i=1}^n v^i\partial_i|_p$（$v^i\in\mathbb{R}$），$w=\sum_{i=1}^n w^i\partial_i|_p$（$w^i\in\mathbb{R}$）を任意にとり，

$$\gamma(t)=\exp_p(tv)=\phi^{-1}(tv^1,\dots,tv^n),\qquad J(t)=t\sum_{i=1}^n w^i\partial_i|_{\gamma(t)}$$

と定める．γ は 0 のまわりで定義された測地線であって $\gamma(0)=p$ かつ $\gamma'(0)=v$ を満たし，J は γ に沿った Jacobi 場であって $J(0)=0$ かつ $D_tJ(0)=w$ を満たす（命題 10.10）．$|J|^2$ の 4 階導関数の $t=0$ における値を，2 通りの方法で計算する．

まず，J の定義式を用いて直接計算する．

$$F(t)=\left|\sum_{i=1}^n w^i\partial_i|_{\gamma(t)}\right|=\sum_{i,j=1}^n w^iw^j\langle\partial_i|_{\gamma(t)},\partial_j|_{\gamma(t)}\rangle$$

と置くと，

$$\begin{aligned}
|J(t)|^2&=t^2F(t),\\
\frac{d}{dt}|J(t)|^2&=2tF(t)+t^2F'(t),\\
\frac{d^2}{dt^2}|J(t)|^2&=2F(t)+4tF'(t)+t^2F''(t),\\
\frac{d^3}{dt^3}|J(t)|^2&=6F'(t)+6tF''(t)+t^2F'''(t),\\
\frac{d^4}{dt^4}|J(t)|^2&=12F''(t)+8F'''(t)+t^2F''''(t)
\end{aligned}$$

であり，最後の式に $t=0$ を代入すると

$$\left.\frac{d^4}{dt^4}\right|_{t=0}|J(t)|^2=12F''(0)$$

を得る．ここで，

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t))w^i w^j, \\
F'(t) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \partial_k g_{ij}(\gamma(t))(x^k \circ \gamma)'(t) w^i w^j, \\
F''(t) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (\partial_l \partial_k g_{ij}(\gamma(t))(x^l \circ \gamma)'(t)(x^k \circ \gamma)'(t) + \partial_k g_{ij}(\gamma(t))(x^k \circ \gamma)''(t)) w^i w^j
\end{aligned}
$$

だから，$\partial_k g_{ij}(p) = 0$（正規座標の性質（命題 5.24 (e)））に注意すれば

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^4}{dt^4}\right|_{t=0} |J(t)|^2 &= 12F''(0) \\
&= 12 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (\partial_l \partial_k g_{ij}(p) v^l v^k + \partial_k g_{ij}(p)(x^k \circ \gamma)''(0)) w^i w^j \\
&= 12 \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \partial_k \partial_l g_{ij}(p) w^i w^j v^k v^l \qquad (*)
\end{aligned}
$$

を得る．

次に，Jacobi 方程式を用いて計算する．Levi-Civita 接続は Riemann 計量と整合するから，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|J(t)|^2 &= 2\langle D_t J(t), J(t) \rangle, \\
\frac{d^2}{dt^2}|J(t)|^2 &= 2\langle D_t^2 J(t), J(t) \rangle + 2|D_t J(t)|^2, \\
\frac{d^3}{dt^3}|J(t)|^2 &= 2\langle D_t^3 J(t), J(t) \rangle + 6\langle D_t^2 J(t), D_t J(t) \rangle, \\
\frac{d^4}{dt^4}|J(t)|^2 &= 2\langle D_t^4 J(t), J(t) \rangle + 8\langle D_t^3 J(t), D_t J(t) \rangle + 12|D_t^2 J(t)|^2
\end{aligned}
$$

である．最後の式に $t = 0$ を代入して，$J(0) = 0$，$D_t J(0) = w$ と Jacobi 方程式に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^4}{dt^4}\right|_{t=0} |J(t)|^2 &= 2\langle D_t^4 J(0), J(0) \rangle + 8\langle D_t^3 J(0), w \rangle + 12|D_t^2 J(0)|^2 \\
&= -8\langle D_t(R(J,\gamma')\gamma')(0), w \rangle + 12|-R(J(0),\gamma'(0))\gamma'(0)|^2 \\
&= -8\langle D_t(R(J,\gamma')\gamma')(0), w \rangle \qquad (**)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ に対して

$$
(D_t R)(X,Y)Z = D_t(R(X,Y)Z) - R(D_t X, Y)Z - R(X, D_t Y)Z - R(X,Y)(D_t Z)
$$

である．$X = J$，$Y = Z = \gamma'$ として $t = 0$ を代入すると，$J(0) = 0$，$D_t J(0) = w$，$\gamma'(0) = v$ および $D_t \gamma' = 0$ より，上式は

$$
D_t(R(J,\gamma')\gamma')(0) = R(w,v)v
$$

となる．これを $(**)$ に代入して，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^4}{dt^4}\right|_{t=0} |J(t)|^2 &= -8\langle R(w,v)v, w\rangle \\
&= -8\sum_{i,j,k,l=1}^{n} Rm_{ijkl}(p)w^i v^j v^k w^l \\
&= -8\sum_{i,j,k,l=1}^{n} Rm_{iklj}(p)w^i w^j v^k v^l
\end{aligned}
\tag{$***$}
$$

を得る．

以上の $(*)$, $(***)$ より，

$$
\begin{aligned}
12\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \partial_k\partial_l g_{ij}(p)w^i w^j v^k v^l &= -8\sum_{i,j,k,l=1}^{n} Rm_{iklj}(p)w^i w^j v^k v^l \\
&= -4\sum_{i,j,k,l=1}^{n} (Rm_{iklj}+Rm_{ilkj})(p)w^i w^j v^k v^l
\end{aligned}
$$

である．これが，任意の $v^1, \ldots, v^n, w^1, \ldots, w^n \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．さらに，最左辺の係数 $\partial_k\partial_l g_{ij}(p)$ と最右辺の係数 $(Rm_{iklj}+Rm_{ilkj})(p)$ は，ともに i と j および k と l に関して対称である（最右辺の係数については，命題 7.12 (a), (b), (c) で示した Rm の対称性 $Rm_{abcd} = Rm_{cdab} = Rm_{dcba}$ からわかる）．よって，最左辺と最右辺の係数は等しく，

$$
12\partial_k\partial_l g_{ij}(p) = -4(Rm_{iklj}+Rm_{ilkj})(p),
$$

すなわち

$$
\partial_k\partial_l g_{ij}(p) = -\frac{1}{3}(Rm_{iklj}+Rm_{ilkj})(p)
$$

が成り立つ．これが示すべき式であった．

解答 10.2

解答 10.3　M を定断面曲率 c をもつ Riemann 多様体，I を含む 1 点でない区間，$\gamma\colon I \to M$ を単位速測地線とする．γ に沿った Jacobi 場の空間 $\mathscr{J}(\gamma)$ の基底を構成したい．$\mathscr{J}(\gamma)$ は接 Jacobi 場の空間 $\mathscr{J}^\top(\gamma)$（2 次元）と法 Jacobi 場の空間 $\mathscr{J}^\perp(\gamma)$（$2n-2$ 次元）に直和分解される（系 10.8）．接 Jacobi 場の空間は

$$
\mathscr{J}^\top(\gamma) = \{(at+b)\gamma' \mid a, b \in \mathbb{R}\}
$$

だから（ここで，γ に沿ったベクトル場 $t \mapsto (at+b)\gamma'(t)$ を単に $(at+b)\gamma'$ と書いた．以下同様），$\mathscr{J}^\top(\gamma)$ の基底として $(\gamma', t\gamma')$ がとれる．以下，法 Jacobi 場について考える．

命題 10.12 の証明で見たように，M が定断面曲率 c をもつことから，$J \in \mathfrak{X}^\perp(\gamma)$ に対する Jacobi 方程式は

$$
D_t^2 J + cJ = 0 \tag{$*$}
$$

となる．$T_{\gamma(0)}M$ における $\mathbb{R}\gamma'(0)$ の直交補空間の基底 $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ を 1 つ固定し，各 e_i を γ に沿って平行移動させて得られる γ に沿ったベクトル場を E_i とする．各 $t \in I$ において $(E_1|_t, \ldots, E_{n-1}|_t)$ は $T_{\gamma(p)}M$ における $\mathbb{R}\gamma'(t)$ の直交補空間の基底だから，J は $J^i \in C^\infty(I)$（$1 \leq i \leq n-1$）を用いて

$$
J = \sum_{i=1}^{n-1} J^i E_i
$$

と表示できるが，これを $(*)$ に代入すると

$$(J^i)'' + cJ^i = 0 \qquad (1 \le i \le n-1)$$

となる．この微分方程式の一般解は $a_i,\, b_i \in \mathbb{R}$ を径数として

$$J^i = a_i s_c + b_i s_c' \qquad (1 \le i \le n-1)$$

だから，$(*)$ の一般解は

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i s_c + b_i s_c') E_i$$

である．$a_i,\, b_i \in \mathbb{R}$ に対して上式で与えられる J の全体が，$\mathscr{J}^{\top}(\gamma)$ となる．

以上より，$\mathscr{J}(\gamma) = \mathscr{J}^{\top}(\gamma) \oplus \mathscr{J}^{\perp}(\gamma)$ の基底として

$$(\gamma', t\gamma', s_c E_1, s_c' E_1, \dots, s_c E_{n-1}, s_c' E_{n-1})$$

がとれる．

解答 10.4

解答 10.5

解答 10.6

解答 10.7　I を 1 点でない区間，$\gamma\colon I \to M$ を測地線，J を γ に沿った Jacobi 場とする．Levi-Civita 接続が Riemann 計量と整合することと Jacobi 方程式を用いて $|J|^2$ の 2 階導関数を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}|J|^2 &= 2\langle D_t^2 J, J\rangle + 2|D_t J|^2 \\ &= -2\langle R(J,\gamma')\gamma', J\rangle + 2|D_t J|^2\end{aligned}$$

となるが，いま M は非正の断面曲率をもつから，上式の最右辺は 0 以上である．したがって，$|J|^2$ は下に凸である．そこで，もし J が 2 点 $a,\, b \in I$ で消えるならば，区間 $[a, b]$ において常に消えていなければならず，したがって $J = 0$ となる．よって，γ は共役点をもたない．

解答 10.8　命題 10.2 より，任意の $v,\, x \in T_{\gamma(a)}M$ に対して，γ に沿った Jacobi 場 J であって $J(a) = v$ かつ $D_t J(a) = x$ を満たすものが一意に存在する．この Jacobi 場を，$J_{v,x}$ と書く．Jacobi 方程式の線型性より，$(v, x) \mapsto J_{v,x}$ は $T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(a)}M$ から $\mathscr{J}(\gamma)$ への線型写像である．

条件

> 任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ と $w \in T_{\gamma(b)}M$ に対して，γ に沿った Jacobi 場 J であって $J(a) = v$ かつ $J(b) = w$ を満たすものが一意に存在する

は，

> 任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して，写像 $x \mapsto J_{v,x}(b)$ が $T_{\gamma(a)}M$ から $T_{\gamma(b)}M$ への全単射である

といい換えられる．$J_{v,x}(b) = J_{v,0}(b) + J_{0,x}(b)$ だから，これはさらに

写像 $x \mapsto J_{0,x}(b)$ が $T_{\gamma(a)}M$ から $T_{\gamma(b)}M$ への全単射である

ことと同値である．写像 $x \mapsto J_{0,x}(b)$ は次元が等しい有限次元線型空間 $T_{\gamma(a)}M$ から $T_{\gamma(b)}M$ への線型写像だから，この写像が全単射であることは，$J_{0,x}(b) = 0$ ならば $x = 0$ であることと同値である．これは，$\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ が γ に沿って共役ではないことを意味する．これで，同値性が示された．

解答 10.9

解答 10.10

解答 10.11　準備として，次の補題を示す．

補題　M を Riemann 多様体，I を 1 点でない区間，$\gamma\colon I \to M$ を定値でない測地線とする．γ に沿った滑らかな法ベクトル場 X に対して，D_tX と $R(X, \gamma')\gamma'$ はまた γ に沿った滑らかな法ベクトル場である．

補題の証明　X を γ に沿った滑らかな法ベクトル場とする．$\langle X, \gamma' \rangle = 0$ より

$$0 = \frac{d}{dt}\langle X, \gamma' \rangle = \langle D_tX, \gamma' \rangle + \langle X, D_t\gamma' \rangle = \langle D_tX, \gamma' \rangle$$

だから，D_tX は γ に沿った滑らかな法ベクトル場である．また，Rm の反対称性（命題 7.12 (b)）より

$$\langle R(V, \gamma')\gamma', \gamma' \rangle = Rm(V, \gamma', \gamma', \gamma') = 0$$

だから，$R(V, \gamma')\gamma'$ は γ に沿った滑らかな法ベクトル場である．これで，主張が示された．　□

本題に入る．$\gamma\colon [a, b] \to M$（$a < b$）を定値でない測地線分とし，$V$ を γ に沿った区分的に滑らかな法ベクトル場とする[*27]．W を γ に沿った区分的に滑らかな固有法ベクトル場として，V と W の両方に対する $[a, b]$ の許容分割 $(a_0, \dots, a_k)$ をとると，命題 10.24 より

$$I(V, W) = -\int_a^b \langle D_t^2V + R(V, \gamma')\gamma', W \rangle \, dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varDelta_i D_tV, W|_{a_i} \rangle \tag{$*$}$$

である．ただし，

$$\varDelta_i D_t = D_tV(a_i^+) - D_tV(a_i^-)$$

である．

V が Jacobi 場ならば，上の状況で $D_t^2V + R(V, \gamma')\gamma' = 0$ かつ $\varDelta_i D_tV = 0$ だから，$I(V, W) = 0$ である．

逆に，γ に沿った任意の区分的に滑らかな固有法ベクトル場 W に対して $I(V, W) = 0$ であるとして，V が γ に沿った Jacobi 場であることを示す[*28]．V に対する $[a, b]$ の許容分割 $(a_0, \dots, a_k)$ をとると，($*$) より，γ に沿った任意の滑らかな固有法ベクトル場 W に対して

$$-\int_a^b \langle D_t^2V + R(V, \gamma')\gamma', W \rangle \, dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varDelta_i D_tV, W|_{a_i} \rangle = 0 \tag{$**$}$$

[*27] 本には「定値でない」という条件は書かれていないが，γ が定値のとき「γ に沿った法ベクトル場」は定義されないから，この条件は必要である．また，本では V は固有であるとしているが，以下の証明からわかるように，この条件は不要である．

[*28] 以下の証明からわかるように，「γ に沿った任意の滑らかな固有法ベクトル場 W に対して $I(V, W) = 0$ である」と仮定するだけでも，V が γ に沿った Jacobi 場であることが示せる．したがって，系 10.25 の 2 条件は，前文の鉤括弧で囲んだ条件とも同値である．

である．$0 \leq i < k$ を固定し，$\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ が $\operatorname{supp}\phi \subseteq (a_i, a_{i+1})$ を満たすとして，上式で $W = \phi \cdot (D_t^2 V + R(V, \gamma')\gamma')$（上の補題より，これは γ に沿った滑らかな法ベクトル場である）と置くと，

$$-\int_{a_i}^{a_{i+1}} \phi \cdot |D_t^2 V + R(V, \gamma')\gamma'|^2 \, dt = 0$$

を得る．$|D_t^2 V + R(V, \gamma')\gamma'|^2$ は 0 以上の値をとる連続関数であり，上式が $\operatorname{supp}\phi \subseteq (a_i, a_{i+1})$ を満たす任意の $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して成り立つから，$[a_i, a_{i+1}]$ 上で $D_t^2 V + R(V, \gamma')\gamma' = 0$ である．すなわち，$V|_{[a_i, a_{i+1}]}$ は Jacobi 場である．各 i に対してこれが成り立つから，(∗∗) は

$$-\sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta_i D_t V, W|_{a_i} \rangle = 0$$

となる．$0 \leq i < k$ を固定し，W を $W|_{a_i} = \Delta_i D_t V$ かつ $W|_{a_j} = 0$（$j \neq i$）となるようにとると，上式は

$$-|\Delta_i D_t V|^2 = 0$$

となるから，$\Delta_i D_t V = 0$，すなわち $D_t V(a_i^+) = D_t V(a_i^-)$ である．各 i に対して $V|_{[a_i, a_{i+1}]}$ は Jacobi 場だったから，Jacobi 方程式の解の一意性（命題 10.2）より，V は $[a, b]$ 全体で Jacobi 場である．これで，主張が示された．

解答 10.12

解答 10.13　$\gamma\colon [a, b] \to M$ を測地線分とする．$\gamma([a, b])$ はコンパクトだから，$\epsilon > 0$ と $\gamma([a, b])$ の開近傍 U を，X が生成するフローが $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ 上で定義されるようにとれる．このフローを $(s, p) \mapsto \phi_s(p)$ と書く．任意の $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ に対して，フローの一般論より $\phi_s(U)$ は M の開集合で ϕ_s は U から $\phi_s(U)$ への微分同相を与えるが，X が Killing ベクトル場であることと命題 B.10 より $\phi_s^* g = g$ だから，より強く ϕ_s は U から $\phi_s(U)$ への等長同型を与える．特に，$\phi_s \circ \gamma$ は測地線である．したがって，

$$\Gamma(s, t) = \phi_s(\gamma(t)) \qquad (s \in (-\epsilon, \epsilon),\ t \in [a, b])$$

で定まる写像 $\Gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ は γ の測地変分である．X の γ に沿った制限は，Γ の変分場に等しいから，定理 10.1 より Jacobi 場である．

解答 10.14

解答 10.15

解答 10.16

解答 10.17

解答 10.18

解答 10.19

解答 10.20

解答 10.21

解答 10.22　系 10.35 の証明において，コンパクト連結 Riemann 多様体 M とその点 $p \in M$ に対して，$\partial\overline{\mathbb{B}}^n$ のいくつかの点を同一視して得られる $\overline{\mathbb{B}}^n$ の商空間 X から M への同相写像を構成した．商写像 $\overline{\mathbb{B}}^n \to X$ による $0 \in \overline{\mathbb{B}}^n$ の像をそのまま 0 と書き，$\partial\overline{\mathbb{B}}^n$ の像を Y と書くと，そこで構成した同相写像は，0 を p に，Y を C に移す．そこで，C が $M \setminus \{p\}$ にホモトピー同値であることを示すためには，Y が $X \setminus \{0\}$ にホモトピー同値であることをいえばよい．

$f\colon \partial\overline{\mathbb{B}}^n \to \overline{\mathbb{B}}^n \setminus \{0\}$ を包含写像，$g\colon \overline{\mathbb{B}}^n \setminus \{0\} \to \partial\overline{\mathbb{B}}^n$ を写像 $x \mapsto x/|x|$ とし，これらが誘導する連続写像 $\overline{f}\colon Y \to X \setminus \{0\}$，$\overline{g}\colon X \setminus \{0\} \to Y$ を考える．$\overline{f}$ と $\overline{g}$ が互いに他のホモトピー逆であることを示す．まず，明らかに $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_X$ である．次に，$\mathrm{id}_{\overline{\mathbb{B}}^n \setminus \{0\}}$ から $f \circ g$ へのホモトピー

$$(\overline{\mathbb{B}}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \overline{\mathbb{B}}^n \setminus \{0\}, \quad (x,t) \mapsto (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$$

は $(X \setminus \{0\}) \times [0,1]$ から $X \setminus \{0\}$ への連続写像を誘導し，これが $\mathrm{id}_{X \setminus \{0\}}$ から $\overline{f} \circ \overline{g}$ へのホモトピーとなる．よって，$\overline{f}$ と $\overline{g}$ は互いに他のホモトピー逆であり，したがって Y は $X \setminus \{0\}$ にホモトピー同値である．

解答 10.23

解答 10.24

11　Comparison Theory

解答 11.1　与えられた極正規座標（polar normal coordinate）$(\theta^1, \ldots, \theta^{n-1}, r)$ に関する偏微分を ∂_i と書き（$\partial_n = \partial_r$ である），対応する Christoffel 記号を Γ_{ij}^k と書く．また，便宜上 $\theta^n = r$ と置く．例 4.22 より

$$\nabla^2 r = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_j \partial_i r - \Gamma_{ji}^k \partial_k r)\, d\theta^i \otimes d\theta^j$$

であり，これに $\partial_i r = \delta_i^n$ と $\Gamma_{ji}^n = -(1/2)\partial_n g_{ji} = -(1/2)\partial_r g_{ij}$（系 6.42 (b)）を代入すれば，

$$\nabla^2 r = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \partial_r g_{ij}\, d\theta^i \otimes d\theta^j$$

を得る．

解答 11.2

解答 11.3　$W \in \mathfrak{X}(U)$ とし，$\nabla_F \nabla_W F$ を 2 通りの方法で評価する．まず，$\mathscr{H}_f = \nabla F$ と Levi-Civita 接続 ∇ が対称であることより，

$$\begin{aligned}
\nabla_F \nabla_W F &= \nabla_F(\mathscr{H}_f(W)) \\
&= (\nabla_F \mathscr{H}_f)(W) + \mathscr{H}_f(\nabla_F W) \\
&= (\nabla_F \mathscr{H}_f)(W) + \mathscr{H}_f(\nabla_W F + [F,W]) \\
&= (\nabla_F \mathscr{H}_f)(W) + \mathscr{H}_f^2(W) + \nabla_{[F,W]} F
\end{aligned}$$

である．次に，曲率の定義と $\nabla_F F = 0$（定理 6.32）より，

$$\begin{aligned}
\nabla_F \nabla_W F &= \nabla_W \nabla_F F + \nabla_{[F,W]} F + R(F,W)F \\
&= \nabla_{[F,W]} F - R(W,F)F
\end{aligned}$$

である．これら 2 式を辺々引いて，

$$(\nabla_F \mathscr{H}_f)(W) + \mathscr{H}_f^2(W) + R(W,F)F = 0$$

を得る．よって，γ が F の積分曲線ならば

$$(D_t \mathscr{H}_f)(W|_{\gamma(-)}) + \mathscr{H}_f^2(W|_{\gamma(-)}) + R_{\gamma'}(W|_{\gamma(-)}) = 0$$

である．これが任意の $W \in \mathfrak{X}(U)$ に対して成り立つから，

$$D_t \mathscr{H}_f + \mathscr{H}_f^2 + R_{\gamma'} = 0$$

である．

解答 11.4　M の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

M が空ならば $\mathrm{inj}(M) = \infty$ であり主張は明らかだから，M が空でない場合を考える．点 $p \in M$ に対して単射半径 $\mathrm{inj}(p)$ を与える関数は連続だから（命題 10.37），M が空でなくコンパクトであることより，点 $p \in M$ を $\mathrm{inj}(p) = \mathrm{inj}(M)$ となるようにとれる．M のコンパクト性より，$\mathrm{inj}(p) < \infty$ である．切断軌跡 $\mathrm{Cut}(p)$ は M の閉集合であり（定理 10.34 (a)），その p からの距離は $\mathrm{inj}(p)$ に等しいから（命題 10.36），ふたたび M のコンパクト性より，$q \in \mathrm{Cut}(p)$ を

$$d(p,q) = d(p, \mathrm{Cut}(p)) = \mathrm{inj}(p) = \mathrm{inj}(M)$$

となるようにとれる．p から q への単位速最短測地線 γ をとる（系 6.21）．

$\mathrm{inj}(M) < \min(\pi R, L/2)$ と仮定する．すると，γ の長さは πR 未満だから，M の断面曲率に関する仮定と共役点の比較定理（定理 11.12）より，γ は共役点をもたない．したがって，問題 10.23 (b) より，p を始点とする単位速閉測地線 $\sigma\colon [0, 2\mathrm{inj}(M)] \to M$ がとれる．$\mathrm{inj}(M) < L/2$ よりこの閉測地線の長さは L 未満だが，これは L の定義に矛盾する．よって，背理法より，$\mathrm{inj}(M) \geq \min(\pi R, L/2)$ が成り立つ．

解答 11.5

解答 11.6

解答 11.7

12　Curvature and Topology

解答 12.1　準備として，次の補題を示す．

補題　M, $\widehat{M}$ は Riemann 多様体であり，M は単連結であるとする．また，U は M の連結開集合，$\phi\colon U \to \widehat{M}$ は局所等長同型写像であり，ある点 $p \in M$ が存在して，ϕ は p を始点とする任意の道 $\gamma\colon [0,1] \to \widehat{M}$ に沿って解析接続可能であるとする．このとき，ϕ は局所等長同型写像 $\varPhi\colon M \to \widehat{M}$ に拡張できる．

補題の証明　系 12.3 の証明の前半で示されている（この部分に完備性は必要ない）．　□

本題に入る．M を定断面曲率をもつ単連結 Riemann 多様体とし，それと同じ次元・同じ断面曲率をもつモデル Riemann 多様体（$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n(R)$, $\mathbb{H}^n(R)$）のいずれかを $\widehat{M}$ と置く．1 点 $p \in M$ を固定すると，系 10.15

より，p の連結開近傍 U から $\widehat{M}$ の開集合への等長同型写像 $\phi\colon U \to \widehat{M}$ がとれる．Killing–Hopf の定理（定理 12.4）の証明で示したように，この ϕ は p を始点とする任意の道に沿って解析接続可能である（この部分に完備性は必要ない）．よって，上の補題より，ϕ は局所等長同型写像 $\Phi\colon M \to \widehat{M}$ に拡張できる．これで，主張が示された．

解答 12.2　$n \geq 0$ を偶数として，$\phi \in \mathrm{SO}(n+1)$ とする．ϕ の特性多項式は実係数だから，ϕ の（複素数の範囲での）固有値を重複度込みで列挙すると $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_l, \overline{\mu_l}$（$\lambda_i$ は実数，μ_j は実数でない複素数，$k+2l=n+1$）という形になる．一方で，$\phi \in \mathrm{SO}(n+1)$ より $\det A = 1$ かつ A の固有値はすべて絶対値 1 だから，

$$1 = \det A = \lambda_1 \cdots \lambda_k \cdot \mu_1\overline{\mu_1} \cdots \mu_l\overline{\mu_l} = \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

である．各 λ_i は ± 1 のいずれかだが，n が偶数であることと $k+2l=n+1$ より k は奇数だから，少なくとも 1 つの λ_i は 1 に等しい．よって，ϕ は固有値 1 をもつから，ϕ は $\mathbb{S}^n$ のある点を固定する．

次に，$n \geq 2$ を偶数として，n 次元球空間形について考える．系 12.5 より，n 次元球空間形とは，ある $R > 0$ と $\mathbb{S}^n(R)$ に自由に作用する離散部分群 $\mathit{\Gamma} \subseteq \mathrm{O}(n+1)$ に対する $\mathbb{S}^n(R)/\mathit{\Gamma}$ に等長同型な Riemann 多様体に他ならない．この $\mathit{\Gamma}$ を決定する．$\mathit{\Gamma}$ が $\mathbb{S}^n(R)$ に自由に作用することと前段の結果より，$\mathit{\Gamma} \cap \mathrm{SO}(n+1) = \{I\}$ である（I は単位行列を表す）．$\phi \in \mathit{\Gamma} \setminus \{I\}$ とすると，$\phi^2 \in \mathit{\Gamma} \cap \mathrm{SO}(n+1) = \{I\}$ だから ϕ の（複素数の範囲での）固有値は ± 1 のみだが，固有値 1 をもつとすると $\mathbb{S}^n(R)$ のある点を固定してしまうから，結局 ϕ の固有値は -1 のみである．したがって，$\phi = -I$ となる．よって，$\mathit{\Gamma}$ は $\{I\}$ または $\{\pm I\}$ である．前者の場合，$\mathbb{S}^n(R)/\mathit{\Gamma}$ は単位球面 $\mathbb{S}^n$ の Riemann 計量を R^2 倍したものに等長同型であり，後者の場合，$\mathbb{S}^n(R)/\mathit{\Gamma}$ は実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ の Riemann 計量を R^2 倍したものに等長同型である．

解答 12.3

解答 12.4

解答 12.5

解答 12.6　M の普遍被覆 Riemann 多様体 $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ をとる．$\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to M$ はともに p から q への測地線分で，これらは道ホモトピックであるとする．γ_0, γ_1 の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1\colon [0,1] \to \widetilde{M}$ を始点が一致するようにとると，これらは終点も一致する．さらに，これらは $\widetilde{M}$ 上の測地線分である．$\widetilde{M}$ は Cartan–Hadamard 多様体だから，命題 12.9 (c) より $\widetilde{\gamma}_0 = \widetilde{\gamma}_1$ であり，したがって

$$\gamma_0 = \pi \circ \widetilde{\gamma}_0 = \pi \circ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1$$

である．これで，主張が示された．

解答 12.7　(a)　計量線型同型 $\mathbb{R}^n \cong T_{\mathrm{C}}M$ を 1 つ固定する．Cartan–Hadamard の定理（定理 12.8）より，制限指数写像 $\exp_{\mathrm{C}}\colon \mathbb{R}^n \cong T_{\mathrm{C}}M \to M$ は微分同相写像である．これによって A, B, C を $\mathbb{R}^n$ の点と同一視し（C は原点に対応する），M の Riemann 計量 g を引き戻して得られる $\mathbb{R}^n$ 上の Riemann 計量をそのまま g と書く．また，$k \leq 0$ に対して，定断面曲率 k のモデル Riemann 多様体（Euclid 空間または双曲空間）の Riemann 計量の制限指数写像による引き戻しによって得られる $\mathbb{R}^n$ 上の Riemann 計量を，g_k と書く[*29]．CA 間の距離，CB 間の距離，および角度 $\angle\mathrm{C}$ は，g と g_0 どちらの Riemann 計量でも変わらないから，通常の余

[*29] c がすでに辺 AB の長さを表す記号として使われているから，代わりに k を用いる．

弦定理より

$$d_{g_0}(\mathrm{A},\mathrm{B})^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle\mathrm{C}$$

である．そこで，主張を示すためには，$c = d_g(\mathrm{A},\mathrm{B})$ と $d_{g_0}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ を比較すればよい．

g に関する A から B への（一意かつ最短な）測地線分 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ をとる．計量の比較定理（定理 11.10 (b)）より，$\mathbb{R}^n$ の各点で $|{-}|_g \leq |{-}|_{g_0}$ だから，

$$\begin{aligned} d_g(\mathrm{A},\mathrm{B}) = L_g(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)|_g\,dt \\ &\leq \int_0^1 |\gamma'(t)|_{g_0}\,dt \\ &= L_{g_0}(\gamma) \\ &\leq d_{g_0}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \end{aligned}$$

が成り立つ．

次に，g の断面曲率がすべて負であるとする．原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ を中心とする開球 B（これは g に関して測地開球である）を，$\gamma([0,1])$ を含むようにとる．B は相対コンパクトだから，その上での g の断面曲率はある定数 $k < 0$ で上から抑えられる．計量の比較定理（定理 11.10 (b)）より，B の各点で $|{-}|_g \leq |{-}|_{g_k}$ だから，

$$\begin{aligned} d_g(\mathrm{A},\mathrm{B}) = L_g(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)|_g\,dt \\ &\leq \int_0^1 |\gamma'(t)|_{g_k}\,dt \\ &< \int_0^1 |\gamma'(t)|_{g_0}\,dt \qquad (*) \\ &= L_{g_0}(\gamma) \\ &\leq d_{g_0}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，真の不等号 $(*)$ は，$\mathrm{A} \neq \mathrm{C} = 0$ と $\gamma'(t) \neq 0$ より $|\gamma'(0)|_{g_k} < |\gamma'(0)|_{g_0}$ であることと，被積分関数の連続性から従う．

(b) (a) より，

$$\cos\angle\mathrm{A} \geq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \cos\angle\mathrm{B} \geq \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \qquad \cos\angle\mathrm{C} \geq \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (**)$$

である．一方で，距離 d_g に対する三角不等式より，3 点 A', B', $\mathrm{C}' \in \mathbb{R}^2$ を，Euclid 計量に関する距離が $\mathrm{B}'\mathrm{C}' = a$，$\mathrm{C}'\mathrm{A}' = b$，$\mathrm{A}'\mathrm{B}' = c$ となるようにとれる．この（退化しているかもしれない）三角形 $\triangle\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ については，通常の余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{A}' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \cos\angle\mathrm{B}' = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \qquad \cos\angle\mathrm{C}' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (***)$$

が成り立つ．$(**)$, $(***)$ より $\angle\mathrm{A} \leq \angle\mathrm{A}'$，$\angle\mathrm{B} \leq \angle\mathrm{B}'$，$\angle\mathrm{C} \leq \angle\mathrm{C}'$ だから，

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} \leq \angle\mathrm{A}' + \angle\mathrm{B}' + \angle\mathrm{C}' = \pi$$

が成り立つ．

g の断面曲率がすべて負ならば，$(**)$ において真の不等号が成り立つから，上と同様の議論により

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} < \angle\mathrm{A}' + \angle\mathrm{B}' + \angle\mathrm{C}' = \pi$$

を得る．

解答 12.8　M または N が単連結ならば，系 12.12 より，$M \times N$ には非正断面曲率の Riemann 計量は入らない．一方で，M, N がともに単連結でなければ，それぞれの基本群の非自明な（有限または無限）巡回部分群 $G \subseteq \pi_1(M)$，$H \subseteq \pi_1(N)$ がとれる．すると，$\pi_1(M \times N) \cong \pi_1(M) \times \pi_1(N)$ は $G \times H$ に同型な部分群をもち，これは可換だが自明でも $\mathbb{Z}$ に同型でもない．よって，Preissman の定理（定理 12.19）の対偶より，$M \times N$ には負断面曲率の Riemann 計量は入らない．これで，主張が示された．

解答 12.9

解答 12.10

解答 12.11　$\widetilde{M}$ の Riemann 計量が定める距離を d と書く．

(a)　$x = \pi(p)$ と置き，均等に被覆される x の連結開近傍 U をとる．$q \in \pi^{-1}(\{x\})$ に対して q を含む $\pi^{-1}(U)$ の連結成分を U_q と書くと，異なる $q \in \pi^{-1}(\{x\})$ に対する U_q は交わらず，π は各 U_q から U への等長同型を与える．そこで，$\epsilon > 0$ を十分小さくとって $B_\epsilon(x)$ が U に含まれる測地開球となるようにすれば，任意の $q \in \pi^{-1}(\{x\})$ に対して $B_\epsilon(q) \subseteq U_q$ となる．このとき，異なる $q \in \pi^{-1}(\{x\})$ に対する $B_\epsilon(q)$ は交わらない．$\mathrm{Aut}_\pi(\widetilde{M})$ は $\pi^{-1}(\{x\})$ に自由に作用するから，任意の異なる 2 元 ψ_1, $\psi_2 \in \mathrm{Aut}_\pi(\widetilde{M})$ に対して，$B_\epsilon(\psi_1(p))$ と $B_\epsilon(\psi_2(p))$ は交わらない．

(b)　任意の $\phi \in \mathrm{Iso}(\widetilde{M})$ に対して $d(p, \phi^{-1}(p)) = d(\phi(p), p) = d(p, \phi(p))$ だから，S に S の元の逆元を付け加えても，D の値は変わらない．そこで，一般性を失わず，S は逆元をとる操作で閉じていると仮定する．このとき，長さ m の $\psi \in \mathit{\Gamma}$ は $\psi = \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_m}$（各 i_k は $\{1, \dots, N\}$ の元）と表せるから，

$$
\begin{aligned}
d(p, \psi(p)) &\leq d(p, \phi_{i_1}(p)) + d(\phi_{i_1}(p), \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2}(p)) + d(\phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_{m-1}}(p), \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_m}(p)) \\
&= d(p, \phi_{i_1}(p)) + d(p, \phi_{i_2}(p)) + \cdots + d(p, \phi_{i_m}(p)) \\
&\leq mD
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，三角不等式より，$B_\epsilon(\psi(p)) \subseteq B_{mD+\epsilon}(p)$ である．

(c)　たかだか長さ m の $\mathit{\Gamma}$ の元全体の集合を $S^{\leq m}$ と書き，その元の個数を N_m と置く．(a), (b) より，

$$
\sum_{\psi \in S^{\leq m}} \mathrm{Vol}(B_\epsilon(\psi(p))) = \mathrm{Vol}\left(\bigcup_{\psi \in S^{\leq m}} B_\epsilon(\psi(p)) \right) \leq \mathrm{Vol}(B_{mD+\epsilon}(p)) \tag{$*$}
$$

である．($*$) の最左辺と最右辺をそれぞれ評価する．ϵ のとり方から各測地開球 $B_\epsilon(\psi(p))$ は $B_\epsilon(x)$ に等長同型だから，$C = \mathrm{Vol}(B_\epsilon(x)) > 0$ と置くと，

$$
\sum_{\psi \in S^{\leq m}} \mathrm{Vol}(B_\epsilon(\psi(p))) = CN_m \tag{$**$}
$$

である．一方で，$\widetilde{M}$ は M と同様に非負の Ricci 曲率をもつから，Bishop–Gromov の体積比較定理（定理 11.19）より，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ における半径 r の開球の体積を $V(r)$ と置くと，

$$
\mathrm{Vol}(B_{mD+\epsilon}(p)) \leq V(mD + \epsilon) \tag{$***$}
$$

である．($**$), ($***$) を ($*$) に代入して，

$$
CN_m \leq V(mD + \epsilon)
$$

を得る．$C > 0$ であり，$V(r)$ は r^n に比例するから，N_m は m^n の定数倍で上から抑えられる．これで，主張が示された．

解答 12.12　連結成分ごとに考えればよいから，コンパクト連結多様体 M について主張を示せばよい．M の普遍被覆多様体 $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ をとる．M はコンパクトだから M 上の Riemann 計量はすべて完備であり，したがってその π による引き戻しは $\widetilde{M}$ 上の完備 Riemann 計量であることに注意する（系 6.24）．

M 上の Riemann 計量 g_1 が正定値の Ricci 曲率をもつとすると，M のコンパクト性より，ある $R > 0$ が存在して任意の単位接ベクトル v に対して $Rc(v,v) \geq (n-1)/R^2$ となる．その引き戻し $\pi^* g_1$ も同様の不等式を満たすから，Myers の定理（定理 12.24）より，$\widetilde{M}$ はコンパクトである．一方で，M 上の Riemann 計量 g_2 が非正の断面曲率をもつとすると，その引き戻し $\pi^* g_2$ も非正の断面曲率をもつから，Cartan–Hadamard の定理（定理 12.8）より，$\widetilde{M}$ は $\mathbb{R}^n$ に同相である．この 2 つは同時には成り立たない．よって，M に正定値の Ricci 曲率をもつ Riemann 計量と非正の断面曲率をもつ Riemann 計量とがともに入ることはない．

解答 12.13

参考文献

[1] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd edition, Springer, 2011.

[2] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition, Springer, 2012.

[3] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd edition, Springer, 2018.