半単純 Lie 代数の表現論セミナー

箱（@o_ccah）

2023 年 3 月 9 日

目次

1 Lie 代数の基礎

1.1 Lie 代数

定義 1.1（Lie 代数） $\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{g}$ であって，その乗法 $(x,y)\mapsto[x,y]$ が次の 2 条件を満たすものを，**$\mathbb{K}$ 上の Lie 代数**，**$\mathbb{K}$-Lie 代数**，あるいは単に **Lie 代数**（Lie algebra）という．

(LIE1) 任意の $x\in\mathfrak{g}$ に対して，$[x,x]=0$ である．
(LIE2) 任意の $x,\ y,\ z\in\mathfrak{g}$ に対して，$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ である（Jacobi の恒等式）．

以下，特に断らなければ，Lie 代数の係数体は $\mathbb{K}$ とし，その乗法を $(x,y)\mapsto[x,y]$ と書く．

注意 1.2 A を代数とする．任意の $x\in A$ に対して $x\cdot x=0$ ならば，$x,\ y\in A$ に対して

$$0=(x+y)\cdot(x+y)=x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y=x\cdot y+y\cdot x$$

だから $y\cdot x=-x\cdot y$ である．逆に，係数体 $\mathbb{K}$ が標数 2 でなく，任意の $x,\ y\in A$ に対して $y\cdot x=-x\cdot y$ ならば，$x\in A$ に対して $x\cdot x=-x\cdot x$ だから $x\cdot x=0$ である．よって，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は

(LIE1′) 任意の $x,\ y\in\mathfrak{g}$ に対して，$[y,x]=-[x,y]$ である．

を満たし，さらに $\mathbb{K}$ が標数 2 でなければ，定義 1.1 の条件 (LIE1) を (LIE1′) で置き換えてもよい．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ は，ふたたび Lie 代数をなす．このようにして得られる Lie 代数 $\mathfrak{h}$ を，$\mathfrak{g}$ の**部分 Lie 代数**（Lie subalgebra）という．

命題 1.3 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．部分集合 $S\subseteq\mathfrak{g}$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は，$[x_1,\dots,[x_{n-1},x_n]]$（$n\geq 1$，$x_1,\ \dots,\ x_n\in S$）の全体が生成する $\mathfrak{g}$ の部分線型空間である．

証明 $[x_1,\dots,[x_{n-1},x_n]]$（$n\geq 1$，$x_1,\ \dots,\ x_n\in S$）の全体が生成する $\mathfrak{g}$ の部分線型空間を $\mathfrak{h}$ と置く．$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることを示せばよい．容易にわかるように，$\mathfrak{g}$ の部分集合

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\{x\in\mathfrak{g}\mid[x,\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}\}$$

は S を含む $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数だから，特に $\mathfrak{h}$ を含む[*1]．よって，$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$ であり，これは $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることを意味する． □

(LIE1′) より，Lie 代数において左イデアル，右イデアル，両側イデアルの概念は一致するから，これらを単に**イデアル**（ideal）という．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対して定まる商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は，ふたたび Lie 代数をなす．このようにして得られる Lie 代数を，$\mathfrak{g}$ の**商 Lie 代数**（quotient Lie algebra）という．

[*1] $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ を，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ における**正規化子**（normalizer）という．正規化子は 4.1 節でも用いられる．

$\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ を Lie 代数の族とすると，その積代数 $\prod_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ はふたたび Lie 代数をなす．これを，$\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ の**積 Lie 代数**（product Lie algebra）という．

Lie 代数の間の代数の準同型・同型を，**Lie 代数の準同型・同型**という．$f\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ が Lie 代数の準同型ならば，$\operatorname{Ker} f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル，$\operatorname{Im} f$ は B の部分 Lie 代数であり，f は Lie 代数の同型 $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f\cong\operatorname{Im} f$ を誘導する（準同型定理）．$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数・イデアルならば，$f(\mathfrak{a})$ は $\operatorname{Im} f$ の部分 Lie 代数・イデアルである．$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数・イデアルならば，$f^{-1}(\mathfrak{b})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数・イデアルである．

1.2 Lie 代数の表現

定義 1.4（Lie 代数の表現，Lie 代数上の加群） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．V が線型空間であり，$\rho\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ が Lie 代数の準同型であるとき，ρ は $\mathfrak{g}$ の V 上の**表現**（representation）である，あるいは (ρ,V) は $\mathfrak{g}$ の**表現**であるという．このとき，線型空間 V の次元を表現 ρ の**次元**という．ρ が単射であれば，表現 ρ は**忠実**（faithful）であるという．

V が線型空間であり，$\mathfrak{g}$ の V 上の表現 ρ が固定されているとき，V を **$\mathfrak{g}$ 上の加群**（module over $\mathfrak{g}$）あるいは **$\mathfrak{g}$-加群**という．

$\mathfrak{g}$ の表現と $\mathfrak{g}$ 上の加群は同じものである．V を $\mathfrak{g}$-加群とし，対応する表現を ρ とするとき，$\rho(x)v$ を単に xv と書く．

例 1.5 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．

(1) V を線型空間とし，任意の $x\in\mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)=0\in\mathfrak{gl}(V)$ と定めると，ρ は $\mathfrak{g}$ の V 上の表現である．これを，$\mathfrak{g}$ の V 上の**自明表現**（trivial representation）という．

(2) $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}(V)$（V は線型空間）の部分 Lie 代数ならば，包含準同型 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ は $\mathfrak{g}$ の V 上の表現である．これを，$\mathfrak{g}$ の**自然表現**（natural representation）という．

(3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$x\in\mathfrak{g}$ に対して線型写像 $\operatorname{ad}x=\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}x\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を

$$(\operatorname{ad}x)y=[x,y]\qquad(y\in\mathfrak{g})$$

と定めると，(LIE2) より $\operatorname{ad}\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現となる．これを，$\mathfrak{g}$ の**随伴表現**（adjoint representation）という．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ,V) について，V の部分線型空間が $\rho(\mathfrak{g})$-安定であることを，$\mathfrak{g}$-安定である，あるいは単に安定であるという．W が V の安定部分線型空間ならば，ρ は自然に $\mathfrak{g}$ の W や V/W 上の表現を誘導する．前者を ρ の**部分表現**（subrepresentation），後者を ρ の**商表現**（quotient representation）と呼ぶ．**部分 $\mathfrak{g}$-加群**（$\mathfrak{g}$-submodule），**商 $\mathfrak{g}$-加群**（quotient $\mathfrak{g}$-module）も同様に定める．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\{(\rho_i,V_i)\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の表現の族とする．このとき，$x\mapsto\bigoplus_{i\in I}\rho_i(x)$ は $\mathfrak{g}$ の $\bigoplus_{i\in I}V_i$ 上の表現である．これを $\{\rho_i\}_{i\in I}$ の**直和**（direct sum）といい，$\bigoplus_{i\in I}\rho_i$ と書く．$I=\{1,\dots,n\}$ などの場合，$\bigoplus_{i\in I}\rho_i$ の代わりに $\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_n$ などとも書く．$\mathfrak{g}$-加群の直和も同様に定める．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，(ρ,V) を $\mathfrak{g}$ の表現とする．V が部分線型空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ に直和分解され，かつ各 V_i が $\mathfrak{g}$-安定ならば，ρ の V_i 上の部分表現を ρ_i と書くと，ρ は直和表現 $\bigoplus_{i\in I}\rho_i$ と自然に同一視できる．このとき，ρ は $\{\rho_i\}_{i\in I}$ に**直和分解**されるという．$\mathfrak{g}$-加群の直和分解も同様に定める．

定義 1.6（既約性，可約性，完全可約性） (ρ,V) を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．

(1) $V \neq 0$ のとき，V の安定部分空間が 0 と V のみであれば表現 ρ は**既約**（irreducible）であるといい，そうでなければ**可約**（reducible）であるという．
(2) ρ が既約表現の直和に分解されるとき，表現 ρ は**完全可約**（completely reducible）であるという．

$\mathfrak{g}$-加群の既約性，可約性，完全可約性も同様に定める．

1.3 包絡代数

定義 1.7（包絡代数） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ のテンソル代数 $T(\mathfrak{g})$ を $x, y \in \mathfrak{g}$ に対する $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ の全体が生成する両側イデアルで割って得られる単位的かつ結合的な代数を，$\mathfrak{g}$ の**包絡代数**（enveloping algebra）といい，$U(\mathfrak{g})$ と書く．

$u, v \in U(\mathfrak{g})$ の積を uv と書く．また，自然な写像 $\mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ による $x \in \mathfrak{g}$ の像をそのまま $x \in U(\mathfrak{g})$ と書く．定義より，$x, y \in \mathfrak{g}$ とすると $U(\mathfrak{g})$ において $[x, y] = xy - yx$ である．

命題 1.8（包絡代数の普遍性） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\iota\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ を自然な写像とする．A を単位的かつ結合的な代数とし，これを交換子積によって Lie 代数ともみなすと，任意の Lie 代数の準同型 $\phi\colon \mathfrak{g} \to A$ に対して，単位的代数の準同型 $\widetilde{\phi}\colon U(\mathfrak{g}) \to A$ であって $\widetilde{\phi} \circ \iota = \phi$ を満たすものが一意に存在する．

証明 テンソル代数の普遍性と包絡代数の定義から明らかである． □

包絡代数の普遍性（命題 1.8）より，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の線型空間 V 上の表現（すなわち，Lie 代数の準同型 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$）を考えることは，その包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の V 上の表現（すなわち，単位的代数の準同型 $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$）を考えることと同じである．

事実 1.9（Poincaré–Birkhoff–Witt の定理） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，$\{x_i\}_{i \in I}$ をその全順序付けられた基底とする．このとき，$\{x_{i_1} \cdots x_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N},\, i_1 \leq \cdots \leq i_k}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底である．

ここから，次の系が容易に従う．

系 1.10 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，自然な写像 $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ は単射である（したがって，$\mathfrak{g}$ を $U(\mathfrak{g})$ の部分線型空間とみなせる）． □

系 1.11 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とすると，包含準同型 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ が誘導する単位的代数の準同型 $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ は単射である（したがって，$U(\mathfrak{h})$ を $U(\mathfrak{g})$ の部分単位的代数とみなせる）． □

系 1.12 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ がその部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ の直和に分解されるとすると，$U(\mathfrak{a})U(\mathfrak{b}) = U(\mathfrak{g})$ である（ここで，系 1.11 によって $U(\mathfrak{a}), U(\mathfrak{b})$ を $U(\mathfrak{g})$ の部分単位的代数とみなしている）． □

1.4 自由 Lie 代数

集合 S に対して，S 上の（単位的とも結合的とも可換とも限らない）自由代数を $F(S)$ と書く．すなわち，$F(S)$ は，$x_1, x_2, x_3, \ldots \in S$ に対する

$$x_1, \quad x_1 \cdot x_2, \quad (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, \quad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \quad \ldots$$

（結合順が異なるものは異なる元とみなす）の全体を基底とする線型空間に自然な乗法を定義して得られる代数である．

定義 1.13（自由 Lie 代数） 集合 S に対して，S 上の自由代数 $F(S)$ を $x,\ y,\ z \in F(S)$ に対する

$$x \cdot x, \qquad x \cdot (y \cdot z) + y \cdot (z \cdot x) + z \cdot (x \cdot y)$$

の全体が生成する両側イデアルで割って得られる商代数を，S 上の**自由 Lie 代数**（free Lie algebra）といい，$L(S)$ と書く．

自由 Lie 代数 $L(S)$ は確かに Lie 代数である．通常の Lie 代数と同じように，$x,\ y \in L(S)$ の積を $[x, y]$ と書く．また，自然な写像 $S \to F(S) \to L(S)$ による $x \in S$ の像をそのまま $x \in L(S)$ と書く．

命題 1.14（自由 Lie 代数の普遍性） S を集合とし，$\iota\colon S \to L(S)$ を自然な写像とする．$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とすると，任意の写像 $\phi\colon S \to \mathfrak{g}$ に対して，Lie 代数の準同型 $\widetilde{\phi}\colon L(S) \to \mathfrak{g}$ であって $\widetilde{\phi} \circ \iota = \phi$ を満たすものが一意に存在する．

証明 自由代数の普遍性と自由 Lie 代数の定義から明らかである． □

S を集合，$\{R_i\}_{i \in I}$, $\{R'_i\}_{i \in I}$ を自由 Lie 代数 $L(S)$ の元の族とするとき，自由 Lie 代数 $L(S)$ を $\{R_i - R'_i\}_{i \in I}$ が生成するイデアルで割って得られる商 Lie 代数を，**生成元 S と関係式 $R_i = R'_i$（$i \in I$）によって定まる Lie 代数**という．自由 Lie 代数の普遍性（命題 1.14）より，生成元と関係式によって定まる Lie 代数も対応する普遍性を満たす．

1.5 不変双線型形式，特に Killing 形式

定義 1.15（不変双線型形式） Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の双線型形式 $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ が**不変**（invariant）であるとは，任意の $x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z])$$

であることをいう．

定義 1.16（Killing 形式） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，その **Killing 形式**（Killing form）と呼ばれる双線型形式 $B_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ を，

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)) \qquad (x,\ y \in \mathfrak{g})$$

と定める．

命題 1.17 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}$ は，$\mathfrak{g}$ 上の不変な対称双線型形式である．

証明 $x,\ y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)) = B_{\mathfrak{g}}(y, x)$$

だから，$B_{\mathfrak{g}}$ は対称である．また，x, y, $z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}([x,y],z) &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}[x,y])(\mathrm{ad}\, z)) \\ &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)(\mathrm{ad}\, z) - (\mathrm{ad}\, y)(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, z)) \\ &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)(\mathrm{ad}\, z) - (\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, z)(\mathrm{ad}\, y)) \\ &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}[y,z])) \\ &= B_{\mathfrak{g}}(x,[y,z]) \end{aligned}$$

だから，$B_{\mathfrak{g}}$ は不変である． □

1.6 冪零 Lie 代数と可解 Lie 代数

定義 1.18（降中心列，導来列） $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．

(1) $\mathfrak{g}$ の**降中心列**（lower central series）$\mathscr{C}^p\mathfrak{g}$（$p \geq 1$）を，

$$\mathscr{C}^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \qquad \mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^p\mathfrak{g}] \quad (p \geq 1)$$

によって再帰的に定める．

(2) $\mathfrak{g}$ の**導来列**（derived series）$\mathscr{D}^p\mathfrak{g}$（$p \geq 0$）を，

$$\mathscr{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \qquad \mathscr{D}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathscr{D}^p\mathfrak{g}, \mathscr{D}^p\mathfrak{g}] \quad (p \geq 0)$$

によって再帰的に定める．

定義 1.19（冪零 Lie 代数，可解 Lie 代数） $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする．

(1) ある $p \geq 1$ に対して $\mathscr{C}^p\mathfrak{g} = 0$ であるとき，$\mathfrak{g}$ は**冪零**（nilpotent）であるという．
(2) ある $p \geq 0$ に対して $\mathscr{D}^p\mathfrak{g} = 0$ であるとき，$\mathfrak{g}$ は**可解**（solvable）であるという．

可解 Lie 代数について，次のことが知られている．

事実 1.20（Lie の定理） $\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体上の可解 Lie 代数，(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする．このとき，V の適当な基底をとれば，$\rho(\mathfrak{g})$ のすべての元の行列表示が上三角となる．

系 1.21 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体上の可解 Lie 代数，(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする．このとき，$\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ の元はすべて冪零である．

証明 Lie の定理（事実 1.20）より，V の適当な基底をとれば，$\rho(\mathfrak{g})$ のすべての元の行列表示が上三角行列となる．このとき，任意の x, $y \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ の行列表示は狭義上三角であり，したがって $\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ のすべての元も同様である．よって，$\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ の元はすべて冪零である． □

1.7 単純 Lie 代数と半単純 Lie 代数

定義 1.22（単純 Lie 代数） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，可換でなく，0, $\mathfrak{g}$ 以外のイデアルをもたないとき，**単純**（simple）であるという．

定義 1.23（半単純 Lie 代数） 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，0 以外の可解イデアルをもたないとき，**半単純**（semisimple）であるという．

一般に Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\}$ は $\mathfrak{g}$ の可換イデアルだから，半単純 Lie 代数の中心は 0 である．あるいは同じことだが，半単純 Lie 代数の随伴表現は忠実である．

半単純 Lie 代数について，次のことが知られている．

事実 1.24（半単純性に関する Cartan の判定法） 標数 0 の可換体上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(b) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}$ は非退化である．

さらに，これらの条件の下で，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ が成り立つ．

事実 1.25 標数 0 の可換体上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(b) $\mathfrak{g}$ は有限個の単純 Lie 代数の積として書ける．

さらに，$\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の有限族 $\{\mathfrak{g}_i\}_{i \in I}$ の積として書かれているとすると，$\mathfrak{g}$ のイデアルは，$\{\mathfrak{g}_i\}_{i \in I}$ の部分族の積で尽くされる．

事実 1.26（Weyl の定理） 標数 0 の可換体上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(b) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現は完全可約である．

2 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

本節を通して，係数体 $\mathbb{K}$ は標数 0 の代数閉体とする．[*2]

2.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群のウェイト

Lie 代数
$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K}) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}$$
を考える．これは 3 次元単純 Lie 代数であり，
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$
と置くと (H, X, Y) は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の基底である．これを，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の**標準基底**（canonical basis）という．H, X, Y は関係式
$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H$$

[*2] 係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であることを使うのは命題 2.8 の証明だけだが，実は命題 2.8 は係数体 $\mathbb{K}$ が標数 0 というだけでも成り立つ．したがって，本節の内容はすべて，係数体 $\mathbb{K}$ が標数 0 というだけでも成り立つ．

を満たす．

本稿の以下の部分では，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の標準基底を表す記号 $(*)$ を断りなく用いる．

定義 2.1（ウェイト） V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とする．$\mathfrak{h}$ の V への作用の固有値，固有ベクトル，固有空間を，それぞれ V の**ウェイト**（weight），**ウェイトベクトル**（weight vector），**ウェイト空間**（weight space）という．同時固有値の重複度を，ウェイトの**重複度**（multiplicity）という．

命題 2.2 V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とする．$\lambda \in \mathbb{K}$，$v \in V$ であり，v がウェイト λ をもつならば，Xv, Yv はそれぞれウェイト $\lambda+2$, $\lambda-2$ をもつ．

証明 v がウェイト λ をもつならば，$Hv=\lambda v$ だから

$$\begin{aligned} HXv &= [H,X]v + XHv = 2Xv + \lambda Xv = (\lambda+2)Xv, \\ HYv &= [H,Y]v + YHv = -2Yv + \lambda Yv = (\lambda-2)Yv \end{aligned}$$

である．すなわち，Xv, Yv はそれぞれウェイト $\lambda+2$, $\lambda-2$ をもつ． □

2.2 最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群

定義 2.3（原始ベクトル） V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とする．$V$ のウェイトベクトル $e \neq 0$ であって $Xe=0$ を満たすものを，V の**原始ベクトル**（primitive vector）という．V の原始ベクトルであって V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群として生成するものを，$V$ の**原始生成ベクトル**（primitive generating vector）という．

定義 2.4（最高ウェイト加群） $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の原始生成ベクトルをもつとき，V は**最高ウェイト**（highest weight）λ をもつ**最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群**（highest weight $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-module）であるという．

命題 2.5 V をウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の原始ベクトル e をもつ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$e_n = \frac{1}{n!}Y^n e$$

と置く．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$He_n = (\lambda-2n)e_n, \qquad Xe_n = (\lambda-n+1)e_{n-1}, \qquad Ye_n = (n+1)e_{n+1}$$

である．ただし，$e_{-1}=0$ とみなす．

以下では，さらに，e が V の原始生成ベクトルである（したがって，V は最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト加群である）とする．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n \neq 0$ であるとする．このとき，$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は V の基底である．

(3) ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n = 0$ であるとし，$m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \neq 0\}$ と置く．このとき，$\{e_n\}_{0\leq n\leq m}$ は V の基底であり，$\lambda = m$ である．

証明 (1) H に関する式は命題 2.2 から，Y に関する式は e_n の定義から従う．X に関する式を，$n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す．$n=0$ のとき，$e_0 = e$ は原始ベクトルだから $Xe_0 = 0$ である．$n \geq 1$ とし，

$Xe_{n-1} = (\lambda - n + 2)e_{n-2}$ が成り立つとすると，

$$\begin{aligned}
nXe_n &= XYe_{n-1} \\
&= [X, Y]e_{n-1} + YXe_{n-1} \\
&= He_{n-1} + Y(\lambda - n + 2)e_{n-2} \\
&= (\lambda - 2n + 2)e_{n-1} + (n-1)(\lambda - n + 2)e_{n-1} \\
&= n(\lambda - n + 1)e_{n-1}
\end{aligned}$$

であり，したがって $Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}$ が成り立つ．これで，帰納法が完成した．

(2)　(1) より $\mathrm{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は V の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群であり，$e_0 = e$ は V の生成ベクトルだから，$V = \mathrm{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ である．また，(1) より $e_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) はすべて異なるウェイトをもつから，$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は線型独立である．よって，$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は V の基底である．

(3)　$\{e_n\}_{0\leq n\leq m}$ が V の基底であることは，(2) と同様にしてわかる．いま $e_m \neq 0$ かつ $e_{m+1} = 0$ であり，一方で (1) より $Xe_{m+1} = (\lambda - m)e_m$ だから，$\lambda = m$ である．□

最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群は，もし存在すれば，その構造は命題 2.5 によって決まってしまう．分類を完成させるために，与えられた最高ウェイトをもつ最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群を構成する．

$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，線型空間としては $M(\lambda) = \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}$ とし（その標準基底を $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書く），H, X, $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $M(\lambda)$ 上の線型作用を

$$He_n = (\lambda - 2n)e_n, \qquad Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \qquad Ye_n = (n+1)e_{n+1}$$

によって定める（ただし，$e_{-1} = 0$ とみなす）．標準基底に関して行列表示すれば，

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda-2 & & \\ & & \lambda-4 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & \\ & 0 & \lambda-1 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

である．容易に確かめられるように，これらの作用は H, X, Y の間の関係式と同じ関係式を満たすから，これらの作用は Lie 代数の準同型 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}(M(\lambda))$ に一意に拡張される．これによって，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $M(\lambda)$ を定める．明らかに，e_0 は $M(\lambda)$ のウェイト λ の原始生成ベクトルである．

さらに，$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合，$M(\lambda)$ において $Xe_{\lambda+1} = (\lambda-(\lambda+1)+1)e_\lambda = 0$ だから，$N(\lambda) = \mathrm{span}\{e_n \mid n > \lambda\}$ は $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群である．そこで，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $L(\lambda)$ を

$$L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$$

と定め，等化準同型 $M(\lambda) \to L(\lambda)$ による e_n の像をそのまま e_n と書く．明らかに，$\{e_n\}_{0\leq n\leq\lambda}$ は $L(\lambda)$ の基底であり（これを $L(\lambda)$ の標準基底という），e_0 は $L(\lambda)$ のウェイト λ の原始生成ベクトルである．H, X, $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $L(\lambda)$ 上の線型作用を標準基底に関して行列表示すれば，

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda-2 & & & \\ & & \lambda-4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ & 0 & \lambda-1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

定理 2.6（最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類） $\lambda \in \mathbb{K}$ とする．

(1) $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，同型を除いて $M(\lambda)$ のみである．$M(\lambda)$ は無限次元かつ既約であり，そのウェイトは $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \ldots$（すべて重複度 1）である．
(2) $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，同型を除いて $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ の二つのみである．$M(\lambda)$ は無限次元かつ可約であり，そのウェイトは $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \ldots$（すべて重複度 1）である．$L(\lambda)$ は $\lambda+1$ 次元かつ既約であり，そのウェイトは $\lambda, \lambda-2, \lambda-4, \ldots, -\lambda$（すべて重複度 1）である．

証明 最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類に関する主張は，命題 2.5 から従う．

次元とウェイトに関する主張は明らかである．

既約性に関する主張を示す．まず，$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき，$M(\lambda)$ は 0, $M(\lambda)$ 以外の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $N(\lambda)$ をもつから，可約である．次に，$\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として，$M \neq 0$ を $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とする．$v \in M \setminus \{0\}$ を固定して $v = \sum_{n=0}^{p} c_n e_n$（$c_n \in \mathbb{K}$，$c_p \neq 0$）と表すと，

$$X^p v = \sum_{n=0}^{p} c_n X^p e_n = c_p(\lambda-p+1)(\lambda-p+2)\cdots\lambda e_0$$

は e_0 の 0 でないスカラー倍であり，M に属する．e_0 は $M(\lambda)$ の原始生成ベクトルだから，$M = M(\lambda)$ である．よって，$M(\lambda)$ は既約である．$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合の $L(\lambda)$ の既約性も同様にして証明できる．□

系 2.7 V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群，$\lambda \in \mathbb{K}$ とし，V はウェイト λ の原始ベクトル e をもつとする．e が生成する V の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 M が有限次元ならば，$\lambda = \dim M - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．

証明 e は M の原始生成ベクトルだから，最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.6）から主張が従う．□

2.3 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類

命題 2.8 0 でない有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V は，原始ベクトルをもつ．

証明 係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉[*3] であり $V \neq 0$ だから，V は少なくとも一つのウェイトをもつ．一方で，V は有限次元だから，V のウェイトは有限個である．したがって，V のウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ であって $\lambda+2$ がウェイトでないものがとれる．$e \neq 0$ をウェイト λ をもつベクトルとすれば，λ のとり方と命題 2.2 より $Xe = 0$ だから，e は原始ベクトルである．□

定理 2.9（有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類） 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対する $L(\lambda)$ で同型を除いて尽くされる．$L(\lambda)$ は $\lambda+1$ 次元であり，そのウェイトは $\lambda, \lambda-2, \ldots, -\lambda+2, -\lambda$（すべて重複度 1）である．

証明 任意の有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は原始ベクトルをもち（命題 2.8），有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の場合，それは原始生成ベクトルとなる．よって，主張は最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.6）から従う．□

系 2.10 V を有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とし，$V$ のウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の重複度を m_λ と書く．

[*3] 脚注 *2 でも述べたように，係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であることを使わない証明もある．

(1) X, Y の V への作用は冪零である．
(2) H の V への作用は対角化可能であり，V のウェイトはすべて整数である．
(3) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$m_\lambda = m_{-\lambda}$ である．
(4) $m_0 \geq m_2 \geq m_4 \geq \cdots$ かつ $m_1 \geq m_3 \geq m_5 \geq \cdots$ である．
(5) $L(\lambda)$（$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）の V における重複度は，$m_{\lambda+2} - m_\lambda$ である．

証明　Weyl の定理（事実 1.26）と有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の分類定理（定理 2.9）から従う．　□

注意 2.11　系 2.10 より，有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V の同型類はそのウェイトの重複度の情報から一意に決まってしまう．いいかえれば，V の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群としての同型類は，$V$ の $\mathbb{K}H$-加群としての同型類から一意に決まってしまう．

これと同じことが一般の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ でも起こる（系 5.25）．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の場合の $\mathbb{K}H$ に対応するものが，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ である（定義 4.1）．

3　ルート系

本節を通して，係数体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．

3.1　鏡映

定義 3.1（鏡映）　V を $n \geq 1$ 次元 $\mathbb{K}$-線型空間とする．V から自身への線型写像であって，1 を重複度 $n-1$ の固有値とし，-1 を重複度 1 の固有値とするものを，V 上の**鏡映**（reflection）という．鏡映 s に対して，その固有値 1 の固有空間を**鏡映面**，固有値 -1 の固有空間を**鏡映軸**という．

V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して線型写像 $s_{\alpha,f} \colon V \to V$ を

$$s_{\alpha,f}(v) = v - f(v)\alpha \qquad (v \in V)$$

と定める．$f(\alpha) = 2$ ならば，$s_{\alpha,f}$ は $\operatorname{Ker} f$ を鏡映面，$\mathbb{K}\alpha$ を鏡映軸とする鏡映である．逆に，V 上の任意の鏡映はこのように書ける（ただし，α と f の選び方には 1 次元分の自由度がある）．本稿の以下の部分では，この記号 $s_{\alpha,f}$ を断りなく用いる．

命題 3.2　V は有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間であり，有限部分集合 $R \subseteq V$ が V を張るとする．このとき，任意の $\alpha \in V \setminus \{0\}$ に対して，V 上の鏡映 s であって $s(\alpha) = -\alpha$ かつ $s(R) = R$ を満たすものはたかだか一意である．

証明　V 上の鏡映 s, s' がともに条件を満たすとすると，任意の $v \in V$ に対して $s's(v) - v \in \mathbb{K}\alpha$ だから，ある $f \in V^*$ が存在して

$$s's(v) = v + f(v)\alpha \qquad (v \in V)$$

と書ける．さらに，$s's(\alpha) = \alpha$ だから，任意の $n \geq 0$ に対して

$$(s's)^n(v) = v + nf(v)\alpha \qquad (v \in V)$$

であることが帰納的にわかる．一方で，V の自己線型同型であって R を安定にするもの全体は有限群をなし，

$s's$ はこの有限群の元だから，$(s's)^n = \mathrm{id}_V$ を満たす $n \geq 1$ が存在する．上式でこの n をとれば，$nf(v)\alpha = 0$，すなわち $f(v) = 0$ を得る．これより $f = 0$ であり，したがって $s = s'$ である． □

命題 3.3　V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間，$\langle -,- \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ を非退化対称双線型形式とする．V 上の鏡映 s が $\langle -,- \rangle$ を保ち $\alpha \in V \setminus \{0\}$ を $-\alpha$ に移すならば，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$s(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \qquad (v \in V)$$

である．すなわち，$s = s_{\alpha,f}$（$f \in V^*$）と表すとき

$$f = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

である．

証明　v を s の鏡映面上の点とすると

$$\langle \alpha, v \rangle = \langle \alpha, s(v) \rangle = \langle s(\alpha), v \rangle = -\langle \alpha, v \rangle$$

より $\langle \alpha, v \rangle = 0$ であり，$\langle -,- \rangle$ に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間 $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ は $\dim V - 1$ 次元だから，s の鏡映面は $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ に等しい．α は s の鏡映面上にはないから，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ である．$s_{\alpha,f}$ は，α を $-\alpha$ に移し $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ の点は動かさないから，s に一致する． □

命題 3.4　V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間とする．$\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して，$s^*_{\alpha,f} = s_{f,\alpha}$ である．

証明　$g \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned} s^*_{\alpha,f}(g)(v) &= g(s_{\alpha,f}(v)) \\ &= g(v - f(v)\alpha) \\ &= g(v) - f(v)g(\alpha) \\ &= (g - g(\alpha)f)(v) \\ &= s_{f,\alpha}(g)(v) \qquad\qquad (v \in V) \end{aligned}$$

だから，$s^*_{\alpha,f} = s_{f,\alpha}$ である． □

3.2　ルート系

定義 3.5（ルート系）　V を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間とする．V 上の**ルート系**（root system）とは，部分集合 $R \subseteq V$ であって次の 4 条件を満たすものをいう．

(RS1)　R は有限であり，0 を含まず，V を $\mathbb{K}$-線型空間として生成する．
(RS2)　任意の $\alpha \in R$ に対して，V 上の鏡映 s_α であって $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ かつ $s_\alpha(R) = R$ を満たすものが存在する．（(RS1) と命題 3.2 よりこのような s_α は一意に定まり，したがって $s_\alpha = s_{\alpha,\alpha^\vee}$ となる $\alpha^\vee \in V^*$ も一意に定まる．以下，この記号を用いる．）
(RS3)　任意の $\alpha, \beta \in R$ に対して，$\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$ である．
(RS4)　$\alpha \in R$ ならば $2\alpha \notin R$ である．[*4]

[*4] (RS1)–(RS3) を満たすものをルート系といい，さらに (RS4) を満たすものを被約ルート系（reduced root system）ということもある（たとえば Bourbaki [2]）．

このとき，$\mathbb{K}$-線型空間 V の次元をルート系 R の**階数**（rank）という．ルート系を考えるとき，その各元を**ルート**（root）という．

(RS2) における s_α を，α に関する**ルート鏡映**（root reflection）という．ルート鏡映全体が生成する $GL(V)$ の部分群を，ルート系 R の **Weyl 群**（Weyl group）といい，$W(R)$ と書く．

(RS2) より特に $\alpha \in R$ に対して $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$ だから，$-R = R$ である．

以下，特に断らなくても，ルート α に関するルート鏡映を $s_\alpha = s_{\alpha,\alpha^\vee}$ と書き，$\alpha, \beta \in R$ に対して

$$n(\beta,\alpha) = \alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$$

と書く．この記号を用いれば，ルート β を α に関するルート鏡映で移した先は

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha = \beta - n(\beta,\alpha)\alpha$$

と書ける．

定義 3.6（ルート系の同型） R, R' をそれぞれ有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V, V' 上のルート系とする．線型同型写像 $\Phi\colon V \to V'$ であって $\Phi(R) = R'$ を満たすものを，ルート系 R から R' への**同型**（isomorphism）という．R から R' への同型が存在するとき，ルート系 R と R' は**同型**（isomorphic）であるという．

命題 3.7 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．V の部分線型空間 V' と $R' \subseteq R$ が $R' = R \cap V'$ かつ $\operatorname{span} R' = V'$ を満たすならば，R' は V' 上のルート系である．

証明 V' と R' が (RS1), (RS4) を満たすことは明らかである．また，$\alpha \in R'$ とすると，任意の $v \in V'$ に対して $s_\alpha(v) = v - \alpha^\vee(v)\alpha \in V'$ だから V' は s_α-安定であり，s_α は V' 上の鏡映 s'_α を定める．s'_α が (RS2), (RS3) の条件を満たすことは明らかである．よって，R' は V' 上のルート系である． □

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とすると，R は有限次元 $\mathbb{K}'$-線型空間 $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ の部分集合ともみなせ，このとき明らかに R は $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ 上のルート系となる．これを，ルート系の**係数拡大**（extension of scalars）という．

次の命題は，どんなルート系も有限次元 $\mathbb{Q}$-線型空間上のルート系の係数拡大として得られることを示している．

命題 3.8 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．V の部分 $\mathbb{Q}$-線型空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を

$$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} R$$

と定めると，R は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系でもあり，包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V$ が誘導する $\mathbb{K}$-線型写像 $i\colon V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \to V$ は同型である（したがって，V 上のルート系 R は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系 R の $\mathbb{K}$ への係数拡大とみなせる）．

証明 $V_{\mathbb{Q}}$ と R が (RS1), (RS4) を満たすことは明らかである．また，$\alpha \in R$ とすると，V と R が (RS3) を満たすことより $\alpha^\vee(V_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}$ だから $\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \in (V_{\mathbb{Q}})^*$ であり，したがって $s_\alpha|_{V_{\mathbb{Q}}}$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の鏡映 $s_{\alpha,\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}}$ である．この鏡映が (RS2), (RS3) の条件を満たすことは明らかである．よって，R は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系である．

包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V$ が誘導する $\mathbb{K}$-線型写像 $i\colon V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \to V$ が同型であることを示す．$V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} R$ だから，i は全射である．次に，i の双対線型写像

$$i^*\colon V^* \to (V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K})^* \cong (V_{\mathbb{Q}})^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$$

を考える．各 $\alpha \in R$ に対して

$$i^*(\alpha^\vee) = \alpha^\vee|_{V_\mathbb{Q}} \otimes 1$$

だから，$(V_\mathbb{Q})^* = \operatorname{span}_\mathbb{Q}\{\alpha^\vee|_{V_\mathbb{Q}} \mid \alpha \in R\}$ を示せば i^* の全射性がいえ，したがって i の単射性もいえる．以下，これを示す．$V_\mathbb{Q}$ 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定すると（任意にとった $V_\mathbb{Q}$ 上の内積を $W(R)$ の作用に関して平均すればよい），$\alpha \in R$ に対して命題 3.3 より $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee|_{V_\mathbb{Q}} = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

であり，これは $\langle -,- \rangle$ が定める $\mathbb{Q}$-線型同型 $V_\mathbb{Q} \cong (V_\mathbb{Q})^*$ を通して $2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle \in V_\mathbb{Q}$ に対応する．$\alpha \in R$ が動くときこれら全体は $V_\mathbb{Q}$ を張るから，$\alpha^\vee|_{V_\mathbb{Q}}$ の全体は $(V_\mathbb{Q})^*$ を張る．これで，主張が示された． □

命題 3.8 より有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系 R は $V_\mathbb{Q}$ 上のルート系ともみなせ，さらに係数拡大により $V_\mathbb{R} = V_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ 上のルート系ともみなせる．これにより，ルート系の性質の証明の多くは係数体が $\mathbb{R}$ の場合に帰着できる．この論法は，本節の以下の部分でしばしば用いられる．

系 3.9 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．このとき，V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が存在する．この $\langle -,- \rangle$ をとると，任意のルート $\alpha \in R$ に対して $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in V^*$$

である．さらに，$\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ の部分体ならば，B を V 上の内積として（すなわち，任意の $v \in V \setminus \{0\}$ に対して $\langle v, v \rangle > 0$ であるように）とることができる．

証明 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ の部分体である場合，任意に固定した V 上の内積を $W(R)$ の作用に関して平均すれば，V 上 $W(R)$-不変な内積が得られる．$\mathbb{K}$ が一般の場合，$V_\mathbb{Q} = \operatorname{span}_\mathbb{Q} R$ 上の $W(R)$-不変な内積を $\mathbb{K}$ に係数拡大すれば，V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式が得られる．$\alpha^\vee$ の表示は，命題 3.3 から従う． □

系 3.9 の状況で，$\alpha, \beta \in R$ に対して

$$n(\beta, \alpha) = \alpha^\vee(\beta) = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

である．特に，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で $\langle -,- \rangle$ が内積ならば，$n(\beta, \alpha)$ と $\langle \beta, \alpha \rangle$ の符号は一致する．すなわち，$n(\beta, \alpha) > 0$, $n(\beta, \alpha) = 0$，$n(\beta, \alpha) < 0$ はそれぞれ α と β のなす角が鋭角，直角，鈍角であることと同値である．用語の濫用で，$\mathbb{K}$ が一般の標数 0 の可換体の場合にも，$n(\beta, \alpha) > 0$，$n(\beta, \alpha) = 0$，$n(\beta, \alpha) < 0$ であるとき，α と β はそれぞれ**鋭角をなす**，**直交する**，**鈍角をなす**という．ルートの集合 A, B について，A の任意の元と B の任意の元が直交するとき，A と B は**直交する**という．

命題 3.10 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$\alpha \in R$ と $t \in W(R)$ に対して，

$$s_{t(\alpha)} = ts_\alpha t^{-1}, \qquad t(\alpha)^\vee = t^{-1*}(\alpha^\vee) = \alpha^\vee \circ t^{-1}$$

である．

証明 $ts_\alpha t^{-1}$ は $t(\alpha)$ を $-t(\alpha)$ に移し R を安定にする鏡映だから，ルート鏡映の一意性よりこれは $s_{t(\alpha)}$ に等

しい．また，

$$\begin{aligned} s_{t(\alpha)}(v) = ts_\alpha t^{-1}(v) &= t(t^{-1}(v) - \alpha^\vee(t^{-1}(v))\alpha) \\ &= v - \alpha^\vee(t^{-1}(v))t(\alpha) \\ &= v - t^{-1*}(\alpha^\vee)(v)t(\alpha) \\ &= s_{t(\alpha),t^{-1*}(\alpha^\vee)}(v) \qquad\qquad (v \in V) \end{aligned}$$

だから，$t(\alpha)^\vee = t^{-1*}(\alpha^\vee)$ である． □

命題 3.11 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ は V^* 上のルート系である．
(2) 任意の $\alpha \in R$ に対して $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ である．
(3) $GL(V)$ から $GL(V^*)$ への群同型 $t \mapsto t^{-1*}$ は，各 $\alpha \in R$ に対して s_α を $s_{\alpha^\vee}$ に移し，Weyl 群 $W(R)$ から $W(R^\vee)$ への群同型を与える．

証明 (1) R が (RS1), (RS4) を満たすことと系 3.9 より，$R^\vee$ も (RS1), (RS4) を満たす．各 $\alpha^\vee \in R^\vee$ に対して，$\alpha^\vee(\alpha) = 2$ だから

$$s_{\alpha^\vee} = s_{\alpha^\vee,\alpha}\colon V^* \to V^*, \quad f \mapsto f - f(\alpha)\alpha^\vee$$

は V^* 上の鏡映であり，命題 3.4 より $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^* = s_\alpha^{-1*}$ である．$\beta^\vee \in R^\vee$ とすると

$$s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = s_\alpha^{-1*}(\beta^\vee) = s_\alpha(\beta)^\vee \in R^\vee$$

だから（最後の等号で命題 3.10 を用いた），$s_{\alpha^\vee}$ は (RS2) の条件を満たす．また，このとき $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ であり，任意の $\alpha^\vee, \beta^\vee \in R^\vee$ に対して $\alpha^{\vee\vee}(\beta^\vee) = \beta^\vee(\alpha) \in \mathbb{Z}$ だから，(RS3) も満たされる．よって，$R^\vee$ は V^* 上のルート系である．

(2) (1) の証明の中ですでに示されている．

(3) (1) の証明の中で述べたように $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^{-1*}$ だから，$GL(V)$ から $GL(V^*)$ への群同型 $t \mapsto t^{-1*}$ は s_α を $s_{\alpha^\vee}$ に移し，したがって Weyl 群 $W(R)$ から $W(R^\vee)$ への群同型を与える． □

命題 3.11 を踏まえて，次のように定義する．

定義 3.12（双対ルート系） R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．V^* 上のルート系 $R^\vee$ を，R の**双対ルート系**（dual root system）という．

3.3 ルート系の直和と既約分解

定義 3.13（ルート系の直和） $\{V_i\}_{i\in I}$ を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間の有限族とし，各 $i \in I$ に対して R_i を V_i 上のルート系とする．このとき，容易にわかるように，$R = \bigcup_{i\in I} R_i$ は $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ 上のルート系である．このルート系 R を，ルート系の有限族 $\{R_i\}_{i\in I}$ の**直和**（direct sum）という．

定義 3.13 の状況で，$\alpha \in R_i$ とし，$\iota\colon R_i \to R$ を包含写像とすると，

$$\iota(\alpha)^\vee(v) = \begin{cases} \alpha^\vee(v) & (v \in V_i) \\ 0 & (v \in V_j,\ j \neq i), \end{cases} \qquad s_{\iota(\alpha)}(v) = \begin{cases} s_\alpha(v) & (v \in V_i) \\ v & (v \in V_j,\ j \neq i) \end{cases}$$

である（α はルート系 R_i の元として，$\iota(\alpha)$ はルート系 R の元として考えている）．

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．V が部分線型空間の有限族 $\{V_i\}_{i\in I}$ に直和分解され，各 V_i 上にルート系 R_i があって $R=\bigcup_{i\in I} R_i$ となっていれば，R はルート系の有限族 $\{R_i\}_{i\in I}$ の直和と自然に同一視できる．このとき，R は $\{R_i\}_{i\in I}$ に**直和分解**されるという．

命題 3.14　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，$\{R_i\}_{i\in I}$ を R の有限分割とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(a) $\{R_i\}_{i\in I}$ はルート系 R の直和分解である．
(b) 各 $i\in I$ に対して $V_i=\operatorname{span} R_i$ と置くと，$\sum_{i\in I} V_i$ は直和である．
(c) 任意の異なる 2 元 $i,\, j\in I$ に対して，R_i と R_j は直交する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\sum_{i\in I} V_i$ が直和ならば，各 $i\in I$ に対して $R_i=R\cap V_i$ だから R_i は V_i 上のルート系であり（命題 3.7），したがって $\{R_i\}_{i\in I}$ はルート系 R の直和分解である．

(a) $\Longrightarrow$ (c)　ルート系の直和におけるルート鏡映の式から従う．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -,-\rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9）．このとき，(c) が成り立つとすると，どの異なる二つの R_i も内積に関して直交するから，$\{V_i\}_{i\in I}$ は内積空間 V における直交族であり，したがって $\sum_{i\in I} V_i$ は直和である．　□

定義 3.15（既約ルート系）　$R\neq\emptyset$ をルート系とする．R が「一つが R でその他がすべて $\emptyset$」という形の直和分解しかもたないとき，ルート系 R は**既約**（irreducible）であるという．そうでないとき，ルート系 R は**可約**（reducible）であるという．

ルート系の既約ルート系への直和分解を，ルート系の**既約分解**という．

命題 3.16　任意のルート系は，順序を除いて一意に既約分解される．

証明　R をルート系とする．R が可約である限り R は二つの空でないルート系 R' と R'' の直和に分解でき，$R',\, R''$ に対しても同じことがいえる．R は有限集合だから，この操作は有限回で終了する．よって，R の既約分解は存在する．

$\{R_i\}_{i\in I}$ と $\{R'_j\}_{j\in J}$ がともに R の既約分解であるとする．各 $i\in I$ と $j\in J$ に対して，$\{R_i\cap R'_j, R_i\setminus R'_j\}$ は R_i の直和分解だから，R_i の既約性より $R_i\cap R'_j=R_i$ または $R_i\setminus R'_j=R_i$，すなわち $R_i\supseteq R'_j$ または $R_i\cap R'_j=\emptyset$ である．R_i と R'_j を逆にしても同じことがいえるから，結局 $R_i=R'_j$ または $R_i\cap R'_j=\emptyset$ である．これが任意の $i\in I$ と $j\in J$ に対して成り立つから，$\{R_i\}_{i\in I}$ と $\{R'_j\}_{j\in J}$ は順序を除いて一致する．よって，R の既約分解は順序を除いて一意である．　□

3.4　二つのルートの関係

有限次元実内積空間の二つのベクトル $v,\, w\neq 0$ がなす角を，$\angle(v,w)$ と書く．

定理 3.17　R を有限次元実線型空間 V 上のルート系とし，V 上の $W(R)$-不変な内積 $\langle -,-\rangle$ を一つ固定する．二つのルート $\alpha,\, \beta\in R$，$\|\alpha\|\leq\|\beta\|$ に対して，次の (i)–(ix) のうちいずれかただ一つが成り立つ．

	$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	$\|\beta\|/\|\alpha\|$	$\angle(\alpha,\beta)$
(i)	0	0	不定	90°
(ii)	1	1	1	60°
(iii)	-1	-1	1	120°
(iv)	1	2	$\sqrt{2}$	45°
(v)	-1	-2	$\sqrt{2}$	135°
(vi)	1	3	$\sqrt{3}$	30°
(vii)	-1	-3	$\sqrt{3}$	150°
(viii)	2	2	1	0°
(ix)	-2	-2	1	180°

証明 $n(\alpha,\beta)=2\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\beta,\beta\rangle$ かつ $n(\beta,\alpha)=2\langle\beta,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ だから（命題 3.3），

$$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)=\frac{4\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2}=4(\cos\angle(\alpha,\beta))^2\leq 4$$

である．また，$n(\alpha,\beta)=0$ と $n(\beta,\alpha)=0$ とは同値であり，$n(\alpha,\beta),\ n(\beta,\alpha)\neq 0$ ならば

$$\frac{n(\beta,\alpha)}{n(\alpha,\beta)}=\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}$$

である．したがって，組 $(n(\alpha,\beta),n(\beta,\alpha))$ としてありうるのは表に挙げたものの他には $(1,4)$ と $(-1,-4)$ のみだが，このとき上式より $\beta=\pm2\alpha$ となり (RS4) に反する．よって，起こりうる可能性は表にあげたもので尽くされている． □

系 3.18 ルート系 R について，二つのルート $\alpha,\ \beta\in R$ が線型従属ならば，$\beta=\pm\alpha$ のいずれかである．

証明 有限次元実線型空間上のルート系について示せば十分であり（命題 3.8），このときの主張は定理 3.17 に含まれる． □

注意 3.19 定理 3.17 の証明からわかるように，R が (RS1)–(RS3) を満たすが (RS4) を満たすとは限らないとき，$\alpha,\ \beta\in R$ が線型従属ならば，$\beta=\pm\alpha/2,\ \pm\alpha,\ \pm2\alpha$ のいずれかである．

系 3.20 ルート系 R の二つのルート $\alpha,\ \beta$ について，次が成り立つ．

(1) α と β が鋭角をなす（すなわち $n(\beta,\alpha)>0$）ならば，$\beta-\alpha\in R\cup\{0\}$ である．
(2) α と β が鈍角をなす（すなわち $n(\beta,\alpha)<0$）ならば，$\beta+\alpha\in R\cup\{0\}$ である．

証明 (1) $\alpha\neq\beta$ かつ $n(\beta,\alpha)>0$ ならば，定理 3.17 より $n(\beta,\alpha)=1$ または $n(\alpha,\beta)=1$ である．前者の場合 $\beta-\alpha=\beta-n(\beta,\alpha)\alpha=s_\alpha(\beta)\in R$ であり，後者の場合 $\alpha-\beta=\alpha-n(\alpha,\beta)\beta=s_\beta(\alpha)\in R$ だから，いずれにしても $\alpha-\beta\in R$ となる．
(2) $-\alpha$ と β に (1) を適用すればよい． □

次の命題は，ルート系の分類には必要ないが，後に分裂半単純 Lie 代数の構造を調べるとき（具体的には，命題 4.15 の証明）に用いられる．

命題 3.21 R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，$\alpha,\ \beta \in R$ を線型独立な二つのルートとし，

$$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in R\}$$

と置く．

(1) $I_{\beta,\alpha}$ は $p,\ q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける．
(2) (1) の $p,\ q$ について，$p - q = -n(\beta,\alpha)$ である．

証明 (1) $p = \max I_{\beta,\alpha}$，$-q = \min I_{\beta,\alpha}$ と置く．明らかに $0 \in I_{\beta,\alpha}$ だから，$p,\ q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．もし $I_{\beta,\alpha} \neq [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ であるとすると，$r,\ s \in I_{\beta,\alpha}$ であって $r < s$ かつ $r+1,\ s-1 \notin I_{\beta,\alpha}$ であるものがとれる．このとき，系 3.20 の対偶より

$$n(\beta + r\alpha, \alpha) \geq 0 \geq n(\beta + s\alpha, \alpha)$$

だが，一方で $n(\beta + j\alpha, \alpha) = n(\beta,\alpha) + jn(\alpha,\alpha) = n(\beta,\alpha) + 2j$ は j に関して狭義単調増加だから，これは不可能である．よって，背理法より，$I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ である．

(2) ルート鏡映 s_α は $\beta + j\alpha$ を $\beta - (n(\beta,\alpha)+j)\alpha$ に移すから，写像 $j \mapsto -(n(\beta,\alpha)+j)$ は $I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ から自身への全単射である．よって，$p - q = -n(\beta,\alpha)$ である． □

3.5 基底と Weyl チャンバー

定義 3.22（ルート系の基底） R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．$B \subseteq R$ がルート系 R の**基底**（basis）であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(i) B は $\mathbb{K}$-線型空間 V の基底である．
(ii) 任意の $\alpha \in R$ に対して，α を B の元の線型結合として書くときの係数は，「すべて 0 以上の整数である」か「すべて 0 以下の整数である」かのいずれかである．

B を R の基底とする．B の元を，B に関する**単純ルート**（simple root）という．また，ルートのうち，B の元の線型結合として書くときの係数がすべて 0 以上の整数であるものを B に関する**正ルート**（positive root）といい，すべて 0 以下の整数であるものを B に関する**負ルート**（negative root）という．B に関する正ルート，負ルートの全体を，それぞれ $R_+(B)$, $R_-(B)$ と書く．

R をルート系，B をその基底とすると，任意の $s \in W(R)$ に対して $s(B)$ も R の基底である．これにより，Weyl 群 $W(R)$ は R の基底全体の集合に作用する．

命題 3.23 B をルート系の基底とすると，任意の異なる 2 元 $\alpha,\ \beta \in B$ に対して $n(\beta,\alpha) \leq 0$ である．

証明 $n(\beta,\alpha) > 0$ とすると系 3.20 より $\beta - \alpha$ はルートだが，これはルート系の基底の定義に反する．よって，背理法より $n(\beta,\alpha) \leq 0$ である． □

これから，任意のルート系について，基底が存在し，Weyl 群が基底全体の集合に自由かつ推移的に作用することを示す．そのために，Weyl チャンバーを導入する．すぐに示すように，基底と Weyl チャンバーとは一対一に対応する．

本小節の以下の部分では，R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とするとき，$\alpha \in R$ に関するルート鏡

映の鏡映面を $\mathit{\Pi}_\alpha$ と書く．すなわち，

$$\mathit{\Pi}_\alpha = \operatorname{Ker}\alpha^\vee = \{v \in V \mid \alpha^\vee(v) = 0\}$$

である．$\langle -,- \rangle$ を V 上の $W(R)$-不変な非退化対称双線型形式とすると，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ $\alpha^\vee(v) = 2\langle v, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ だから（系 3.9），$\mathit{\Pi}_\alpha$ はこの非退化対称双線型形式に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間となる．

定義 3.24（Weyl チャンバー） R を有限次元実線型空間 V 上のルート系とする．V の開集合 $V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ の各連結成分を，R の **Weyl チャンバー**（Weyl chamber）という．

R を有限次元実線型空間上のルート系，C をその Weyl チャンバーとすると，任意の $s \in W(R)$ に対して $s(C)$ も R の Weyl チャンバーである．これにより，Weyl 群 $W(R)$ は R の Weyl チャンバー全体の集合に作用する．

有限次元実線型空間 V における開半空間とは，ある $f \in V^* \setminus \{0\}$ を用いて $\{v \in V \mid f(v) > 0\}$ と書ける V の部分集合のことをいう．

補題 3.25 V を有限次元実内積空間とする．V の元の族 $\{v_i\}_{i \in I}$ が一つの開半空間に含まれ，任意の異なる 2 元 $i, j \in I$ に対して $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$ ならば，$\{v_i\}_{i \in I}$ は線型独立である．

証明 $I', I'' \subseteq I$ を互いに交わらない有限部分集合とし，各 $i \in I'$ に対して $a_i \geq 0$，各 $j \in I''$ に対して $b_j \geq 0$ とする．もし $v = \sum_{i \in I'} a_i v_i = \sum_{j \in I''} b_j v_j$ ならば，仮定より

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I',\, j \in I''} a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$$

だから

$$\sum_{i \in I'} a_i v_i = \sum_{j \in I''} b_j v_j = v = 0$$

である．$\{v_i\}_{i \in I}$ は一つの開半空間に含まれるから，$w \in V \setminus \{0\}$ であって任意の $i \in I$ に対して $\langle v_i, w \rangle > 0$ であるものがとれる．この w と上式の各辺との内積をとれば，$a_i = 0$ および $b_j = 0$ を得る．よって，$\{v_i\}_{i \in I}$ は線型独立である． □

定理 3.26 R を有限次元実線型空間 V 上のルート系とする．

(1) R の基底 B に対して，

$$C(B) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \alpha^\vee(v) > 0\}$$

は R の Weyl チャンバーである．

(2) R の Weyl チャンバー C に対して

$$\begin{aligned} R_+(C) &= \{\alpha \in R \mid \alpha^\vee(C) \subseteq \mathbb{R}_{>0}\}, \\ B(C) &= \{\alpha \in R_+(C) \mid \alpha \text{ は } R_+(C) \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\} \end{aligned}$$

と定めると，$B(C)$ は R の基底である．

(3) (1) と (2) の対応は互いに他の逆であり，R の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える．さらに，この対応は Weyl 群 $W(R)$ の作用を保つ．

証明　V 上の $W(R)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定する（系 3.9）．$\alpha \in R$ と $v \in V$ に対して $\alpha^\vee(v) = 2\langle v,\alpha\rangle/\langle \alpha,\alpha\rangle$ だから，$\alpha^\vee(v)$ と $\langle v,\alpha\rangle$ は同符号である．

(1)　内積を用いると

$$C(B) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \langle v,\alpha\rangle > 0\}$$

と書ける．B は線型空間 V の基底だから，$C(B)$ は連結である．$C(B)$ の元と B に関する正ルートとの内積は正であり，B に関する負ルートとの内積は負だから，$C(B)$ は

$$V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in R \text{ に対して } \langle v,\alpha\rangle \neq 0\}$$

に含まれる．さらに，$v' \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ が $C(B)$ と同じ連結成分に含まれるならば，任意の $\alpha \in R$ に対して $\langle v',\alpha\rangle$ と $\langle v,\alpha\rangle$（$v \in C(B)$）は同符号でなければならず，したがって $v' \in C(B)$ である．よって，$C(B)$ は $V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ の一つの連結成分，すなわち Weyl チャンバーである．

(2)　$\alpha^\vee$ の符号は各 Weyl チャンバー上で一定だから，$v_0 \in C$ を一つ固定すると

$$R_+(C) = \{\alpha \in R \mid \langle v_0,\alpha\rangle > 0\} \tag{$*$}$$

と書ける．$\alpha \in R_+(C)$ とすると，それが $B(C)$ に属していない限り $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$（$k \geq 2$，$\alpha_1$，...，$\alpha_k \in R_+(C)$）と分解でき，各 α_i に対しても同じことがいえる．各 i に対して $\langle v_0,\alpha_i\rangle < \langle v_0,\alpha\rangle$ だから，この操作は有限回で終了する．よって，$R_+(C)$ の任意の元は $B(C)$ の元の 0 以上の整数を係数とする線型結合で書ける．$R = R_+(C) \cup (-R_+(C))$ だから，残りのルートは $B(C)$ の元の 0 以下の整数を係数とする線型結合で書ける．

前段の結果から，$B(C)$ が V を張ることもわかる．あとは，$B(C)$ が線型独立であることを示せばよい．($*$) より $B(C) \subseteq R_+(C)$ は一つの半開空間に含まれるから，補題 3.25 より，任意の α, $\beta \in B(C)$ に対して $\langle \alpha,\beta\rangle \leq 0$ であることをいえばよい．そうでないとすると，系 3.20 より $\alpha - \beta \in R$ だから，$\alpha - \beta$ または $\beta - \alpha$ が $R_+(C)$ に属するが，いずれにしても α, β が $R_+(C)$ の 2 元の和として書けないことに矛盾する．これで，主張が示された．

(3)　B を R の基底とすると，容易にわかるように $R_+(B) \subseteq R_+(C(B))$ だが，$R_+(B)$ と $R_-(B) = -R_+(B)$，$R_+(C(B))$ と $-R_+(C(B))$ はともに R の分割を与えるから，$R_+(B) = R_+(C(B))$ である．したがって，$B(C(B))$ は $R_+(B)$ の元のうち $R_+(B)$ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けないもの全体だが，正ルートの定義よりこれは B に等しい．また，C を R の Weyl チャンバーとすると，容易にわかるように $C \subseteq C(B(C))$ であり，C と $C(B(C))$ はともに $V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ の連結成分だから $C = C(B(C))$ である．よって，(1) と (2) の対応は互いに他の逆であり，R の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える．さらに，$s \in W(R)$ として B を R の基底とすると，命題 3.10 より

$$\begin{aligned} C(s(B)) &= \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } s(\alpha)^\vee(v) > 0\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \alpha^\vee(s^{-1}(v)) > 0\} \\ &= s(C(B)) \end{aligned}$$

だから，この対応は Weyl 群 $W(R)$ の作用を保つ．　□

系 3.27　任意のルート系は基底をもつ．

証明　有限次元実線型空間 V 上のルート系 R について示せば十分だが（命題 3.8），このとき基底の存在は定理 3.26 から従う． □

R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B をその基底とすると，R が生成する V の部分 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}R$ は，B を基底とする格子 $\mathbb{Z}B$ に等しい．これを，ルート系 R の**ルート格子**（root lattice）という．

次に，Weyl 群の作用について考える．

補題 3.28　R をルート系，B をその基底とする．単純ルート $\alpha \in B$ に関する鏡映 s_α は，α 以外の正ルート全体の集合 $R_+(B) \setminus \{\alpha\}$ 上の置換を引き起こす．特に，$\rho = (1/2)\sum_{\beta \in R_+(B)} \beta$ と置くと，任意の $\alpha \in B$ に対して $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ である．

証明　β を α 以外の正ルートとする．$s_\alpha(\beta) \neq \alpha$ は明らかである．$\beta = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma \gamma$ と表すとき，ある $\gamma \in B \setminus \{\alpha\}$ が存在して $a_\gamma > 0$ となる．ここで

$$s_\alpha(\gamma) = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma(\gamma - n(\gamma, \alpha)\alpha) = \sum_{\gamma \in B} a_\gamma \gamma - \left(\sum_{\gamma \in B} n(\gamma, \alpha)\right)\alpha$$

だから，$s_\alpha(\gamma)$ を B の元の線型結合で表すときの γ の係数も $a_\gamma > 0$ である．したがって，$s_\alpha(\gamma)$ は正ルートである．よって，s_α は $R_+(B) \setminus \{\alpha\}$ 上の置換を引き起こす．

後半の主張は，前半の主張と $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ から従う． □

定理 3.29　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) Weyl 群 $W(R)$ は R の基底全体の集合に推移的に作用する．[*5]
(2) B を R の基底とすると，$R = W(R)B$ である．
(3) B を R の基底とすると，Weyl 群 $W(R)$ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in B\}$ によって生成される．

証明　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9）．R の基底 B を一つ固定し（系 3.27 より可能である），$\{s_\alpha \mid \alpha \in B\}$ が生成する $W(R)$ の部分群を $W'(R)$ と置く．まず (1), (2) で $W(R)$ を $W'(R)$ に置き換えた主張 (1′), (2′) を示し，次に (2′) を用いて (3) を示す．

(1′)　$W'(R)$ の R の基底全体の集合への作用が推移的であることを示す．定理 3.26 より，$W'(R)$ の R の Weyl チャンバー全体の集合への作用が推移的であることを示せばよい．$\rho = (1/2)\sum_{\alpha \in R_+(B)} \alpha$ と置く．点 $v \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathit{\Pi}_\alpha$ を任意にとり，これに対して $s \in W'(R)$ を $\langle s(v), \rho \rangle$ が最大となるようにとる．このとき，任意の $\alpha \in B$ に対して

$$\langle s(v), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha s(v), \rho \rangle = \langle s(v), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle s(v), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

（最後の等号で補題 3.28 を用いた）だから $\langle s(v), \alpha \rangle \geq 0$ であり，また $v \notin \mathit{\Pi}_{s^{-1}(\alpha)}$ より $\langle s(v), \alpha \rangle = \langle v, s^{-1}(\alpha) \rangle \neq 0$ だから，$\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ である．したがって，$s(v) \in C(B)$ であり，これは v を含む Weyl チャンバーが s の作用で $C(B)$ に移ることを意味する．よって，$W'(R)$ の R の Weyl チャンバー全体の集合への作用は推移的である．

---

*5 Weyl 群 $W(R)$ の R の基底全体の集合への作用が自由であることもいえる．証明は，Humphreys [4, §10.3, Thm. (e)] を参照のこと．

(2′)　(1′) より，任意のルート α が R のある基底に含まれることを示せばよい．点 $v_0 \in V$ を

$$\langle v_0, \alpha\rangle = 0, \qquad \langle v_0, \beta\rangle \neq 0 \quad (\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\})$$

となるようにとり，さらに $\epsilon > 0$ を十分小さくとって

$$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha\rangle > 0, \qquad |\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta\rangle| > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha\rangle \quad (\beta \in R \setminus \{\pm\alpha\})$$

となるようにする．すると，$v_0 + \epsilon\alpha \in V \setminus \bigcup_{\beta\in R} \operatorname{Ker} \mathit{\Pi}_\beta$ であり，$v_0 + \epsilon\alpha$ を含む Weyl チャンバーを C と書くと定理 3.26 の記号で $\alpha \in B(C)$ である．これで，主張が示された．

(3)　任意の $\alpha \in R$ に対して，(2′) よりある $t \in W'(R)$ が存在して $t(\alpha) \in B$ となり，このとき $s_\alpha = t^{-1}s_{t(\alpha)}t \in W'(R)$ である（命題 3.10）．よって，$W'(R) = W(R)$ である．　□

系 3.30　R, R' をそれぞれ有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V, V' 上のルート系とし，B, B' をそれぞれ R, R' の基底とする．全単射 $\phi\colon B \to B'$ が任意の α, $\beta \in B$ に対して $n(\phi(\beta), \phi(\alpha)) = n(\beta, \alpha)$ を満たすならば，ϕ はルート系 R から R' への同型に一意に拡張される．

証明　B, B' はそれぞれ $\mathbb{K}$-線型空間 V, V' の基底だから，ϕ は線型同型写像 $\mathit{\Phi}\colon V \to V'$ に一意に拡張される．仮定より α, $\beta \in B$ に対して

$$\begin{aligned}\mathit{\Phi}(s_\alpha(\beta)) &= \mathit{\Phi}(\beta - n(\beta,\alpha)\alpha)\\ &= \phi(\beta) - n(\beta,\alpha)\phi(\alpha)\\ &= \phi(\beta) - n(\phi(\beta),\phi(\alpha))\phi(\alpha)\\ &= s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))\end{aligned}$$

だから，$\alpha \in B$ に対して

$$\mathit{\Phi} \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \mathit{\Phi}$$

である．これと定理 3.29 (3) より，線型同型写像 $\mathit{\Phi}$ を通して Weyl 群 $W(R)$ と $W(R')$ が対応する．したがって，定理 3.29 (2) と合わせて

$$\mathit{\Phi}(R) = \mathit{\Phi}(W(R)B) = W(R')B' = R'$$

を得る．よって，$\mathit{\Phi}$ はルート系 R から R' への同型である．　□

ルート系の既約性と基底の関係について調べる．

命題 3.31　R をルート系，B をその基底とする．次の 2 条件は同値である．

(1) R は既約である．
(2) $B \neq \emptyset$ であり，かつ，B を互いに直交する空でない二つの部分に分割することはできない．

証明　明らかに，$R = \emptyset$ と $B = \emptyset$ とは同値である．これ以外の場合を考える．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．R が可約であるとして，ルート系の直和分解 $R = R_1 \sqcup R_2$ であって R_1, R_2 が空でないものをとる．$i = 1, 2$ に対して $B_i = B \cap R_i$ と置くと，$R_i \neq \emptyset$ より $B_i \neq \emptyset$ であり，また R_1 と R_2 は直交する（命題 3.14）から B_1 と B_2 も直交する．これで，主張の対偶が示された．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　対偶を示す．B が互いに直交する空でない二つの部分 B_1, B_2 に分割されているとする．$i = 1, 2$ に対して $R_i = W(R)B_i \neq \emptyset$ と置く．すると，定理 3.29 (2) より $R = R_1 \cup R_2$ である．また，

$\alpha \in B_1$ に対して s_α は $\operatorname{span} B_1$ を安定にし，$\beta \in B_2$ に対して s_β は $\operatorname{span} B_1$ の点を動かさないから（直交性の結果），定理 3.29 (3) と合わせて $R_1 \subseteq \operatorname{span} B_1$ を得る．同様に $R_2 \subseteq \operatorname{span} B_2$ である．よって，$R = R_1 \sqcup R_2$ はルート系の直和分解である．これで，主張の対偶が示された． $\square$

最後に，ルート系の分類には必要ないが今後用いるルート系の基底の性質を三つ示しておく．次の命題は，3.7 節で用いられる．

補題 3.32 V を有限次元実線型空間とし，$\{v_i\}_{i \in I}$，$\{w_j\}_{j \in J}$ を V の基底とする．$\sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} v_i = \sum_{j \in J} \mathbb{R}_{\geq 0} w_j$ ならば，全単射 $\phi\colon I \to J$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して $w_{\phi(i)}$ は v_i の正のスカラー倍となる．

証明 $\{v_i\}_{i \in I}$ から $\{w_j\}_{j \in J}$ への基底変換行列を $P = (p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$，$\{w_j\}_{j \in J}$ から $\{v_i\}_{i \in I}$ への基底変換行列を $Q = (q_{ji})_{(j,i) \in J \times I}$ とする．仮定より，各成分 p_{ij}, q_{ji} は 0 以上である．いま，P の一つの成分 $p_{i_0 j_0}$ が正であるとする．P と Q は互いに他の逆行列だから，任意の $i \in I \setminus \{i_0\}$ に対して $\sum_{j \in J} p_{i_0 j} q_{ji} = 0$ だが，そのためには $q_{j_0 i} = 0$ でなければならない．すなわち，Q の行ベクトル $(q_{j_0 i})_{i \in I}$ は j_0-成分を除いて 0 である．Q は正則だから，このような行ベクトルはたかだか一つである．したがって，任意の $i_0 \in I$ に対して，$p_{i_0 j} > 0$ となる $j \in J$ はたかだか一つである．このことと P の正則性より，全単射 $\phi\colon I \to J$ が存在して

$$p_{ij} \begin{cases} > 0 & (j = \phi(i)) \\ = 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる．すなわち，主張が成り立つ． $\square$

命題 3.33 B をルート系 R の基底とすると，$B^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in B\}$ は双対ルート系 $R^\vee$ の基底である．

証明 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9）．内積が定める線型同型によって V と V^* を同一視すると，各 $\alpha \in R$ に対してルート鏡映 s_α と $s_{\alpha^\vee}$ が対応するから（命題 3.11 (3)），$\mathit{\Pi}_\alpha = \mathit{\Pi}_{\alpha^\vee}$ である．したがって特に，定理 3.26 の記号で $C(B) = C(B')$ を満たす $R^\vee$ の基底 B' が存在する．V の内積に関する B, B' の双対基底をそれぞれ B^*, B'^* と書くと，$C(B) = C(B')$ は $\mathbb{R}_{\geq 0} B^* = \mathbb{R}_{\geq 0} B'^*$ を意味するから，補題 3.32 より各元を適当に正のスカラー倍することで B^* と B'^* は一致し，したがって B と B' についても同様である．ところが，各 $\alpha \in R$ に対して，$R^\vee$ の元であって α の正のスカラー倍であるものは $\alpha^\vee = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle$ だけだから（系 3.18），$B' = B^\vee$ である．よって，$B^\vee$ は双対ルート系 $R^\vee$ の基底である． $\square$

次の命題は，分裂半単純 Lie 代数の構造を調べるとき（具体的には，命題 4.16 の証明）に用いられる．

命題 3.34 R をルート系とし，B をその基底とする．正ルートの列 $\beta_1, \ldots, \beta_k \in R_+(B)$ について，それらの和 $\beta_1 + \cdots + \beta_k$ もルートならば，$\{1, \ldots, k\}$ 上の置換 π であって，任意の $1 \leq i \leq k$ に対して $\beta_{\pi(1)} + \cdots + \beta_{\pi(i)}$ がルートであるものが存在する．特に，任意の正ルート $\beta \in R_+(B)$ に対して，単純ルートの列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in B$ であって，任意の $1 \leq i \leq k$ に対して $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ がルートであり，かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \beta$ であるものが存在する．

証明 後半の主張は前半の主張から従うから，前半の主張を示す．$\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k$ と置くと，$n(\beta_1, \beta) + \cdots + n(\beta_k, \beta) = n(\beta, \beta) = 2$ だから，ある i が存在して $n(\beta_i, \beta) > 0$ となる．$\beta_1, \ldots, \beta_k$ はすべて正ルートだから，$\beta_i = \beta$ ならば $k = 1$ であり，このとき主張は明らかである．一方で，$\beta_i \neq \beta$ ならば，$\beta - \beta_i$ はルー

トである（系 3.20）．よって，主張は k に関する帰納法で示される． □

次の命題は，ルート系に対応する分裂半単純 Lie 代数の存在定理（定理 4.23）の証明に用いられる．

命題 3.35　R をルート系とし，B をその基底とする．ルート格子 $\mathbb{Z}R$ の元 λ が R の一つの元の整数倍として書けなければ，ある $s \in W(R)$ が存在して，$s(\lambda)$ を B の元の線型結合として表すときの係数に正の整数と負の整数がともに現れる．

証明　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9）．$\lambda \in \mathbb{Z}R$ が R の一つの元の整数倍として書けないとすると，$\mathbb{R}\lambda$ はルートを含まないから，$v \in V$ を

$$\langle v, \lambda \rangle = 0 \quad \text{かつ} \quad \langle v, \alpha \rangle \neq 0 \quad (\alpha \in R)$$

であるようにとれる．さらに，Weyl 群 $W(R)$ は Weyl チャンバー全体の集合に推移的に作用するから（定理 3.26，定理 3.29），$s \in W(R)$ を $s(v) \in C(B)$（$C(B)$ は定理 3.26 の記号）となるようにとれる．ここで，$s(\lambda) = \sum_{\alpha \in B} p_\alpha \alpha$（$p_\alpha \in \mathbb{Z}$）と表すと

$$0 = \langle v, \lambda \rangle = \langle s(v), s(\lambda) \rangle = \sum_{\alpha \in B} p_\alpha \langle s(v), \alpha \rangle$$

だが，$s(v) \in C(B)$ より任意の $\alpha \in B$ に対して $\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ だから，係数 p_α には正の整数と負の整数がともに現れる．これで，主張が示された． □

3.6　ルート系の分類

定義 3.36（Cartan 行列）　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，B をその基底とする．行列 $(n(\beta, \alpha))_{(\beta,\alpha) \in B \times B}$ を，(R, B) の **Cartan 行列**（Cartan matrix）という．

後で補題 4.19 の証明に用いるため，次のことに注意しておく．

命題 3.37　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，B をその基底とする．(R, B) の Cartan 行列は正則である．

証明　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9）．このとき，α, $\beta \in R$ に対して $n(\beta, \alpha) = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ である．B が V の基底であることより $(\langle \beta, \alpha \rangle)_{(\beta,\alpha) \in B \times B}$ は正則だから，Cartan 行列 $(n(\beta, \alpha))_{(\beta,\alpha) \in B \times B}$ も正則である． □

Cartan 行列を視覚的に表したものとして，Dynkin 図形を定義する．

定義 3.38（Dynkin 図形）　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，B をその基底とする．B を頂点集合とし，異なる 2 頂点 α と β を次の表のように辺で結んで得られる図形を，(R, B) の **Dynkin 図形**（Dynkin diagram）という（定理 3.17 と命題 3.23 より，$n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組としてありうるものは表に挙げたもので尽くされている）．

$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	辺（左が α，右が β）
0	0	• •
-1	-1	•—•
-1	-2	•⇐•
-2	-1	•⇒•
-1	-3	•⇚•
-3	-1	•⇛•

すなわち, Dynkin 図形において, 異なる 2 頂点 α, β は $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ 本の辺で結ばれ, $|n(\alpha,\beta)| < |n(\beta,\alpha)|$ ならば α から β に向かう方向に記号 $<$ が描かれ，$|n(\alpha,\beta)| > |n(\beta,\alpha)|$ ならば α から β に向かう方向に記号 $>$ が描かれる．V が $W(R)$-不変な内積をもつ実内積空間ならば，記号 $<, >$ はノルムの大小関係に一致する（定理 3.17）.

定理 3.29 よりルート系の同型類と「基底付きルート系」の同型類とは一対一に対応し，系 3.30 よりこれは Cartan 行列の同型類と一対一に対応し，さらに定理 3.17 よりこれは Dynkin 図形の同型類と一対一に対応する．よって，ルート系を分類するためには，ルート系と基底の組の Dynkin 図形としてありうるものを分類すればよい．さらに，ルート系が既約分解をもつこと（命題 3.16）と次の命題より，連結な Dynkin 図形だけを考えればよい.

命題 3.39　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系，B をその基底とする．次の 2 条件は同値である.

(a) R は既約である.
(b) (R,B) の Dynkin 図形は連結である.

証明　命題 3.31 から従う.　□

まず，記号 $<, >$ を無視して，Dynkin 図形の下部多重グラフだけを考える．Weyl 群の作用で不変な内積 $\langle -,- \rangle$ をもつ実内積空間 V 上で考えても一般性を失わない（命題 3.8，系 3.9）．B を V 上のルート系の基底とすると，

- B は V の基底だから特に線型独立であり，
- 任意の α, $\beta \in B$ に対して $\langle \alpha,\beta \rangle \leq 0$ であり（命題 3.23），
- Dynkin 図形において α と β を結ぶ辺の本数は
$$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) = \frac{2\langle \alpha,\beta \rangle}{\langle \beta,\beta \rangle} \cdot \frac{2\langle \beta,\alpha \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle} = 4\left\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|} \right\rangle^2$$
であり，これは 0, 1, 2, 3 のいずれかである（定理 3.17）.

これを踏まえて，次のように定義する.

定義 3.40（許容可能なベクトルの集合，許容可能な多重グラフ）　V を有限次元実内積空間とする．単位ベクトルの集合 S が**許容可能**（admissible）であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう.

(i) S は線型独立である.
(ii) 任意の異なる 2 元 v, $w \in S$ に対して，$\langle v,w \rangle \leq 0$ かつ $4\langle v,w \rangle^2 \in \{0,1,2,3\}$ である（あるいは同値だ

が，$\angle(v, w) \in \{90°, 120°, 135°, 150°\}$ である）．

許容可能な単位ベクトルの集合 S **に伴う多重グラフ**を，S を頂点集合とし，異なる 2 頂点 v と w を $4\langle v, w\rangle^2$ 本の辺で結ぶことで定める．多重グラフは，ある許容可能な単位ベクトルの集合に伴う多重グラフに同型であるとき，**許容可能**（admissible）であるという．

例 3.41　R を実内積空間 V 上のルート系とし，V の内積は $W(R)$-不変であるとして，B を R の基底とする．このとき，$\{\alpha/\|\alpha\| \mid \alpha \in B\}$ は許容可能な単位ベクトルの集合であり，これに伴う多重グラフは (R, B) の Dynkin 図形から記号 $<, >$ を除いたものである．特に，Dynkin 図形の下部多重グラフは許容可能である．

以下，許容可能な連結多重グラフを分類する．

補題 3.42　許容可能な多重グラフは，（長さ 3 以上の）サイクルを含まない．

証明　S を許容可能な単位ベクトルの集合とし，それに伴う多重グラフ Γ において頂点の部分集合 $S_0 \subseteq S$ がサイクルをなすとする．任意の異なる 2 頂点 v, $w \in S_0$ に対して $\langle v, w\rangle \leq 0$ だが，S_0 に属する頂点どうしを結ぶ辺は少なくとも $\#S_0$ 本あるから，このうち少なくとも $2\#S_0$ 組の (v, w)（順序を考慮するため 2 倍になる）に対して $\langle v, w\rangle \leq -1/2$ である．これより

$$\left\|\sum_{v\in S_0} v\right\|^2 = \#S_0 + \sum_{v,w\in S_0,\ v\neq w} \langle v, w\rangle \leq \#S_0 + 2\#S_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

であり，したがって $\sum_{v\in S_0} v = 0$ だが，これは S が線型独立であることに矛盾する．よって，背理法より，Γ はサイクルを含まない．　□

補題 3.43　許容可能な多重グラフにおいて，各頂点の次数（そこから伸びている辺の本数）は 3 以下である．

証明　S を許容可能な単位ベクトルの集合とし，それに伴う多重グラフを Γ とする．$v \in S$ とし，Γ において v と辺で結ばれている頂点全体の集合を S_v と書く．補題 3.42 より S_v に属するどの 2 頂点も辺で結ばれていないから，S_v は正規直交系をなす．S の線型独立性より $v \notin \operatorname{span} S_v$ だから，

$$4\sum_{w\in S_v} \langle v, w\rangle^2 < 4\|v\|^2 = 4$$

である．これは，頂点 v の次数が 3 以下であることを示している．　□

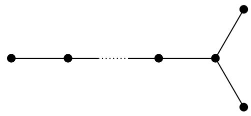
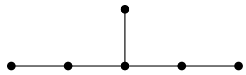
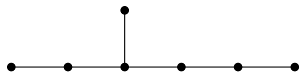
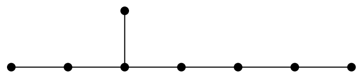
補題 3.44　Γ は許容可能な多重グラフ，$v_0, \ldots, v_k$（$k \in \mathbb{N}$）はその異なる頂点の列であり，各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して，v_i は v_{i-1} および v_{i+1} とそれぞれちょうど 1 本の辺で結ばれそれ以外の頂点とは辺で結ばれていないとする．このとき，$v_0, \ldots, v_k$ を一つの頂点に潰して得られる多重グラフ Γ' はまた許容可能である．

証明　Γ は許容可能な単位ベクトルの集合 S に伴う多重グラフであるとしてよい．$v = v_0 + \cdots + v_k$（S の線型独立性より $v \notin S$ である），$S' = (S \setminus \{v_0, \ldots, v_k\}) \cup \{v\}$ と置く．すると，

- S が線型独立であることより S' も線型独立であり，
- $\|v\|^2 = \sum_{0\leq i,j\leq k} \langle v_i, v_j\rangle = k - (k-1) = 1$ であり，
- 任意の $w \in S' \setminus \{v\}$ について，仮定より $\langle v_i, w\rangle = 0$（$1 \leq i \leq k-1$）であり，補題 3.42 より $\langle v_0, w\rangle$ と $\langle v_k, w\rangle$ のうち少なくとも一方は 0 である．したがって，$\langle v, w\rangle = \sum_{i=0}^{k} \langle v_k, w\rangle$ は 0 または $\langle v_0, w\rangle$ または $\langle v_k, w\rangle$ に等しく，いずれにしても $\langle v, w\rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w\rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である．

よって，S' は許容可能な単位ベクトルの集合であり，それに伴う多重グラフは Γ' に同型である．これで，主張が示された． □

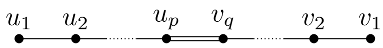
定理 3.45（許容可能な連結多重グラフの分類） 許容可能な連結多重グラフは，次の表のいずれかただ一つに同型である（l は頂点数である）．

型	多重グラフ
A_l $(l \geq 1)$	
$\mathrm{B}_l = \mathrm{C}_l$ $(l \geq 2)$	
D_l $(l \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

証明 Γ を許容可能な単位ベクトルの集合 S に伴う多重グラフとする．

(I) Γ が 3 重辺をもつ場合，補題 3.43 より Γ は G_2 に同型である．

(II) Γ が 3 重辺をもたず 2 重辺をもつ場合，2 重辺はただ一つであり，2 重辺の両端以外に次数 3 以上の頂点は存在しない（存在するとすると，補題 3.44 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ，補題 3.43 に反する）．したがって，Γ は次の形である（$1 \leq p \leq q$）．



ここで

$$u = \sum_{i=1}^{p} i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{q} i v_i$$

と置くと，

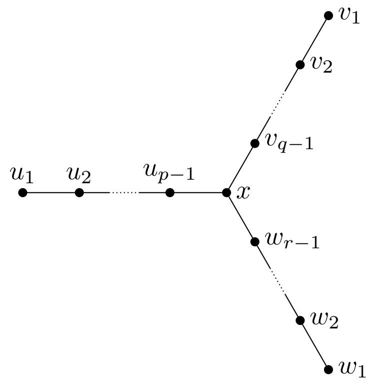
$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}, \qquad 同様に\ \|v\|^2 = \frac{q(q+1)}{2},$$
$$\langle u, v \rangle^2 = \frac{p^2q^2}{2}$$

だが，u と v が線型独立であることと Cauchy–Schwarz の不等式より $\langle u, v\rangle^2 < \|u\|^2\|v\|^2$ だから

$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2}$$

である．これを整理すると $pq < p + q + 1$ となり，これを満たす (p, q) は $(1, l-1)$（$l \geq 2$ は任意），$(2, 2)$ のみである．それぞれの場合，Γ は $\mathrm{B}_l = \mathrm{C}_l$, F_4 に同型である．

(III)　$\mathit{\Gamma}$ が 1 重辺のみをもつ場合，次数 3 以上の頂点はたかだか一つである（二つ以上あるとすると，補題 3.44 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ，補題 3.43 に反する）．次数 3 の頂点が存在しなければ，$\mathit{\Gamma}$ はある A_l（$l \geq 1$）に同型である．次数 3 の頂点が存在すれば，$\mathit{\Gamma}$ は次の形である（$2 \leq p \leq q \leq r$）．



ここで

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} iu_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{q-1} iv_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{r-1} iw_i$$

と置くと，u, v, w は直交系であり，(II) と同じ計算により

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \frac{p(p-1)}{2}, & \|v\|^2 &= \frac{q(q-1)}{2}, & \|w\|^2 &= \frac{r(r-1)}{2}, \\ \langle u, x\rangle^2 &= \frac{(p-1)^2}{4}, & \langle v, x\rangle^2 &= \frac{(q-1)^2}{4}, & \langle w, x\rangle^2 &= \frac{(r-1)^2}{4} \end{aligned}$$

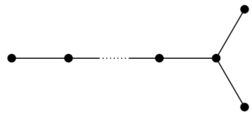
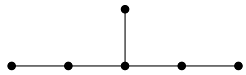
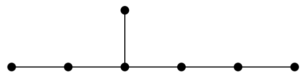
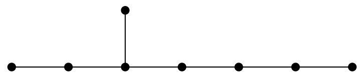
がわかる．したがって，$x \notin \operatorname{span}\{u, v, w\}$ と合わせて

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|^2 &> \left\langle \frac{u}{\|u\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{v}{\|v\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{w}{\|w\|}, x \right\rangle^2 \\ &= \frac{(p-1)^2/4}{p(p-1)/2} + \frac{(q-1)^2/4}{q(q-1)/2} + \frac{(r-1)^2/4}{r(r-1)/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

を得る．これを整理すると $1/p + 1/q + 1/r > 1$ となり，これを満たす (p, q, r) は $(2, 2, l-2)$（$l \geq 2$ は任意），$(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ のみである．それぞれの場合，$\mathit{\Gamma}$ は D_l, E_6, E_7, E_8 に同型である．　□

許容可能な多重グラフの分類（定理 3.45）を用いて，既約ルート系の Dynkin 図形による分類定理が示される．

定理 3.46（既約ルート系の分類）　既約ルート系の Dynkin 図形は，次の表のいずれかただ一つに同型である（l は頂点数である）．

型	Dynkin 図形
A_l $(l \geq 1)$	
B_l $(l \geq 2)$	
C_l $(l \geq 3)$	
D_l $(l \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

証明　既約ルート系の Dynkin 図形は許容可能な連結多重グラフの 2 重以上の辺に不等号を付けたものになるが（例 3.41），定理 3.45 の表にある多重グラフにそのように不等号を付けたものは同型を除いて主張の表にあるもので尽くされる．よって，主張が成り立つ．□

本稿では述べないが，定理 3.46 に挙げた各型の Dynkin 図形をもつ既約ルート系を具体的に構成することができ，これで既約ルート系の分類が完成したことになる．構成について詳しくは，Humphreys [4, §12] や Bourbaki [2, Plate I–X] を参照のこと．

3.7　整ベクトルと優整ベクトル

半単純 Lie 代数上の有限次元既約加群の分類（5.3 節）で必要になるため，ルート系に関する整ベクトルと優整ベクトルを定義する．

定義 3.47（整ベクトル，優整ベクトル）　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) $\lambda \in V$ であって任意の $\alpha \in R$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であるものを，R に関する**整ベクトル**（integral vector）という．
(2) さらに，B を R の基底とする．このとき，$\lambda \in V$ であって任意の $\alpha \in B$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるものを，(R, B) に関する**優整ベクトル**（dominant integral vector）という．

B をルート系 R の基底とすると，$B^\vee$ は双対ルート系 $R^\vee$ の基底である（命題 3.33）．したがって，$\lambda \in V$ が R に関する整ベクトルであるためには，任意の $\alpha \in B$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であれば十分である．また，V^* の基底 $B^\vee$ の双対基底を $B^{\vee *}$ と書くと，R に関する整ベクトル全体の集合は $B^{\vee *}$ を基底とする格子 $\mathbb{Z}B^{\vee *}$ であり，(R, B) に関する優整ベクトル全体の集合は $\mathbb{Z}_{\geq 0}B^{\vee *}$ である．

ルート系の条件 (RS3) よりルートは整ベクトルだから，R のルート格子は R に関する整ベクトル全体のなす格子に含まれる．しかし，逆の包含は一般には成り立たない．

補題 3.48　V を有限次元実内積空間，B を V の基底とし，B' を内積に関する B の双対基底とする．任意の異なる 2 元 $\alpha, \beta \in B$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ ならば，$\mathbb{R}_{\geq 0}B' \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}B$ である．

証明　$v \in \mathbb{R}_{\geq 0}B'$ とすると，任意の $\alpha \in B$ に対して $\langle v, \alpha \rangle \geq 0$ だから，$B \sqcup \{-v\}$ の任意の異なる 2 元の内積は 0 以下である．ここで，v を基底 B の元の線型結合で表したとき，ある $\alpha \in B$ の係数が負であるとする．すると，線型形式 $f \in V^*$ を $f(\alpha) = 1$ かつ $\beta \in B \setminus \{\alpha\}$ に対して $f(\beta)$ が十分小さい正の実数となるようにとれば，$f(B \cup \{-v\}) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ となる．これより $B \sqcup \{-v\}$ は一つの半開空間に含まれるが，補題 3.25 より $B \sqcup \{-v\}$ は線型独立となるが，これはありえない．したがって，背理法より，v を基底 B の元の線型結合で表すときの係数はすべて 0 以上である．よって，$\mathbb{R}_{\geq 0}B' \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}B$ である．□

命題 3.49　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とする．

(1) R に関する整ベクトルは，$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} R$ に含まれる．
(2) さらに，B を R の基底とする．このとき，(R, B) に関する優整ベクトルは，$\mathbb{Q}_{\geq 0}B$ に含まれる．

証明　B をルート系 R の基底とする．

(1)　V の基底 $B^{\vee *}$ から B への基底変換行列は (R, B) の Cartan 行列だから，B から $B^{\vee *}$ への基底変換行列はその逆行列であり，特にその各成分は有理数である．これより $B^{\vee *} \subseteq \mathbb{Q}B = V_{\mathbb{Q}}$ だから，R に関する整ベクトルは $V_{\mathbb{Q}}$ に含まれる．

(2)　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9，(1)）．このとき，$\lambda \in V$ が (R, B) に関する優整ベクトルであるとすると，任意の $\alpha \in B$ に対して $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ である．任意の異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in B$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ だから（命題 3.23），補題 3.48 より $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}B$ である．これと (1) を合わせて $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}B$ を得る．□

命題 3.50　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B を R の基底とする．R に関する任意の整ベクトル $\lambda \in V$ に対して，ある $s \in W(R)$ が存在し，$s(\lambda)$ が (R, B) に関する優整ベクトルとなる．[*6]

証明　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で V が $W(R)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ をもつ内積空間である場合に示せば十分である（命題 3.8，系 3.9，命題 3.49 (1)）．$\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in R_+(B)} \alpha$ と置く．$s \in W(R)$ を $\langle s(\lambda), \rho \rangle$ が最大となるようにとる．このとき，任意の $\alpha \in B$ に対して

$$\langle s(\lambda), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha s(\lambda), \rho \rangle = \langle s(\lambda), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle s(\lambda), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

（最後の等号で補題 3.28 を用いた）だから $\langle s(\lambda), \alpha \rangle \geq 0$ であり，したがって $\alpha^\vee(s(\lambda)) \geq 0$ である．よって，$s(\lambda)$ は (R, B) に関する優整ベクトルである．[*7] □

命題 3.51　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B を R の基底とする．V の部分集合 $\mathfrak{X}$ が 2 条件

(i) ある $\lambda \in V$ が存在して $\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B$ となる．
(ii) $\mathfrak{X}$ は $W(R)$-安定である．

を満たすならば，$\mathfrak{X}$ は有限である．

証明　$\mathfrak{X}$ が空ならば示すべきことはなにもないから，そうでないとする．$\mu \in \mathfrak{X}$ を一つ固定する．$\alpha \in B$ と

[*6] 軌道 $W(R)\lambda$ に含まれる優整ベクトルがただ一つであることもいえる．証明は，Humphreys [4, §10.3 Lem. B] を参照のこと．
[*7] 定理 3.29 の証明の $(1')$ でも同じような議論をした．

すると，(ii) より $\mu - \alpha^\vee(\mu)\alpha = s_\alpha(\mu) \in \mathfrak{X}$ であり，さらに (i) より $\mathfrak{X} \subseteq \mu + \mathbb{Z}B$ だから，$\alpha^\vee(\mu) \in \mathbb{Z}$ である．すなわち，μ は R に関する整ベクトルである．したがって，$\mathfrak{X}$ の元はすべて R に関する整ベクトルである．そこで，$\mathfrak{X}$ の元のうち (R, B) に関する優整ベクトルであるもの全体を $\mathfrak{X}_{++}$ と置くと，(ii) と命題 3.50 より $\mathfrak{X} = W(R)\mathfrak{X}_{++}$ である．(i) と命題 3.49 より $\mathfrak{X}_{++}$ は有限だから，$\mathfrak{X}$ も有限である． □

命題 3.51 は，半単純 Lie 代数上の有限次元既約加群の分類の主要なステップである定理 5.22 の証明で用いられる．

4 半単純 Lie 代数とルート系

4.1 節では係数体 $\mathbb{K}$ を任意の可換体とし，本節の 4.2 節以降の部分では係数体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする．

4.1 Cartan 部分代数

Lie 代数と $\mathfrak{g}$ その部分線型空間 $\mathfrak{h}$ に対して，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ における**中心化子**（centralizer）$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ と**正規化子**（normalizer）$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ を，それぞれ

$$
\begin{aligned}
C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) &= \{x \in \mathfrak{h} \mid [x, \mathfrak{h}] = 0\}, \\
N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}
\end{aligned}
$$

と定める．

定義 4.1（Cartan 部分代数） $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ であって $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ を満たすものを，$\mathfrak{g}$ の **Cartan 部分代数**（Cartan subalgebra）という．

Cartan 部分代数について，次のことが知られている．

事実 4.2（Cartan 部分代数の存在・共役性） $\mathfrak{g}$ を可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

(1) $\mathbb{K}$ が無限体ならば，$\mathfrak{g}$ は Cartan 部分代数をもつ．
(2) $\mathbb{K}$ が標数 0 ならば，$\mathfrak{g}$ のすべての Cartan 部分代数の次元は等しい．
(3) $\mathbb{K}$ が標数 0 の代数閉体ならば，$\mathfrak{g}$ のすべての Cartan 部分代数は自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ によって移り合う．

証明は，Bourbaki [3, Ch. VII §2.3, 3.2] を参照のこと．(3) の証明は Humphreys [4, §15–16] にもある．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 代数の中で包含関係に関して極大であるものは，$\mathfrak{g}$ において**極大可換**（maximally commutative）であるという．$\mathfrak{g}$ の部分線型空間 $\mathfrak{h}$ が極大可換であるための必要十分条件は，$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ である．

事実 4.3 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．
(b) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ において極大可換であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ の元はすべて半単純（すなわち，代数閉包 $\overline{\mathbb{K}}$ 上に係数拡大すると対角化可能）である．

特に，$\mathbb{K}$ が標数 0 の代数閉体ならば，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ について，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ は同時対角化可能である．

証明は，Humphreys [4, §8.1, §15.3] や Bourbaki [3, Ch. VII §2.1 Cor. 5 of Prop. 4, §2.4 Thm. 2] を参照のこと．

以下で考えるのは半単純 Lie 代数の Cartan 部分代数のみであり，Cartan 部分代数の性質として用いるのは事実 4.3 の条件 (b) だけだから，条件 (b) を定義だと考えても差し支えない．

命題 4.4 $\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ を半単純 Lie 代数の有限族とし，$\mathfrak{g} = \prod_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ を積 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．
(b) 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_i$ が存在して，$\mathfrak{h} = \prod_{i\in I}\mathfrak{h}_i$ である．[*8]

証明 (b) $\Longrightarrow$ (a) 明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b) 各 $i \in I$ に対して，射影 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ による $\mathfrak{h}$ の像を $\mathfrak{h}_i$ と置く．容易にわかるように，$\mathfrak{h}$ が事実 4.3 の条件 (b) を満たすならば，各 $\mathfrak{h}_i$ もそうである．すなわち，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ならば，各 $\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数である．このとき，$\prod_{i\in I}\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 代数であって $\mathfrak{h}$ を含むが，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ において極大可換だから（事実 4.3），$\mathfrak{h} = \prod_{i\in I}\mathfrak{h}_i$ である． □

4.2 分裂半単純 Lie 代数のルート系

本節冒頭で述べたとおり，本節の以下の部分では，係数体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする．

定義 4.5（分裂半単純 Lie 代数） 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ との組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を，**分裂半単純 Lie 代数**（split semisimple Lie algebra）という．

分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を考えるとき，写像 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ に対応する $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ の同時固有空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ と書く．すなわち，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \alpha(h)x\}$$

である．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は線型だから，$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ となりうるのは $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ のときだけである．

定義 4.6（分裂半単純 Lie 代数のルート系） 分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート系**（root system）を

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

と定め，その各元を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート**（root）という．

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ は同時対角化可能であり 0 に対応する同時固有空間は $\mathfrak{h}$ に等しいから（事実 4.3），$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

と直和分解される．これを，分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート空間分解**（root space decomposition）という．$\mathfrak{g}$ は有限次元だから，$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は有限である．

[*8] 命題 4.4 の結論は，任意の係数体上の有限次元 Lie 代数の有限族 $\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ に対しても正しい．証明は，Bourbaki [2, Ch. 7 §2.1 Prop. 2] を参照のこと．

本小節の目標は，$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が定義 3.5 の意味で $\mathfrak{h}^*$ 上のルート系であることを示すことである．

命題 4.7　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数とする．

(1) $\alpha, \beta\in\mathfrak{h}^*$ に対して，$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．
(2) $B\colon\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ を不変な双線型形式とする．$\alpha, \beta\in\mathfrak{h}^*$，$\alpha+\beta\neq 0$ ならば，$\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_\beta$ は B に関して直交する．
(3) $B\colon\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ を非退化かつ不変な双線型形式とする．$\alpha\in\mathfrak{h}^*$ に対して，B の制限 $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ は非退化である．特に，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化である．

証明　(1)　$x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_\beta$ とすると，

$$[h,[x,y]]=[[h,x],y]+[x,[h,y]]=\alpha(h)[x,y]+\beta(h)[x,y]\qquad(h\in\mathfrak{h})$$

だから $[x,y]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．よって，$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．

(2)　$\alpha, \beta\in\mathfrak{h}^*$，$\alpha+\beta\neq 0$ とすると，$\alpha(h)+\beta(h)\neq 0$ となる $h\in\mathfrak{h}$ がとれる．$x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_\beta$ とすると，B の不変性より

$$0=B([h,x],y)+B(x,[h,y])=\alpha(h)B(x,y)+\beta(h)B(x,y)$$

だから $B(x,y)=0$ である．よって，$\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_\beta$ は B に関して直交する．

(3)　$x\in\mathfrak{g}_\alpha$ が $B(x,\mathfrak{g}_{-\alpha})=0$ を満たすとする．(2) より任意の $\beta\in\mathfrak{h}^*\setminus\{-\alpha\}$ に対しても $B(x,\mathfrak{g}_\beta)=0$ だから，$\mathfrak{g}$ のルート空間分解と合わせて，$B(x,\mathfrak{g})=0$ を得る．B は非退化だから，これより $x=0$ である．α を $-\alpha$ に置き換えれば，$y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ について $B(\mathfrak{g}_\alpha,y)=0$ ならば $y=0$ であることもわかる．よって，$B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ は非退化である．$\alpha=0$ とすれば，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ の非退化性を得る．□

系 4.8　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数とする．任意の $\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，$\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$ のすべての元は冪零である．

証明　$m\in\mathbb{N}$ を十分大きくとって $(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cup\{0\})+m\alpha$ が $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cup\{0\}$ と交わらないようにすれば，任意の $\beta\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\cup\{0\}$ に対して $(\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha)^m\mathfrak{g}_\beta\subseteq\mathfrak{g}_{\beta+m\alpha}=0$ である（命題 4.7 (1)）．よって，$\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$ のすべての元は冪零である．□

分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の構造を調べるための鍵は，各ルート $\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対応して $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ に同型な部分 Lie 代数をもつことである．

定義 4.9（$\mathfrak{sl}_2$-三対）　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の元の組 (h,x,y) が $\mathfrak{sl}_2$-三対（$\mathfrak{sl}_2$-triple）であるとは，H, X, Y をそれぞれ h, x, y に移す $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ から $\mathfrak{g}$ への線型写像が Lie 代数の単射準同型であることをいう．

定理 4.10　$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とし，$\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とする．

(1) $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ および $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ は 1 次元である．
(2) $\alpha(H_\alpha)=2$ を満たす $H_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$ が一意に存在する．
(3) (2) の H_α について，任意の $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ に対して，$Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ であって $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$ を満たすものが一意に存在する．さらに，このとき，$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．

証明　$\mathfrak{g}$ 上の非退化かつ不変な双線型形式（たとえば Killing 形式，事実 1.24）B を一つ固定する．命題 4.7 (3) よりこれの制限 $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ や $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ も非退化であることに注意する．次の 4 段階に分けて主張を示す．

(I)　$\dim\mathfrak{h}_\alpha=1$ を示す．$\mathfrak{h}$ 上の双線型形式 $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化だから，$h_\alpha\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ であって $B(h,h_\alpha)=\alpha(h)$（$h\in\mathfrak{h}$）を満たすものが（一意に）存在する．$x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ とすると，$[x,y]\in\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$（命題 4.7 (1)）かつ

$$\begin{aligned}B(h,[x,y])&=B([h,x],y)\\&=\alpha(h)B(x,y)\\&=B(h,h_\alpha)B(x,y)\\&=B(h,B(x,y)h_\alpha)\qquad(h\in\mathfrak{h})\end{aligned}$$

である．したがって，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ の非退化性より

$$[x,y]=B(x,y)h_\alpha \tag{$*$}$$

である．$\mathfrak{g}_\alpha\neq 0$ と $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ の非退化性より $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ は恒等的には 0 ではないから，上式より $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=\mathbb{K}h_\alpha$ である．よって，$\dim\mathfrak{h}_\alpha=1$ である．

(II)　$\alpha(H_\alpha)=2$ を満たす $H_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$ が一意に存在することを示す．そのためには，$\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}\neq 0$ を示せばよい．$\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}=0$ と仮定して矛盾を導く．(I) より $\mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のそれぞれの 1 次元部分線型空間 $\mathfrak{g}'_\alpha$，$\mathfrak{g}'_{-\alpha}$ を $[\mathfrak{g}'_\alpha,\mathfrak{g}'_{-\alpha}]=\mathfrak{h}_\alpha$ となるようにとれる．いま $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}=0$ より

$$[\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{g}'_\alpha]=[\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{g}'_{-\alpha}]=0$$

だから，$\mathfrak{s}=\mathfrak{h}_\alpha+\mathfrak{g}'_\alpha+\mathfrak{g}'_{-\alpha}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数であって $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{h}_\alpha$ を満たす．ここで，$\mathfrak{s}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}}$ に Lie の定理の系（系 1.21）を適用すれば，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}[\mathfrak{s}_\alpha,\mathfrak{s}_\alpha]=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}_\alpha$ の元がすべて冪零であることを得る．一方で，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ は同時対角化可能だから（事実 4.3），このとき $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}_\alpha=0$ であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ は忠実だから $\mathfrak{h}_\alpha=0$ となるが，これは (I) に矛盾する．よって，背理法より，$\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}\neq 0$ である．

(III)　任意の $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ に対して，$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるような $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ がとれることを示す．$B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ の非退化性と ($*$) より $[X_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=\mathfrak{h}_\alpha$ だから，$Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$ となるようにとれる．H_α, X_α, Y_α はいずれも 0 でなく，ルート空間分解に関して異なる直和因子に属するから，これら三つの元は線型独立である．また，H_α, X_α, Y_α は関係式

$$[H_\alpha,X_\alpha]=\alpha(H_\alpha)X_\alpha=2X_\alpha,\qquad[H_\alpha,Y_\alpha]=-\alpha(H_\alpha)Y_\alpha=-2X_\alpha,\qquad[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$$

を満たす．よって，$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．

(IV)　$\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}=1$ を示す（ここから (3) の一意性もわかる）．$\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 上には非退化な双線型形式 $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が存在するから $\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}$ である．以下，$\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}=1$ を示す．$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ を (III) で述べたとおりとし，これと随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とみなす．すると，任意の $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して

$$\begin{aligned}Hy&=[H_\alpha,y]=-\alpha(H_\alpha)y=-2y,\\Xy&=[X_\alpha,y]=B(X_\alpha,y)h_\alpha\end{aligned}$$

である（第二式の第二の等号は ($*$) による）．ここで，もし $y\neq 0$ かつ $B(X_\alpha,y)=0$ ならば，y は有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $\mathfrak{g}$ のウェイト -2 の原始ベクトルとなるが，これは系 2.7 に反する．よって，任意の $y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}\setminus\{0\}$ に対して $B(X_\alpha,y)\neq 0$ だが，そのためには $\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}\leq 1$ でなければならない．$-\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ より $\mathfrak{g}_{-\alpha}\neq 0$ だから，$\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}=1$ である．これで，主張が示された．　□

本小節の以下の部分では，定理 4.10 の記号 H_α を断りなく用いる．

補題 4.11　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数とする．任意の $\alpha, \beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，$\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である．

証明　$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるようにとり（定理 4.10 (3) より可能である），これと随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とみなす．すると，$H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ は $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$ 上に $\beta(H_\alpha)$ 倍として作用するから，有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $\mathfrak{g}$ はウェイト $\beta(H_\alpha)$ をもつ．系 2.10 (2) より，これは整数である．　□

次の補題は，存在定理（定理 4.23）の証明でも使えるように，少し一般化した形で示しておく．まず，補題で用いる用語を準備しておく．線型空間 V 上の線型写像 $T\colon V \to V$ が**局所冪零**（locally nilpotent）であるとは，任意の $v \in V$ に対してある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $T^k v = 0$ であることをいう（有限次元線型空間上の局所冪零な線型写像は冪零である）．V 上の局所冪零な線型写像 T に対して，V 上の線型写像 e^T を

$$e^T v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k v \qquad (v \in V)$$

と定めることができる．容易にわかるように，局所冪零な線型写像 T, S が互いに可換ならば $e^{T+S} = e^T e^S$ が成り立つ．特に，e^T は e^{-T} を逆にもつ自己線型同型写像である．さらに，A が代数で T が A 上の局所冪零な導分ならば，e^T は代数 A の自己同型である．

補題 4.12　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元部分線型空間とし，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(h)x\}$$

と置く．直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ が成立すると仮定する．さらに，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ および $H_\alpha \in \mathfrak{h}$，$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が 3 条件

(i) $\alpha(H_\alpha) = 2$ である．
(ii) $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．
(iii) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\operatorname{ad} X_\alpha$, $\operatorname{ad} Y_\alpha$ は局所冪零である．

を満たすとする．このとき，

$$\theta_\alpha = e^{\operatorname{ad} X_\alpha} e^{\operatorname{ad}(-Y_\alpha)} e^{\operatorname{ad} X_\alpha} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると，次が成り立つ．

(1) $\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}} = s_{H_\alpha, \alpha}$，$(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^* = s_{\alpha, H_\alpha}$ である．
(2) 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_{\alpha, H_\alpha}(\lambda)}$ である．

証明　(1)　条件 (i) より，直和分解 $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker} \alpha \oplus \mathbb{K}\alpha$ が成立する．$h \in \operatorname{Ker} \alpha$ ならば，$(\operatorname{ad} X_\alpha)h = -\alpha(h)X_\alpha = 0$ かつ $(\operatorname{ad} Y_\alpha)h = \alpha(h)Y_\alpha = 0$ だから，

$$\theta_\alpha(h) = e^{\operatorname{ad} X_\alpha} e^{\operatorname{ad}(-Y_\alpha)} e^{\operatorname{ad} X_\alpha}(h) = h$$

である．また，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の自己同型 $e^{\operatorname{ad} X} e^{\operatorname{ad}(-Y)} e^{\operatorname{ad} X}$ が H を $-H$ に移すことが計算により確かめられるから，条件 (ii) より $\theta_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha$ である．以上と条件 (i) より，θ_α は $\mathfrak{h}$ 上では鏡映 $s_{H_\alpha, \alpha}$ に一致し，したがって $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^* = s^*_{H_\alpha, \alpha} = s_{\alpha, H_\alpha}$ である（命題 3.4）．

(2)　$x \in \mathfrak{g}_\lambda$ とすると，(1) より任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}[h, \theta_\alpha(x)] &= \theta_\alpha([\theta_\alpha^{-1}(h), x]) \\ &= \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))\theta_\alpha(x) \\ &= s_{\alpha, H_\alpha}(\lambda)(h)\theta_\alpha(x)\end{aligned}$$

だから，$\theta_\alpha(x) \in \mathfrak{g}_{s_{\alpha,H_\alpha}(\lambda)}$ である．よって，$\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) \subseteq \mathfrak{g}_{s_{\alpha,H_\alpha}(\lambda)}$ である．任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対してこれが成り立ち，直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ が成立しているから，前文の式では等号が成り立つ．これで，主張が示された． □

定理 4.13　分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ 上のルート系であり，各 $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\alpha^\vee = H_\alpha$ である．

証明　ルート系の条件 (RS1)–(RS4)（定義 3.5）を確かめる．

(RS1)　$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が有限であることと 0 を含まないことは明らかである．$h \in \mathfrak{h}$ が任意の $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\alpha(h) = 0$ を満たすとすると，ルート空間分解から $\operatorname{ad} h = 0$ がわかり，したがって $h = 0$ である．よって，$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ を張る．

(RS2)　$\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ として $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 4.10 のようにとると，これらは補題 4.12 の仮定を満たすから（系 4.8 より $\operatorname{ad} X_\alpha$, $\operatorname{ad} Y_\alpha$ は冪零である），任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{g}_\lambda$ と $\mathfrak{g}_{s_{\alpha,H_\alpha}(\lambda)}$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型によって移り合う．よって，鏡映 s_{α,H_α} は $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を保つ．

(RS3)　補題 4.11 ですでに示したように，任意の α, $\beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\alpha^\vee(\beta) = \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である．

(RS4)　$\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とする．$\operatorname{ad} H_\alpha$ は $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ 上では $2\alpha(H_\alpha) = 4$ 倍写像だから，命題 4.7 (1) と合わせて

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{2\alpha} &= [H_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\ &= [[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}], \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{3\alpha}]\end{aligned}$$

を得る．ところが，$\mathfrak{g}_\alpha$ は 1 次元（定理 4.10 (1)）だから $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ であり，$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が (RS1)–(RS3) を満たすことと注意 3.19 より $3\alpha \notin R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$，すなわち $\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$ だから，上式より $\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ である．よって，$2\alpha \notin R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ である． □

系 4.14　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数，B をルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とすると，$\{H_\alpha\}_{\alpha \in B}$ は $\mathfrak{h}$ の基底である．

証明　各 $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\alpha^\vee = H_\alpha$ だから（定理 4.13），主張は命題 3.33 から従う． □

R をルート系とするとき，α, $\beta \in R$ に対して $n(\beta, \alpha) = \alpha^\vee(\beta)$ と書くのだった．$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の場合は，$\alpha^\vee = H_\alpha$ だから $n(\beta, \alpha) = \beta(H_\alpha)$ である．

定理 4.13 とルート系の一般論からわかることを述べておく．これらの命題は，4.4 節で用いるほか，後で命題 5.8 の証明にも必要になる．

命題 4.15　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数，α, $\beta \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を線型独立な二つのルートとし，

$$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$$

と置く．

(1) $I_{\beta,\alpha}$ は $p,\,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける．

(2) (1) の $p,\,q$ について，$p-q = -n(\beta,\alpha) = -\beta(H_\alpha)$ である．

証明　分裂半単純 Lie 代数のルート系 $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に命題 3.21 を適用したものである． □

命題 4.16　分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の二つのルート α, $\beta \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ について，$\alpha+\beta \neq 0$ ならば $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．

証明　$\beta = \alpha$ ならば $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ だから，主張は明らかである．それ以外の場合，すなわち α と β が線型独立である場合を考える（系 3.18）．$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 4.10 のようにとり，これと随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とみなす．$I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ を命題 4.15 のとおりとすると，$\bigoplus_{j=-q}^{p} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ は $\mathfrak{g}$ の $p+q+1$ 次元部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群であり（定理 4.10 (1)），$\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ はそのウェイト $(\beta+j\alpha)(H_\alpha) = -(p-q)+2j$ のウェイト空間である．$\mathfrak{g}_{\beta+p\alpha}$ の 0 でない元はウェイト $p+q$ の原始ベクトルだから，最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.6）より，$V(p+q)$ に同型な部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群を生成する．ところが $V(p+q)$ は $p+q+1$ 次元だから，これは $\bigoplus_{j=-q}^{p} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ に一致する．$V(p+q)$ において $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の作用は 0 でない各ウェイト空間をウェイトに 2 を加えたウェイト空間に全射に移すから，

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = [X_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

である．これで，主張が示された． □

系 4.17　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数，B をルート系 $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とし，B に関する正ルートの全体を $R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$，負ルートの全体を $R_-(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ と書く．

(1) $\bigoplus_{\alpha\in B} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha\in R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ である．

(2) $\bigoplus_{\alpha\in -B} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha\in R_-(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ である．

(3) $\bigoplus_{\alpha\in B\cup(-B)} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成する．

証明　(1)　$\beta \in R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とすると，命題 3.34 より有限個の単純ルートの列 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in B$ であって任意の $1 \leq i \leq k$ に対して $\alpha_1+\cdots+\alpha_i \in R_+(B)$ かつ $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = \beta$ であるものがとれ，このとき命題 4.16 より

$$\mathfrak{g}_\beta = [[[\mathfrak{g}_{\alpha_1},\mathfrak{g}_{\alpha_2}],\mathfrak{g}_{\alpha_3}],\dots,\mathfrak{g}_{\alpha_k}]$$

である．よって，$\bigoplus_{\alpha\in B} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{n}_+$ を Lie 代数として生成する．

(2)　(1) と同様である．

(3)　$\bigoplus_{\alpha\in B\cup(-B)} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数を $\mathfrak{g}'$ とする．(1), (2) より，$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ を含む．さらに，各 $\alpha \in B$ に対して $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{K}H_\alpha$ であり（定理 4.10），$\{H_\alpha\}_{\alpha\in B}$ は $\mathfrak{h}$ の基底だから（系 4.14），$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{h}$ を含む．よって，$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ である． □

4.3　存在定理

本節の以下の部分では，$\delta_{\alpha\beta}$ を Kronecker のデルタとする．また，B をルート系の基底とすると，異なる二つの単純ルート $\alpha,\beta \in B$ に対して $n(\beta,\alpha)$ は 0 以下の整数である（命題 3.23）ことに注意する．

補題 4.18　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B をその基底とする．B が自由に生成する単位

的結合 $\mathbb{K}$-代数，すなわち $\mathbb{K}^{\oplus B}$（標準基底を $\{e_\beta\}_{\beta\in B}$ と書く）のテンソル代数 $T(\mathbb{K}^{\oplus B})$ を考え，$\alpha\in B$ に対して線型写像 H^0_α, X^0_α, $Y^0_\alpha\in\mathrm{End}(T(\mathbb{K}^{\oplus B}))$ を

$$
\begin{aligned}
H^0_\alpha(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}) &= \left(-\sum_{i=1}^k n(\gamma_i,\alpha)\right)(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
X^0_\alpha(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}) &= \begin{cases} 0 & (k=0)\\ (Y^0_{\gamma_1}X^0_\alpha-\delta_{\alpha\gamma_1}H^0_\alpha)(e_{\gamma_2}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}) & (k\geq 1),\end{cases}\\
Y^0_\alpha(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}) &= e_\alpha\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}
\end{aligned}
$$

と定める（まず H^0_α と Y^0_α を定め，それらを用いて X^0_α を次数 k に関して再帰的に定める）．このとき，任意の α, $\beta\in B$ に対して次が成り立つ．

(1) $[H^0_\alpha,H^0_\beta]=0$.
(2) $[H^0_\alpha,X^0_\beta]=n(\beta,\alpha)X^0_\beta$.
(3) $[H^0_\alpha,Y^0_\beta]=-n(\beta,\alpha)Y^0_\beta$.
(4) $[X^0_\alpha,Y^0_\beta]=\delta_{\alpha\beta}H^0_\alpha$.

証明 (1), (4)　明らかである．

(3)　任意の γ_1, …, $\gamma_k\in B$ に対して

$$
\begin{aligned}
&[H^0_\alpha,Y^0_\beta](e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
&=\left(-n(\beta,\alpha)-\sum_{i=1}^k n(\beta_i,\alpha)\right)(e_\beta\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})-\left(-\sum_{i=1}^k n(\beta_i,\alpha)\right)(e_\beta\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
&=-n(\beta,\alpha)(e_\beta\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
&=-n(\beta,\alpha)Y_\beta(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})
\end{aligned}
$$

だから，$[H^0_\alpha,Y^0_\beta]=-n(\beta,\alpha)Y^0_\beta$ である．

(2)　$\gamma\in B$ に対して，(1), (3), (4) より

$$
\begin{aligned}
0&=[H^0_\alpha,[X^0_\beta,Y^0_\gamma]]\\
&=[[H^0_\alpha,X^0_\beta],Y^0_\gamma]+[X^0_\beta,[H^0_\alpha,Y^0_\gamma]]\\
&=[[H^0_\alpha,X^0_\beta],Y^0_\gamma]-n(\gamma,\alpha)[X^0_\beta,Y^0_\gamma]\\
&=[[H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\gamma,\alpha)X^0_\beta,Y^0_\gamma]\\
&=[[H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\beta,\alpha)X^0_\beta,Y^0_\gamma]+(n(\beta,\alpha)-n(\gamma,\alpha))[X^0_\beta,Y^0_\gamma]\\
&=[[H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\beta,\alpha)X^0_\beta,Y^0_\gamma]+(n(\beta,\alpha)-n(\gamma,\alpha))\delta_{\beta\gamma}H^0_\beta\\
&=[[H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\beta,\alpha)X^0_\beta,Y^0_\gamma]
\end{aligned}
$$

である．これより任意の γ_1, …, $\gamma_k\in B$ に対して

$$
\begin{aligned}
([H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\beta,\alpha)X^0_\beta)(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})&=([H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\beta,\alpha)X^0_\beta)Y^0_{\gamma_1}\cdots Y^0_{\gamma_k}1\\
&=Y^0_{\gamma_1}\cdots Y^0_{\gamma_k}([H^0_\alpha,X^0_\beta]-n(\beta,\alpha)X^0_\beta)1\\
&=0
\end{aligned}
$$

だから，$[H^0_\alpha,X^0_\beta]=n(\beta,\alpha)X^0_\beta$ である．　□

補題 4.19　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B をその基底とする．$\widetilde{\mathfrak{g}}$ を生成元

$$\widetilde{H}_\alpha,\quad \widetilde{X}_\alpha,\quad \widetilde{Y}_\alpha \qquad (\alpha\in B)$$

と関係式

$$[\widetilde{H}_\alpha,\widetilde{H}_\beta]=0 \tag{R1}$$
$$[\widetilde{H}_\alpha,\widetilde{X}_\beta]=n(\beta,\alpha)\widetilde{X}_\beta \tag{R2}$$
$$[\widetilde{H}_\alpha,\widetilde{Y}_\beta]=-n(\beta,\alpha)\widetilde{Y}_\beta \tag{R3}$$
$$[\widetilde{X}_\alpha,\widetilde{Y}_\beta]=\delta_{\alpha\beta}\widetilde{H}_\alpha \tag{R4}$$

で定まる Lie 代数とする．$\lambda\in V$ に対して

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda=\{x\in\widetilde{\mathfrak{g}}\mid \text{任意の } \alpha\in B \text{ に対して } [\widetilde{H}_\alpha,x]=\alpha^\vee(\lambda)x\}$$

と定め，

$$\widetilde{\mathfrak{h}}=\widetilde{\mathfrak{g}}_0,\qquad \widetilde{\mathfrak{n}}_+=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq0}B\setminus\{0\}}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda,\qquad \widetilde{\mathfrak{n}}_-=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\leq0}B\setminus\{0\}}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

と置く．

(1) $\lambda,\mu\in V$ に対して，$[\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda,\widetilde{\mathfrak{g}}_\mu]\subseteq\widetilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である．
(2) 各 $\alpha\in B$ に対して $\widetilde{H}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_0$，$\widetilde{X}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$，$\widetilde{Y}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ であり，直和分解 $\widetilde{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{\lambda\in V}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ が成立する．
(3) $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であり，直和分解 $\widetilde{\mathfrak{g}}=\widetilde{\mathfrak{h}}\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}_+\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ が成立する．（したがって，$\lambda\in V\setminus(\mathbb{Z}_{\geq0}B\cup\mathbb{Z}_{\leq0}B)$ に対しては $\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda=0$ である．）
(4) $\widetilde{\mathfrak{h}}$ は $\{\widetilde{H}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ を基底にもつ．
(5) $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ は Lie 代数として $\{\widetilde{X}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ によって生成される．
(6) $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は Lie 代数として $\{\widetilde{Y}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ によって生成される．*9

証明　(1)　命題 4.7 (1) と同様である．

(2)　$\widetilde{H}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_0$，$\widetilde{X}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$，$\widetilde{Y}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ はそれぞれ関係式 (R1), (R2), (R3) から従う．$\widetilde{\mathfrak{g}}$ は線型空間として「$\widetilde{H}_\alpha$, $\widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{Y}_\alpha$（$\alpha\in B$）からなる有限列にいおいて任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの」全体で生成されるが，前半の結果と (1) よりこのような元はある $\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ に含まれる．よって，$\widetilde{\mathfrak{g}}=\sum_{\lambda\in V}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ であり，同時固有空間の一般論からこの和は直和である．

(3), (4), (5), (6)（$\{\widetilde{H}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ の線型独立性を除く）　(1) より $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であり，(2) よりこれらの和は直和である．

$\{\widetilde{H}_\alpha\}_{\alpha\in B}$, $\{\widetilde{X}_\alpha\}_{\alpha\in B}$, $\{\widetilde{Y}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数を，それぞれ $\widetilde{\mathfrak{h}}'$, $\widetilde{\mathfrak{n}}'_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}'_-$ と置く．これらはそれぞれ $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ に含まれる．$\widetilde{\mathfrak{g}}'=\widetilde{\mathfrak{h}}'\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}'_+\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}'_-$ が $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 全体に等しいことがいえれば，主張は示される．$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ は $\widetilde{H}_\alpha$, $\widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{Y}_\alpha$（$\alpha\in B$）を含むから，$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ が $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であることを示せば十分である．$\widetilde{\mathfrak{g}}$ の $\operatorname{ad}\widetilde{H}_\alpha$, $\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha$, $\operatorname{ad}\widetilde{Y}_\alpha$-安定な部分線型空間は $\operatorname{ad}\widetilde{\mathfrak{g}}$-安定でもあり，特に $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数（実際にはより強くイデアル）である．$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ は線型空間として

$$\begin{array}{lll} \widetilde{H}_\beta & & (\beta\in B), \\ [\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]], & [\widetilde{Y}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{Y}_{\beta_2},\widetilde{Y}_{\beta_1}]] & (k\geq1 \text{ は整数，} \beta_1,\ \dots,\ \beta_k\in B) \end{array}$$

*9 $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ がそれぞれ $\{\widetilde{X}_\alpha\mid\alpha\in B\}$, $\{\widetilde{Y}_\alpha\mid\alpha\in B\}$ を基本族とする自由 Lie 代数であることまでいえる．証明は，Bourbaki [3, Ch. VIII §4.2 Prop. 3] を参照のこと．

の全体によって生成されるから（命題 1.3），次の主張を示せばよい．

主張 4.20　上記の元に $\mathrm{ad}\,\widetilde{H}_\alpha$, $\mathrm{ad}\,\widetilde{X}_\alpha$, $\mathrm{ad}\,\widetilde{Y}_\alpha$ を施すと，次の表のとおりになる．ただし，$c = n(\beta_1, \alpha) + \cdots + n(\beta_k, \alpha)$ と置いた．

	$\widetilde{H}_\beta$	$[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]]$	$[\widetilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{Y}_{\beta_2}, \widetilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\mathrm{ad}\,\widetilde{H}_\alpha$	0	$c[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]]$	$-c[\widetilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{Y}_{\beta_2}, \widetilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\mathrm{ad}\,\widetilde{X}_\alpha$	$-n(\alpha, \beta)\widetilde{X}_\alpha$	$[\widetilde{X}_\alpha, [\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]]]$	$\in \widetilde{\mathfrak{h}}'$ $(k=1)$, $\in \widetilde{\mathfrak{n}}'_-$ $(k \geq 2)$
$\mathrm{ad}\,\widetilde{Y}_\alpha$	$n(\alpha, \beta)\widetilde{Y}_\alpha$	$\in \widetilde{\mathfrak{h}}'$ $(k=1)$, $\in \widetilde{\mathfrak{n}}'_+$ $(k \geq 2)$	$[\widetilde{Y}_\alpha, [\widetilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{Y}_{\beta_2}, \widetilde{Y}_{\beta_1}]]]$

主張 4.20 の証明　$\widetilde{H}_\beta$ の列の主張は関係式 (R1), (R2), (R3) から従う．$[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]]$ の列の主張について，$\mathrm{ad}\,\widetilde{X}_\alpha$ の行のものは明らかであり，(1), (2) より $[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]] \in \mathfrak{g}_{\beta_1 + \cdots + \beta_k}$ だから $\mathrm{ad}\,\widetilde{H}_\alpha$ の行のものもわかる．$\mathrm{ad}\,\widetilde{Y}_\alpha$ の行のものについて，$k=1$ のときは，関係式 (R4) より $(\mathrm{ad}\,\widetilde{Y}_\alpha)\widetilde{X}_{\beta_1} = -\delta_{\alpha\beta_1}\widetilde{H}_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{h}}'$ である．また，$[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]] \in \widetilde{\mathfrak{h}}' \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}'_+$ とすると，関係式 (R4) より

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}\,\widetilde{Y}_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_{k+1}}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]] \\
&= (\mathrm{ad}\,X_{\beta_{k+1}})(\mathrm{ad}\,Y_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]] - \delta_{\alpha\beta_1}(\mathrm{ad}\,H_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]] \\
&\in (\mathrm{ad}\,X_{\beta_{k+1}})(\widetilde{\mathfrak{h}}' \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}'_+) + \widetilde{\mathfrak{n}}'_+ \\
&= \widetilde{\mathfrak{n}}'_+
\end{aligned}
$$

である．よって，$k \geq 2$ のとき $(\mathrm{ad}\,\widetilde{Y}_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\widetilde{X}_{\beta_2}, \widetilde{X}_{\beta_1}]] \in \widetilde{\mathfrak{n}}'_+$ である．　//

($\{\widetilde{H}_\alpha\}_{\alpha \in B}$ の線型独立性)　生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と補題 4.18 より，Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の $T(\mathbb{K}^{\oplus B})$ 上の表現であって $\widetilde{H}_\alpha$, $\widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{Y}_\alpha$ をそれぞれ H^0_α, X^0_α, Y^0_α に移すものが（一意に）存在する．各 $\alpha \in B$ に対して，$\mathbb{K}^{\oplus B}$ は H^0_α-安定であり，$H^0_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus B}}$ の標準基底に関する行列表示は (β, β)-成分が $n(\beta, \alpha)$ の対角行列である．Cartan 行列 $(n(\beta, \alpha))_{(\beta,\alpha) \in B \times B}$ は正則だから（命題 3.37），$\{H^0_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus B}}\}_{\alpha \in B}$ は $\mathrm{End}(\mathbb{K}^{\oplus B})$ において線型独立である．よって，$\{\widetilde{H}_\alpha\}_{\alpha \in B}$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ において線型独立である．　□

補題 4.21　A を単位的結合代数とし，これを交換子積によって Lie 代数とみなす．

(1) h, $x \in A$ が $[h, x] = 2x$ を満たすならば，整数 $m \geq 0$ に対して $[h, x^m] = 2mx^m$ である．
(2) h, x, $y \in A$ が $[h, x] = 2x$ かつ $[x, y] = h$ を満たすならば，整数 $m \geq 1$ に対して $[y, x^m] = -mx^{m-1}(h + m - 1)$ である．

証明　任意の $a \in A$ に対して $\mathrm{ad}\,a$ が単位的結合代数 A 上の導分であることに注意する．

(1)　$\mathrm{ad}\,h$ が導分であることと $[h, x] = 2x$ より

$$
\begin{aligned}
[h, x^m] &= \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i}[h, x]x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} 2x^m \\
&= 2mx^m
\end{aligned}
$$

である．

(2)　$\operatorname{ad} y$ が導分であること，$[x,y]=h$，(1) より

$$
\begin{aligned}
[y,x^m] &= \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i}[y,x]x^i \\
&= -\sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i}hx^i \\
&= -\sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i}(x^ih+2ix^i) \\
&= -mx^{m-1}(h+m-1)
\end{aligned}
$$

である．□

補題 4.22　R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B をその基底とする．$\widetilde{\mathfrak{g}}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ を補題 4.19 のとおりに定義する．異なる二つの単純ルート α, $\beta \in B$ に対して

$$
\widetilde{X}_{\alpha\beta} = (\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\beta, \qquad \widetilde{Y}_{\alpha\beta} = (\operatorname{ad}\widetilde{Y}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{Y}_\beta
$$

と置き，$\widetilde{X}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\widetilde{\mathfrak{a}}_+$，$\widetilde{Y}_{\alpha\beta}$ 全体が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\widetilde{\mathfrak{a}}_-$ と書く．このとき，

$$
\widetilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}B\setminus\{0\}} (\widetilde{\mathfrak{a}}_+\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subseteq \widetilde{\mathfrak{n}}_+, \qquad \widetilde{\mathfrak{a}}_- = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\leq 0}B\setminus\{0\}} (\widetilde{\mathfrak{a}}_-\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subseteq \widetilde{\mathfrak{n}}_-
$$

である．

証明　どちらでも同じだから，$\widetilde{\mathfrak{a}}_+$ に関する主張を示す．$\widetilde{X}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分線型空間を $\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0$ と書く．

まず，$[\widetilde{\mathfrak{n}}_-,\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0]=0$ を示す．$\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は Lie 代数として $\{\widetilde{Y}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ によって生成され（補題 4.19 (6)），$\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0$ と可換な元全体は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数をなすから，任意の α, β, $\gamma\in B$（$\alpha\neq\beta$）に対して $[\widetilde{Y}_\gamma,\widetilde{X}_{\alpha\beta}]=0$ をいえばよい．$\gamma\neq\alpha$ のとき，関係式 (R2), (R4) より

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{Y}_\gamma,\widetilde{X}_{\alpha\beta}] &= (\operatorname{ad}\widetilde{Y}_\gamma)(\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\beta \\
&= (\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}(\operatorname{ad}\widetilde{Y}_\gamma)\widetilde{X}_\beta \\
&= -\delta_{\beta\gamma}(\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{H}_\beta \\
&= \delta_{\beta\gamma}n(\alpha,\beta)(\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である（最後の等式では，$n(\beta,\alpha)=0$ ならば $n(\alpha,\beta)=0$ であり，$n(\beta,\alpha)<0$ ならば $(\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\alpha=0$ であることを用いた）．$\gamma=\alpha$ のとき，関係式 (R2), (R3), (R4) と補題 4.21 (2) より

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{Y}_\alpha,\widetilde{X}_{\alpha\beta}] &= (\operatorname{ad}\widetilde{Y}_\alpha)(\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\beta \\
&= (\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}(\operatorname{ad}\widetilde{Y}_\alpha)\widetilde{X}_\beta-(1-n(\beta,\alpha))(\operatorname{ad}\widetilde{X}_\alpha)^{-n(\beta,\alpha)}(\operatorname{ad}\widetilde{H}_\alpha-n(\beta,\alpha))\widetilde{X}_\beta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である．これで，いずれの場合にも $[\widetilde{Y}_\gamma,\widetilde{X}_{\alpha\beta}]=0$ が示された．

以上を踏まえて，$\widetilde{\mathfrak{g}}$ の随伴表現に対応する包絡代数の表現を $\sigma\colon U(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{End}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ と書くと，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{a}}_+ &= \sigma(U(\widetilde{\mathfrak{g}}))\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0 \\
&= \sigma(U(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\sigma(U(\widetilde{\mathfrak{h}}))\sigma(U(\widetilde{\mathfrak{n}}_-))\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0 && (\text{補題 } 4.19\ (3)，\text{系 } 1.12) \\
&= \sigma(U(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\sigma(U(\widetilde{\mathfrak{h}}))\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0 && (\text{前段の結果}) \\
&\subseteq \sigma(U(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0 && (\text{補題 } 4.19\ (1), (2) \text{ より } [\widetilde{\mathfrak{h}}, \widetilde{X}_{\alpha\beta}] \subseteq \mathbb{K}\widetilde{X}_{\alpha\beta}) \\
&\subseteq \widetilde{\mathfrak{n}}_+ && (\widetilde{\mathfrak{a}}_+^0 \subseteq \widetilde{\mathfrak{n}}_+)
\end{aligned}$$

である．さらに，$\widetilde{\mathfrak{a}}_+$ は $\mathrm{ad}\,\widetilde{\mathfrak{h}}$-安定だから，同時固有空間に関する一般論より

$$\widetilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}B \setminus \{0\}} (\widetilde{\mathfrak{a}}_+ \cap \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$$

である．これで，主張が示された． □

定理 4.23（存在定理） R を有限次元 $\mathbb{K}$-線型空間 V 上のルート系とし，B をその基底とする．$\mathfrak{g}$ を生成元

$$H_\alpha, \quad X_\alpha, \quad Y_\alpha \qquad (\alpha \in B)$$

と関係式

$$\begin{aligned}
&[H_\alpha, H_\beta] = 0 && \text{(R1)} \\
&[H_\alpha, X_\beta] = n(\beta, \alpha)X_\beta && \text{(R2)} \\
&[H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta, \alpha)Y_\beta && \text{(R3)} \\
&[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta}H_\alpha && \text{(R4)} \\
&(\mathrm{ad}\,X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) && \text{(R5)} \\
&(\mathrm{ad}\,Y_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}Y_\beta = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) && \text{(R6)}
\end{aligned}$$

で定まる Lie 代数とし，$\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in B\}$ と置く．

(1) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数である．
(2) $\{H_\alpha\}_{\alpha \in B}$ は $\mathfrak{h}$ の基底である．
(3) (2) より各 $\alpha \in B$ に対して $\alpha^\vee$ を H_α に移すことで線型同型写像 $V^* \to \mathfrak{h}$ が定まるが，これが誘導する線型同型写像 $\Phi\colon V \to \mathfrak{h}^*$ は，ルート系 R から $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ への同型である．

証明 補題 4.19 と補題 4.22 の記号で，$\mathfrak{g}$ は商 Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}/(\widetilde{\mathfrak{a}}_+ + \widetilde{\mathfrak{a}}_-)$ であり，等化準同型を $\varpi\colon \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ と書くと $\varpi(\widetilde{H}_\alpha) = H_\alpha$，$\varpi(\widetilde{X}_\alpha) = X_\alpha$，$\varpi(\widetilde{Y}_\alpha) = Y_\alpha$ である．補題 4.19 (2), (3) で述べたように直和分解

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}B \cup \mathbb{Z}_{\leq 0}B} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

が成立するが，補題 4.22 よりこれは $\mathfrak{g}$ の直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in V} \mathfrak{g}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}B \cup \mathbb{Z}_{\leq 0}B} \mathfrak{g}_\lambda \tag{$*$}$$

を誘導する．ここで，$\lambda \in V$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \varpi(\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda) = \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda/((\widetilde{\mathfrak{a}}_+ + \widetilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$$

と定めた．このうち $\lambda=0$ に対応する因子については $(\widetilde{\mathfrak{a}}_+ + \widetilde{\mathfrak{a}}_-)\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_0 = 0$ だから（補題 4.22），等化準同型 ϖ は Lie 代数の同型 $\widetilde{\mathfrak{h}}=\widetilde{\mathfrak{g}}_0\cong\mathfrak{g}_0$ を誘導する．$\{\widetilde{H}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ は $\widetilde{\mathfrak{h}}$ の基底だから（補題 4.19 (4)），$\{H_\alpha\}_{\alpha\in B}$ は $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ の基底である．これで (2) が示され，したがって線型同型写像 $\Phi\colon V\to\mathfrak{h}^*$ を (3) のように定義できる．

$\lambda\in V$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda\subseteq\{x\in\mathfrak{g}\mid 任意の\ \alpha\in B\ に対して\ [H_\alpha,x]=\alpha^\vee(\lambda)x\}$$

だが，λ が動くとき，左辺の和は直和分解 $(*)$ を与え，右辺の和は同時固有空間の一般論より直和だから，上式では等号が成り立つ．線型同型写像 $\Phi\colon V\to\mathfrak{h}^*$ を用いれば，

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_\lambda&=\{x\in\mathfrak{g}\mid 任意の\ \alpha\in B\ に対して\ [H_\alpha,x]=\alpha^\vee(\lambda)x\}\\&=\{x\in\mathfrak{g}\mid 任意の\ h\in\mathfrak{h}\ に対して\ [h,x]=\Phi(\lambda)(h)x\}\end{aligned}\qquad(**)$$

とも書ける．

主張 4.24　$\alpha\in B$ とする．

(1) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\operatorname{ad}X_\alpha$, $\operatorname{ad}Y_\alpha$ は局所冪零である．

(2) $\mathfrak{g}$ の自己同型 θ_α を

$$\theta_\alpha=e^{\operatorname{ad}X_\alpha}e^{\operatorname{ad}(-Y_\alpha)}e^{\operatorname{ad}X_\alpha}\in\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると（(1) より可能である），任意の $\lambda\in V$ に対して $\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda)=\mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ である．

主張 4.24 の証明　(1)　どちらでも同じだから，$\operatorname{ad}X_\alpha$ が局所冪零であることを示す．$\operatorname{ad}X_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ 上の導分だから，$\operatorname{ad}X_\alpha$ を繰り返し施すと 0 になるような元全体は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．したがって，$\mathfrak{g}$ の生成元に $\operatorname{ad}X_\alpha$ を繰り返し施すと 0 になることを示せばよい．任意の $\beta\in B$ に対して，関係式より

$$\begin{aligned}&(\operatorname{ad}X_\alpha)^2H_\beta=(\operatorname{ad}X_\alpha)(-n(\beta,\alpha)X_\alpha)=0,\\&(\operatorname{ad}X_\alpha)X_\alpha=0,\\&(\operatorname{ad}X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta=0\qquad\qquad(\beta\neq\alpha),\\&(\operatorname{ad}X_\alpha)^3Y_\beta=(\operatorname{ad}X_\alpha)^2(\delta_{\alpha\beta}H_\alpha)=0\end{aligned}$$

であり，これで主張が示された．

(2)　直和分解 $(*)$, $\Phi(\alpha)(H_\alpha)=\alpha^\vee(\alpha)=2$, $\mathfrak{g}_\lambda$ の表示 $(**)$, (1) より $\Phi(\alpha)\in\mathfrak{h}^*$ および $H_\alpha\in\mathfrak{h}$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ は補題 4.12 の仮定を満たすから，主張が成り立つ．　//

主張 4.25　$\mathfrak{g}_\lambda$（$\lambda\in V$）は，$\lambda=0$ ならば $\mathfrak{h}$ であり，$\lambda\in R$ ならば 1 次元であり，それ以外ならば 0 である．特に，$\mathfrak{g}$ は有限次元であり，直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in R}\mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する．

主張 4.25 の証明　$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$ はすでに示した．$\mathfrak{g}_\lambda\neq0$ となりうるのは $\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq0}B\cup\mathbb{Z}_{\leq0}B$ のときだけだが，$\lambda\in\mathbb{Z}R$ が一つのルートの整数倍として書けなければ，ある $s\in W(R)$ が存在して $s(\lambda)\notin\mathbb{Z}_{\geq0}B\cup\mathbb{Z}_{\leq0}B$ となるから（命題 3.35），主張 4.24 より $\mathfrak{g}_\lambda=0$ である．

以下，$\alpha\in R$ をルート，$m\geq1$ を整数として，

$$\dim\mathfrak{g}_{m\alpha}=\begin{cases}1&(m=1)\\0&(m\geq2)\end{cases}$$

を示す．任意のルートは Weyl 群の作用によって単純ルートに移せるから（定理 3.29 (2)），主張 4.24 より $\alpha\in B$ のときに示せば十分である．$\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{n}}_+=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}B\setminus\{0\}}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ は Lie 代数として $\{\widetilde{X}_\alpha\}_{\alpha\in B}$ によって生成されるから（補題 4.19 (5)），$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_+=\varpi(\widetilde{\mathfrak{n}}_+)=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}B\setminus\{0\}}\mathfrak{g}_\lambda$ は Lie 代数として $\{X_\alpha\}_{\alpha\in B}$ によって生成される．したがって，$\mathfrak{n}_+$ は線型空間として

$X_{\alpha_1},\ \dots,\ X_{\alpha_k}$ において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの（$k\geq 1$ は整数，$\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_k\in B$）

全体で生成される．このような元は直和因子 $\mathfrak{g}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$ に属するが（補題 4.19 (1)），$\alpha_1+\cdots+\alpha_k=m\alpha$ となるのは $k=m$ かつ $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=\alpha$ のときのみである．$m\geq 2$ ならば，このような元はすべて 0 になるから，$\mathfrak{g}_{m\alpha}=0$ である．$m=1$ ならば，$\mathfrak{g}_\alpha=\mathbb{K}X_\alpha$ である．もし $X_\alpha=0$ であれば $H_\alpha=[X_\alpha,Y_\alpha]=0$ となりすでに示した (2) に矛盾するから，$X_\alpha\neq 0$ であり，$\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$ である．これで，主張が示された． //

主張 4.26 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数であり，そのルート系 $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は $\Phi(R)$ に等しい．

主張 4.26 の証明 （$\mathfrak{g}$ が半単純であること） $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{r}$ を任意にとる．$\mathfrak{r}$ は $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$-安定だから，主張 4.25 と同時固有空間に関する一般論より

$$\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}\cap\mathfrak{h})\oplus\bigoplus_{\alpha\in R}(\mathfrak{r}\cap\mathfrak{g}_\alpha)$$

である．

まず，$\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{h}$ を示す．上式より，そのためには，すべてのルート $\alpha\in R$ に対して $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{g}_\alpha=0$ を示せばよい．任意のルートは Weyl 群の作用によって単純ルートに移すことができ（定理 3.29），これに対応して $\mathfrak{g}$ の自己同型がとれるから（主張 4.24），単純ルート $\alpha\in B$ に対して示せば十分である．H_α, X_α, Y_α は主張 4.25 の直和分解に関して異なる直和因子に属し，$[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha\neq 0$ よりこれらは 0 でないから，関係式 (R2), (R3), (R4) より $(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．これより $\operatorname{span}\{H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の単純部分 Lie 代数だから，

$$\mathfrak{r}\cap\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{r}\cap\mathbb{K}X_\alpha\subseteq\mathfrak{r}\cap\operatorname{span}\{H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha\}=0$$

である（主張 4.25 より $\mathfrak{g}_\alpha=\mathbb{K}X_\alpha$ であることを用いた）．これで，$\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{h}$ が示された．

$\alpha\in B$ を単純ルートとする．$\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{h}$ と (∗∗) より $[\mathfrak{r},\mathfrak{g}_\alpha]=\Phi(\alpha)(\mathfrak{r})\mathfrak{g}_\alpha$ だが，一方で $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから $[\mathfrak{r},\mathfrak{g}_\alpha]\subseteq\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{h}$ である．したがって，$\Phi(\alpha)(\mathfrak{r})=0$ である．$\Phi(B)$ は $\mathfrak{h}^*$ の基底だから，これより $\mathfrak{r}=0$ である．以上より，$\mathfrak{g}$ は半単純である．

（$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であること） $\mathfrak{g}$ は $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$ の同時固有空間の直和に分解され（(∗∗)），同時固有値 0 の同時固有空間は $\mathfrak{h}$ だから，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である（事実 4.3）．

（$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\Phi(R)$） (∗∗) と主張 4.25 から従う． //

これで，すべての主張が示された． □

4.4 一意性定理

命題 4.27 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数，B をルート系 $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とし，各 $\alpha\in B$ に対して $(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ を定理 4.10 のようにとる．このとき，任意の α, $\beta\in B$ に対して次が成り立つ．

(1) $[H_\alpha,H_\beta]=0$.
(2) $[H_\alpha,X_\beta]=n(\beta,\alpha)X_\beta$.

(3) $[H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta,\alpha)Y_\beta$.
(4) $[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta}H_\alpha$.
(5) $(\mathrm{ad}\, X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta = 0$（$\alpha \neq \beta$ の場合）.
(6) $(\mathrm{ad}\, Y_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}Y_\beta = 0$（$\alpha \neq \beta$ の場合）.

証明　(1), (2), (3)　明らかである．

(4)　$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ は明らかである．$\alpha \neq \beta$ ならば $\alpha - \beta \notin R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ だから（ルート系の基底の定義からわかる），$[X_\alpha, Y_\beta] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = 0$ である（命題 4.7 (1)）．

(5)　$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$ と置くと，命題 4.15 (1) より $I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$（$p,\, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）と書けるが，$\beta - \alpha \notin R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$（ルート系の基底の定義からわかる）だから $q = 0$ である．したがって，命題 4.15 (2) より $p = p - q = -n(\beta, \alpha)$ だから，

$$(\mathrm{ad}\, X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta \in (\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+(1-n(\beta,\alpha))\alpha} = 0$$

である（命題 4.7 (1)）．

(6)　(5) と同様である．□

$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ を分裂半単純 Lie 代数とするとき，Lie 代数の同型 $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ であって $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ を満たすものを，分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への**同型**という．

定理 4.28（一意性定理）　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数，B をルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とし，各 $\alpha \in B$ に対して $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 4.10 のようにとる．さらに，$(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ をルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ と基底 B から存在定理（定理 4.23）の方法で定まる分裂半単純 Lie 代数とする．ただし，存在定理における H_α, X_α, Y_α をここではそれぞれ H'_α, X'_α, Y'_α と書く．このとき，Lie 代数の準同型 $\phi\colon \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ であって H'_α, X'_α, Y'_α をそれぞれ H_α, X_α, Y_α に移すものが一意に存在し，この ϕ は分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ から $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ への同型である．

証明　生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と命題 4.27 より，Lie 代数の準同型 $\phi\colon \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ であって H'_α, X'_α, Y'_α をそれぞれ H_α, X_α, Y_α に移すものが一意に存在する．X_α, Y_α の全体は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成するから（系 4.17 (3)），この ϕ は全射である．さらに，存在定理（定理 4.23 (3)）よりルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ と $R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ は同型だから，

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}^* + \#R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h}')^* + \#R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') = \dim \mathfrak{g}'$$

である．よって，ϕ は Lie 代数の同型である．また，ϕ は $\mathfrak{h}' = \mathrm{span}\{H'_\alpha \mid \alpha \in B\}$ を $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in B\}$（系 4.14）に移す．□

系 4.29（同型定理）　$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ を分裂半単純 Lie 代数とし，B_1, B_2 をそれぞれルート系 $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, $R(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ の基底とする．$\mathit{\Phi}\colon \mathfrak{h}_1^* \to \mathfrak{h}_2^*$ をルート系 $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $R(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型であって B_1 を B_2 に移すものとし，各 $\alpha \in B_1$ に対して $\phi_\alpha\colon (\mathfrak{g}_1)_\alpha \to (\mathfrak{g}_2)_{\mathit{\Phi}(\alpha)}$ を線型同型とする．このとき，分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2)$ への同型 ϕ であって

$$(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \mathit{\Phi}, \qquad \phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha \qquad (\alpha \in B_1)$$

を満たすものが一意に存在する．

証明　各 $j = 1,\, 2$ と $\alpha \in B_j$ に対して $(H_{j,\alpha}, X_{j,\alpha}, Y_{j,\alpha})$ を定理 4.10 のようにとる．必要ならば $X_{2,\alpha}$ をスカラー倍だけ調整して，任意の $\alpha \in B_1$ に対して $\phi_\alpha(X_{1,\alpha}) = X_{2,\alpha}$ であるとする．$\mathit{\Phi}^{*-1}$ は $H_{1,\alpha} = \alpha^\vee$ を

$H_{2,\Phi(\alpha)} = \Phi(\alpha)^\vee$ に移すから，示すべきことは，$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2)$ への同型 ϕ であって

$$\phi(X_{1,\alpha}) = X_{2,\Phi(\alpha)}, \qquad \phi(H_{1,\alpha}) = H_{2,\Phi(\alpha)} \qquad (\alpha \in B_1)$$

を満たすものが一意に存在することである．

存在は一意性定理（定理 4.28）の結果である．一意性を示す．$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2)$ への同型 ϕ が条件を満たすとする．各 $\alpha \in B_1$ に対して，$\phi(Y_{1,\alpha}) \in \phi((\mathfrak{g}_1)_{-\alpha}) = (\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$ よりある $c_\alpha \in \mathbb{K}$ を用いて $\phi(Y_{1,\alpha}) = c_\alpha Y_{2,\Phi(\alpha)}$ と書けるが，このとき

$$\begin{aligned}
H_{2,\Phi(\alpha)} &= \Phi(H_{1,\alpha}) \\
&= \Phi([X_{1,\alpha}, Y_{1,\alpha}]) \\
&= [\Phi(X_{1,\alpha}), \Phi(Y_{2,\alpha})] \\
&= c_\alpha [X_{2,\Phi(\alpha)}, Y_{2,\Phi(\alpha)}] \\
&= c_\alpha H_{2,\Phi(\alpha)}
\end{aligned}$$

だから $c_\alpha = 1$ である．よって，ϕ は $H_{1,\alpha}$, $X_{1,\alpha}$, $Y_{1,\alpha}$ をそれぞれ $H_{2,\Phi(\alpha)}$, $X_{2,\Phi(\alpha)}$, $Y_{2,\Phi(\alpha)}$ に移す．一意性定理（定理 4.28）より，このような ϕ は一意である． □

命題 4.30 分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は単純である．
(b) $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約である．

証明 明らかに，$\mathfrak{g} = 0$ と $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \emptyset$ とは同値である．以下では，$\mathfrak{g} \neq 0$ である（したがって $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq \emptyset$ である）場合を考える．

(a) $\Longrightarrow$ (b) $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が二つの空でないルート系 R_1 と R_2 の直和に分解されるとする．$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ をそれぞれ R_1, R_2 に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数とすると，$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2 \neq 0$ であり，容易にわかるように $(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2)$ は $R_1 \sqcup R_2 = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数である．同型定理（系 4.29）より Lie 代数 $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ は $\mathfrak{g}$ と同型だから，$\mathfrak{g}$ は単純でない．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\mathfrak{g}$ が単純でないとすると，0 でない半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ が存在して $\mathfrak{g}$ は積 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ と同型になる（事実 1.25）．$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ を同一視するとき，$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ のそれぞれの Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ が存在して $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ となる（命題 4.4）．自然な方法で $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_1^* \oplus \mathfrak{h}_2^*$ とみなすとルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は二つの空でないルート系 $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $R(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ の直和になっているから，$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約でない． □

5 半単純 Lie 代数の表現

本節を通して，係数体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を分裂半単純 Lie 代数，B をルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とし，B に関する正ルートの全体を $R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$，負ルートの全体を $R_-(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ と書き，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_+ &= \bigoplus_{\alpha \in R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \\
\mathfrak{n}_- &= \bigoplus_{\alpha \in R_-(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-
\end{aligned}$$

と置く．命題 4.7 (1) からわかるように，これらは $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．

5.1 $\mathfrak{g}$-加群のウェイト

定義 5.1（ウェイト） V を $\mathfrak{g}$-加群とする．$\mathfrak{h}$ の V への作用の同時固有値（これは $\mathfrak{h}$ から $\mathbb{K}$ への写像である），同時固有ベクトル，同時固有空間を，それぞれ V の**ウェイト**（weight），**ウェイトベクトル**（weight vector），**ウェイト空間**（weight space）という．同時固有値の重複度を，ウェイトの**重複度**（multiplicity）という．ウェイト $\lambda\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ のウェイト空間を，

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } hv = \lambda(h)v\}$$

と書く．

注意 5.2 ウェイト，ウェイトベクトル，ウェイト空間は，Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ のとり方に依存する（ルート系の基底 B のとり方には依存しない）．

$h \in \mathfrak{h}$ の V への作用は h に関して線型に依存するから，V のウェイトはすべて $\mathfrak{h}^*$ の元である．同時固有空間に関する一般論より，和 $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ は直和である．

命題 5.3 V を $\mathfrak{g}$-加群とする．任意の $\alpha, \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ である．

証明 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$v \in V_\lambda$ とすると，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$hxv = [h, x]v + xhv = \alpha(h)xv + \lambda(h)xv = (\lambda + \alpha)xv$$

だから，$xv \in V_{\lambda+\alpha}$ である． □

5.2 最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群

定義 5.4（原始ベクトル） V を $\mathfrak{g}$-加群とする．V のウェイトベクトル $e \neq 0$ であって $\mathfrak{n}_+ e = 0$ を満たすものを，V の**原始ベクトル**（primitive vector）という．V の原始ベクトルであって V を $\mathfrak{g}$-加群として生成するものを，V の**原始生成ベクトル**（primitive generating vector）という．

定義 5.5（最高ウェイト加群） $\mathfrak{g}$-加群 V がウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の原始生成ベクトルをもつとき，V は**最高ウェイト**（highest weight）λ をもつ**最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群**（highest weight $\mathfrak{g}$-module）であるという．

注意 5.6 「原始（生成）ベクトル」や「最高ウェイト加群」は，Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ とルート系の基底 B のとり方に依存する．

例 5.7 定義 5.4 や定義 5.5 において，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$，$\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$，$\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$ とし，線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ と $\mathbb{K}$ を同一視したものが，定義 2.3 や定義 2.4 である．

次の命題は，しばらくは使わないが，本節の終盤で半単純 Lie 代数上の有限次元既約加群の分類の本質的な部分である定理 5.22 を示すために必要である．

命題 5.8 V を $\mathfrak{g}$-加群とする．V のウェイトベクトル $e \neq 0$ が任意の $\alpha \in B$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha e = 0$ を満たすならば，e は原始ベクトルである．

証明 $\mathfrak{n}_+$ が Lie 代数として $\bigoplus_{\alpha \in B} \mathfrak{g}_\alpha$ によって生成される（系 4.17）ことの結果である． □

命題 5.9　V をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の原始生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とする．

(1) $V = U(\mathfrak{n}_-)e$ である．
(2) V の任意のウェイトは $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B$ の元であり，その重複度はすべて有限である．また，ウェイト λ の重複度は 1 である．
(3) V はウェイト空間の直和に分解される．

証明　(1)　系 1.12 より $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-)U(\mathfrak{b}_+)$ だから，

$$V = U(\mathfrak{g})e = U(\mathfrak{n}_-)U(\mathfrak{b}_+)e \subseteq U(\mathfrak{n}_-)e$$

である．

(2), (3)　B に関する正ルートを重複なく列挙して $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とし，各 $1 \leq i \leq k$ に対して $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}$ を一つずつ固定する．すると，$(y_1, \ldots, y_k)$ は $\mathfrak{n}_-$ の基底だから（定理 4.10 (1)），Poincaré–Birkhoff–Witt の定理（事実 1.9）より $\{y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}\}_{q_1,\ldots,q_k \in \mathbb{N}}$ は $U(\mathfrak{n}_-)$ の基底である．したがって，(1) と合わせて

$$V = U(\mathfrak{n}_-)e = \operatorname{span}\{y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k} e \mid q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{N}\}$$

を得る．$y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k} e$ はウェイト $\lambda - \sum_{i=1}^k q_i\alpha_i \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B$ をもつウェイトベクトルだから（命題 5.3），V の任意のウェイトは $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B$ の元であり，V はウェイト空間の直和に分解される．また，任意の $\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B$ に対して $\lambda - \sum_{i=1}^k q_i\alpha_i = \mu$ となる組 $(q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{N}^k$ はたかだか有限個であり，$\mu = \lambda$ のときはこのような組は $(0, \ldots, 0)$ のみである．よって，V のウェイトの重複度はすべて有限であり，ウェイト λ の重複度は 1 である．　□

注意 5.10　V を最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とする．$\mathfrak{h}^*$ 上の順序 $\leq$ を

$$\mu \leq \nu \iff \nu - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}B = \left\{ \sum_{\alpha \in B} p_\alpha \alpha \;\middle|\; p_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

と定めると，命題 5.9 より λ は V のウェイトの中でこの順序に関する最大元である．これが，「最高ウェイト」という名称の由来である．

系 5.11　最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 V がもつ最高ウェイトは一意に定まり，V の原始生成ベクトルは 0 でないスカラー倍を除いて一意である．

証明　命題 5.9 (2) と注意 5.10 から従う．　□

注意 5.12　系 5.11 の状況で，$\mathfrak{g}$-加群 V を生成しない原始ベクトルは，e のスカラー倍以外にも存在しうる．たとえば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ のとき，$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対する Verma 加群 $M(\lambda)$ において，$e_{\lambda+1}$ はウェイト $-\lambda - 2$ の原始ベクトルである（命題 2.5）．ただし，V が既約ならば，原始ベクトルは自動的に原始生成ベクトルとなるから，このようなことは起こらない．

系 5.13　最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 V から自身への $\mathfrak{g}$-加群の準同型は，id_V のスカラー倍のみである．

証明　$f\colon V \to V$ を $\mathfrak{g}$-加群の準同型とする．$e \in V$ をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の原始生成ベクトルとすると，$f(e) \in V_\lambda = \mathbb{K}e$ だから（命題 5.9 (2)），ある $c \in \mathbb{K}$ が存在して $f(e) = ce$ となる．e は $\mathfrak{g}$-加群 V を生成するから，このとき $f = c\,\mathrm{id}_V$ である．　□

系 5.14 最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 V は直既約である．すなわち，$V = V' \oplus V''$ を $\mathfrak{g}$-加群としての直和分解とすると，$V' = V$ または $V'' = V$ である．特に，有限次元の最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群は既約である．

証明 射影 $V \to V' \subseteq V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型だから，系 5.13 よりこれは id_V のスカラー倍である．よって，$V' = V$ または $V'' = V$ である．V が有限次元ならば，Weyl の定理（事実 1.26）より V は完全可約だから，直既約性と合わせて既約性を得る． $\square$

系 5.15 V をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の原始生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とする．W を V の真部分 $\mathfrak{g}$-加群とすると，$W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B,\, \mu \neq \lambda} V_\mu$ であり，V/W はウェイト λ の原始生成ベクトル $e + W$ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．

証明 V は $V = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B} V_\mu$ とウェイト空間の直和に分解され（命題 5.9 (2), (3)），W は V の部分 $\mathfrak{h}$-加群でもあるから，同時固有空間に関する一般論より

$$W = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B} (W \cap V_\mu)$$

となる．V_λ は 1 次元（命題 5.9 (2)）だから $W \cap V_\lambda$ は V_λ または 0 だが，前者の場合 $e \in V_\lambda \subseteq W$ となり W が真部分 $\mathfrak{g}$-加群であることに反する．よって，$W \cap V_\lambda = 0$ であり，

$$W = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B,\, \mu \neq \lambda} (W \cap V_\mu) \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}B,\, \mu \neq \lambda} V_\mu$$

である．また，これより $e \notin W$ だから，$e + W \in V/W$ はウェイト λ の原始生成ベクトルである． $\square$

定義 5.16（Verma 加群） $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と $[\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+] \subseteq \mathfrak{n}_+$（命題 4.7 (1) と $\mathfrak{h}$ が可換であることからわかる）に注意して，1 次元 $\mathfrak{b}_+$-加群 $\mathbb{K}v_\lambda$ を

$$(h + x)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \qquad (h \in \mathfrak{h},\, x \in \mathfrak{n}_-)$$

によって定める．これを用いて，**Verma 加群** $M(\lambda)$ を

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda$$

と定める（ここで，$U(\mathfrak{g})$ を自然に右 $U(\mathfrak{b}_+)$-加群とみなしている）．また，

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda)$$

と置く．

命題 5.17（Verma 加群の普遍性） $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．

(1) $e_\lambda \in M(\lambda)$ はウェイト λ の原始生成ベクトルである．
(2) V は $\mathfrak{g}$-加群であってウェイト λ の原始ベクトル e をもつとする．このとき，$\mathfrak{g}$-準同型 $\phi\colon M(\lambda) \to V$ であって $\phi(e_\lambda) = e$ を満たすものが一意に存在する．

証明 (1) $h \in \mathfrak{h}$ に対して $he_\lambda = h \otimes v_\lambda = 1 \otimes hv_\lambda = \lambda(h)e_\lambda$ だから e_λ はウェイト λ をもち，$x \in \mathfrak{n}_+$ に対して $xe_\lambda = x \otimes v_\lambda = 1 \otimes xv_\lambda = 0$ だから e_λ は原始ベクトルである．e_λ が $\mathfrak{g}$-加群 $M(\lambda)$ を生成することは明らかである．

(2)　$e \in V$ がウェイト λ の原始ベクトルであることより，$v_\lambda \in \mathbb{K}v_\lambda$ を $e \in V$ に移す線型写像は $\mathfrak{b}_+$-準同型である．したがって，$(u, v_\lambda) \in U(\mathfrak{g}) \times \mathbb{K}v_\lambda$ を $ue \in M(\lambda)$ に移す双線型写像は $U(\mathfrak{b}_+)$-平衡だから，テンソル積の普遍性より，線型写像 $\phi\colon M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda \to V$ であって

$$\phi(u \otimes v_\lambda) = ue \qquad (u \in U(\mathfrak{g}))$$

を満たすものが一意に存在する．これは，$\mathfrak{g}$-準同型であって $e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda$ を e に移す．逆に，e_λ を e に移す $\mathfrak{g}$-準同型 ϕ は上式を満たす．これで，主張が示された．□

定理 5.18　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．

(1) $M(\lambda)$ の真部分 $\mathfrak{g}$-加群 N に対して商加群 $M(\lambda)/N$ を与えることで，$M(\lambda)$ の真部分 $\mathfrak{g}$-加群と最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群の同型類とは一対一に対応する．

(2) Verma 加群 $M(\lambda)$ は最大真部分 $\mathfrak{g}$-加群 $N(\lambda)$ をもつ．これに対応する最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$ は既約であり，その他の N に対応する最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群は無限次元かつ可約である．

証明　(1)　系 5.15 より，$M(\lambda)$ の真部分 $\mathfrak{g}$-加群 N に対して，$M(\lambda)/N$ は最高ウェイト λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．

最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群が，同型を除いて Verma 加群 $M(\lambda)$ の真部分 $\mathfrak{g}$-加群による商で尽くされることを示す．V をウェイト λ の原始生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とすると，命題 5.17 より $\mathfrak{g}$-準同型 $\phi\colon M(\lambda) \to V$ であって $\phi(e_\lambda) = e$ を満たすものが存在する．e が $\mathfrak{g}$-加群 V を生成することより ϕ は全射だから，ϕ は $\mathfrak{g}$-同型 $M(\lambda)/\operatorname{Ker}\phi \cong V$ を誘導する．$e \neq 0$ より $V \neq 0$ だから，$\operatorname{Ker}\phi$ は $M(\lambda)$ の真部分 $\mathfrak{g}$-加群である．

N, N' が $M(\lambda)$ の真部分 $\mathfrak{g}$-加群であり，$\mathfrak{g}$-同型 $\psi\colon M(\lambda)/N \to M(\lambda)/N'$ が存在するとして，$N = N'$ を示す．$\pi\colon M(\lambda) \to M(\lambda)/N$ および $\pi'\colon M(\lambda) \to M(\lambda)/N'$ を等化準同型とすると，$\psi \circ \pi$ と π' はともに $e_\lambda \in M(\lambda)$ を $M(\lambda)/N'$ の原始生成ベクトルに移す $\mathfrak{g}$-準同型である．原始生成ベクトルは 0 でないスカラー倍を除いて一意だから（系 5.11），$\psi(\pi(e)) = c\pi'(e)$（$c \in \mathbb{K}^\times$）と書ける．すると，Verma 加群の普遍性（命題 5.17）より $\psi \circ \pi = c\pi'$ であり，したがって

$$N = \operatorname{Ker}(\psi \circ \pi) = \operatorname{Ker}\pi' = N'$$

である．

(2)　系 5.15 より $M(\lambda)$ のすべての真部分 $\mathfrak{g}$-加群の和はまた真部分 $\mathfrak{g}$-加群であり，これが $M(\lambda)$ の最大真部分 $\mathfrak{g}$-加群 $N(\lambda)$ となる．既約性に関する主張は明らかである．また，$M(\lambda)/N$ は有限次元ならば既約であり（系 5.14），したがってこのとき $N = N(\lambda)$ である．□

定義 5.19（Verma 加群の既約商）　定理 5.18 の記号で，$\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ を **Verma 加群の既約商**という．等化準同型 $M(\lambda) \to L(\lambda)$ による $e_\lambda \in M(\lambda)$ の像をそのまま $e_\lambda \in L(\lambda)$ と書く．

5.3　有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群の分類（最高ウェイト理論）

$\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，$\alpha(H_\alpha) = 2$ を満たす $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ が一意に存在し，これに対して $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるようにとれるのだった（定理 4.10 (2), (3)）．本小節を通して，このような $\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が 1 組ずつ固定されているとする．V を $\mathfrak{g}$-加群とするとき，$\mathfrak{sl}_2$-三対

$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が定める $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ から $\mathfrak{g}$ への Lie 代数の単射準同型を経由して定まる V の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の構造を，$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が定める $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の構造ということにする．

$\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して $\alpha^\vee = H_\alpha$ だから（定理 4.13），$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ が } R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意の } \alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \\
&\iff \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \\
\lambda \text{ が } (R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}), B) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の } \alpha \in B \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

である．

命題 5.20　V を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．

(1) V はウェイト空間の直和に分解される．
(2) V のウェイトはすべて $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである．
(3) $V \neq 0$ ならば，V は原始ベクトルをもつ．特に，有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群は最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．

証明　(1)　$\alpha \in R$ とし，$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が定める V の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の構造に系 2.10 (2) を適用すれば，H_α の V への作用が対角化可能であることがわかる．$\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in R\}$（系 4.14）かつ $\mathfrak{h}$ は可換だから，$\mathfrak{h}$ の V への作用は同時対角化可能である．すなわち，V はウェイト空間の直和に分解される．

(2)　$\alpha \in R$ とし，(1) と同じ方法で V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とみなす．$\lambda$ を V のウェイトとすると，$H \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ は V_λ 上では $\lambda(H_\alpha)$ 倍写像として作用するから，$\lambda(H_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V のウェイトである．系 2.10 (2) より，これは整数である．よって，λ は $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである．

(3)　$V \neq 0$ とすると，(1) より V は少なくとも一つのウェイトをもつ．一方で，V は有限次元だから，V のウェイトは有限個である．したがって，V のウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ であって $\lambda + R_+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のどの元もウェイトでないものがとれる．$e \neq 0$ をウェイト λ をもつベクトルとすれば，λ のとり方と命題 5.3 より $\mathfrak{n}_+ e = 0$ だから，e は原始ベクトルである．V が既約ならば，e は原始生成ベクトルだから，V は最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．□

補題 5.21　V を $\mathfrak{g}$-加群とし，$\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を対応する表現とする．V はウェイト空間の直和に分解されると仮定する．さらに，$\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とし，$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)$, $\rho(\mathfrak{g}_{-\alpha})$ のすべての元が局所冪零であるとする．このとき，

$$\theta_{\alpha,\rho} = e^{\rho(X_\alpha)} e^{\rho(-Y_\alpha)} e^{\rho(X_\alpha)} \in GL(V)$$

と定めると，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\theta_{\alpha,\rho}(V_\lambda) = V_{s_\alpha(\lambda)}$ である．

証明　一般に，$a \in \mathfrak{g}$ について $\mathrm{ad}\, a$ が冪零かつ $\rho(a)$ が局所冪零ならば，任意の $x \in \mathfrak{g}$ と $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
\rho(e^{\mathrm{ad}\, a}(x))v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}\, \rho(a))^n \rho(x) v \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} \rho(a)^p \rho(x)(-\rho(a))^q v \\
&= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \rho(a)^p \rho(x)(-\rho(a))^q v \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \rho(a)^p \rho(x) e^{-\rho(a)} v \\
&= e^{\rho(a)} \rho(x) e^{-\rho(a)} v
\end{aligned}$$

だから（どの総和も有限項を除いて 0 になることに注意する），

$$\rho \circ e^{\mathrm{ad}\, a} = (\mathrm{Ad}\, e^{\rho(a)}) \circ \rho$$

である（ここで，$g \in GL(V)$ に対して，$\mathrm{Ad}\, g$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の自己同型写像 $g \mapsto gxg^{-1}$ を表す）．そこで，補題 4.12 と同じように

$$\theta_\alpha = e^{\mathrm{ad}\, X_\alpha} e^{\mathrm{ad}(-Y_\alpha)} e^{\mathrm{ad}\, X_\alpha} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると，

$$\rho \circ \theta_\alpha^{-1} = (\mathrm{Ad}\, \theta_{\alpha,\rho}^{-1}) \circ \rho \tag{$*$}$$

である．

$v \in V_\lambda$（$\lambda \in \mathfrak{h}^*$）とすると，($*$) と補題 4.12 (1) より

$$\begin{aligned}
\rho(h)\theta_{\alpha,\rho}(v) &= \theta_{\alpha,\rho}((\mathrm{Ad}\, \theta_{\alpha,\rho}^{-1})(\rho(h))v) \\
&= \theta_{\alpha,\rho}(\rho(\theta_\alpha^{-1}(h))v) \\
&= \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))\theta_{\alpha,\rho}(v) \\
&= s_\alpha(\lambda)(h)\theta_{\alpha,\rho}(v) \qquad (h \in \mathfrak{h})
\end{aligned}$$

だから，$\theta_{\alpha,\rho}(v) \in V_{s_\alpha(\lambda)}$ である．よって，$\theta_{\alpha,\rho}(V_\lambda) \subseteq V_{s_\alpha(\lambda)}$ である．任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対してこれが成り立ち，直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ が成立しているから，前文の式では等号が成り立つ．これで，主張が示された． □

定理 5.22　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) λ は $(R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), B)$ に関する優整ベクトルである．
(b) 任意の $\alpha \in B$ に対して，$\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のすべての元の $L(\lambda)$ への作用は局所冪零である．
(c) $L(\lambda)$ のウェイト全体の集合は $W(R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$-安定である．
(d) $L(\lambda)$ は有限次元である．

さらに，これらの条件が成り立つとき，$L(\lambda)$ のウェイトの重複度は Weyl 群 $W(R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ の各軌道上で一定である．

証明　$V=L(\lambda)$，$e=e_\lambda$ と置く（証明では，V がウェイト λ の原始生成ベクトル e をもつ既約 $\mathfrak{g}$-加群であるということしか使わない）．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　V が有限次元であるとして，$\alpha\in B$ を任意にとる．$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ が定める V の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の構造を考えると，$He=H_\alpha e=\lambda(H_\alpha)e$ かつ $Xe\in\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda\subseteq V_{\lambda+\alpha}=0$（命題 5.3，命題 5.9 (2)）だから，$e$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V のウェイト $\lambda(H_\alpha)$ の原始ベクトルである．したがって，系 2.7 より $\lambda(H_\alpha)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．よって，λ は $(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),B)$ に関する優整ベクトルである．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　λ が $(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),B)$ に関する優整ベクトルであるとする．$\alpha\in B$ とし，$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ が定める V の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の構造を考える．$Y\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の V への作用が局所冪零であることを示したい．X, Y は有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群には冪零に作用するから（系 2.10 (1)），V のすべての有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の和 V' が V 全体であることを示せば十分である．F を V の有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とすると，任意の $x\in\operatorname{span}\{H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha\}$ に対して

$$x\mathfrak{g}F\subseteq\mathfrak{g}xF+[x,\mathfrak{g}]F\subseteq\mathfrak{g}F$$

だから，$\mathfrak{g}F$ も V の有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群である．したがって，$V'$ は V の部分 $\mathfrak{g}$-加群である．そこで，$V'\neq 0$ を示せば，V の既約性より $V'=V$ がわかる．

e が生成する V の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群が有限次元であることを示そう．$e$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V のウェイト $m=\lambda(H_\alpha)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の原始ベクトルだから，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$e_n=\frac{1}{n!}Y_\alpha^n e$$

と置けば命題 2.5 の関係式が成り立つ．ここで，e_{m+1} に注目すると，

- $X_\alpha e_{m+1}=(m-(m+1)+1)e_m=0$ であり，
- $\beta\in B\setminus\{\alpha\}$ に対しては $[Y_\alpha,X_\beta]=0$（命題 4.27）だから

$$X_\beta e_{m+1}=\frac{1}{(m+1)!}X_\beta Y_\alpha^{m+1}e=\frac{1}{(m+1)!}Y_\alpha^{m+1}X_\beta e=0$$

  である（e は $\mathfrak{g}$-加群 V の原始ベクトルだから $X_\beta e=0$ である）．

したがって，e_{m+1} は 0 でなければ $\mathfrak{g}$-加群 V の原始ベクトルだが（命題 5.8），これは V の原始ベクトル（V は既約だから自動的に原始生成ベクトルとなる）のウェイトが λ のみであること（系 5.11）に反する．よって，背理法より $e_{m+1}=0$ であり，e が生成する V の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は有限次元である．これで，主張が示された．

(b) $\Longrightarrow$ (c) および最後の主張　$\alpha\in B$ とする．V のウェイトはすべて $\lambda-\mathbb{Z}_{\geq 0}B$ に含まれから（命題 5.9 (2)），V はウェイト空間の直和に分解されるから（命題 5.9 (3)），$\mathfrak{g}_\alpha$ のすべての元の V への作用は局所冪零である（命題 5.3）．これに加えて $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のすべての元の V への作用も局所冪零ならば，補題 5.21 より V のウェイトの重複度は s_α の作用で不変である．任意の $\alpha\in B$ に対してこれが成り立てば，V のウェイトの重複度は Weyl 群 $W(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$ の各軌道上で一定であり（定理 3.29 (3)），特に V のウェイト全体の集合は $W(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$-安定である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　V のウェイト全体の集合 $\mathfrak{X}$ は $\lambda-\mathbb{Z}_{\geq 0}B$ に含まれる（命題 5.9 (2)）．さらに $\mathfrak{X}$ が $W(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$-安定であるとすると，命題 3.51 より $\mathfrak{X}$ は有限である．V のウェイトの重複度はすべて有限であり（命題 5.9 (2)），V はウェイト空間の直和に分解されるから（命題 5.9 (3)），このとき V は有限次元である．　□

系 5.23（有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群の分類） 有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群は，$(R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),B)$ に関する優整ベクトル $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対する $L(\lambda)$ で同型を除いて尽くされる．

証明 有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群は最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群であり（命題 5.20 (3)），既約な最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群は $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対する $L(\lambda)$ で同型を除いて尽くされる（定理 5.18）．よって，主張は定理 5.22 から従う． □

注意 5.24 系 5.23 は，最高ウェイトをとることによって有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群（の同型類）と優整ベクトルとが一対一に対応することを述べており，**最高ウェイト理論**と呼ばれる．

系 5.25 V, V' を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．任意の $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して V と V' のウェイト λ の重複度が等しければ，V と V' は $\mathfrak{g}$-同型である．

証明 任意の $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して V と V' のウェイト λ の重複度が等しいとする．$V\cong V'$ であることを，$\dim V=\dim V'$ に関する帰納法で示す．$\dim V=\dim V'=0$ ならば主張は明らかである．$\dim V=\dim V'>0$ とし，次元がより小さい場合には主張が正しいとする．V, V' のウェイト λ であって，$\lambda+B$ のどの元も V, V' のウェイトでないものをとる．Weyl の定理（事実 1.26）より V, V' は既約分解をもつが，λ のとり方と命題 5.9 (2) より，V, V' はともに $L(\lambda)$ を既約因子にもつ．そこで，有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 W, W' を用いて $V\cong L(\lambda)\oplus W$，$V'\cong L(\lambda)\oplus W'$ と書くと，帰納法の仮定より $W\cong W'$ だから，$V\cong V'$ である．これで，帰納法が完成した． □

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 1–3*, Springer, 1989.
[2] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 4–6*, Springer, 2002.
[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 7–9*, Springer, 2005.
[4] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.