商空間のノート

箱（@o_ccah）

2019 年 6 月 11 日

記号と用語

- 集合 X からその商集合 X/R への写像であって，各 $x \in X$ に対して x の同値類を対応させるものを，等化写像という．
- 集合 X 上の同値関係 R を $X \times X$ の部分集合として扱うとき，これを R のグラフといい，$\Gamma(R)$ と書く．
- X を集合，R を X 上の同値関係，$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像とする．X の部分集合 A が R に関して充満しているとは，$A = \pi^{-1}(\pi(A))$ であることをいう．
- X を集合，R を X 上の同値関係とし，A を X の部分集合とする．R を $A \times A$ に制限して得られる A 上の同値関係を，R_A と書く．
- $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して R_i を X_i 上の同値関係とする．「$x = (x_i)_{i \in I}$ と $y = (y_i)_{i \in I}$ が関係するのは，任意の $i \in I$ に対して $x_i = y_i$ であるとき，かつそのときに限る」とする $\prod_{i \in I} X_i$ 上の同値関係を，$\prod_{i \in I} R_i$ と書く．
- $\{X_i\}_{i \in I}, \{Y_i\}_{i \in I}$ を集合族とし，各 $i \in I$ に対して $f_i\colon X_i \to Y_i$ とする．$\prod_{i \in I} X_i$ の点 $(x_i)_{i \in I}$ に対して $\prod_{i \in I} Y_i$ の点 $(f_i(x_i))_{i \in I}$ を対応させる写像を，$\{f_i\}_{i \in I}$ の積写像といい，$\prod_{i \in I} f_i\colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$ と書く．

1　終位相の一般論

定義 1.1（終位相）　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．写像族 $\{\sigma_i\colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ に対して，すべての σ_i が連続となるような X 上の最大の位相を，$\{(Y_i, \sigma_i)\}_{i \in I}$（あるいは単に $\{\sigma_i\}_{i \in I}$）が誘導する X 上の終位相という．

容易にわかるように，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相は，任意の $i \in I$ に対して $\sigma_i^{-1}(A)$ が Y_i の開集合となるような $A \subseteq X$ の全体を開集合系とする位相である．

命題 1.2（終位相の特徴付け）　X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族とする．写像族 $\{\sigma_i\colon Y_i \to X\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相は，次の性質をもつ唯一の X 上の位相である．

> 任意の位相空間 Z と写像 $g\colon X \to Z$ について，g が連続であることと，任意の $i \in I$ に対して $g \circ \sigma_i$ が連続であることとは同値である．

証明　$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相を $\mathfrak{O}_{\mathrm{f}}$ とする．このとき，位相空間 Z と写像 $g\colon X \to Z$ に対して，次

の同値関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\text{任意の } i \in I \text{ に対して } g \circ \sigma_i \text{ が連続} \\ \iff& \text{任意の } i \in I \text{ と開集合 } O \subseteq Z \text{ に対して } \sigma_i^{-1}(g^{-1}(O)) \text{ は } Y_i \text{ の開集合} \\ \iff& \text{任意の開集合 } O \subseteq Z \text{ に対して } g^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_{\mathrm{f}}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

一方で，X 上の位相 $\mathfrak{O}$ によって X を位相空間とみなすとき，g が連続であることは，次のようにいいかえられる．

$$\text{任意の開集合 } O \subseteq Z \text{ に対して } g^{-1}(O) \in \mathfrak{O}. \tag{$**$}$$

任意の位相空間 Z と写像 $g\colon X \to Z$ に対して $(*) \iff (**)$ であることは，$\mathfrak{O}_{\mathrm{f}} = \mathfrak{O}$ であることに他ならない．□

命題 1.3（終位相の推移性） X を集合，$\{Y_i\}_{i\in I}$ を集合族，$\{Z_{ij}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$（$J_i$ は各 $i \in I$ に対して定まる添字集合）を位相空間族とする．写像族 $\{\sigma_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$，$\{\tau_{ij}\colon Z_{ij} \to Y_i\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ について，$\{\sigma_i \circ \tau_{ij}\}_{i\in I,\, j\in J_i}$ が誘導する X 上の終位相と，「各 Y_i を $\{\tau_{ij}\}_{j\in J_i}$ が誘導する終位相によって位相空間とみなすときの，$\{\sigma_i\}_{i\in I}$ が誘導する X 上の終位相」とは一致する．

証明 終位相の特徴付け（命題 1.2）より，σ_i が連続であることと，任意の $j \in J_i$ に対して $\sigma_i \circ \tau_{ij}$ が連続であることとは同値である．ここから結論が従う．□

2 商空間と商写像

定義 2.1（商空間） X を位相空間，R を X 上の同値関係とする．等化写像 $\pi\colon X \to X/R$ が誘導する X/R 上の終位相を，X の位相が誘導する X/R 上の**商位相**という．商位相によって X/R を位相空間とみなすとき，X/R を X の**商空間**という．

定義 2.2（商写像） X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とする．Y の位相が f の誘導する終位相に等しく，かつ f が全射であるとき，f は**商写像**であるという．

X を位相空間，X/R をその商空間とするとき，等化写像 $\pi\colon X \to Y$ は商写像である．逆に，$f\colon X \to Y$ が商写像であるとき，X を f が定める同値関係で割った商空間と Y とは f が誘導する写像により同相となる．このように，商空間を考えることと商写像を考えることは等価である．

命題 2.3 X, Y を位相空間，R を X 上の同値関係，$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像とする．写像 $f\colon X/R \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，$f \circ \pi\colon X \to Y$ が連続であることである．

証明 命題 1.2 から従う．□

系 2.4 X, Y を位相空間，R, S をそれぞれ X, Y 上の同値関係，$f\colon X \to Y$ を R, S と整合する写像とする．f が連続ならば，f が誘導する写像 $\overline{f}\colon X/R \to Y/S$ も連続である．□

命題 2.5 X を位相空間，R, S を X 上の同値関係とし，S は R よりも粗いとする．このとき，自然な全単射 $(X/R)/(S/R) \to X/S$ は同相写像である．

証明 命題 1.3 から従う．□

3　開写像と閉写像

定義 3.1　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とする．

(1) X の開集合の f による像が常に Y の開集合であるとき，f は**開写像**であるという．
(2) X の閉集合の f による像が常に Y の閉集合であるとき，f は**閉写像**であるという．

命題 3.2　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とし，A を X の部分集合とする．

(1) f が開写像であり，A が X の開集合ならば，$f|_A\colon A \to Y$ も開写像である．
(2) f が閉写像であり，A が X の閉集合ならば，$f|_A\colon A \to Y$ も閉写像である．　□

命題 3.3　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ とし，B を Y の部分集合とする．

(1) f が開写像ならば，f を $f^{-1}(B)$ から B への写像とみなしたものも開写像である．
(2) f が閉写像ならば，f を $f^{-1}(B)$ から B への写像とみなしたものも閉写像である．

証明　X の部分集合 A に対して $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ であることからわかる．　□

命題 3.4　開連続全射および閉連続全射は商写像である．

証明　どちらも同様に示せるから，開連続全射について示す．X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を開連続全射とする．f の連続性より，Y の開集合の f による逆像は常に X の開集合である．逆に，部分集合 $B \subseteq Y$ について，$f^{-1}(B)$ が X の開集合であるとすると，f が開写像であることより $f(f^{-1}(B))$ は Y の開集合であり，f が全射であることより $B = f(f^{-1}(B))$ だから，B は Y の開集合である．よって，Y の位相は，f が誘導する終位相に等しい．f の全射性と合わせて，f が商写像であることが従う．　□

したがって，開連続全射および閉連続全射は，商写像の特別な場合であるといえる．これに対応して，次の概念を定義する．

定義 3.5　X を位相空間，R を X 上の同値関係，$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像とする．

(1) π が開写像であるとき，R は**開同値関係**であるという．
(2) π が閉写像であるとき，R は**閉同値関係**であるという．

注意　開でも閉でもない商写像が存在する．あるいは同じことだが，開でも閉でもない（位相空間上の）同値関係が存在する．たとえば，R を $\mathbb{R}$ 上の同値関係であって各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して n と $1/n$ とを同一視するものとすると，R は開同値関係でも閉同値関係でもない．

4　商空間と部分空間

前節で述べた開写像・閉写像に関する命題から，商空間と部分空間に関する次の命題が得られる．

命題 4.1　X を位相空間，R を X 上の同値関係，$\pi\colon X \to X/R$ を等化写像，A を X の部分集合とする．次のそれぞれの場合，自然な全単射 $A/R_A \to \pi(A)$ は同相写像である．

(1) R が開同値関係であり，A が X の開集合である．
(2) R が閉同値関係であり，A が X の閉集合である．
(3) R が開同値関係であり，A が R に関して充満している．
(4) R が閉同値関係であり，A が R に関して充満している．

証明 (1) と (2)，(3) と (4) の証明はそれぞれ同様にできるから，(1) と (3) のみ証明する．自然な全単射 $A/R_A \to \pi(A)$ が同相写像であることは，π を A から $\pi(A)$ への写像とみなしたものが商写像であることに同値なので，これを示せばよい．

(1) R が開同値関係であり，A が X の開集合であるとする．このとき，命題 3.2，命題 3.3 より π を A から $\pi(A)$ への写像とみなしたものも開写像であり，したがって命題 3.4 より商写像である．

(3) R が開同値関係であり，A が R に関して充満しているとする．このとき，命題 3.3 より π を $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ から $\pi(A)$ への写像とみなしたものは開写像であり，したがって命題 3.4 より商写像である． □

注意 命題 4.1 の結論は，無条件には成り立たない．たとえば，R を $\mathbb{R}$ 上の同値関係であって各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して n と $1/n$ とを同一視するものとし，$A = \{0\} \cup ((1,\infty) \setminus \mathbb{N}_{>0})$ とすると，A は R に関して充満しているが，自然な全単射 $A/R_A \to \pi(A)$ は同相写像ではない．実際，R_A は A 上の離散同値関係であり，0 は $A/R_A = A$ の孤立点だが，$\pi(0)$ は $\pi(A) \subseteq \mathbb{R}/R$ の孤立点ではない．

5 商空間と積空間

命題 5.1 $\{X_i\}_{i\in I}, \{Y_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，各 $i \in I$ に対して $f_i \colon X_i \to Y_i$ とする．各 f_i が開写像であり，有限個の $i \in I$ を除いて f_i が全射ならば，積写像 $\prod_{i\in I} f_i \colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ も開写像である．

証明 各 f_i が開写像であり，有限個の $i \in I$ を除いて f_i が全射とする．各 $i \in I$ に対して U_i を X_i の開集合とし，有限個の $i \in I$ を除いては $U_i = X_i$ とする．これらの積 $\prod_{i\in I} U_i$ の $\prod_{i\in I} f_i$ による像は $\prod_{i\in I} f_i(U_i)$ である．仮定より，各 $f_i(U_i)$ は Y_i の開集合であり，有限個の $i \in I$ を除いては $f_i(U_i) = Y_i$ だから，この像は $\prod_{i\in I} Y_i$ の開集合である．このような $\prod_{i\in I} U_i$ の全体は $\prod_{i\in I} X_i$ の開基をなすから，$\prod_{i\in I} f_i$ は開写像である． □

上の命題から，商空間と積空間に関する次の命題が得られる．

命題 5.2 $\{X_i\}_{i\in I}$ を位相空間族とし，各 $i \in I$ に対して R_i を X_i 上の同値関係とする．各 R_i が開同値関係ならば，$\prod_{i\in I} R_i$ も開同値関係であり，自然な全単射 $\prod_{i\in I} X_i/\prod_{i\in I} R_i \to \prod_{i\in I}(X_i/R_i)$ は同相写像である．

証明 各 $i \in I$ に対して，$\pi_i \colon X_i \to X_i/R_i$ を商写像とする．各 π_i が開写像であるとして，$\prod_{i\in I} \pi_i$ が開写像であることを示せばよいが（命題 3.4），これは命題 5.1 から従う． □

注意 命題 5.2 の結論は，無条件には成り立たない．たとえば，$\varDelta$ を $\mathbb{Q}$ 上の離散同値関係，R を $\mathbb{Q}$ 上の同値関係であって $\mathbb{Z}$ のすべての点を同一視するものとすると，$\varDelta$ は開かつ閉な同値関係，R は閉同値関係だが，自然な全単射 $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})/(\varDelta\times R) \to \mathbb{Q}\times(\mathbb{Q}/R)$ は同相写像ではない．

このことを見るために，$\varDelta \times R$ に関して充満した $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の開集合（したがって $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})/(\varDelta\times R)$ への自然な全射による像は開集合となる）であって，$\mathbb{Q}\times(\mathbb{Q}/R)$ への自然な全射による像は開集合でないものを構成しよう．$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を $(0,1)$ 内の無理数の列で，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすものとする．各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$(-1,n)$ と

$(-a_n,n)$ とを結ぶ線分を直径とする開球，$(-a_n,n)$ と (a_n,n) とを結ぶ線分を直径とする開球，(a_n,n) と $(1,n)$ とを結ぶ線分を直径とする開球を考え，これら 3 つの開球の合併を U_n とする．$U=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}U_n$ と置くと，これは条件を満たす．

6 商空間の分離性

本節では，商空間が Hausdorff になるための十分条件をいくつか挙げる．

命題 6.1 X を位相空間，R を X 上の同値関係とする．次の 2 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．さらに，R が開同値関係ならば，2 条件は同値となる．

(a) X/R は Hausdorff である．
(b) $\mathit{\Gamma}(R)$ は $X\times X$ の閉集合である．

証明 $\pi\colon X\to X/R$ を等化写像とし，$\mathit{\Delta}(X/R)=\{(a,a)\mid a\in X/R\}$ と置く．X/R が Hausdorff であることは，$\mathit{\Delta}(X/R)$ が $(X/R)\times(X/R)$ の閉集合であることに同値である．

(a) $\Longrightarrow$ (b) X/R が Hausdorff であるとすると，$\mathit{\Delta}(X/R)$ は $(X/R)\times(X/R)$ の閉集合だから，$\mathit{\Gamma}(R)=(\pi\times\pi)^{-1}(\mathit{\Delta}(X/R))$ は $X\times X$ の閉集合である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) R が開同値関係であり，$\mathit{\Gamma}(R)$ が $X\times X$ の閉集合であるとする．このとき，命題 5.2 より，$(X/R)\times(X/R)$ を $(X\times X)/(R\times R)$ と同一視できる．そのため，$\mathit{\Delta}(X/R)$ を $(X\times X)/(R\times R)$ の部分集合と考えたものが閉集合であることを示せばよい．$\mathit{\Delta}(X/R)\subseteq(X\times X)/(R\times R)$ の等化写像による逆像は，$\mathit{\Gamma}(R)$ である．仮定よりこれは $X\times X$ の閉集合だから，商位相の定義より，$\mathit{\Delta}(X/R)$ は $(X\times X)/(R\times R)$ の閉集合である．これで示された． □

命題 6.2 X が正則 Hausdorff 空間，R が X 上の閉同値関係ならば，$\mathit{\Gamma}(R)$ は $X\times X$ の閉集合である．

証明 X を正則 Hausdorff 空間，R を X 上の閉同値関係とし，$\pi\colon X\to X/R$ を等化写像とする．点 $(x,y)\in\overline{\mathit{\Gamma}(R)}$ を任意にとる．すると，x の任意の閉近傍 F と y の任意の近傍 V に対して，$F\times V$ は $\mathit{\Gamma}(R)$ と交わる．すなわち，$\pi^{-1}(\pi(F))$ は V と交わる．ここで，V は y の任意の近傍を動き，仮定より $\pi^{-1}(\pi(F))$ は閉集合だから，$y\in\overline{\pi^{-1}(\pi(F))}=\pi^{-1}(\pi(F))$ である．したがって，$\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ と F は交わる．ここで，F は x の任意の閉近傍を動き，仮定より $\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ は閉集合だから，$x\in\overline{\pi^{-1}(\pi(\{y\}))}=\pi^{-1}(\pi(\{y\}))$ である．これは，$(x,y)\in\mathit{\Gamma}(R)$ を意味する．よって，$\mathit{\Gamma}(R)$ は $X\times X$ の閉集合である． □

系 6.3 X が正則 Hausdorff 空間，R が X 上の開かつ閉な同値関係ならば，X/R は Hausdorff である．

証明 命題 6.1 と命題 6.2 から従う． □

命題 6.4 X を正則 Hausdorff 空間，F を X の空でない閉集合とし，R を X 上の同値関係であって F を 1 点に潰すものとする（すなわち，R に関する同値類は，F と各 $x\in X\setminus F$ に対する $\{x\}$ である）．このとき，商空間 X/R は Hausdorff である．

証明 $\pi\colon X\to X/R$ を等化写像とする．まず，異なる 2 点 $x,y\in X\setminus F$ を任意にとる．X は Hausdorff であり，F は閉集合だから，x の開近傍 U と y の開近傍 V を交わらないように $X\setminus F$ の中にとれる．このとき，$\pi(U),\pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x),\pi(y)$ の開近傍であり，互いに交わらない．次に，$x\in X\setminus F$ を任意にとる．X は正

則であり，F は閉集合だから，x の開近傍 U と F の開近傍 V を交わらないようにとれる．このとき，$\pi(U)$, $\pi(V)$ はそれぞれ $\pi(x)$, F の開近傍であり，互いに交わらない．よって，X/R は Hausdorff である． □

注意　一般には，X が Hausdorff であっても，その空でない閉集合 F を 1 点に潰す同値関係 R による商空間 X/R は Hausdorff とは限らない．反例を構成しよう．X を，実数全体のなす集合に

$$\mathfrak{O} = \{U \setminus C \mid U \text{ は } \mathbb{R} \text{ の通常の開集合，} C \text{ は } U \text{ の可算部分集合}\}$$

を開集合系とする位相を入れた位相空間とする（$\mathfrak{O}$ は確かに開集合系の公理を満たす）．F を有理数全体のなす集合とすると，F は X の空でない閉集合である．F を 1 点に潰す同値関係 R による商空間 X/R は，Hausdorff ではない．実際，点 $F \in X/R$ はその他の点と開集合で分離できない．

注意　上の反例は，Hausdorff 空間の（位相空間の圏における）列帰納極限であって Hausdorff ではない例をも与えている．このことを見よう．記号は上と同じとし，有理数を数え上げて $F = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と置く．$n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して，R_n を，$\{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$ を 1 点に潰す X 上の同値関係とする．すると，各商空間 X/R_n は Hausdorff だが，自然な全射の列 $X/R_1 \to X/R_2 \to \cdots$ の帰納極限は X/R であり（終位相の推移性：命題 1.3 からわかる），これは Hausdorff ではないのだった．

参考文献

命題 4.1 の後の反例は，児玉・永見 [2] の 44.6 による．命題 5.2 の後の反例は，Bourbaki [1] の第 1 章 5 節の演習 6 による．命題 6.4 の後の反例は，Wikipedia [3] で「Hausdorff だが正則でない空間の例」として挙げられているのを見て知った．

[1] N. Bourbaki（著），森 毅（編・訳），清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 1』，東京図書，1968.

[2] 児玉 之宏，永見 啓応，『位相空間論』，岩波書店，1974.

[3] Wikipedia ‘Regular space’.（2019 年 6 月 11 日アクセス）
https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_space