ルート系

箱

2025 年 8 月 7 日

概要

ルート系の一般論についてまとめる．ルート系やそれに関連する概念を定義し，その基本的な性質を見たあと，ルート系の Dynkin 図形による分類について述べる．

目次

記号と用語

- 本稿を通して，$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．特に断らなければ，線型空間の係数体は $\mathbb{K}$ とする．

1 ルート系

1.1 鏡映

定義 1.1（鏡映） $n \geq 1$ を整数とし，V を n 次元線型空間とする．V から自身への線型写像であって，1 を重複度 $n-1$ の固有値とし，-1 を重複度 1 の固有値とするものを，V 上の**鏡映**（reflection）という．鏡映 s に対して，その固有値 1 の固有空間を**鏡映面**，固有値 -1 の固有空間を**鏡映軸**という．

V を有限次元線型空間とするとき，$\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して，線型写像 $s_{\alpha,f}\colon V \to V$ を

$$s_{\alpha,f}(v) = v - f(v)\alpha \qquad (v \in V)$$

と定める．$f(\alpha) = 2$ ならば，$s_{\alpha,f}$ は $\operatorname{Ker} f$ を鏡映面，$\mathbb{K}\alpha$ を鏡映軸とする鏡映である．逆に，V 上の任意の鏡映は，このように書ける（ただし，α と f の選び方には 1 次元分の自由度がある）．本節の以下の部分では，この記号 $s_{\alpha,f}$ を断りなく用いる．

命題 1.2 V を有限次元線型空間，$\mathit{\Delta}$ をその有限部分集合とし，$\mathit{\Delta}$ は V を張るとする．σ と τ は V 上の線型同型写像であり，$\sigma^2 = \tau^2 = \mathrm{id}_V$ を満たし，これらの固有値 -1 の固有空間は一致し，これらはともに $\mathit{\Delta}$ を安定にするとする．このとき，$\sigma = \tau$ が成り立つ．

証明 σ と τ の共通の固有値 -1 の固有空間を，W と置く．$v \in V$ とすると，$\sigma(v) - v$, $\tau(v) - v \in W$ より $\sigma\tau(v) - v = \sigma(\tau(v) - \sigma(v)) = \sigma((\tau(v) - v) - (\sigma(v) - v)) \in W$ であり，$\sigma\tau$ は W 上では恒等写像だから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}(\sigma\tau)^n(v) - v &= \sum_{i=0}^{n-1}((\sigma\tau)^{i+1}(v) - (\sigma\tau)^i(v)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(\sigma\tau)^i(\sigma\tau(v) - v) \\ &= n(\sigma\tau(v) - v)\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で，$G = \{T \in GL(V) \mid T(\mathit{\Delta}) = \mathit{\Delta}\}$ は $GL(V)$ の有限部分群であり，仮定より $\sigma\tau \in G$ だから，$\sigma\tau$ の位数は有限である．そのためには，$\sigma\tau(v) - v = 0$ でなければならない．よって，$\sigma = \tau$ である． □

命題 1.3 V を有限次元線型空間とし，$\langle -, - \rangle$ をその上の非退化対称双線型形式とする．V 上の鏡映 s がこの形式を不変にし，$\alpha \in V \setminus \{0\}$ を $-\alpha$ に移すならば，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$s(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \qquad (v \in V)$$

である．すなわち，$s = s_{\alpha,f}$（$f \in V^*$）と表すとき，

$$f = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

である．

証明　v を s の鏡映面上の点とすると

$$\langle \alpha, v\rangle = \langle \alpha, s(v)\rangle = \langle s(\alpha), v\rangle = -\langle \alpha, v\rangle$$

より $\langle \alpha, v\rangle = 0$ であり，$\langle -,-\rangle$ に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間 $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ は $\dim V - 1$ 次元だから，s の鏡映面は $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ に等しい．α は s の鏡映面上にはないから，$\langle \alpha, \alpha\rangle \neq 0$ である．$s_{\alpha,f}$ は，α を $-\alpha$ に移し $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ の点は動かさないから，s に一致する． □

命題 1.4　V を有限次元線型空間とする．任意の $\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して，$s_{\alpha,f}^* = s_{f,\alpha}$ である．

証明　任意の $g \in V^*$ と $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} s_{\alpha,f}^*(g)(v) &= g(s_{\alpha,f}(v)) \\ &= g(v - f(v)\alpha) \\ &= g(v) - f(v)g(\alpha) \\ &= (g - g(\alpha)f)(v) \\ &= s_{f,\alpha}(g)(v) \end{aligned}$$

だから，$s_{\alpha,f}^* = s_{f,\alpha}$ である． □

1.2　ルート系

定義 1.5（ルート系）　有限次元線型空間 V 上の**ルート系**（root system）とは，部分集合 $\mathit{\Delta} \subseteq V$ であって，次の条件 (RS1)–(RS3) を満たすものをいう．さらに，条件 (RS4) も満たすとき，そのルート系は**被約**（reduced）であるという[*1]．

(RS1) $\mathit{\Delta}$ は有限であり，0 を含まず，V を張る．
(RS2) 任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して，V 上の鏡映 s_α であって，$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ かつ $s_\alpha(\mathit{\Delta}) = \mathit{\Delta}$ を満たすものが存在する．((RS1) と命題 1.2 より，このような s_α は一意に定まり，したがって，$s_\alpha = s_{\alpha,\alpha^\vee}$ となる $\alpha^\vee \in V^*$ も一意に定まる．以下，この記号を用いる．)
(RS3) 任意の $\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ に対して，$\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$ である．
(RS4) $\alpha \in \mathit{\Delta}$ ならば $2\alpha \notin \mathit{\Delta}$ である．

線型空間 V の次元を，ルート系 $\mathit{\Delta}$ の**階数**（rank）という．ルート系の各元を，**ルート**（root）という．

(RS2) における $\alpha^\vee$ を α の**双対ルート**（coroot）といい，s_α を α に関する**ルート鏡映**（root reflection）という．ルート鏡映全体が生成する $GL(V)$ の部分群を，ルート系 $\mathit{\Delta}$ の **Weyl 群**（Weyl group）といい，$\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ と書く．

本稿の以下の部分では，特に断らなくても，ルート α の双対ルートを $\alpha^\vee$ と書き，α に関するルート鏡映を s_α と書く．考えているルート系を明示したいときは，双対ルートを $\alpha^\vee_{\mathit{\Delta}}$，ルート鏡映を $s^{\mathit{\Delta}}_\alpha$ などとも書く．また，$\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ に対して，

$$n(\beta, \alpha) = \alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$$

[*1] 条件 (RS1)–(RS4) を満たす $\mathit{\Delta}$ のことをルート系と呼ぶこともある．

と書き，これを **Cartan 整数**（Cartan integer）という．この記号を用いれば，ルート β を α に関するルート鏡映で移した先は，

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha = \beta - n(\beta,\alpha)\alpha$$

と書ける．

定義 1.6（ルート系の同型） $\varDelta_1$ と $\varDelta_2$ を，それぞれ有限次元線型空間 V_1 と V_2 上のルート系とする．ルート系 $\varDelta_1$ から $\varDelta_2$ への**同型**（isomorphism）とは，線型同型写像 $\varPhi\colon V_1 \to V_2$ であって，$\varPhi(\varDelta_1) = \varDelta_2$ を満たすものをいう．ルート系 $\varDelta_1$ から $\varDelta_2$ への同型が存在するとき，これらのルート系は**同型**（isomorphic）であるという．

$\varDelta$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とすると，$\varDelta$ は V の係数拡大された線型空間 $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ の部分集合ともみなせる．このようにみなすと，明らかに，$\varDelta$ は $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ 上のルート系となる．これを，ルート系の係数拡大という．

命題 1.7 $\varDelta$ を（$\mathbb{K}$ 上の）有限次元線型空間 V 上のルート系とする．V の部分有理線型空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を

$$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \varDelta$$

と定めると，$\varDelta$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系でもあり，包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V$ が誘導する（$\mathbb{K}$ 上の）線型写像 $i\colon V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \to V$ は同型である（したがって，V 上のルート系 $\varDelta$ は，$V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系 $\varDelta$ の $\mathbb{K}$ への係数拡大とみなせる）．

証明 $V_{\mathbb{Q}}$ と $\varDelta$ が (RS1) と (RS4) を満たすことは明らかである．また，$\alpha \in \varDelta$ とすると，V と $\varDelta$ が (RS3) を満たすことより $\alpha^\vee(V_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}$ だから，$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \in (V_{\mathbb{Q}})^*$ であり，$s_\alpha|_{V_{\mathbb{Q}}}$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の鏡映 $s_{\alpha,\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}}$ である．この鏡映は，明らかに (RS2) と (RS3) の条件を満たす．よって，$\varDelta$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系である．

包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V$ が誘導する（$\mathbb{K}$ 上の）線型写像 $i\colon V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \to V$ が同型であることを示す．まず，$V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \varDelta$ だから，i は全射である．次に，i が単射であることを示す．そのためには，i の双対線型写像

$$i^*\colon V^* \to (V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K})^* \cong (V_{\mathbb{Q}})^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$$

が全射であることをいえばよい．各 $\alpha \in \varDelta$ に対して

$$i^*(\alpha^\vee) = \alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \otimes 1$$

だから，$(V_{\mathbb{Q}})^* = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \mid \alpha \in \varDelta\}$ をいえばよい．以下，これを示す．$V_{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathbf{W}(\varDelta)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定すると（任意にとった $V_{\mathbb{Q}}$ 上の内積を $\mathbf{W}(\varDelta)$ の作用に関して平均すればよい），$\alpha \in \varDelta$ に対して命題 1.3 より $\langle \alpha,\alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} = \frac{2\langle -,\alpha \rangle}{\langle \alpha,\alpha \rangle}$$

であり，これは $\langle -,- \rangle$ が定める有理線型同型 $V_{\mathbb{Q}} \cong (V_{\mathbb{Q}})^*$ を通して $2\alpha/\langle \alpha,\alpha \rangle \in V_{\mathbb{Q}}$ に対応する．$\alpha \in \varDelta$ が動くときこれら全体は $V_{\mathbb{Q}}$ を張るから，$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}$ の全体は $(V_{\mathbb{Q}})^*$ を張る．これで，主張が示された． □

系 1.8 $\varDelta$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．

(1) V 上の $\operatorname{Aut}(\varDelta)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ であって，任意の $v \in V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \varDelta$ に対して $\langle v,v \rangle \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるものが存在する．

(2) $\langle -,- \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を V 上の $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な非退化対称双線型形式とすると，任意のルート $\alpha,\ \beta \in \mathit{\Delta}$ に対して，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}, \qquad n(\beta, \alpha) = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

が成り立つ．

証明　(1)　$\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ の部分体である場合，任意に固定した V 上の内積を $\mathrm{Aut}(\mathit{\Delta})$ の作用に関して平均すれば，V 上の $\mathrm{Aut}(\mathit{\Delta})$-不変な内積が得られる．$\mathbb{K}$ が一般の場合，$V_{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathrm{Aut}(\mathit{\Delta})$-不変な内積を一つとって係数拡大すれば，条件を満たす V 上の非退化対称双線型形式が得られる．

(2)　ルート鏡映 $s_\alpha = s_{\alpha,\alpha^\vee}$ は $\langle -,- \rangle$ を不変にし，α を $-\alpha$ に移すから，命題 1.3 より $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ $\alpha^\vee = 2\langle -, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ である．また，これより，$n(\beta, \alpha) = \alpha^\vee(\beta) = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ である．□

命題 1.7 より，有限次元線型空間 V 上のルート系 $\mathit{\Delta}$ は，$V_{\mathbb{Q}} = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\, \mathit{\Delta}$ 上のルート系とみなせ，これはさらに，係数拡大によって $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上のルート系ともみなせる．さらに，系 1.8 (1) より，$V_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な内積が存在する．これらにより，ルート系の性質の証明の多くは，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，$\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な内積が定まっている場合に帰着される．この論法は，本節の以下の部分でしばしば用いられる．

系 1.9　$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．$v \in V$ が任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して $s_\alpha(v) = v$ を満たすならば，$v = 0$ である．

証明　系 1.8 (2) より，$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\alpha^\vee \mid \alpha \in \mathit{\Delta}\} = V^*$ である．よって，任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して $s_\alpha(v) = v$，すなわち $\alpha^\vee(v) = 0$ であるとすると，$v = 0$ である．□

$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とし，$\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ を固定する．このとき，系 1.8 より，二つのルート $\alpha,\ \beta \in \mathit{\Delta}$ に対して

$$n(\alpha, \beta) = 0 \iff n(\beta, \alpha) = 0 \iff \langle \alpha, \beta \rangle = 0$$

である．そこで，$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$ であるとき，α と β は**直交する**（orthogonal）という．また，ルートの集合 A と B について，A に属する任意のルートと B に属する任意のルートが直交するとき，A と B は直交するという．

1.3　部分ルート系

命題 1.10　$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．部分線型空間 $V' \subseteq V$ と部分集合 $\mathit{\Delta}' \subseteq \mathit{\Delta}$ が，$\mathit{\Delta}' = \mathit{\Delta} \cap V'$ かつ $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\, \mathit{\Delta}' = V'$ を満たすとする．

(1) $\mathit{\Delta}'$ は V' 上のルート系であり，$\mathit{\Delta}$ が被約ならば $\mathit{\Delta}'$ も被約である．

(2) $\alpha \in \mathit{\Delta}'$ に対して，$s^{\mathit{\Delta}'}_\alpha = s^{\mathit{\Delta}}_\alpha|_{V'}$ である（$s^{\mathit{\Delta}'}_\alpha$ と $s^{\mathit{\Delta}}_\alpha|_{V'}$ は，それぞれルート系 $\mathit{\Delta}'$ と $\mathit{\Delta}$ における α に関するルート鏡映を表す）．

(3) $\alpha \in \mathit{\Delta}'$ に対して，$\alpha^\vee_{\mathit{\Delta}'} = \alpha^\vee_{\mathit{\Delta}}|_{V'}$ である（$\alpha^\vee_{\mathit{\Delta}'}$ と $\alpha^\vee_{\mathit{\Delta}}|_{V'}$ は，それぞれルート系 $\mathit{\Delta}'$ と $\mathit{\Delta}$ における α の双対ルートを表す）．

(4) V 上の $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ の V' への制限は，V' 上の $\mathbf{W}(\mathit{\Delta}')$-不変な非退化対称双線型形式である．

(5) 群準同型 $\iota\colon \mathbf{W}(\Delta') \to \mathbf{W}(\Delta)$ であって，任意の $\alpha \in \Delta'$ に対して $\iota(s_\alpha^{\Delta'}) = s_\alpha^{\Delta}$ であるものが一意に存在する．さらに，この ι は単射である．

証明 (1), (2) Δ' が (RS1) を満たすことと，Δ が (RS4) を満たすならば Δ' もそうであることは明らかである．$\alpha \in \Delta'$ とすると，任意の $v \in V'$ に対して $s_\alpha^{\Delta}(v) = v - \alpha_{\Delta}^{\vee}(v)\alpha \in V'$ だから，V' は s_α^{Δ}-安定である．したがって，制限 $s_\alpha^{\Delta}|_{V'}$ は V' 上の鏡映となる．この鏡映は，明らかに (RS2), (RS3) の条件を満たす．よって，Δ' は V' 上のルート系であり，(2) が成り立つ．

(3) (2) より $s_\alpha^{\Delta'} = s_\alpha^{\Delta}|_{V'} = s_{\alpha,\alpha_{\Delta}^{\vee}|_{V'}}$ だから，$\alpha_{\Delta'}^{\vee} = \alpha_{\Delta}^{\vee}|_{V'}$ である．

(4) V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ の V' への制限が $\mathbf{W}(\Delta')$-不変であることは，(2) から明らかである．次に，$v \in V'$ が任意の $w \in V'$ に対して $\langle v, w\rangle = 0$ を満たすとする．すると，任意の $\alpha \in \Delta'$ に対して

$$s_\alpha^{\Delta'}(v) = s_\alpha^{\Delta}(v) = v - \frac{2\langle v,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha = v$$

だから（系 1.8），系 1.9 より $v = 0$ である．よって，$\langle -,- \rangle$ は V' 上で非退化である．

(5) 条件を満たす ι の一意性は，$s_\alpha^{\Delta'}$ の全体が $\mathbf{W}(\Delta')$ を生成することから明らかである．条件を満たす ι の存在を示す．V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定する．(4) で示したように，$\langle -,- \rangle$ は V' 上で非退化だから，これに関する V' の直交空間 $V'^{\perp}$ は，V' の V における補空間である．したがって，単射群準同型 $\iota\colon GL(V') \to GL(V)$ を，$\iota(T) = T \oplus \mathrm{id}_{V'^{\perp}}$ と定義できる．この ι は，明らかに，各 $\alpha \in \Delta'$ に対して $s_\alpha^{\Delta'}$ を s_α^{Δ} に移し，したがって，$\mathbf{W}(\Delta')$ を $\mathbf{W}(\Delta)$ の中に移す． □

定義 1.11（部分ルート系） 命題 1.10 の状況で，Δ' を Δ の**部分ルート系**（root subsystem）という．

1.4 双対ルート系

補題 1.12 Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．$\alpha \in \Delta$ と $t \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ に対して，

$$s_{t(\alpha)} = ts_\alpha t^{-1}, \qquad t(\alpha)^{\vee} = t^{*-1}(\alpha^{\vee})$$

である．

証明 $ts_\alpha t^{-1}$ は $t(\alpha)$ を $-t(\alpha)$ に移し Δ を安定にする鏡映だから，ルート鏡映の一意性より，$ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$ である．また，任意の $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} s_{t(\alpha)}(v) = ts_\alpha t^{-1}(v) &= t(t^{-1}(v) - \alpha^{\vee}(t^{-1}(v))\alpha) \\ &= v - \alpha^{\vee}(t^{-1}(v))t(\alpha) \\ &= v - t^{*-1}(\alpha^{\vee})(v)t(\alpha) \\ &= s_{t(\alpha),t^{*-1}(\alpha^{\vee})}(v) \end{aligned}$$

だから，$t(\alpha)^{\vee} = t^{*-1}(\alpha^{\vee})$ である． □

命題 1.13 Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．

(1) $\Delta^{\vee} = \{\alpha^{\vee} \mid \alpha \in \Delta\}$ は V^* 上のルート系であり，Δ が被約であることと $\Delta^{\vee}$ が被約であることとは同値である．

(2) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，$s_{\alpha^{\vee}} = s_\alpha^* = s_\alpha^{*-1}$ である．

(3) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，$\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ である．

(4) $GL(V)$ から $GL(V^*)$ への群同型 $t \mapsto t^{*-1}$ は，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ から $\mathrm{Aut}(\Delta^\vee)$ への群同型を与え，Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ から $\mathbf{W}(\Delta^\vee)$ への群同型を与える．

証明 (1), (2), (3)　系 1.8 (2) より，$\Delta^\vee$ は (RS1) を満たし，Δ が (RS4) を満たすことと $\Delta^\vee$ が (RS4) を満たすこととは同値である．各 $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ に対して，$\alpha^\vee(\alpha) = 2$ だから

$$s_{\alpha^\vee} = s_{\alpha^\vee,\alpha}\colon V^* \to V^*, \quad f \mapsto f - f(\alpha)\alpha^\vee$$

は V^* 上の鏡映であり，$s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^* = s_\alpha^{*-1}$ である（命題 1.4）．$\beta^\vee \in \Delta^\vee$ に対して

$$s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = s_\alpha^{*-1}(\beta^\vee) = s_\alpha(\beta)^\vee \in \Delta^\vee$$

だから（最後の等号で補題 1.12 を用いた），$s_{\alpha^\vee}$ は (RS2) の条件を満たす．また，このとき $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ であり，任意の $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Delta^\vee$ に対して $\alpha^{\vee\vee}(\beta^\vee) = \beta^\vee(\alpha) \in \mathbb{Z}$ だから，(RS3) も満たされる．よって，$\Delta^\vee$ は V^* 上のルート系であり，(2), (3) が成り立つ．

(4)　補題 1.12 より，$t \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ ならば $t^{*-1} \in \mathrm{Aut}(\Delta^\vee)$ であり，(3) よりその逆も成り立つ．よって，群同型 $t \mapsto t^{*-1}$ は，$\mathrm{Aut}(\Delta)$ から $\mathrm{Aut}(\Delta^\vee)$ への群同型を与える．また，(2) よりこの群同型は s_α を $s_{\alpha^\vee}$ に移すから，$\mathbf{W}(\Delta)$ から $\mathbf{W}(\Delta^\vee)$ への群同型も与える．□

定義 1.14（双対ルート系）　命題 1.13 の状況で，$\Delta^\vee$ を Δ の**双対ルート系**（dual root system）という．

1.5　ルート系の直和と既約分解

命題 1.15　$(V_i)_{i\in I}$ を有限次元線型空間の有限族とし，各 $i \in I$ に対して Δ_i を V_i 上のルート系とする．$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$，$\Delta = \coprod_{i\in I} \Delta_i \subseteq V$ と置く．

(1) Δ は V 上のルート系であり，Δ が被約であることとすべての Δ_i が被約であることとは同値である．

(2) $\alpha \in \Delta_i$ に対して，ルート鏡映 s_α^Δ は，

$$s_\alpha^\Delta(v) = \begin{cases} s_\alpha^{\Delta_i}(v) & (v \in V_i) \\ v & (v \in V_j,\ j \neq i) \end{cases}$$

で与えられる（s_α^Δ と $s_\alpha^{\Delta_i}$ は，それぞれルート系 Δ と Δ_i における α に関するルート鏡映を表す）．

(3) $\alpha \in \Delta_i$ に対して，双対ルート $\alpha_\Delta^\vee$ は，

$$\alpha_\Delta^\vee(v) = \begin{cases} \alpha_{\Delta_i}^\vee(v) & (v \in V_i) \\ 0 & (v \in V_j,\ j \neq i) \end{cases}$$

で与えられる（$\alpha_\Delta^\vee$ と $\alpha_{\Delta_i}^\vee$ は，それぞれルート系 Δ という Δ_i における α の双対ルートを表す）．

証明　明らかである．□

定義 1.16（ルート系の直和）　命題 1.15 の状況で，Δ を $(\Delta_i)_{i\in I}$ の**直和**（direct sum）という．

Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．V が部分線型空間の有限族 $(V_i)_{i\in I}$ に直和分解され，各 V_i 上にルート系 Δ_i があって $\Delta = \bigcup_{i\in I} \Delta_i$ となっていれば，Δ はルート系の有限族 $(\Delta_i)_{i\in I}$ の直和と自然に同一視できる．このとき，Δ は $(\Delta_i)_{i\in I}$ に**直和分解**されるという．

命題 1.17　$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とし，$(\mathit{\Delta}_i)_{i\in I}$ を $\mathit{\Delta}$ の有限分割とする．このとき，次の条件は同値である．

(a) $(\mathit{\Delta}_i)_{i\in I}$ はルート系 $\mathit{\Delta}$ の直和分解である．
(b) 各 $i\in I$ に対して $V_i=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\mathit{\Delta}_i$ と置くと，$\sum_{i\in I}V_i$ は直和である．
(c) 任意の異なる二つの元 $i,j\in I$ に対して，$\mathit{\Delta}_i$ と $\mathit{\Delta}_j$ は直交する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\sum_{i\in I}V_i$ が直和ならば，各 $i\in I$ に対して $\mathit{\Delta}_i=\mathit{\Delta}\cap V_i$ だから $\mathit{\Delta}_i$ は V_i 上のルート系であり（命題 1.10），したがって $(\mathit{\Delta}_i)_{i\in I}$ はルート系 $\mathit{\Delta}$ の直和分解である．

(a) $\Longrightarrow$ (c)　ルート系の直和におけるルート鏡映の式から従う．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　一般性を失わず，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な内積 $\langle -,-\rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7，系 1.8）．このとき，(c) が成り立つとすると，どの異なる二つの $\mathit{\Delta}_i$ も内積に関して直交するから，$(V_i)_{i\in I}$ は内積空間 V における直交族であり，したがって，$\sum_{i\in I}V_i$ は直和である．　□

定義 1.18（既約ルート系）　$\mathit{\Delta}$ を空でないルート系とする．$\mathit{\Delta}$ が「一つが $\mathit{\Delta}$ でその他がすべて $\emptyset$」という形の直和分解しかもたないとき，ルート系 $\mathit{\Delta}$ は**既約**（irreducible）であるという．そうでないとき，ルート系 $\mathit{\Delta}$ は**可約**（reducible）であるという．

ルート系の既約ルート系への直和分解を**既約分解**（irreducible decomposition）といい，既約分解に現れる既約ルート系のそれぞれを**既約成分**（irreducible component）という．

命題 1.19　任意のルート系は，順序を除いて一意に既約分解される．

証明　$\mathit{\Delta}$ をルート系とする．$\mathit{\Delta}$ が可約である限り $\mathit{\Delta}$ は二つの空でないルート系 $\mathit{\Delta}'$ と $\mathit{\Delta}''$ の直和に分解でき，$\mathit{\Delta}',\mathit{\Delta}''$ に対しても同じことがいえる．$\mathit{\Delta}$ は有限集合だから，この操作は有限回で終了する．よって，$\mathit{\Delta}$ の既約分解は存在する．

$(\mathit{\Delta}_i)_{i\in I}$ と $(\mathit{\Delta}'_j)_{j\in J}$ がともに $\mathit{\Delta}$ の既約分解であるとする．各 $i\in I$ と $j\in J$ に対して，$\{\mathit{\Delta}_i\cap\mathit{\Delta}'_j,\mathit{\Delta}_i\setminus\mathit{\Delta}'_j\}$ は $\mathit{\Delta}_i$ の直和分解だから，$\mathit{\Delta}_i$ の既約性より $\mathit{\Delta}_i\cap\mathit{\Delta}'_j=\mathit{\Delta}_i$ または $\mathit{\Delta}_i\setminus\mathit{\Delta}'_j=\mathit{\Delta}_i$，すなわち $\mathit{\Delta}_i\supseteq\mathit{\Delta}'_j$ または $\mathit{\Delta}_i\cap\mathit{\Delta}'_j=\emptyset$ である．$\mathit{\Delta}_i$ と $\mathit{\Delta}'_j$ を逆にしても同じことがいえるから，結局 $\mathit{\Delta}_i=\mathit{\Delta}'_j$ または $\mathit{\Delta}_i\cap\mathit{\Delta}'_j=\emptyset$ である．これが任意の $i\in I$ と $j\in J$ に対して成り立つから，$(\mathit{\Delta}_i)_{i\in I}$ と $(\mathit{\Delta}'_j)_{j\in J}$ は順序を除いて一致する．よって，$\mathit{\Delta}$ の既約分解は順序を除いて一意である．　□

命題 1.20　有限次元線型空間 V 上のルート系 $\mathit{\Delta}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathit{\Delta}$ は既約である．
(b) Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ の V 上の自然表現は既約である．

証明　$\mathit{\Delta}$ が空（したがって，$V=0$）ならば，どちらの条件も成り立たない．以下，$\mathit{\Delta}$ が空でない（したがって，$V\neq 0$ である）場合を考える．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　0 と V 以外の $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-安定な部分線型空間 V_1 がとれたとする．$\beta\in\mathit{\Delta}\setminus V_1$ とすると，V_1 は s_β-安定だから，任意の $v\in V_1$ に対して $s_\beta(v)=v-\beta^\vee(v)\beta$ は V_1 に属する．ところが，$v\in V_1$ かつ $\alpha\notin V$ だから，そのためには $\beta^\vee(v)=0$ でなければならない．したがって，$\beta^\vee$ は V_1 上で 0 となる．特に，任意の $\alpha\in\mathit{\Delta}\cap V_1$ に対して $n(\alpha,\beta)=\beta^\vee(\alpha)=0$ である．よって，$\mathit{\Delta}\cap V_1$ と $\mathit{\Delta}\setminus V_1$ は直交する．

$V_1 \neq V$ かつ $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \Delta = V$ だから，Δ は V_1 に含まれない．すなわち，$\Delta \setminus V_1$ は空でない．また，$\Delta \cap V_1$ が空であるとすると，前段の議論よりすべての $\alpha^\vee$ ($\alpha \in \Delta$) が V_1 上で 0 であることになるが，これは $V_1 \neq 0$ に反する（系 1.8 (2)）．よって，$\Delta \cap V_1$ は空でない．以上より，Δ は可約である．対偶をとれば，主張が従う．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　Δ が V_1 上の空でないルート系 Δ_1 と V_2 上の空でないルート系 Δ_2 に直和分解されるとすると，命題 1.15 より，V_1 と V_2 は $\mathbf{W}(\Delta)$-安定である．対偶をとれば，主張が従う．□

系 1.21　Δ を有限次元線型空間 V 上の既約ルート系とする．V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な双線型形式は，スカラー倍を除いて一意である．

証明　V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な双線型形式は，$\mathbf{W}(\Delta)$ の自然表現からその反傾表現への同変作用素と同一視できる．よって，主張は，命題 1.20 と Schur の補題から従う．□

注意 1.22　Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とし，$\langle -,- \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ を $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な非退化対称双線型形式とする．α, $\beta \in \Delta$ を同じ既約成分に属する二つのルートとすると，$s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる（命題 1.20）．このとき，

$$\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle s(\alpha), s(\alpha) \rangle} = \frac{n(\beta, s(\alpha))}{n(\alpha, s(\beta))} \in \mathbb{Q}_{>0}$$

であり，この値は $\langle -,- \rangle$ のとり方によらない．そこで，用語の濫用で，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも，$\sqrt{\langle \beta, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle}$ を β **の** α **に対するの長さの比**という．

$\mathbf{W}(\Delta)$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,- \rangle$ を，任意の $v \in V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$ に対して $\langle v, v \rangle \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるようにとれば（系 1.8 (1)），$\langle -,- \rangle$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積を定め，これはさらに，係数拡大によって $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積を定める．これにより，ルートの長さの比に関する議論は，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合に帰着できる．

1.6　二つのルートの関係

定理 1.23　Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．二つのルート α, $\beta \in V$ に対して，$n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組は，表 1 の (i)–(xi′)（Δ が被約ならば，(i)–(ix)）のいずれかである．さらに，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ が定まっているならば，それぞれの場合の $\|\beta\| / \|\alpha\|$ および $\angle(\alpha, \beta)$ の値は，同表の対応する列のとおりである．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7, 系 1.8）．

$n(\alpha, \beta) = 2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \beta, \beta \rangle$ かつ $n(\beta, \alpha) = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ だから（系 1.8 (2)），

$$n(\alpha, \beta) n(\beta, \alpha) = \frac{4\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} = 4(\cos \angle(\alpha, \beta))^2 \leq 4$$

である．また，$n(\alpha, \beta) = 0$ と $n(\beta, \alpha) = 0$ とは同値であり，$n(\alpha, \beta)$, $n(\beta, \alpha) \neq 0$ ならば

$$\frac{n(\beta, \alpha)}{n(\alpha, \beta)} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$$

である．よって，$n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組としてありうるものは，表に挙げたもので尽くされる．

表 1　二つのルートの関係

	$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	$\|\beta\|/\|\alpha\|$	$\angle(\alpha,\beta)$
(i)	0	0	不定	$90°$
(ii)	1	1	1	$60°$
(iii)	-1	-1	1	$120°$
(iv)	1	2	$\sqrt{2}$	$45°$
(iv′)	2	1	$1/\sqrt{2}$	$45°$
(v)	-1	-2	$\sqrt{2}$	$135°$
(v′)	-2	-1	$1/\sqrt{2}$	$135°$
(vi)	1	3	$\sqrt{3}$	$30°$
(vi′)	3	1	$1/\sqrt{3}$	$30°$
(vii)	-1	-3	$\sqrt{3}$	$150°$
(vii′)	-3	-1	$1/\sqrt{3}$	$150°$
(viii)	2	2	1	$0°$
(ix)	-2	-2	1	$180°$
(x)	1	4	2	$0°$
(x′)	4	1	$1/2$	$0°$
(xi)	-1	-4	2	$180°$
(xi′)	-4	-1	$1/2$	$180°$

(x)–(xi′) の場合，β は $\pm 2\alpha$ または $\pm\alpha/2$ となり被約性の条件 (RS4) に反するから，$\mathit{\Delta}$ が被約ならば，ありうるものは (i)–(ix) に限られる． □

注意 1.24　$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ とする．

(1) 表 1 の (i) 以外の場合には，β の α に対する長さの比（注意 1.22）は，同表に示した「$\|\beta\|/\|\alpha\|$」の値に等しい．

(2) 用語の濫用で，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも，**二つのルート $\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ のなす角度** $\angle(\alpha,\beta)$ を，$n(\alpha,\beta)$ と $n(\beta,\alpha)$ の値の組から表 1 によって定義する．特に，α と β が**鋭角をなす**，**直交する**，**鈍角をなす**とは，それぞれ $n(\beta,\alpha) > 0$，$n(\beta,\alpha) = 0$，$n(\beta,\alpha) < 0$ であることをいう（「直交」については，1.2 節の最後に述べた定義と一致する）．

系 1.25　ルート系 $\mathit{\Delta}$ の二つのルート α と β が線型従属ならば，β は $\pm\alpha/2, \pm\alpha, \pm 2\alpha$ のいずれかである．さらに，$\mathit{\Delta}$ が被約ならば，β は $\pm\alpha$ のいずれかである．

証明　定理 1.23 から従う． □

系 1.26　$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ とする．

(1) α と β が鋭角をなすならば，$\beta - \alpha \in \mathit{\Delta} \cup \{0\}$ である．
(2) α と β が鈍角をなすならば，$\beta + \alpha \in \mathit{\Delta} \cup \{0\}$ である．　□

証明　(1)　α と β が鋭角をなし（すなわち，$n(\beta, \alpha) > 0$ であり）$\alpha \neq \beta$ ならば，定理 1.23 より $n(\beta, \alpha) = 1$ または $n(\alpha, \beta) = 1$ である．前者の場合 $\beta - \alpha = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha = s_\alpha(\beta) \in \mathit{\Delta}$ であり，後者の場合 $\alpha - \beta = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta = s_\beta(\alpha) \in \mathit{\Delta}$ だから，いずれにしても $\beta - \alpha \in \mathit{\Delta}$ となる．

(2)　$-\alpha$ と β に (1) を適用すればよい．　□

系 1.27　ルート系 $\mathit{\Delta}$ の同じ既約成分に属する二つのルート $\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ について，β の α に対する長さの比は，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$（$\mathit{\Delta}$ が被約ならば，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$）またはこれらの逆数のいずれかである．

証明　α と β は同じ既約成分に属するから，$s \in \mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる（命題 1.20）．よって，定理 1.23 と注意 1.24 (1) より，β の α に対する長さの比は，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$（$\mathit{\Delta}$ が被約ならば $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$）またはこれらの逆数のいずれかである．　□

系 1.28　$\mathit{\Delta}$ をルート系とする．同じ既約成分に属する二つのルート $\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ の長さが等しければ，これらは Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ の作用によって移り合う．

証明　α と β は同じ既約成分に属するから，$s \in \mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる（命題 1.20）．必要ならば s を ss_α に置き換えることで，$s(\alpha)$ と β は鋭角をなすとしてよい．α と β の（したがって，$s(\alpha)$ と β の）長さが等しいことより，$\angle(s(\alpha), \beta)$ は $0°$ または $60°$ である（定理 1.23，注意 1.24）．前者の場合，$s(\alpha) = \beta$ である．後者の場合，$\gamma = s(\alpha) - \beta \in \mathit{\Delta}$ であり（系 1.26 (1)），$s_\gamma s(\alpha) = \beta$ となる．いずれにしても，主張が成り立つ．　□

命題 1.29　$\mathit{\Delta}$ をルート系，$\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}$ を線型独立な二つのルートとし，

$$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \mathit{\Delta}\}$$

と置く．

(1) $I_{\beta,\alpha}$ は，$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける．
(2) (1) の p, q について，$p - q = -n(\beta, \alpha)$ が成り立つ．
(3) (1) の p, q について，$\gamma = \beta - q\alpha$ と置くと，$p + q = -n(\gamma, \alpha)$ が成り立ち，これは $0, 1, 2, 3$ のいずれかである．

証明　(1)　$p = \max I_{\beta,\alpha}$，$-q = \min I_{\beta,\alpha}$ と置く．明らかに $0 \in I_{\beta,\alpha}$ だから，$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．もし $I_{\beta,\alpha} \neq [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ であるとすると，$r, s \in I_{\beta,\alpha}$ を $r < s$ かつ $r + 1, s - 1 \notin I_{\beta,\alpha}$ を満たすようにとれる．この r, s について，系 1.26 の対偶より

$$n(\beta + r\alpha, \alpha) \geq 0 \geq n(\beta + s\alpha, \alpha)$$

だが，一方で $n(\beta + j\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + jn(\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + 2j$ は j に関して狭義単調増加だから，これは不可能である．よって，背理法より，$I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ である．

(2)　ルート鏡映 s_α は $\beta + j\alpha$ を $\beta - (n(\beta, \alpha) + j)\alpha$ に移すから，写像 $j \mapsto -(n(\beta, \alpha) + j)$ は $I_{\beta,\alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ から自身への全単射である．よって，$p - q = -n(\beta, \alpha)$ である．

表 2　p と q の値の組

	$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	(p,q)
(i)	0	0	$(0,0)$, $(1,1)$
(ii)	1	1	$(0,1)$, $(1,2)$
(iii)	-1	-1	$(1,0)$, $(2,1)$
(iv)	1	2	$(0,2)$
(iv′)	2	1	$(0,1)$
(v)	-1	-2	$(2,0)$
(v′)	-2	-1	$(1,0)$
(vi)	1	3	$(0,3)$
(vi′)	3	1	$(0,1)$
(vii)	-1	-3	$(3,0)$
(vii′)	-3	-1	$(1,0)$

(3)　β の代わりに γ に対して (2) を適用すれば，$p+q=-n(\gamma,\alpha)$ を得る．p と q は 0 以上の整数である．一方で，α と γ が線型独立であることと定理 1.23 より，$|n(\gamma,\alpha)|$ は 0, 1, 2, 3 のいずれかである．よって，$p+q=-n(\gamma,\alpha)$ は，0, 1, 2, 3 のいずれかである．　□

定理 1.30　Δ をルート系とする．α, $\beta\in\Delta$ を線型独立な二つのルートとして，p, $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を命題 1.29 のとおりに定める．$n(\alpha,\beta)$ と $n(\beta,\alpha)$ の値の組が表 1 の (i)–(vii′) のそれぞれである場合（α と β が線型独立であることと定理 1.23 より，これらのいずれかが成り立つ），p と q の値の組は，表 2 に挙げたもののいずれかである．

証明　命題 1.29 より $p-q=-n(\beta,\alpha)$ かつ $p+q\in\{0,1,2,3\}$ だから，それぞれの場合に p と q の値の組としてありうるものは，表に挙げたもののほかには，(iv′) または (vi′) の場合の $(1,2)$ と (v′) または (vii′) の場合の $(2,1)$ に限られる．(iv′) または (vi′) の場合，α と β を入れ替えて (iv) または (vi) の場合の結果を適用すれば，$\alpha+\beta\notin\Delta$，すなわち $p=0$ を得る．したがって，$(p,q)=(1,2)$ ではありえず，$(p,q)=(0,1)$ となる．同様に，(v′) または (vii′) の場合，α と β を入れ替えて (v) または (vii) の場合の結果を適用すれば，$\alpha-\beta\notin\Delta$，すなわち $q=0$ を得る．したがって，$(p,q)=(2,1)$ ではありえず，$(p,q)=(1,0)$ となる．以上より，(p,q) としてありうるものは，表に挙げたもので尽くされる．　□

系 1.31　Δ をルート系とする．線型独立な二つのルート α, $\beta\in\Delta$ が $\alpha+\beta\in\Delta$ を満たすとして，p, $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を命題 1.29 のとおりに定める．このとき，$\alpha+\beta$ の β に対する長さの比（α, β, $\alpha+\beta$ の中で直交する対はたかだか一つだから，β と $\alpha+\beta$ は Δ の同じ既約成分に属し，長さの比が定まる）は，$\sqrt{(q+1)/p}$ に等しい．

証明　$\alpha+\beta\in\Delta$ より $p\geq 1$ だから，表 2 に示した p と q の値の組の中でありうるのは，(i) の場合の $(p,q)=(1,1)$，(ii) の場合の $(p,q)=(1,2)$，(iii) の場合の $(p,q)=(1,0)$, $(2,1)$，(v) の場合の $(p,q)=(2,0)$，(v′) の場合の $(p,q)=(1,0)$，(vii) の場合の $(p,q)=(3,0)$，(vii′) の場合の $(p,q)=(1,0)$ に限られる．これ

らのそれぞれの場合に，$\alpha+\beta$ の β に対する長さの比が $\sqrt{(q+1)/p}$ に等しいことが確かめられる． □

1.7 被約ルート系への帰着

定義 1.32（割れないルート） $\varDelta$ をルート系とする．ルート $\alpha \in \varDelta$ が**割れない**（indivisible）とは，$\alpha/2 \notin \varDelta$ であることをいう．

命題 1.33 $\varDelta$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．$\varDelta'$ を，$\varDelta$ の割れないルート全体のなす集合とする．

(1) $\varDelta'$ は V 上の被約ルート系であり，$\varDelta$ が既約であることと $\varDelta'$ が既約であることとは同値である．
(2) $\alpha \in \varDelta'$ に対して，$s_\alpha^{\varDelta'} = s_\alpha^{\varDelta}$ である（$s_\alpha^{\varDelta'}$ と $s_\alpha^{\varDelta}$ は，それぞれルート系 $\varDelta'$ と $\varDelta$ における α に関するルート鏡映を表す）．
(3) $\alpha \in \varDelta'$ に対して，$\alpha_{\varDelta'}^\vee = \alpha_\varDelta^\vee$ である（$\alpha_{\varDelta'}^\vee$ と $\alpha_\varDelta^\vee$ は，それぞれルート系 $\varDelta'$ と $\varDelta$ における α の双対ルートを表す）．
(4) $\mathbf{W}(\varDelta') = \mathbf{W}(\varDelta)$ である．

証明 (1), (2) $\varDelta'$ が (RS1), (RS4) を満たすことは明らかである．$\alpha \in \varDelta'$ とすると，$s_\alpha^\varDelta$ は $\varDelta$ の自己同型だから，割れないルートを割れないルートに移す．したがって，鏡映 $s_\alpha^\varDelta$ は，(RS2), (RS3) の条件を満たす．よって，$\varDelta'$ は V 上の被約ルート系であり，(3) が成り立つ．

$V = V_1 \oplus V_2$ を線型空間の直和分解とするとき，$\varDelta = (\varDelta \cap V_1) \sqcup (\varDelta \cap V_2)$ であることと $\varDelta' = (\varDelta' \cap V_1) \sqcup (\varDelta' \cap V_2)$ であることは同値であり，また，$i \in \{1,2\}$ に対して，$\varDelta \cap V_i$ が空であることと $\varDelta' \cap V_i$ が空であることとは同値である．よって，$\varDelta$ が既約であることと $\varDelta'$ が既約であることとは同値である．

(3), (4) (2) から明らかである． □

注意 1.34 命題 1.33 において，$\varDelta' = \{\alpha \in \varDelta \mid \alpha/2 \notin \varDelta\}$ の代わりに $\varDelta'' = \{\alpha \in \varDelta \mid 2\alpha \notin \varDelta\}$ を用いても，同じ主張が成り立つ．証明も，同様にできる．

注意 1.35 命題 1.33 や注意 1.34 において，$\mathrm{Aut}(\varDelta') = \mathrm{Aut}(\varDelta)$ や $\mathrm{Aut}(\varDelta'') = \mathrm{Aut}(\varDelta)$ は成り立たない．たとえば，$\mathbb{K}^2$ の標準基底を (ϵ_1, ϵ_2) と書くと，$\varDelta = \{\pm\epsilon_1, \pm 2\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ は $\mathbb{K}^2$ 上の（被約でない）ルート系であり，$\varDelta$ の自己同型は恒等写像のみだが，$\varDelta' = \{\pm\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ や $\varDelta'' = \{\pm 2\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ は恒等写像以外の自己同型をもつ．

次の定理により，被約でない既約ルート系の構成と分類は，被約なルート系の構成と分類に帰着される（4.4 節）．

定理 1.36 $\varDelta$ を有限次元線型空間 V 上の被約でない既約ルート系とする．

(1) $\varDelta$ の各ルートの最短ルートに対する長さの比は，1, $\sqrt{2}$, 2 のいずれかである．

以下，最短ルートに対する長さの比が 1, $\sqrt{2}$, 2 であるようなルートの全体を，それぞれ A, B, C と置く．

(2) $2A = C$ である．
(3) A に属する異なる二つのルートは，直交する．

(4) $\Delta' = A \cup B$ と $\Delta'' = B \cup C$ は，V 上の被約な既約ルート系である．

証明 (1) Δ の二つのルートの長さの比は，$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ またはこれらの逆数のいずれかである（系 1.27）．一方で，Δ は被約でないから，長さの比が $1:2$ であるような二つのルートが存在する．よって，主張が成り立つ．

(2) Δ は被約でないから，$\alpha, 2\alpha \in \Delta$ を満たすルート α がとれ，$\alpha \in A$ かつ $2\alpha \in C$ となる．$\beta \in A$ とすると，$s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(\alpha) = \beta$ となるようにとれるから（系 1.28），$2\beta = s(2\alpha) \in C$ である．逆に，$\gamma \in C$ とすると，$s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(2\alpha) = \gamma$ となるようにとれるから（系 1.28），$\gamma/2 = s(\alpha) \in A$ である．よって，$2A = C$ である．

(3) $\alpha, \beta \in A$ を異なる二つのルートとすると，(2) より $2\alpha \in C$ である．2α と β の長さの比は $2:1$ だから，定理 1.23 より，これらは直交する．よって，α と β は直交する．

(4) (2) より，$A \cup B = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha/2 \notin \Delta\}$，$B \cup C = \{\alpha \in \Delta \mid 2\alpha \notin \Delta\}$ である．よって，主張は，命題 1.33 と注意 1.34 から従う． □

2 ルート系の基底

2.1 基底

定義 2.1（基底） Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．$\Pi \subseteq \Delta$ がルート系 Δ の**基底**（basis）であるとは，次の条件を満たすことをいう．

(i) Π は線型空間 V の基底である．

(ii) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，α を Π の元の線型結合として書くときの係数は，「すべて 0 以上の整数である」か「すべて 0 以下の整数である」かのいずれかである．

Δ の基底 Π を固定するとき，Π の元を，**単純ルート**（simple root）という．ルートのうち，Π の元の線型結合として書くときの係数がすべて 0 以上の整数であるものを Π に関する**正ルート**（positive root）といい，すべて 0 以下の整数であるものを Π に関する**負ルート**（negative root）という．Π に関する正ルート，負ルートの全体を，それぞれ $\Delta_+(\Pi)$, $\Delta_-(\Pi)$ と書く．

定義から明らかに，ルート系の基底は，割れないルートのみからなる．

Δ をルート系とすると，Δ の自己同型は，基底を基底に移す．これにより，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ は（したがって Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ も），Δ の基底全体のなす集合に作用する．

命題 2.2 Δ をルート系とし，Π をその基底とする．異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ は，直角または鈍角をなす．

証明 基底の定義より $\beta - \alpha \notin \Delta \cup \{0\}$ だから，主張は系 1.26 (1) の対偶から従う． □

本小節の以下の部分では，Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とするとき，$\alpha \in \Delta$ に関するルート鏡映の鏡映面を Σ_α と書く．すなわち，

$$\Sigma_\alpha = \mathrm{Ker}\,\alpha^\vee = \{v \in V \mid \alpha^\vee(v) = 0\}$$

である．$\langle -, - \rangle$ を V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な非退化対称双線型形式とすると，$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ $\alpha^\vee = 2\langle -, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$

だから（系 1.8），Σ_α はこの非退化対称双線型形式に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間となる．

定義 2.3（Weyl チャンバー）　Δ を有限次元実線型空間 V 上のルート系とする．V の開集合 $V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Sigma_\alpha$ の各連結成分を，Δ の **Weyl チャンバー**（Weyl chamber）という．

Δ を有限次元実線型空間上のルート系とすると，Δ の自己同型は，Weyl チャンバーを Weyl チャンバーに移す．これにより，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ は（したがって，Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ も），Δ の Weyl チャンバー全体のなす集合に作用する．

補題 2.4　実内積空間 V の元の族 $(v_i)_{i\in I}$ が，次の条件を満たすとする．

(i) ある $w \in V \setminus \{0\}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して $\langle v_i, w\rangle > 0$ となる．
(ii) 任意の異なる二つの元 $i,\, j \in I$ に対して，$\langle v_i, v_j\rangle \leq 0$ である．

このとき，$(v_i)_{i\in I}$ は線型独立である．

証明　$I',\, I'' \subseteq I$ を互いに交わらない有限部分集合とし，各 $i \in I'$ に対して $a_i \geq 0$，各 $j \in I''$ に対して $b_j \geq 0$ を任意にとる．もし $\sum_{i\in I'} a_i v_i = \sum_{j\in I''} b_j v_j$ ならば，これを v と置くと，条件 (ii) より

$$\|v\|^2 = \left\langle \sum_{i\in I'} a_i v_i, \sum_{j\in I''} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i\in I',\ j\in I''} a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle \leq 0$$

だから，

$$\sum_{i\in I'} a_i v_i = \sum_{j\in I''} b_j v_j = v = 0$$

である．条件 (i) の $w \in V \setminus \{0\}$ と上式の各辺との内積をとれば，$a_i = 0$ および $b_j = 0$ を得る．よって，$(v_i)_{i\in I}$ は線型独立である． □

定理 2.5　Δ を有限次元実線型空間 V 上のルート系とする．

(1) Δ の基底 Π に対して，

$$C(\Pi) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(v) > 0\}$$

は Δ の Weyl チャンバーである．

(2) Δ の Weyl チャンバー C に対して，

$$\Delta_+(C) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha^\vee(C) \subseteq \mathbb{R}_{>0}\},$$
$$\Pi(C) = \{\alpha \in \Delta_+(C) \mid \alpha \text{ は } \Delta_+(C) \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\}$$

と定めると，$\Pi(C)$ は Δ の基底である．

(3) (1) と (2) の対応は互いに他の逆であり，Δ の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える．さらに，この対応は，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ の作用を保つ．

証明　V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積 $\langle -,- \rangle$ を一つ固定する（系 1.8）．$\alpha \in \Delta$ と $v \in V$ に対して，$\alpha^\vee(v) = 2\langle v, \alpha\rangle/\langle \alpha, \alpha\rangle$ だから，$\alpha^\vee(v)$ と $\langle v, \alpha\rangle$ は同符号である．

(1)　内積を用いると，

$$C(\Pi) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \langle v, \alpha\rangle > 0\}$$

と書ける．Π は V の基底だから，$C(\Pi)$ は連結である．$C(\Pi)$ の元と Π に関する正ルートとの内積は正であり，Π に関する負ルートとの内積は負だから，$C(\Pi)$ は

$$V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Sigma_\alpha = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \langle v, \alpha\rangle \neq 0\}$$

に含まれる．さらに，$v' \in V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Sigma_\alpha$ が $C(\Pi)$ と同じ連結成分に含まれるならば，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\langle v', \alpha\rangle$ と $\langle v, \alpha\rangle$（$v \in C(\Pi)$）は同符号だから，$v' \in C(\Pi)$ である．よって，$C(\Pi)$ は $V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Sigma_\alpha$ の一つの連結成分，すなわち Weyl チャンバーである．

(2)　$\alpha^\vee$ の符号は各 Weyl チャンバー上で一定だから，$v_0 \in C$ を一つ固定すると

$$\Delta_+(C) = \{\alpha \in \Delta \mid \langle v_0, \alpha\rangle > 0\} \tag{$*$}$$

と書ける．$\alpha \in \Delta_+(C)$ とすると，それが $\Pi(C)$ に属していない限り $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$（$k \geq 2$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Delta_+(C)$）と分解でき，各 α_i に対しても同じことがいえる．各 i に対して $\langle v_0, \alpha_i\rangle < \langle v_0, \alpha\rangle$ だから，この操作は有限回で終了する．よって，$\Delta_+(C)$ に属するルートは，$\Pi(C)$ の元の 0 以上の整数を係数とする線型結合で書ける．$\Delta = \Delta_+(C) \cup (-\Delta_+(C))$ だから，残りのルートは，$\Pi(C)$ の元の 0 以下の整数を係数とする線型結合で書ける．

前段の結果から，$\Pi(C)$ が V を張ることもわかる．あとは，$\Pi(C)$ が線型独立であることを示せばよい．そのためには，$\Pi(C)$ が補題 2.4 の条件を満たすことをいえばよい．条件 (i) は，($*$) より満たされる．条件 (ii) が満たされないとすると，ある $\alpha, \beta \in \Pi(C)$ に対して $\langle \alpha, \beta\rangle \leq 0$ となるが，このとき系 1.26 より $\beta - \alpha \in \Delta$ である．したがって，$\beta - \alpha$ または $\alpha - \beta$ が $\Delta_+(C)$ に属することになるが，いずれにしても $\alpha, \beta \in \Pi(C)$ に矛盾する．よって，背理法より，条件 (ii) は満たされる．

(3)　Π を Δ の基底とすると，容易にわかるように $\Delta_+(\Pi) \subseteq \Delta_+(C(\Pi))$ だが，$\Delta_+(\Pi)$ と $\Delta_-(\Pi) = -\Delta_+(\Pi)$，$\Delta_+(C(\Pi))$ と $-\Delta_+(C(\Pi))$ はともに Δ の分割を与えるから，$\Delta_+(\Pi) = \Delta_+(C(\Pi))$ である．したがって，$\Pi(C(\Pi))$ は $\Delta_+(\Pi)$ の元のうち $\Delta_+(\Pi)$ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けないもの全体だが，正ルートの定義よりこれは Π に等しい．また，C を Δ の Weyl チャンバーとすると，容易にわかるように $C \subseteq C(\Pi(C))$ であり，C と $C(\Pi(C))$ はともに $V \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Sigma_\alpha$ の連結成分だから $C = C(\Pi(C))$ である．よって，(1) と (2) の対応は互いに他の逆であり，Δ の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える．

$t \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ とすると，Δ の基底 Π に対して，

$$\begin{aligned} C(t(\Pi)) &= \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } t(\alpha)^\vee(v) > 0\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(t^{-1}(v)) > 0\} \\ &= t(C(\Pi)) \end{aligned}$$

である（補題 1.12）．よって，上記の対応は，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ の作用を保つ．　□

系 2.6　任意のルート系は，基底をもつ．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ と仮定する（命題 1.7）．このとき基底の存在は，定理 2.5 から従う．　□

Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とし，Π をその基底（系 2.6 より存在する）とすると，Δ が生成する V の部分 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathrm{span}_\mathbb{Z}\,\Delta$ は，Π を基底とする格子 $\mathrm{span}_\mathbb{Z}\,\Pi$ に等しい．これを，ルート系 Δ の**ルート格子**（root lattice）という．

2.2　基底と Weyl 群

補題 2.7　Δ をルート系とし，Π をその基底とする．単純ルート $\alpha \in \Pi$ に関する鏡映 s_α は，$\Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こす．

証明　$\beta \in \Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ とする．$s_\alpha(\beta) \notin \mathbb{K}\alpha$ は明らかである．$\beta = \sum_{\gamma\in\Pi} a_\gamma \gamma$（各 a_γ は 0 以上の整数）と表すと，ある $\gamma \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ が存在して $a_\gamma > 0$ となる．ここで，

$$s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma\in\Pi} a_\gamma(\gamma - n(\gamma,\alpha)\alpha) = \sum_{\gamma\in\Pi} a_\gamma\gamma - \left(\sum_{\gamma\in\Pi} n(\gamma,\alpha)\right)\alpha$$

だから，$s_\alpha(\gamma)$ を Π の元の線型結合で表すときの γ の係数も $a_\gamma > 0$ である．これより，$s_\alpha(\beta) \in \Delta_+(\Pi)$ である．よって，s_α は，$\Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こす．□

系 2.8　Δ をルート系とし，Π をその基底とする．Π に関する割れない正ルート全体の和の 1/2 倍を ρ と置くと，任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して，$s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ である．

証明　Π に関する割れない正ルート全体のなす集合を，$\Delta_+(\Pi)'$ と置く．s_α は，$\Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こし（補題 2.7），割れないルートを割れないルートに移すから，$\Delta_+(\Pi)' \setminus \{\alpha\}$ 上の置換を引き起こす．よって，

$$s_\alpha(\rho) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta\in\Delta_+(\Pi)'\setminus\{\alpha\}} s_\alpha(\beta) + s_\alpha(\alpha)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta\in\Delta_+(\Pi)'\setminus\{\alpha\}} \beta - \alpha\right) = \rho - \alpha$$

である．□

補題 2.9　Δ をルート系とし，Π をその基底とする．$s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$（$k \geq 1$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Pi$）とし，$s$ は k 個未満の $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ の元の合成としては書けないとする．このとき，$s(\alpha_k)$ は Π に関する負ルートである．

証明　$s(\alpha_k) = -s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ が正ルートであると仮定すると，$s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は負ルートだから，$1 \leq i \leq k-1$ を適当にとって，$\beta = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は負ルートだが $s_{\alpha_i}(\beta) = s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は正ルートであるようにできる．一方で，s_{α_i} は $\mathbb{K}\alpha_i$ に属さない正ルートを正ルートに移す（補題 2.7）．したがって，$\beta \in \mathbb{K}\alpha_i$ でなければならないから，

$$s_{\alpha_i} = s_\beta = s_{s_{\alpha_{i+1}}\cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}} s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}} \cdots s_{\alpha_{i+1}}$$

となり（補題 1.12），移項すれば

$$s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_k} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$$

を得る．これより $s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k} = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$ となるが，これは k の最小性に矛盾する．よって，背理法より，$s(\alpha_k)$ は負ルートである．□

定理 2.10　Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．

(1) Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ は，Δ の基底全体のなす集合に自由かつ推移的に作用する．
(2) Π を Δ の基底とすると，$\mathbf{W}(\Delta)\Pi$ は Δ の割れないルート全体に等しい．

(3) Π を Δ の基底とすると，Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ によって生成される．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7, 系 1.8）．Δ の基底 Π を一つ固定し（系 2.6 より存在する），$\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ が生成する $\mathbf{W}(\Delta)$ の部分群を $\mathbf{W}'(\Delta)$ と置く．まず (1), (2) で $\mathbf{W}(\Delta)$ を $\mathbf{W}'(\Delta)$ に置き換えた主張 (1′), (2′) を示し，次に (2′) を用いて (3) を示す．

(1′)　$\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の基底全体のなす集合への作用が推移的であることを示す．定理 2.5 より，$\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の Weyl チャンバー全体の集合への作用が推移的であることを示せばよい．Π に関する正ルートであって割れないもの全体の和の 1/2 倍を，ρ と置く．点 $v \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_\alpha$ を任意にとり，これに対して，$s \in \mathbf{W}'(\Delta)$ を $\langle s(v), \rho \rangle$ が最大となるようにとる．すると，任意の $\alpha \in \Pi$ に対して，

$$\langle s(v), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha s(v), \rho \rangle = \langle s(v), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle s(v), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

（最後の等号で系 2.8 を用いた）より $\langle s(v), \alpha \rangle \geq 0$ であり，また $v \notin \Sigma_{s^{-1}(\alpha)}$ より $\langle s(v), \alpha \rangle = \langle v, s^{-1}(\alpha) \rangle \neq 0$ だから，$\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ である．したがって，$s(v) \in C(\Pi)$ であり，これは v を含む Weyl チャンバーが s の作用で $C(\Pi)$ に移ることを意味する．よって，$\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の Weyl チャンバー全体のなす集合への作用は推移的である．

次に，$\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の基底全体のなす集合への作用が自由であることを示す．前段で推移性を示したから，$s \in \mathbf{W}'(\Delta) \setminus \{\mathrm{id}_V\}$ として $s(\Pi) \neq \Pi$ を示せば十分である．$s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$（$k \geq 1$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Pi$）と k が最小になる方法で表示すると，補題 2.9 より $s(\alpha_k)$ は負ルートだから，特に $s(\Pi) \neq \Pi$ である．これで，主張が示された．

(2′)　(1′) より，Δ のすべての基底の合併が Δ の割れないルート全体に等しいことを示せばよい．Δ の基底の元がすべて割れないルートであることは，基底の定義から明らかである．任意の割れないルート $\alpha \in \Delta$ が Δ のある基底に含まれることを示す．点 $v_0 \in V$ を

$$\langle v_0, \alpha \rangle = 0, \qquad \langle v_0, \beta \rangle \neq 0 \quad (\beta \in \Delta \setminus \mathbb{R}\alpha)$$

となるようにとり，さらに $\epsilon > 0$ を十分小さくとって

$$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle > 0, \qquad |\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta \rangle| > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle \quad (\beta \in \Delta \setminus \mathbb{R}\alpha)$$

が成り立つようにする．すると，$v_0 + \epsilon\alpha \in V \setminus \bigcup_{\beta \in \Delta} \mathrm{Ker}\, \Sigma_\beta$ だから，$v_0 + \epsilon\alpha$ を含む Weyl チャンバー C がとれる．以下，定理 2.5 の記号 $\Delta_+(C)$, $\Pi(C)$ を用いる．$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle > 0$ だから，$\alpha \in \Delta_+(C)$ である．また，$\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_k$（$k \geq 1$，$\beta_1, \ldots, \beta_k \in \Delta_+(C)$）とすると，$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle = \langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta_1 \rangle + \cdots + \langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta_k \rangle$ だが，任意の $\beta \in \Delta_+(C) \setminus \mathbb{R}\alpha$ に対して $\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta \rangle > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle$ だから，$\beta_1, \ldots, \beta_k \in \Delta_+(C) \cap \mathbb{R}\alpha$ でなければならない．さらに，α は割れないルートだから，$k = 1$ かつ $\beta_1 = \alpha$ でなければならない．よって，$\alpha \in \Pi(C)$ である．これで，主張が示された．

(3)　任意の割れないルート $\alpha \in \Delta$ に対して，(2′) よりある $t \in \mathbf{W}'(\Delta)$ が存在して $t(\alpha) \in \Pi$ となり，このとき，$s_\alpha = t^{-1} s_{t(\alpha)} t \in \mathbf{W}'(\Delta)$ である（補題 1.12）．よって，$\mathbf{W}'(\Delta) = \mathbf{W}(\Delta)$ である．　□

系 2.11　Δ_1 と Δ_2 をそれぞれ有限次元線型空間 V_1 と V_2 上の被約ルート系とし，Π_1 と Π_2 をそれぞれ Δ_1, Δ_2 の基底とする．$\phi\colon \Pi_1 \to \Pi_2$ は全単射であり，任意の α, $\beta \in \Pi_1$ に対して $n(\phi(\beta), \phi(\alpha)) = n(\beta, \alpha)$ を満たすとする．このとき，ϕ はルート系 Δ_1 から Δ_2 への同型に一意に拡張される．

証明　$\mathit{\Pi}_1$ と $\mathit{\Pi}_2$ はそれぞれ V_1 と V_2 の基底だから，ϕ は線型同型写像 $\mathit{\Phi}\colon V_1 \to V_2$ に一意に拡張される．仮定より，任意の $\alpha, \beta \in \mathit{\Pi}_1$ に対して

$$\begin{aligned}\mathit{\Phi}(s_\alpha(\beta)) &= \mathit{\Phi}(\beta - n(\beta,\alpha)\alpha)\\ &= \phi(\beta) - n(\beta,\alpha)\phi(\alpha)\\ &= \phi(\beta) - n(\phi(\beta),\phi(\alpha))\phi(\alpha)\\ &= s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))\end{aligned}$$

だから，任意の $\alpha \in \mathit{\Pi}_1$ に対して

$$\mathit{\Phi} \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \mathit{\Phi}$$

である．したがって，線型同型写像 $\mathit{\Phi}$ を通して Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathit{\Delta}_1)$ と $\mathbf{W}(\mathit{\Delta}_2)$ が対応するから（定理 2.5 (3)），定理 2.10 (2) と合わせて，

$$\mathit{\Phi}(\mathit{\Delta}_1) = \mathit{\Phi}(\mathbf{W}(\mathit{\Delta}_1)\mathit{\Pi}_1) = \mathbf{W}(\mathit{\Delta}_2)\mathit{\Pi}_2 = \mathit{\Delta}_2$$

を得る．よって，$\mathit{\Phi}$ はルート系 $\mathit{\Delta}_1$ から $\mathit{\Delta}_2$ への同型である．　□

命題 2.12　$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．次の条件は同値である．

(a) $\mathit{\Delta}$ は既約である．

(b) $\mathit{\Pi} \neq \emptyset$ であり，$\mathit{\Pi}$ を互いに直交する二つの空でない部分に分割することはできない．

証明　明らかに，$\mathit{\Delta} = \emptyset$ と $\mathit{\Pi} = \emptyset$ とは同値である．以下，これ以外の場合を考える．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．$\mathit{\Delta}$ が可約であるとして，ルート系の直和分解 $\mathit{\Delta} = \mathit{\Delta}_1 \sqcup \mathit{\Delta}_2$ であって $\mathit{\Delta}_1$, $\mathit{\Delta}_2$ が空でないものをとる．$i \in \{1,2\}$ に対して $\mathit{\Pi}_i = \mathit{\Pi} \cap \mathit{\Delta}_i$ と置くと，これらは空でなく，$\mathit{\Delta}_1$ と $\mathit{\Delta}_2$ は直交する（命題 1.17）から $\mathit{\Pi}_1$ と $\mathit{\Pi}_2$ も直交する．これで，主張の対偶が示された．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　対偶を示す．$\mathit{\Pi}$ が互いに直交する二つの空でない部分 $\mathit{\Pi}_1$, $\mathit{\Pi}_2$ に分割されているとする．$i \in \{1,2\}$ に対して $\mathit{\Delta}_i = \mathbf{W}(\mathit{\Delta})\mathit{\Pi}_i \neq \emptyset$ と置く．すると，定理 2.10 (2) より $\mathit{\Delta} = \mathit{\Delta}_1 \cup \mathit{\Delta}_2$ である．また，$\alpha \in \mathit{\Pi}_1$ に対して s_α は $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \mathit{\Pi}_1$ を安定にし，$\beta \in \mathit{\Pi}_2$ に対して s_β は $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \mathit{\Pi}_1$ の点を動かさないから（$\mathit{\Pi}_1$ と $\mathit{\Pi}_2$ が直交することによる），定理 2.10 (3) と合わせて $\mathit{\Delta}_1 \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \mathit{\Pi}_1$ を得る．同様に，$\mathit{\Delta}_2 \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \mathit{\Pi}_2$ である．よって，$\mathit{\Delta} = \mathit{\Delta}_1 \sqcup \mathit{\Delta}_2$ はルート系の直和分解である．これで，主張の対偶が示された．　□

2.3　単純ルートの和

命題 2.13　$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．正ルートの列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi})$ が，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in \mathit{\Delta}$ を満たすとする．このとき，$\{1,\ldots,k\}$ 上の置換 π であって，任意の $i \in \{1,\ldots,k\}$ に対して $\alpha_{\pi(1)} + \cdots + \alpha_{\pi(i)} \in \mathit{\Delta}$ を満たすものが存在する．

証明　k に関する帰納法で示す．$k = 1$ の場合は明らかである．$k \geq 2$ とし，$k-1$ に対する主張は正しいとする．$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ と置くと，$n(\alpha_1,\beta) + \cdots + n(\alpha_k,\beta) = n(\beta,\beta) = 2$ だから，$n(\alpha_i,\beta) > 0$ となる $1 \leq i \leq k$ が存在する．この i について，系 1.26 (1) より，$\beta - \alpha_i \in \mathit{\Delta}$ となる．そこで，α_i を除く $k-1$ 個のルートに帰納法の仮定を適用すれば，k の場合の主張が示される．これで，帰納法が完成した．　□

系 2.14　ルート系 $\mathit{\Delta}$ から可換群 A への写像 $f\colon \mathit{\Delta} \to A$ が，次の条件を満たすとする．

(i) 任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して，$f(-\alpha) = f(\alpha)^{-1}$ である．

(ii) 任意の $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathit{\Delta}$ に対して，$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)f(\beta)$ である．

このとき，f はルート格子 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \mathit{\Delta}$ から A への群準同型に一意に拡張される．

証明 $\mathit{\Pi}$ を $\mathit{\Delta}$ の基底とすると，ルート格子 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \mathit{\Delta}$ は $\mathit{\Pi}$ を基底とする格子だから，$\mathit{\Pi}$ 上で f に一致する群準同型 $\widetilde{f}\colon \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \mathit{\Delta} \to A$ が一意に存在する．これが f の拡張であることを示そう．条件 (i) より，正ルート β に対して $\widetilde{f}(\beta) = f(\beta)$ を示せばよい．命題 2.13 より，単純ルートの列 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \beta$ であり，かつ任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \mathit{\Delta}$ であるようにとれる．よって，条件 (ii) より

$$\widetilde{f}(\beta) = \widetilde{f}(\alpha_1) \cdots \widetilde{f}(\alpha_k) = f(\alpha_1) \cdots f(\alpha_k) = f(\beta)$$

である．これで，主張が示された． □

命題 2.15 $\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．λ はルート格子 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \mathit{\Delta}$ の元であり，一つのルートの整数倍としては書けないとする．このとき，ある $s \in \mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ が存在して，$s(\lambda)$ を $\mathit{\Pi}$ の元の線型結合として書くときの係数に，正の整数と負の整数がともに現れる．

証明 一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7, 系 1.8）．仮定より，$\mathbb{R}\lambda$ はルートを含まないから，$v \in V$ を，$\langle v, \lambda \rangle = 0$ かつ任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して $\langle v, \alpha \rangle \neq 0$ を満たすようにとれる．さらに，Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ は Weyl チャンバー全体のなす集合に推移的に作用するから（定理 2.5，定理 2.10），$s \in \mathbf{W}(\mathit{\Delta})$ を，$s(v) \in C(\mathit{\Pi})$（定理 2.5 の記号を用いた）を満たすようにとれる．ここで，$s(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathit{\Pi}} p_\alpha \alpha$（$p_\alpha \in \mathbb{Z}$）と表すと，

$$0 = \langle v, \lambda \rangle = \langle s(v), s(\lambda) \rangle = \sum_{\alpha \in \mathit{\Pi}} p_\alpha \langle s(v), \alpha \rangle$$

となるが，$s(v) \in C(\mathit{\Pi})$ より任意の $\alpha \in \mathit{\Pi}$ に対して $\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ だから，係数 p_α には正の整数と負の整数がともに現れる． □

2.4 双対ルート系の基底

補題 2.16 有限次元実線型空間 V の基底 $(e_i)_{e \in I}$ と $(f_j)_{j \in J}$ が

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \{e_i \mid i \in I\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \{f_j \mid j \in J\}$$

を満たすならば，全単射 $\phi\colon I \to J$ が存在して，各 $f_{\phi(i)}$ は e_i の正のスカラー倍となる．

証明 $(e_i)_{e \in I}$ から $(f_j)_{j \in J}$ への基底変換行列を $P = (p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ と置き，$(f_j)_{j \in J}$ から $(e_i)_{i \in I}$ への基底変換行列を $Q = (q_{ji})_{(j,i) \in J \times I}$ と置く．仮定より，各成分 p_{ij} と q_{ji} は 0 以上である．いま，P の一つの成分 $p_{i_0 j_0}$ が正であるとする．P と Q は互いに他の逆行列だから，任意の $i \in I \setminus \{i_0\}$ に対して $\sum_{j \in J} p_{i_0 j} q_{ji} = 0$ だが，そのためには $q_{j_0 i} = 0$ でなければならない．すなわち，Q の行ベクトル $(q_{j_0 i})_{i \in I}$ は，i_0-成分を除いて 0 である．一方で，Q は正則だから，この性質を満たす Q の行ベクトルはたかだか一つである．以上より，任意の $i_0 \in I$ に対して，$p_{i_0 j_0} > 0$ を満たす $j_0 \in J$ はたかだか一つである．このことと P の正則性より，全単射 $\phi\colon I \to J$ が存在して，

$$p_{ij} \begin{cases} > 0 & (j = \phi(i)) \\ = 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となる．すなわち，主張が成り立つ． □

命題 2.17　$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．各 $\alpha \in \mathit{\Pi}$ に対して

$$\alpha^\vee_{\mathrm{indiv}} = \begin{cases} \alpha^\vee & (2\alpha \notin \mathit{\Delta}) \\ (2\alpha)^\vee = \alpha^\vee/2 & (2\alpha \in \mathit{\Delta}) \end{cases}$$

と定めると，$\mathit{\Pi}^\vee_{\mathrm{indiv}} = \{\alpha^\vee_{\mathrm{indiv}} \mid \alpha \in \mathit{\Pi}\}$ は双対ルート系 $\mathit{\Delta}^\vee$ の基底である．特に，$\mathit{\Delta}$ が被約ならば，$\mathit{\Pi}^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \mathit{\Pi}\}$ は双対ルート系 $\mathit{\Delta}^\vee$ の基底である．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7, 系 1.8）．内積が定める線型同型によって，V と V^* を同一視する．すると，各ルート $\alpha \in R$ に対して，$s_\alpha = s_{\alpha^\vee}$ だから（命題 1.13 (4)），s_α の鏡映面と $s_{\alpha^\vee}$ の鏡映面は等しい．したがって，$\mathit{\Delta}^\vee$ の基底 $\mathit{\Pi}'$ であって，$C(\mathit{\Pi}) = C(\mathit{\Pi}')$（定理 2.5 の記号を用いた）を満たすものが存在する．V の内積に関する $\mathit{\Pi}$, $\mathit{\Pi}'$ の双対基底をそれぞれ $\mathit{\Pi}^*$, $\mathit{\Pi}'^*$ と書くと，$C(\mathit{\Pi}) = C(\mathit{\Pi}')$ は $\operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}^* = \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}'^*$ を意味するから，補題 2.16 より，$\mathit{\Pi}'^*$ は $\mathit{\Pi}^*$ の各元を適当に正のスカラー倍して得られる集合である．したがって，$\mathit{\Pi}$ と $\mathit{\Pi}'$ についても同様である．ところが，各ルート $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して，$\mathit{\Delta}^\vee$ のルートのうち α の正のスカラー倍として書けるものは，$\alpha^\vee = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle$，$(2\alpha)^\vee = \alpha^\vee/2$（$2\alpha \in \mathit{\Delta}$ のとき），$(\alpha/2)^\vee = 2\alpha^\vee$（$\alpha/2 \in \mathit{\Delta}$ のとき）のみである（系 1.25）．このうち，$\mathit{\Delta}^\vee$ の割れないルートであるものは，$2\alpha \notin \mathit{\Delta}$ ならば $\alpha^\vee$ のみであり，$2\alpha \in \mathit{\Delta}$ ならば $(2\alpha)^\vee$ のみである．よって，$\mathit{\Pi}^\vee_{\mathrm{indiv}} = \mathit{\Pi}'$ であり，これは双対ルート系 $\mathit{\Delta}^\vee$ の基底である．

$\mathit{\Delta}$ が被約ならば，任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して $\alpha^\vee_{\mathrm{indiv}} = \alpha^\vee$ だから，$\mathit{\Pi}^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \mathit{\Pi}\}$ は双対ルート系 $\mathit{\Delta}^\vee$ の基底である． □

2.5　正ルート全体のなす集合の特徴付け

命題 2.18　$\mathit{\Delta}$ をルート系とする．部分集合 $P \subseteq \mathit{\Delta}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathit{\Delta}$ の基底 $\mathit{\Pi}$ であって，$P = \mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi})$ を満たすものが存在する．
(b) $\alpha, \beta \in P$ かつ $\alpha + \beta \in \mathit{\Delta}$ ならば $\alpha + \beta \in P$ であり，P と $-P$ は $\mathit{\Delta}$ の分割を与える．

さらに，これらの条件の下で，条件 (a) の基底 $\mathit{\Pi}$ は一意に定まり，

$$\mathit{\Pi} = \{\alpha \in P \mid \alpha \text{ は } P \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\}$$

によって与えられる．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　基底の定義から明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　基底 $\mathit{\Pi}$ を，$\#(P \cap \mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi}))$ が最大となるようにとる．$\alpha \in \mathit{\Pi}$ が P に属さないと仮定すると，$s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ は $P \cap \mathit{\Delta}_+(s_\alpha(\mathit{\Pi}))$ に属する．次に，$\beta \in P \cap \mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi})$ を任意にとる．α は割れないルートだから $\beta \neq \alpha/2$ であり，また $\beta = 2\alpha$ とすると $-\alpha, 2\alpha \in P$ より $\alpha = 2\alpha - \alpha \in P$ となって仮定に反するから，$\beta \notin \mathbb{K}\alpha$ である（系 1.25）．したがって，補題 2.7 より $s_\alpha(\beta) \in \mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi})$ だから，$\beta \in P \cap \mathit{\Delta}_+(s_\alpha(\mathit{\Pi}))$ である．以上より，$\#(P \cap \mathit{\Delta}_+(s_\alpha(\mathit{\Pi}))) > \#(P \cap \mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi}))$ となるが，これは $\mathit{\Pi}$ のとり方に反する．よって，背理法より，$\mathit{\Pi} \subseteq P$ である．

$\mathit{\Pi} \subseteq P$ より $\mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi}) \subseteq P$ だが，$\mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi})$ と $\mathit{\Delta}_-(\mathit{\Pi})$, P と $-P$ はともに $\mathit{\Delta}$ の分割を与えるから，$\mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi}) = P$ が成り立つ．これで，主張が示された．

最後の主張　基底の定義から明らかである． □

加法群 A 上の半順序 $\leq$ が**平行移動不変**であるとは，任意の $a, b, c \in A$ に対して，$a \leq b$ ならば $a+c \leq b+c$ であることをいう．容易に確かめられるように，平行移動不変な半順序 $\leq$ について，$a, b \geq 0$ ならば $a+b \geq 0$ であり，また，$a \geq 0$ と $-a \leq 0$ とは同値である．

系 2.19　$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上のルート系とする．$\leq$ を V 上の平行移動不変な全順序とすると，$\mathit{\Delta}$ の基底 $\mathit{\Pi}$ であって，$\mathit{\Delta}_+(\mathit{\Pi}) = \{\alpha \in \mathit{\Delta} \mid \alpha \geq 0\}$ を満たすものが一意に存在する．

証明　上記の注意と命題 2.18 から従う． □

3　整ベクトルと優整ベクトル

3.1　整ベクトルと優整ベクトル

定義 3.1（整ベクトル，優整ベクトル）　$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上の被約ルート系とする．

(1) $\lambda \in V$ が $\mathit{\Delta}$ に関する**整ベクトル**（integral vector）であるとは，任意のルート $\alpha \in \mathit{\Delta}$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であることをいう．
(2) さらに，$\mathit{\Pi}$ を $\mathit{\Delta}$ の基底とする．このとき，$\lambda \in V$ が $(\mathit{\Delta}, \mathit{\Pi})$ に関する**優整ベクトル**（dominant integral vector）であるとは，任意の単純ルート $\alpha \in \mathit{\Pi}$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であることをいう．

$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上の被約ルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．このとき，$\mathit{\Pi}^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \mathit{\Pi}\}$ は双対ルート系 $\mathit{\Delta}^\vee$ の基底である（命題 2.17）．したがって，$\lambda \in V$ が $\mathit{\Delta}$ に関する整ベクトルであるためには，任意の単純ルート $\alpha \in \mathit{\Pi}$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であれば十分である．また，V^* の基底 $\mathit{\Pi}^\vee$ の双対基底を $\mathit{\Pi}^{\vee *}$ と書くと，$\mathit{\Delta}$ に関する整ベクトル全体のなす集合は $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \mathit{\Pi}^{\vee *}$ であり，$(\mathit{\Delta}, \mathit{\Pi})$ に関する優整ベクトル全体のなす集合は $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}^{\vee *}$ である．

補題 3.2　V を有限次元実内積空間（その内積を $\langle -, - \rangle$ と書く），$\mathit{\Pi}$ をその基底とし，V の内積に関する $\mathit{\Pi}$ の双対基底を $\mathit{\Pi}'$ と書く．任意の異なる二つの元 $\alpha, \beta \in \mathit{\Pi}$ に対して，$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ であるとする．このとき，$\operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}' \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}$ が成り立つ．

証明　$v \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}'$ を基底 $\mathit{\Pi}$ の元の線型結合として表すとき，ある $\alpha \in \mathit{\Pi}$ の係数が負となるとする．このとき，線型形式 $f \in V^*$ を，$f(\alpha) = 1$ かつ $\beta \in \mathit{\Pi} \setminus \{\alpha\}$ に対して $f(\beta)$ が十分小さい正の実数となるようにとれば，$f(\mathit{\Pi} \cup \{-v\}) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ となる．したがって，$\mathit{\Pi} \cup \{-v\}$ は一つの半開空間に含まれる．また，$v \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}'$ より任意の $\beta \in \mathit{\Pi}$ に対して $\langle v, \alpha \rangle \geq 0$ だから，仮定と合わせて，$\mathit{\Pi} \cup \{-v\}$ の任意の異なる二つの元の内積が 0 以下であることを得る．これらのことと補題 2.4 より，$\mathit{\Pi} \cup \{-v\}$ は線型独立となるが，これは矛盾である．よって，背理法より，$\operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}' \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}$ である． □

命題 3.3　$\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上の被約ルート系とする．

(1) $\mathit{\Delta}$ に関する任意の整ベクトルは，$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \mathit{\Delta}$ に含まれる．
(2) さらに，$\mathit{\Pi}$ を $\mathit{\Delta}$ の基底とする．このとき，$(\mathit{\Delta}, \mathit{\Pi})$ に関する任意の優整ベクトルは，$\operatorname{span}_{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}$ に含まれる．

証明　Π を Δ の基底とする．

(1)　V の基底 $\Pi^{\vee *}$ から Π への基底変換行列は (Δ, Π) の Cartan 行列であり，Π から $\Pi^{\vee *}$ への基底変換行列はその逆行列である．特に，Π から $\Pi^{\vee *}$ への基底変換行列の各成分は有理数である．よって，Δ に関する整ベクトル全体のなす集合 $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \Pi^{\vee *}$ は，$V_{\mathbb{Q}}$ に含まれる．

(2)　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7，系 1.8）．$\lambda \in V$ を (Δ, Π) に関する整ベクトルとすると，任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ である．Π は補題 3.2 の仮定を満たすから（命題 2.2），$\lambda \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi$ である．このことと (1) を合わせて，$\lambda \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \Pi$ を得る．□

3.2　優整ベクトルと Weyl 群

命題 3.4　Δ を有限次元線型空間 V 上の被約ルート系とし，Π をその基底とする．Δ に関する任意の整ベクトル $\lambda \in V$ に対して，ある $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ が存在して，$s(\lambda)$ が (Δ, Π) に関する優整ベクトルとなる[*2]．

証明　一般性を失わず，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり，V に $\mathbf{W}(\Delta)$-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7，系 1.8）．$\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta_+(\Pi)} \alpha$ と置き，$s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $\langle s(\lambda), \rho \rangle$ が最大となるようにとる．すると，任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して，

$$\langle s(v), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha s(v), \rho \rangle = \langle s(v), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle s(v), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

（最後の等号で系 2.8 を用いた）より $\langle s(v), \alpha \rangle \geq 0$，すなわち $\alpha^\vee(s(\lambda)) \geq 0$ である[*3]．よって，$s(\lambda)$ は (Δ, Π) に関する優整ベクトルである．□

命題 3.5　Δ を有限次元線型空間 V 上のルート系とし，Π をその基底とする．V の部分集合 $\mathfrak{X}$ が，次の条件を満たすとする．

(i) ある $\lambda \in V$ が存在して，$\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$ となる．
(ii) $\mathfrak{X}$ は $\mathbf{W}(\Delta)$-安定である．

このとき，$\mathfrak{X}$ は有限である．

証明　必要ならば Δ の割れないルート全体のなす被約ルート系（命題 1.33）を考えることで，一般性を失わず，Δ は被約であると仮定する．$\mu \in \mathfrak{X}$ とすると，任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して，条件 (i) と (ii) より

$$\mu - \alpha^\vee(\mu)\alpha = s_\alpha(\mu) \in \mathfrak{X} \subseteq \mu + \operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \Pi$$

だから，$\alpha^\vee(\mu) \in \mathbb{Z}$ である．したがって，任意の $\mu \in \mathfrak{X}$ は，Δ に関する整ベクトルである．そこで，$\mathfrak{X}$ の元であって (Δ, Π) に関する優整ベクトルであるもの全体のなす集合を $\mathfrak{X}_{++}$ と置くと，命題 3.4 と条件 (ii) より，$\mathfrak{X} = \mathbf{W}(\Delta)\mathfrak{X}_{++}$ が成り立つ．さらに，命題 3.3 (2) と条件 (i) より，$\mathfrak{X}_{++}$ は有限である．よって，$\mathfrak{X}$ は有限である．□

[*2] より強く，軌道 $\mathbf{W}(\Delta)\lambda$ がただ一つの優整ベクトルを含むことまでいえる．証明は，Humphreys [2, §10.3, Lemma B] を参照のこと．

[*3] 定理 2.10 の証明の (1′) でも，同じような議論をした．

4　ルート系の分類

4.1　Cartan 行列と Dynkin 図形

定義 4.1（Cartan 行列）　$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．行列 $(n(\beta,\alpha))_{(\beta,\alpha)\in\mathit{\Pi}\times\mathit{\Pi}}$ を，$(\mathit{\Delta},\mathit{\Pi})$ の **Cartan 行列**（Cartan matrix）という．

命題 4.2　ルート系 $\mathit{\Delta}$ とその基底 $\mathit{\Pi}$ に対して，$(\mathit{\Delta},\mathit{\Pi})$ の Cartan 行列は正則である．

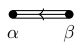
証明　$\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な非退化対称双線型形式 $\langle -,-\rangle$ を固定すると，$\alpha,\beta\in\mathit{\Delta}$ に対して $n(\beta,\alpha)=2\langle\beta,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ である（系 1.8）．$\mathit{\Pi}$ が V の基底であることより，行列 $(\langle\beta,\alpha\rangle)_{(\beta,\alpha)\in\mathit{\Pi}\times\mathit{\Pi}}$ は正則だから，Cartan 行列 $(n(\beta,\alpha))_{(\beta,\alpha)\in\mathit{\Pi}\times\mathit{\Pi}}$ も正則である．　□

Cartan 行列を視覚的に表すものとして，Dynkin 図形を導入する．そのための準備として，次の用語を定義する．

定義 4.3（不等号付き多重グラフ）　**不等号付き多重グラフ**[*4] とは，次の条件を満たす組 $(\mathit{\Gamma},c)$ をいう．

(i) $\mathit{\Gamma}$ は多重グラフである．
(ii) c は，$\mathit{\Gamma}$ において 2 重以上の辺で結ばれている 2 頂点の集合 $\{\alpha,\beta\}$ に対して，α と β のいずれかを対応させる写像である．

不等号付き多重グラフ $(\mathit{\Gamma},c)$ は，多重グラフ $\mathit{\Gamma}$ を表す図において，2 重以上の辺に，c によって選ばれた頂点のほうが「大きい」とする不等号を書き込むことで表される．たとえば，頂点 α と β が $\mathit{\Gamma}$ において 3 重辺で結ばれており，$c(\{\alpha,\beta\})=\beta$ であるとき，不等号付き多重グラフ $(\mathit{\Gamma},c)$ における頂点 α と β は，次のように表される．



$\mathit{\Delta}$ をルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とする．異なる二つの単純ルート $\alpha,\beta\in\mathit{\Pi}$ に対して，$(n(\alpha,\beta),n(\beta,\alpha))$ は $(0,0)$，$(-1,-1)$，$(-1,-2)$，$(-2,-1)$，$(-1,-3)$，$(-3,-1)$ のいずれかだから（定理 1.23，命題 2.2），$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ は 0, 1, 2, 3 のいずれかである．また，定理 1.23 と注意 1.24 (1) より，

$$\begin{aligned} \alpha \text{ と } \beta \text{ が直交しない} &\iff n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)\geq 1, \\ \alpha \text{ と } \beta \text{ が直交せず，異なる長さをもつ} &\iff n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)\geq 2 \end{aligned}$$

である（「異なる長さをもつ」の意味については，注意 1.22 を参照のこと）．以上を踏まえて，次のように定義する．

定義 4.4（Dynkin 図形）　ルート系 $\mathit{\Delta}$ とその基底 $\mathit{\Pi}$ に対して，次のように定まる不等号付きグラフ $(\mathit{\Gamma},c)$ を，$(\mathit{\Delta},\mathit{\Pi})$ の **Dynkin 図形**（Dynkin diagram）という（表 3 も参照のこと）．

(i) $\mathit{\Gamma}$ は，$\mathit{\Pi}$ を頂点集合とし，異なる二つの単純ルート $\alpha,\beta\in\mathit{\Pi}$ を $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)$ 本の辺で結んで得られる多重グラフである．

[*4] 「不等号付き多重グラフ」は，本稿だけの用語である．

表 3　Dynkin 図形の辺と不等号

$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	Dynkin 図形における頂点 α と β
0	0	$\overset{\alpha}{\bullet}\quad\overset{\beta}{\bullet}$
-1	-1	$\bullet\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\bullet$
-1	-2	$\bullet\Leftarrow\bullet$
-2	-1	$\bullet\Rightarrow\bullet$
-1	-3	$\bullet\Lleftarrow\bullet$
-3	-1	$\bullet\Rrightarrow\bullet$

(ii) c は，$\varGamma$ において 2 重以上の辺で結ばれている 2 頂点の集合 $\{\alpha,\beta\}$ に対して，α と β のうち長いほうを対応させる写像である．

命題 4.5　ルート系 $\varDelta$ とその基底 $\varPi$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\varDelta$ は既約である．
(b) $(\varDelta,\varPi)$ の Dynkin 図形は連結である．

証明　命題 2.12 のいいかえにすぎない．　□

定理 2.10 と系 2.11 より，被約なルート系の同型類は Cartan 行列の同型類と一対一に対応し，したがって，Dynkin 図形の同型類とも一対一に対応する．さらに，命題 4.5 より，その中で，被約な既約ルート系の同型類と連結 Dynkin 図形の同型類が一対一に対応する．よって，被約な既約ルート系を分類するためには，連結 Dynkin 図形としてありうるものを絞り込んだ上で，それらの連結 Dynkin 図形に対応する既約ルート系が構成できるかどうかを考えればよい．

4.2　Dynkin 図形の分類

$\varDelta$ は有限次元実内積空間 V 上のルート系であり，その内積は $\mathbf{W}(\varDelta)$-不変であるとする．$\varPi$ を $\varDelta$ の基底とすると，

- $\varPi$ は V の基底だから，特に線型独立である．
- 任意の $\alpha,\ \beta\in\varPi$ に対して，$\langle\alpha,\beta\rangle\leq 0$ である（命題 2.2）．
- $(\varDelta,\varPi)$ の Dynkin 図形において，α と β を結ぶ辺の本数は
$$n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha)=\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}\cdot\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=4\left\langle\frac{\alpha}{\|\alpha\|},\frac{\beta}{\|\beta\|}\right\rangle^2$$
であり（系 1.8 (2)），これは 0, 1, 2, 3 のいずれかである（定理 1.23）．

これを踏まえて，次のように定義する．

定義 4.6（許容可能なベクトルの集合）　V を有限次元実内積空間とする．単位ベクトルの集合 S が**許容可能**

(admissible) であるとは，次の条件を満たすことをいう．

(i) S は線型独立である．

(ii) 任意の異なる二つの元 $v,\ w \in S$ に対して，$\langle v, w\rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w\rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である（あるいは同値だが，$\angle(v, w) \in \{90°, 120°, 135°, 150°\}$ である）．

定義 4.7（許容可能な多重グラフ） 許容可能な単位ベクトルの集合 S に対して，多重グラフ $\mathit{\Gamma}(S)$ を，S を頂点集合とし，異なる 2 頂点 $v,\ w \in S$ が $4\langle v, w\rangle^2$ 本の辺で結ばれるものとして定める．多重グラフ $\mathit{\Gamma}$ は，ある許容可能な単位ベクトルの集合 S に対する $\mathit{\Gamma}(S)$ に同型であるとき，**許容可能**（admissible）であるという．

注意 4.8 $\mathit{\Delta}$ を有限次元線型空間 V 上のルート系，$\mathit{\Pi}$ をその基底とし，$(\mathit{\Gamma}, c)$ を $(\mathit{\Delta}, \mathit{\Pi})$ の Dynkin 図形とする．$\mathit{\Delta}$ を有限次元実線型空間 $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$（$V_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \mathit{\Delta}$）上のルート系とみなし（命題 1.7），$V_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathbf{W}(\mathit{\Delta})$-不変な内積 $\langle -, -\rangle$ を一つ固定する（系 1.8 (1)）．このとき，

$$S = \left\{ \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \;\middle|\; \alpha \in \mathit{\Pi} \right\}$$

は許容可能な単位ベクトルの集合であり，対応する多重グラフ $\mathit{\Gamma}(S)$ は $\mathit{\Gamma}$ に等しい．よって，$\mathit{\Gamma}$ は許容可能である．

以下，許容可能な連結多重グラフを分類する．

補題 4.9 許容可能な多重グラフは，（長さ 3 以上の）サイクルを含まない．

証明 S を許容可能な単位ベクトルの集合とし，$\mathit{\Gamma}(S)$ において $S_0 \subseteq S$ がサイクルをなすとする．$v,\ w \in S_0$ を異なる 2 頂点とすると $\langle v, w\rangle \leq 0$ だが，S_0 に属する頂点どうしを結ぶ辺は少なくとも $\#S_0$ 本あるから，このうち少なくとも $2\#S_0$ 組の (v, w)（順序を考慮するため 2 倍になる）に対して $\langle v, w\rangle \leq -1/2$ である．したがって，

$$\left\| \sum_{v \in S_0} v \right\|^2 = \#S_0 + \sum_{v, w \in S_0,\ v \neq w} \langle v, w\rangle \leq \#S_0 + 2\#S_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

であり，$\sum_{v \in S_0} v = 0$ を得るが，これは S が線型独立であることに反する．よって，背理法より，$\mathit{\Gamma}(S)$ はサイクルを含まない． □

補題 4.10 許容可能な多重グラフにおいて，各頂点の次数（その頂点から伸びている辺の本数）は 3 以下である．

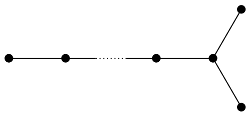
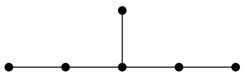
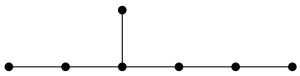
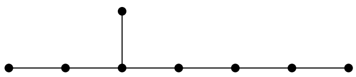
証明 S を許容可能な単位ベクトルの集合とする．$v \in S$ とし，$\mathit{\Gamma}(S)$ において v と辺で結ばれている頂点全体の集合を S_v と置く．補題 4.9 より，S_v に属するどの 2 頂点も辺で結ばれていないから，S_v は正規直交系をなす．S が線型独立であることより $v \notin \operatorname{span}_{\mathbb{R}} S_v$ だから，

$$4 \sum_{w \in S_v} \langle v, w\rangle^2 < 4\|v\|^2 = 4$$

である．頂点 v と w は $4\langle v, w\rangle^2$ 本の辺で結ばれているから，上式は，頂点 v の次数が 3 以下であることを示す． □

補題 4.11 $\mathit{\Gamma}$ を許容可能な多重グラフとする．$v_0,\ \ldots,\ v_k$（$k \in \mathbb{N}$）は $\mathit{\Gamma}$ の異なる頂点の列であり，各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して，v_i は v_{i-1} および v_{i+1} とそれぞれちょうど 1 本の辺で結ばれ，それ以外の頂点とは

表 4　許容可能な連結多重グラフの分類

型（l は頂点数）	多重グラフ
A_l $(l \geq 1)$	
$\mathrm{B}_l = \mathrm{C}_l$ $(l \geq 2)$	
D_l $(l \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

辺で結ばれていないとする．このとき，v_0, ..., v_k を一つの頂点に潰して得られる多重グラフ Γ' は，また許容可能である．

証明　Γ は，許容可能な単位ベクトルの集合 S に対応する多重グラフ $\Gamma(S)$ であるとしてよい．$v = v_0 + \cdots + v_k$，$S' = (S \setminus \{v_0, \ldots, v_k\}) \cup \{v\}$ と置く（S は線型独立だから，$v \notin S$ である）．すると，

- S は線型独立だから，S' も線型独立である．
- $\|v\|^2 = \sum_{0 \leq i,j \leq k} \langle v_i, v_j \rangle = k - (k-1) = 1$ である．
- 任意の $w \in S' \setminus \{v\}$ について，仮定より $\langle v_i, w \rangle = 0$（$1 \leq i \leq k-1$）であり，補題 4.9 より $\langle v_0, w \rangle$ と $\langle v_k, w \rangle$ のうち少なくとも一方は 0 である．したがって，$\langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^{k} \langle v_k, w \rangle$ は 0 または $\langle v_0, w \rangle$ または $\langle v_k, w \rangle$ に等しく，いずれにしても $\langle v, w \rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である．

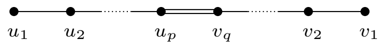
よって，S' は許容可能な単位ベクトルの集合であり，対応する多重グラフ $\Gamma(S')$ は Γ' に同型である．よって，Γ' は許容可能である．　□

定理 4.12（許容可能な連結多重グラフの分類）　許容可能な連結多重グラフは，表 4 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である．

証明　S を許容可能な単位ベクトルの集合とし，$\Gamma = \Gamma(S)$ と置く．Γ は連結であるとする．

(I)　Γ が 3 重辺をもつ場合，補題 4.10 より，Γ は G_2 に同型である．

(II)　Γ が 3 重辺をもたず 2 重辺をもつ場合，2 重辺はただ一つであり，2 重辺の両端以外に次数 3 以上の頂点は存在しない（存在するとすると，補題 4.11 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ，補題 4.10 に反する）．したがって，Γ は次の形である（$1 \leq p \leq q$）．



ここで，

$$u = \sum_{i=1}^{p} i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{q} i v_i$$

と置くと，

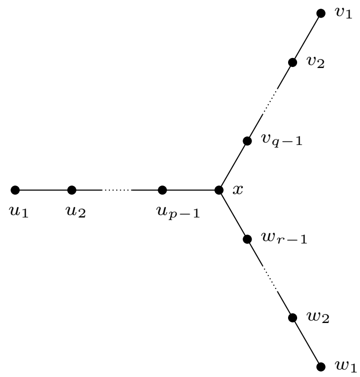
$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}, \qquad \text{同様に } \|v\|^2 = \frac{q(q+1)}{2},$$
$$\langle u, v\rangle^2 = \frac{p^2q^2}{2}$$

である．u と v が線型独立であることと Cauchy–Schwarz の不等式より $\langle u, v\rangle^2 < \|u\|^2\|v\|^2$ だから，

$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2}$$

である．これを整理すると $pq < p+q+1$ となり，これを満たす (p,q) は，$(1, l-1)$（$l \geq 2$ は任意）と $(2,2)$ のみである．それぞれの場合，Γ は $\mathrm{B}_l = \mathrm{C}_l$ と F_4 に同型である．

(III) Γ が 1 重辺のみをもつ場合，次数 3 以上の頂点はたかだか一つである（二つ以上あるとすると，補題 4.11 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ，補題 4.10 に反する）．次数 3 の頂点が存在しなければ，Γ はある A_l（$l \geq 1$）に同型である．次数 3 の頂点が存在すれば，Γ は次の形である（$2 \leq p \leq q \leq r$）．



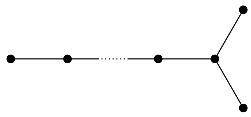
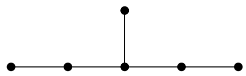
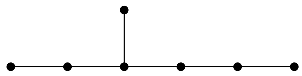
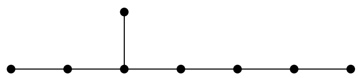
ここで，

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{q-1} i v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{r-1} i w_i$$

と置くと，u, v, w は直交系であり，(II) と同じ計算により

$$\|u\|^2 = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad \|v\|^2 = \frac{q(q-1)}{2}, \qquad \|w\|^2 = \frac{r(r-1)}{2},$$
$$\langle u, x\rangle^2 = \frac{(p-1)^2}{4}, \qquad \langle v, x\rangle^2 = \frac{(q-1)^2}{4}, \qquad \langle w, x\rangle^2 = \frac{(r-1)^2}{4}$$

表 5　連結 Dynkin 図形の分類

型（l は頂点数）	Dynkin 図形
A_l $(l \geq 1)$	
B_l $(l \geq 2)$	
C_l $(l \geq 3)$	
D_l $(l \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

を得る．したがって，$x \notin \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{u, v, w\}$ と合わせて，

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|^2 &> \left\langle \frac{u}{\|u\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{v}{\|v\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{w}{\|w\|}, x \right\rangle^2 \\ &= \frac{(p-1)^2/4}{p(p-1)/2} + \frac{(q-1)^2/4}{q(q-1)/2} + \frac{(r-1)^2/4}{r(r-1)/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

を得る．これを整理すると $1/p + 1/q + 1/r > 1$ となり，これを満たす (p, q, r) は，$(2, 2, l-2)$（$l \geq 4$ は任意），$(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ のみである．それぞれの場合，$\mathit{\Gamma}$ は D_l, E_6, E_7, E_8 に同型である．　□

定理 4.13（連結 Dynkin 図形の分類）　許容可能な連結多重グラフは，表 5 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である．

証明　$(\mathit{\Gamma}, c)$ を連結 Dynkin 図形とすると，$\mathit{\Gamma}$ は許容可能な連結多重グラフである（注意 4.8）．許容可能な連結多重グラフ $\mathit{\Gamma}$ は定理 4.12 で分類されており，対応する c としてありうるものは，同型を除いて，表 5 に挙げたもので尽くされる．よって，連結 Dynkin 図形は，表 5 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である．　□

表 5 に従って，**$\mathbf{A}_l$** $(l \geq 1)$, **$\mathbf{B}_l$** $(l \geq 2)$, **$\mathbf{C}_l$** $(l \geq 3)$, **$\mathbf{D}_l$** $(l \geq 4)$, **$\mathbf{E}_6$**, **$\mathbf{E}_7$**, **$\mathbf{E}_8$**, **$\mathbf{F}_4$**, **$\mathbf{G}_2$ 型の Dynkin 図形**を定める．便宜上，A_1 型を B_1 型や C_1 型，B_2 型を C_2 型，A_1 型の二つの直和を D_2 型，A_3 型を D_3 型ともいう．**$\mathbf{A}_l$** $(l \geq 1)$, **$\mathbf{B}_l$** $(l \geq 1)$, **$\mathbf{C}_l$** $(l \geq 1)$, **$\mathbf{D}_l$** $(l \geq 2)$, **$\mathbf{E}_6$**, **$\mathbf{E}_7$**, **$\mathbf{E}_8$**, **$\mathbf{F}_4$**, **$\mathbf{G}_2$ 型のルート系**とは，被約なルート系であって，対応する型の Dynkin 図形をもつものをいう．これらは，D_2 型のルート系を除いては，既約である．

4.3　被約な既約ルート系の構成と分類

本小節では，定理 4.13 で示した連結 Dynkin 図形に対応する被約な既約ルート系を，具体的に構成する．以下，$\mathbb{K}^n$ の標準基底を $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ と書く．構成は，$\mathbb{K}^n$ あるいはその部分線型空間上で行い，標準的な対称双線型形式 $(\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i, \sum_{i=1}^n b_i\epsilon_i) \mapsto \sum_{i=1}^n a_ib_i$ が Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ に関して不変となるようにする．

A_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系

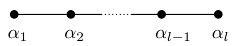
$V = \{\sum_{i=1}^{l+1} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^{l+1} \mid t_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{l+1} t_i = 0\}$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$$

は，$l(l+1)$ 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，A_l 型の既約ルート系である．実際,

$$\begin{aligned}&\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\},\\ &\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq l)\end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



B_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系

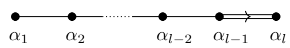
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は，$2l^2$ 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，B_l 型の既約ルート系である．実際,

$$\begin{aligned}&\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\},\\ &\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \qquad \alpha_l = \epsilon_l\end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



C_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系

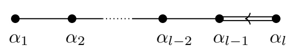
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は，$2l^2$ 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，C_l 型の既約ルート系である．実際,

$$\begin{aligned}&\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\},\\ &\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \qquad \alpha_l = 2\epsilon_l\end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



D_l 型（$l \geq 2$）の（既約）ルート系

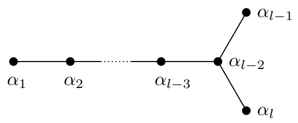
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

は，$2l(l-1)$ 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，D_l 型の（$l \geq 3$ ならば既約）ルート系である．実際，

$$\begin{aligned} &\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}, \\ &\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \qquad \alpha_l = \epsilon_{l-1} + \epsilon_l \end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



E_6 型の既約ルート系

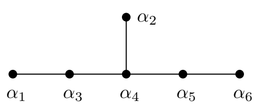
$V = \{\sum_{i=1}^{8} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^8 \mid t_i \in \mathbb{K},\, t_6 + t_8 = t_7 + t_8 = 0\}$ の部分集合

$$\begin{aligned} \Delta = &\{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \\ &\cup \left\{ \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8\right) \,\middle|\, \nu(i) \in \{0,1\},\, \sum_{i=1}^{5}\nu(i) \in 2\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

は，72 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，E_6 型の既約ルート系である．実際，

$$\begin{aligned} &\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}, \\ &\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\ &\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \quad \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4 \end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



E_7 型の既約ルート系

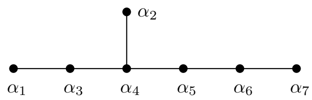
$V = \{\sum_{i=1}^{8} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^8 \mid t_i \in \mathbb{K},\, t_7 + t_8 = 0\}$ の部分集合

$$\begin{aligned} \Delta = &\{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-\epsilon_7 + \epsilon_8)\} \\ &\cup \left\{ \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i - \epsilon_7 + \epsilon_8\right) \,\middle|\, \nu(i) \in \{0,1\},\, \sum_{i=1}^{6}\nu(i) \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\} \end{aligned}$$

は，126 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，E_7 型の既約ルート系である．実際，

$$\begin{aligned} &\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}, \\ &\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\ &\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \quad \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \quad \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5 \end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



E_8 型の既約ルート系

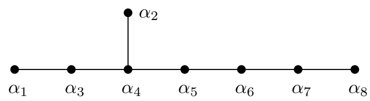
$V = \mathbb{K}^8$ の部分集合

$$\begin{aligned}\Delta = &\{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \\ &\cup \left\{ \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i + \epsilon_8\right) \,\middle|\, \nu(i) \in \{0,1\},\, \sum_{i=1}^{7}\nu(i) \in 2\mathbb{Z} \right\}\end{aligned}$$

は，240 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，E_8 型の既約ルート系である．実際，

$$\begin{aligned}&\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}, \\ &\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\ &\alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \\ &\alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \quad \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5, \quad \alpha_8 = \epsilon_7 - \epsilon_6\end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



F_4 型の既約ルート系

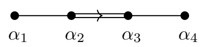
$V = \mathbb{K}^4$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\right\}$$

は，48 個のルートからなる V 上のルート系である．Δ は，F_4 型の既約ルート系である．実際，

$$\begin{aligned}&\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \\ &\alpha_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \quad \alpha_2 = \epsilon_3 - \epsilon_4, \quad \alpha_3 = \epsilon_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)\end{aligned}$$

は Δ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



G_2 型の既約ルート系

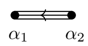
$V = \{\sum_{i=1}^{3} t_i\epsilon_i \in \mathbb{K}^3 \mid t_i \in \mathbb{K},\, t_1 + t_2 + t_3 = 0\}$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_1 - \epsilon_2), \pm(-\epsilon_1 + \epsilon_3), \pm(-\epsilon_2 + \epsilon_3), \pm(-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \pm(\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3), \pm(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3)\}$$

は，12 個のルートからなる V 上のルート系である．$\varDelta$ は，G_2 型の既約ルート系である．実際，

$$\begin{aligned} &\varPi = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \\ &\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \qquad \alpha_2 = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

は $\varDelta$ の基底であり，対応する Dynkin 図形は次のとおりである．



4.4　被約でない既約ルート系の構成と分類

$\varDelta$ を被約でない既約ルート系とすると，定理 1.36 より，

(1) $\varDelta$ の各ルートの最短ルートに対する長さの比は $1, \sqrt{2}, 2$ のいずれかであり，

それぞれの比をもつルートの全体を A, B, C と置くと，

(2) $2A = C$ であり，
(3) A に属する異なる二つのルートは直交し，
(4) $\varDelta' = A \cup B$ と $\varDelta'' = B \cup C$ は V 上の被約な既約ルート系である．

長さの比の条件と (3), (4) より，$\varDelta' = A \cup B$ は，B_l 型（$l \geq 1$）の既約ルート系でなければならない．したがって，$\varDelta$ は，線型同型を除いて，$\mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i, \pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

と同一視できる．

逆に，$\varDelta$ を上記の $V = \mathbb{K}^l$ の部分集合と定めると，容易に確かめられるように，これは V 上の $2l(l+1)$ 個のルートからなる被約でないルート系である．さらに，割れないルートの全体

$$\varDelta' = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は B_l 型の既約ルート系だから，$\varDelta$ も既約である（命題 1.33 (1)）．なお，$\varDelta'' = \{\alpha \in \varDelta \mid 2\alpha \notin \varDelta\}$（注意 1.34）は

$$\varDelta'' = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

となり，これは C_l 型の既約ルート系である．

以上より，各整数 $l \geq 1$ に対して，階数 l の被約でない既約ルート系が同型を除いて一意に存在する．これを，**BC_l 型のルート系**という．

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4 à 6*, Springer, 2007.
[2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.