列型空間のノート

箱（@o_ccah）

2020 年 3 月 14 日

概要

「位相が点列の収束によって定まっている」といえる位相空間，列型空間について解説する．

目次

記号と用語

- X を位相空間とする．点 $x \in X$ の近傍フィルタ（近傍全体のなすフィルタ）を，$\mathfrak{N}_X(x)$ あるいは単に $\mathfrak{N}(x)$ と書く．
- X を集合，$\{Y_i\}_{i \in I}$ を位相空間族，$\{\sigma_i : Y_i \to X\}_{i \in I}$ を写像族とする．すべての σ_i を連続にするような X 上の最大の位相を，$\{\sigma_i\}_{i \in I}$ が誘導する X 上の終位相という．
- X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を写像とし，X 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ によって定める．f が誘導する商空間 $X/\sim$ から Y への写像が同相であるとき，f を沈め込みという．
- X を位相空間，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X 上の点列，$x \in X$ とする．x が $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限点である，あるいは $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が x に収束するとは，任意の近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在し，$x_n, x_{n+1}, \ldots \in U$ が成り立つことをいう．x が $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の接触点であるとは，任意の近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \cap U \neq \emptyset$ が成り立つことをいう．

1 点列閉集合，点列閉包

定義 1.1（点列閉集合・点列閉包） X を位相空間，A を X の部分集合とする．

(1) A が X の**点列閉集合**であるとは，A の点からなる任意の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について，そのすべての（X 上での）極限点が A に属することをいう．

(2) A の点からなる点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって点 $x \in X$ を極限点とするものが存在するとき，x は A の**点列接触点**であるという．A の点列接触点全体の集合を A の（X における）**点列閉包**といい，$\operatorname{scl}(A)$ ある

いは $\mathrm{scl}_X(A)$ と書く．写像 $\mathrm{scl}\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ を，位相空間 X の**点列閉包作用素**という．

A が点列閉集合であることは，$\mathrm{scl}(A) = A$ であることと同値である．

命題 1.2　X を位相空間とする．

(1) $A \subseteq X$ に対して，$A \subseteq \mathrm{scl}(A) \subseteq \overline{A}$ である．
(2) $A_0, \dots, A_{n-1} \subseteq X$ に対して，$\mathrm{scl}(A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}) = \mathrm{scl}(A_0) \cup \dots \cup \mathrm{scl}(A_{n-1})$（特に $\mathrm{scl}(\emptyset) = \emptyset$）である．

証明　(1)　任意の点 $x \in A$ に対して，定点列 $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束するから，$A \subseteq \mathrm{scl}(A)$ である．A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するならば，$x \in \overline{A}$ である．よって，$\mathrm{scl}(A) \subseteq \overline{A}$ である．

(2)　$i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して，$A_i \subseteq A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ だから $\mathrm{scl}(A_i) \subseteq \mathrm{scl}(A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$ である．よって，$\mathrm{scl}(A_0) \cup \dots \cup \mathrm{scl}(A_{n-1}) \subseteq \mathrm{scl}(A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$ が成り立つ．

逆向きの包含を示す．$x \in \mathrm{scl}(A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$ とすると，$A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}$ の点からなる点列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ であって x に収束するものがとれる．このとき，無限個の項 x_k が A_i に属するような $i \in \{0, \dots, n-1\}$ がとれる．そのような i をとり，$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の項のうち A_i に属するものだけからなる部分列を考える．この部分列も x に収束するから，$x \in \mathrm{scl}(A_i)$ である．よって，$\mathrm{scl}(A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subseteq \mathrm{scl}(A_0) \cup \dots \cup \mathrm{scl}(A_{n-1})$ が成り立つ．　□

命題 1.3　位相空間 X に対して，次が成り立つ．[*1]

(1) X の部分集合族 $\{F_i\}_{i\in I}$ について，各 F_i が X の点列閉集合ならば，$\bigcap_{i\in I} F_i$ は X の点列閉集合である（特に，X は X の点列閉集合である）．
(2) X の部分集合 $F_0, \dots, F_{n-1}$ について，$F_0, \dots, F_{n-1}$ が X の点列閉集合ならば，$F_0 \cup \dots \cup F_{n-1}$ は X の点列閉集合である（特に，$\emptyset$ は X の点列閉集合である）．

証明　(1)　$F = \bigcap_{i\in I} F_i$ と置く．各 F_i が点列閉集合であるとすると，任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{scl}(F) \subseteq \mathrm{scl}(F_i) = F_i$ だから，$\mathrm{scl}(F) \subseteq F$ が成り立つ．一方で，$F \subseteq \mathrm{scl}(F)$ である（命題 1.2 (1)）．よって，$\mathrm{scl}(F) = F$ であり，F は点列閉集合である．

(2)　「任意の $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して $\mathrm{scl}(F_i) = F_i$」ならば $\mathrm{scl}(F_0 \cup \dots \cup F_{n-1}) = F_0 \cup \dots \cup F_{n-1}$ であることを示せばよいが，これは命題 1.2 (2) から従う．　□

命題 1.4　位相空間において，任意の閉集合は点列閉集合である．

証明　命題 1.2 (1) から従う．　□

命題 1.5　X を位相空間，X' をその部分空間とする．$A \subseteq X'$ に対して，$\mathrm{scl}_{X'}(A) = \mathrm{scl}_X(A) \cap X'$ である．

証明　$x \in X'$ とする．A の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X' 上の点列として x に収束することと X 上の点列として x に収束することとは同値だから，$\mathrm{scl}_{X'}(A) = \mathrm{scl}_{X'}(A) \cap X' = \mathrm{scl}_X(A) \cap X'$ が成り立つ．　□

[*1] したがって，位相空間 X の点列閉集合全体は（それを閉集合全体とする）集合 X 上の位相を定める．しかし，その位相が X のもとの位相と一致するとは限らない．これらの位相が一致することは，X が列型空間（定義 2.1 (1)）であることと同値である．

2　列型空間と Fréchet–Urysohn 空間

定義 2.1（列型空間，Fréchet–Urysohn 空間）　X を位相空間とする．

(1) X が**列型**であるとは，X の閉集合全体と点列閉集合全体が一致することをいう．
(2) X が **Fréchet–Urysohn** であるとは，X の閉包作用素と点列閉包作用素が一致することをいう．

明らかに，Fréchet–Urysohn 空間は列型である．

命題 2.2　位相空間 X に対して，次の 2 条件は同値である．

(a) X は Fréchet–Urysohn である．
(b) X の任意の部分空間は列型である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　対偶を示す．X の部分空間 X' が列型でないとすれば，部分集合 $A \subseteq X'$ であって $\mathrm{cl}_{X'}(A) \setminus \mathrm{scl}_{X'}(A) \neq \emptyset$ を満たすものが存在する．このとき，命題 1.5 より

$$\mathrm{cl}_X(A) \setminus \mathrm{scl}_X(A) \supseteq (\mathrm{cl}_X(A) \setminus \mathrm{scl}_X(A)) \cap X' = \mathrm{cl}_{X'}(A) \setminus \mathrm{scl}_{X'}(A) \neq \emptyset$$

だから，X は Fréchet–Urysohn ではない．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　対偶を示す．X が Fréchet–Urysohn でないとすれば，部分集合 $A \subseteq X$ であって $\mathrm{scl}(A) \subset \overline{A}$ を満たすものが存在する．1 点 $x \in \overline{A} \setminus \mathrm{scl}(A)$ を固定する．このとき，A は $A \cup \{x\}$ の点列閉集合だが，閉集合ではない．よって，X の部分空間 $A \cup \{x\}$ は列型ではない．　□

命題 2.3　第一可算空間は Fréchet–Urysohn である．

証明　X を第一可算空間として，任意の $A \subseteq X$ に対して $\overline{A} \subseteq \mathrm{scl}(A)$ であることを示せばよい．$x \in \overline{A}$ を任意にとり，x の可算近傍基 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ をとる．$x \in \overline{A}$ よりすべての U_n は A と交わるから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in U_n \cap A$ を満たす点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がとれる．このとき，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は x に収束する．実際，任意の近傍 $U \in \mathfrak{N}(x)$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $U_n \subseteq U$ となり，このとき $x_n, x_{n+1}, \ldots \in U$ である．よって，$x \in \mathrm{scl}(A)$ である．よって，$\overline{A} \subseteq \mathrm{scl}(A)$ である．　□

命題 2.4　列型空間の商は列型である．特に，列型空間の開連続像および閉連続像は列型である．

証明　X を列型空間，$X/{\sim}$ をその商空間，$\pi\colon X \to X/{\sim}$ を等化写像とする．商位相の定義および X が列型であることから，$X/{\sim}$ の点列閉集合 F に対して，$\pi^{-1}(F)$ が X の点列閉集合であることを示せば十分である．$\pi^{-1}(F)$ の点からなる点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するとする．π は連続だから，このとき，F の点からなる点列 $(\pi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は $\pi(x)$ に収束する．F は点列閉集合だから $\pi(x) \in F$ であり，したがって $x \in \pi^{-1}(F)$ である．よって，$\pi^{-1}(F)$ は X の点列閉集合である．

後半の主張は，開連続全射および閉連続全射が沈め込みであることから従う．　□

定理 2.5　位相空間 X に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) 距離化可能空間から X への沈め込みが存在する．
(b) 第一可算空間から X への沈め込みが存在する．
(c) X は列型である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　距離化可能空間が第一可算であることから明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　第一可算空間が列型であること（命題 2.3）と列型空間の商が列型であること（命題 2.4）から従う．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$(X, \mathfrak{O})$ を列型空間とする．$\mathbb{N}$ の 1 点コンパクト化を $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とする．$\mathbb{N}^*$ は $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ と同相だから距離化可能であり，したがってその任意の直和も距離化可能であることに注意する．$\mathbb{N}^*$ から X への連続写像全体が誘導する X 上の終位相を $\mathfrak{O}'$ とする．終位相の沈めこみ定理より，$\mathbb{N}^*$ のいくつかの直和から $(X, \mathfrak{O}')$ への沈め込みが得られる．したがって，$\mathfrak{O}' = \mathfrak{O}$ を示せば主張が従う．

$\mathfrak{O}' \supseteq \mathfrak{O}$ は終位相の特徴付けからわかる．$\mathfrak{O}' \subseteq \mathfrak{O}$ を示す．$(X, \mathfrak{O})$ は列型だったから，$\mathfrak{O}'$ に関する閉集合 F が $\mathfrak{O}$ に関する点列閉集合であることを示せばよい．F の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x_\infty \in X$ に収束するとする．このとき，対応 $n \mapsto x_n$ は $\mathbb{N}^*$ から $(X, \mathfrak{O})$ への連続写像だから，終位相 $\mathfrak{O}'$ の定義より，$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x_n \in F\} = \mathbb{N} \cup \{\infty \mid x_\infty \in F\}$ は $\mathbb{N}^*$ の閉集合である．ところが，$\mathbb{N}$ は $\mathbb{N}^*$ の閉集合ではないから，$x_\infty \in F$ でなければならない．よって，F は $\mathfrak{O}$ に関する点列閉集合である．　□

3　列型空間の位相的性質と点列

命題 3.1　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) X が列型空間であるとする．このとき，f が連続であることと f が点列連続であることとは同値である．
(2) X が Fréchet–Urysohn 空間であるとする．このとき，f が $x \in X$ において連続であることと f が x において点列連続であることとは同値である．

証明　「連続ならば点列連続である」ことは一般の位相空間で成り立つ．そこで，与えられた条件の下で「連続でなければ点列連続でない」ことを示せばよい．

(1)　X が列型空間であり，f が連続でないとする．すると，Y の閉集合 F であって，$f^{-1}(F)$ が X の閉集合でないものがとれる．X は列型だから，$f^{-1}(F)$ は X の点列閉集合ではない．すなわち，$f^{-1}(F)$ の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，ある点 $x \in X \setminus f^{-1}(F)$ に収束するものが存在する．このとき，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は閉集合 F の点からなる点列だから，$f(x) \in Y \setminus F$ には収束しない．よって，f は点列連続でない．

(2)　X が Fréchet–Urysohn 空間であり，f が $x \in X$ において連続でないとする．すると，$f(x)$ の開近傍 V であって，$f^{-1}(V)$ が x の近傍でないものがとれる．X は Fréchet–Urysohn だから，$x \in \overline{X \setminus f^{-1}(V)} = \operatorname{scl}(X \setminus f^{-1}(V))$ である．すなわち，$X \setminus f^{-1}(V)$ の点からなる点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，x に収束するものが存在する．このとき，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は閉集合 $Y \setminus V$ の点からなる点列だから，$x \in V$ には収束しない．よって，f は x において点列連続でない．　□

命題 3.2　列型空間 X 上の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ を接触点とするための必要十分条件は，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列であって x に収束するものが存在することである．

証明　十分性は，列型空間に限らず一般の位相空間で成り立つ．必要性を示す．点 x が $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点であるとする．x のすべての近傍に含まれるような項 x_n が無限個存在するならば，そのような項だけをとり出すことによって x に収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が構成できる．

次に，x のすべての近傍に含まれる項が有限個しか存在しない場合を考える．この場合，そのような項は存

在しないと仮定しても一般性を失わない．x は $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の接触点だから，$x \in \overline{\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}}$ である．したがって，X が列型であることより，$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の点からなる点列 $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で x に収束するものが存在する．x のすべての近傍に含まれるような x_n は存在しないとしたから，写像 $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は非有界である．収束点列の任意の部分列がもとの点列と同じ点に収束することに注意すれば，ϕ は狭義単調増加であるとしてよい．このとき，$(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列となる． □

その上の任意の点列が収束部分列をもつような位相空間は，点列コンパクトであるという．また，その任意の可算開被覆が有限部分被覆をもつような位相空間は，可算コンパクトであるという．位相空間が可算コンパクトであるための必要十分条件は，その上の任意の点列が接触点をもつことである．これより，次の系を得る．

系 3.3　列型空間について，点列コンパクト性と可算コンパクト性は同値である． □

参考文献

[1] Dan Ma, Dan Ma's Topology Blog 'Sequential spaces, I', 2010.（2020 年 3 月 14 日アクセス）
https://dantopology.wordpress.com/2010/06/21/sequential-spaces-i/

[2] Dan Ma, Dan Ma's Topology Blog 'Sequential spaces, II', 2010.（2020 年 3 月 14 日アクセス）
https://dantopology.wordpress.com/2010/06/23/sequential-spaces-ii/