スペクトル分解

箱

2024 年 9 月 21 日

概要

C* 代数の理論を前提として，正規作用素のスペクトル分解定理を証明する．スペクトル分解定理のいくつかの応用にも触れる．

目次

記号と用語

- 自然数，整数，実数，複素数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と書く．0 は自然数に含める．また，$\mathbb{N}_{>0} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$，$\mathbb{U} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ と書く．
- 写像 $f\colon X \to Y$ のグラフを，$\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ と書く．
- 考えている空間 X の部分集合 A に対して，その特性関数を χ_A と書く．
- 線型空間などの係数体は常に $\mathbb{C}$ とし，いちいち明示しない．
- 局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の無限遠で消える複素数値連続関数全体のなす C* 代数を，$C_0(X)$ と書く．X がコンパクト Hausdorff 空間である場合には，$C_0(X)$ は X 上の複素数値連続関数全体のなす単位的 C* 代数となるが，これを $C(X)$ と書く．
- 位相線型空間 E 上の恒等作用素を，1_E と書く．
- 位相線型空間 E, F に対して，E から F への連続線型写像全体のなす空間を $\mathscr{L}(E; F)$ と書く．$\mathscr{L}(E; E)$ を単に $\mathscr{L}(E)$ と書く．E, F がノルム空間である場合には，$\mathscr{L}(E; F)$ を作用素ノルムによってノルム空間とみなす．
- ノルム空間 E のノルムを，$\|{-}\|_E$ あるいは単に $\|{-}\|$ と書く．内積空間 $\mathcal{H}$ の内積を，$\langle {-} | {-} \rangle_{\mathcal{H}}$ あるいは単に $\langle {-} | {-} \rangle$ と書く．内積は，左の引数に関して共役線型，右の引数に関して線型とする．

1　Hilbert 空間上の線型作用素

1.1　線型作用素

定義 1.1（線型作用素）　線型空間 E の部分線型空間から線型空間 F への線型写像を，E から F への**線型作用素**（linear operator）あるいは単に**作用素**（operator）という．E から E への線型作用素を，E 上の線型作用素という．E から F への線型作用素 T に対して，その定義域を $\operatorname{Dom} T$ と書く．

線型空間 E から F への線型作用素 T は，$\operatorname{Dom} T = E$ であるとき，**全域で定義されている**という．また，E が位相線型空間であり，$\operatorname{Dom} T$ が E において稠密であるとき，T は**稠密に定義されている**（densely defined）という．

線型空間 E から F への線型作用素 T と S は，定義域を含めて一致するとき，等しいといい，$T = S$ と書く．また，$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} S$ かつ $S|_{\operatorname{Dom} T} = T$ であるとき，S は T の拡張であるといい，$T \subseteq S$ あるいは $S \supseteq T$ と書く．

線型空間 E から F への線型作用素 T は，特に断らない限り，$\operatorname{Dom} T$ から F への写像と考える．T が全射，単射，あるいは全単射であるなどの言明は，$\operatorname{Dom} T$ から F への写像としての性質を述べたものである．また，T の $\operatorname{Dom} T$ から F への線型写像としての核・像を，単に T の核・像といい，それぞれ $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ と書く．すなわち，

$$\operatorname{Ker} T = \{\xi \in \operatorname{Dom} T \mid T\xi = 0\},$$
$$\operatorname{Im} T = \{T\xi \mid \xi \in \operatorname{Dom} T\}$$

である．

定義 1.2（線型作用素の演算）　E, F, G を線型空間とする．

(1) E から F への線型作用素 T, S に対して，T と S の**和**と呼ばれる E から F への線型作用素 $T + S$ を，次のように定める．
- $\operatorname{Dom}(T + S) = \operatorname{Dom} T \cap \operatorname{Dom} S$,
- $\xi \in \operatorname{Dom}(T + S)$ に対して $(T + S)\xi = T\xi + S\xi$.

(2) $\lambda \in \mathbb{C}$ と E から F への線型作用素 T に対して，λ による T の**スカラー倍**と呼ばれる E から F への線型作用素 λT を，次のように定める．
- $\operatorname{Dom}(\lambda T) = \operatorname{Dom} T$,
- $\xi \in \operatorname{Dom}(\lambda T)$ に対して $(\lambda T)\xi = \lambda(T\xi)$.

(3) E から F への線型作用素 T と F から G への線型作用素 S に対して，T と S の**合成**と呼ばれる E から G への線型作用素 ST を，次のように定める．
- $\operatorname{Dom} ST = \{\xi \in \operatorname{Dom} T \mid T\xi \in \operatorname{Dom} S\}$,
- $\xi \in \operatorname{Dom} ST$ に対して $(ST)\xi = S(T\xi)$.

(4) E から F への単射な線型作用素 T に対して，T の**逆**と呼ばれる F から E への線型作用素 T^{-1} を，次のように定める．
- $\operatorname{Dom} T^{-1} = \operatorname{Im} T$,
- $\xi \in \operatorname{Dom} T^{-1}$ に対して，$T\eta = \xi$ を満たす唯一の元 $\eta \in \operatorname{Dom} T$ を $T^{-1}\xi$ とする．

命題 1.3　E, F, G を線型空間とする．E から F への単射な線型作用素 T と F から G への単射な線型作用素 S に対して，$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ である．

証明　$\zeta \in G$，$\xi \in E$ とする．$(\zeta, \xi) \in \mathrm{gr}((ST)^{-1})$ と $(\zeta, \xi) \in \mathrm{gr}(T^{-1}S^{-1})$ はともに，ある $\eta \in F$ が存在して $(\xi, \eta) \in \mathrm{gr}(T)$ かつ $(\eta, \zeta) \in \mathrm{gr}(S)$ となることと同値だから，$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ である．□

1.2　閉作用素

定義 1.4（閉作用素）　Hausdorff 位相線型空間 E から F への線型作用素 T が**閉**（closed）であるとは，そのグラフ $\mathrm{gr}(T) = \{(\xi, T\xi) \mid \xi \in \mathrm{Dom}\, T\}$ が $E \times F$ の閉集合であることをいう．

命題 1.5　T を Hausdorff 位相線型空間 E から F への連続線型作用素とする．

(1) $\mathrm{Dom}\, T$ が E において閉ならば，T は E から F への閉作用素である．特に，E から F への全域で定義された連続線型作用素は，閉作用素である[*1]．

(2) さらに，F が完備であるとする．このとき，T が E から F への閉作用素であるための必要十分条件は，$\mathrm{Dom}\, T$ が E において閉であることである．

証明　(1)　$\mathrm{gr}(T) = \{(\xi, \eta) \in \mathrm{Dom}\, T \times \mathcal{H} \mid \eta = T\xi\}$ は $\mathrm{Dom}\, T \times \mathcal{H}$ において閉だから，$\mathrm{Dom}\, T$ が E において閉ならば，T は E から F への閉作用素である．

(2)　F が完備であることより，T は，$\overline{\mathrm{Dom}\, T}$ を定義域とする連続線型作用素 $\widetilde{T}$ に一意に拡張される．このとき，容易に確かめられるように，$\mathrm{gr}(\widetilde{T}) = \overline{\mathrm{gr}(T)}$ である．よって，T が E から F への閉作用素ならば，$\widetilde{T} = T$，すなわち $\overline{\mathrm{Dom}\, T} = \mathrm{Dom}\, T$ である．□

事実 1.6（閉グラフ定理）　完備かつ距離化可能な位相線型空間 E から F への全域で定義された閉作用素は，連続である．

証明は，Bourbaki [2, §I.3.3, Corollaire 5 du Théorème 1] を参照のこと．

系 1.7　完備かつ距離化可能な位相線型空間 E から F への稠密に定義された閉作用素 T について，T が全域で定義されていることと，T が連続であることとは同値である．

証明　T が全域で定義されているならば，閉グラフ定理（事実 1.6）より，T は連続である．逆に，T が連続ならば，T が稠密に定義された閉作用素であることと命題 1.5 (2) より，T は全域で定義されている．□

命題 1.8　E, F, G を Hausdorff 位相線型空間とする．

(1) T が E から F への閉作用素であり，$S \in \mathscr{L}(E; F)$ ならば，$T + S$ は E から F への閉作用素である．

(2) T が E から F への閉作用素であり，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ならば，λT は E から F への閉作用素である．

(3) $T \in \mathscr{L}(E; F)$ であり，S が F から G への閉作用素ならば，ST は E から G への閉作用素である．

(4) T が E から F への単射な閉作用素ならば，T^{-1} は F から E への閉作用素である．

証明　T を E から F への線型作用素とする．

[*1] このことが成り立つように，Hausdorff 位相線型空間のみを考えている．

(1)　$S \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$E \times F$ から自身への同相写像 $(\xi,\eta) \mapsto (\xi,\eta+S\xi)$ による $\mathrm{gr}(T)$ の像が $\mathrm{gr}(T+S)$ だから，T が閉ならば $T+S$ も閉である．

(2)　$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$E \times F$ から自身への同相写像 $(\xi,\eta) \mapsto (\xi,\lambda\eta)$ による $\mathrm{gr}(T)$ の像が $\mathrm{gr}(\lambda T)$ だから，T が閉ならば λT も閉である．

(3)　$T \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$E \times G$ から $F \times G$ への連続写像 $(\xi,\zeta) \mapsto (T\xi,\zeta)$ による $\mathrm{gr}(S)$ の逆像が $\mathrm{gr}(ST)$ だから，S が閉ならば ST も閉である．

(4)　T が単射であるとする．$E \times F$ から $F \times E$ への同相写像 $(\xi,\eta) \mapsto (\eta,\xi)$ による $\mathrm{gr}(T)$ の像が $\mathrm{gr}(T^{-1})$ だから，T が閉ならば T^{-1} も閉である．□

命題 1.9　Hausdorff 位相線型空間 E から F への閉作用素 T に対して，$\mathrm{Ker}\, T$ は E の閉部分線型空間である．

証明　T を E から F への閉作用素とすると，$\mathrm{gr}(T)$ は $E \times F$ の閉集合だから，$\mathrm{Ker}\, T \times 0 = \mathrm{gr}(T) \cap (E \times 0)$ は $E \times 0$ の閉集合である．よって，$\mathrm{Ker}\, T$ は E の閉部分線型空間である．□

定義 1.10（可閉作用素）　T を Hausdorff 位相線型空間 E から F への線型作用素とする．E から F への閉作用素であって T の拡張であるものを，T の**閉拡張**（closed extension）という．T が閉拡張をもつとき，T は**可閉**（closable）であるという．

命題 1.11　Hausdorff 位相線型空間 E から F への線型作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) T は可閉である．
(b) T のグラフの $E \times F$ における閉包 $\overline{\mathrm{gr}(T)}$ は，E から F へのある線型作用素のグラフと一致する．
(c) T のグラフの $E \times F$ における閉包 $\overline{\mathrm{gr}(T)}$ は，E の部分集合から F へのある写像のグラフと一致する．
(d) $\eta \in F$ について，$(0,\eta) \in \overline{\mathrm{gr}(T)}$ ならば $\eta = 0$ である．

さらに，これらの条件の下で，グラフが $\overline{\mathrm{gr}(T)}$ で与えられるような E から F への線型作用素は，T の（拡張関係に関して）最小の閉拡張である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (c)　T が閉拡張 $\widetilde{T}$ をもてば，$\overline{\mathrm{gr}(T)} \subseteq \mathrm{gr}(\widetilde{T})$ だから，$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ は $\widetilde{T}$ のある制限のグラフと一致する．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ は $E \times F$ の部分線型空間だから，$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ が E の部分集合から F への写像 $\widetilde{T}$ のグラフと一致するならば，$\widetilde{T}$ は E から F への線型作用素である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) および<u>最後の主張</u>　E から F への線型作用素 $\widetilde{T}$ が $\overline{\mathrm{gr}(T)}$ をグラフにもつとすると，$\widetilde{T}$ は T の閉拡張である．さらに，T の任意の閉拡張のグラフは $\mathrm{gr}(\widetilde{T}) = \overline{\mathrm{gr}(T)}$ を含むから，この $\widetilde{T}$ は T の最小の閉拡張である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$(0,0) \in \mathrm{gr}(T) \subseteq \overline{\mathrm{gr}(T)}$ だから，$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ が E の部分集合から F へのある写像のグラフと一致するならば，$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ の点であって $(0,\eta)$ という形のものは $(0,0)$ のみである．

(d) $\Longrightarrow$ (c)　$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ は $E \times F$ の部分線型空間だから，$(\xi,\eta), (\xi,\eta') \in \overline{\mathrm{gr}(T)}$ ならば $(0,\eta-\eta') = (\xi,\eta) - (\xi,\eta') \in \overline{\mathrm{gr}(T)}$ である．よって，条件 (d) が成り立つならば，各 $\xi \in E$ に対して，$(\xi,\eta) \in \overline{\mathrm{gr}(T)}$ を満たす $\eta \in F$ はたかだか一意である．これは，$\overline{\mathrm{gr}(T)}$ が E の部分集合から F へのある写像のグラフと一致することを意味する．□

定義 1.12（可閉作用素の閉包）　Hausdorff 位相線型空間 E から F への可閉作用素 T に対して，その最小の閉拡張を T の**閉包**（closure）といい，$\overline{T}$ と書く．

命題 1.11 より，可閉作用素 T に対して，$\mathrm{gr}(\overline{T}) = \overline{\mathrm{gr}(T)}$ である．閉作用素 T に対しては，明らかに，$\overline{T} = T$ である．

例 1.13　E, F を Hausdorff 位相線型空間とし，F は完備であるとする．命題 1.5 (2) の証明で述べたように，T を E から F への（全域で定義されているとは限らない）連続線型作用素とすると，T は $\overline{\mathrm{Dom}\, T}$ を定義域とする連続線型作用素 $\widetilde{T}$ に一意に拡張でき，$\mathrm{gr}(\widetilde{T}) = \overline{\mathrm{gr}(T)}$ となる．すなわち，T は可閉であり，$\widetilde{T}$ は T の閉包である．

注意 1.14　Hilbert 空間上の稠密に定義された線型作用素であって，可閉でないものが存在する．このような例を構成しよう．

Hilbert 空間

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \xi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

を考え，その標準的な正規直交基底を $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と書く．また，$l^2(\mathbb{N})$ 上の稠密に定義された線型作用素 T を，

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, T &= \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}} = \{\xi \in l^2(\mathbb{N}) \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } \xi(n) = 0\}, \\ Te_n &= e_0 \end{aligned}$$

によって定める．各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $\xi_n = (e_0 + \cdots + e_{n-1})/n \in \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}}$ と置くと，$n \to \infty$ のとき $(\xi_n, T\xi_n) \to (0, e_0)$ だから，$(0, e_0) \in \overline{\mathrm{gr}(T)}$ である．よって，命題 1.11 より，T は可閉ではない．

1.3　閉作用素のスペクトル

定義 1.15（連続可逆性）　Hausdorff 位相線型空間 E 上の線型作用素 T が**連続可逆**であるとは，T が $\mathrm{Dom}\, T$ から E への全単射であり，かつ T^{-1} が連続であることをいう．

Hausdorff 位相線型空間 E 上の線型作用素 T が連続可逆ならば，T^{-1} は E 上の全域で定義された連続線型作用素だから，特に閉作用素である．よって，このとき，$T = (T^{-1})^{-1}$ は E 上の閉作用素である（命題 1.8 (4)）．

定義 1.16（閉作用素のスペクトル）　Hausdorff 位相線型空間 E 上の閉作用素 T の**スペクトル**（spectrum）を，

$$\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda 1_E \text{ は連続可逆でない}\}$$

と定める[*2]．

T を Hausdorff 位相線型空間上の閉作用素とすると，明らかに，T の固有値全体のなす集合は $\mathrm{Sp}(T)$ に含まれる．

命題 1.17　T を完備かつ距離化可能な位相線型空間 E 上の閉作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ であるための必要十分条件は，$T - \lambda 1_E$ が $\mathrm{Dom}\, T$ から E への全単射であることである．

[*2] 閉でない線型作用素 T に対しては，どんな $\lambda \in \mathbb{C}$ に対しても $T - \lambda 1_E$ は閉でなく（命題 1.8 (1)），したがって連続可逆でないから，T のスペクトルを定義する意味はない．

証明　$T-\lambda 1_E$ が $\mathrm{Dom}\, T$ から E への全単射ならば，$(T-\lambda 1_E)^{-1}$ は E 上の全域で定義された閉作用素だから（命題 1.8 (1), (4)），閉グラフ定理（事実 1.6）より $(T-\lambda 1_E)^{-1}\in\mathscr{L}(E)$ である．よって，$T-\lambda 1_E$ は連続可逆である．逆に，$T-\lambda 1_E$ が連続可逆ならば，定義から明らかに，$T-\lambda 1_E$ は $\mathrm{Dom}\, T$ から E への全単射である． □

命題 1.18　Banach 空間 E 上の閉作用素 T のスペクトルは，$\mathbb{C}$ の閉集合である．

証明　$\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}(T)$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることを示す．$\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}(T)$ とすると，$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，

$$T-\lambda 1_E=(T-\lambda_0 1_E)(1_E-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1}) \tag{$*$}$$

である．また，$\mathrm{Im}(T-\lambda_0 1_E)^{-1}=\mathrm{Dom}\, T$ であることより，$\xi\in E$ に対して

$$\xi\in\mathrm{Dom}\, T \iff (1_E-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1})\xi\in\mathrm{Dom}\, T$$

だから，

$$(1_E-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1})(\mathrm{Dom}\, T)=\mathrm{Im}(1_E-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1})\cap\mathrm{Dom}\, T \tag{$**$}$$

である．

$\lambda\in\mathbb{C}$ が λ_0 に十分近く，$\|(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1}\|<1$ が成り立つとする．このとき，$1_E+(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1}$ は $\mathscr{L}(E)$ において可逆である [15, 命題 2.7]．特に，($**$) より，$(1_E-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1})(\mathrm{Dom}\, T)=\mathrm{Dom}\, T$ となる．このことと ($*$) より，$T-\lambda 1_E$ は $\mathrm{Dom}\, T$ から E への全単射であり，

$$(T-\lambda 1_E)^{-1}=(1_E-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 1_E)^{-1})^{-1}(T-\lambda_0 1_E)^{-1}\in\mathscr{L}(E)$$

が成り立つ．よって，$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}(T)$ である．これで，$\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}(T)$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることが示された． □

1.4　随伴

定義 1.19（随伴）　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とする．T の**随伴**（adjoint）と呼ばれる $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素 T^* を，次のように定義する．

- $\mathrm{Dom}\, T^*$ は，$\eta\in\mathcal{K}$ のうち，ある $\zeta\in\mathcal{H}$ が存在して，任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\, T$ に対して $\langle\eta|T\xi\rangle=\langle\zeta|\xi\rangle$ が成り立つ（Riesz の表現定理より，これは，$\mathrm{Dom}\, T$ 上の線型形式 $\xi\mapsto\langle\eta|T\xi\rangle$ が連続であることと同値である）ものの全体とする．
- $\eta\in\mathrm{Dom}\, T^*$ に対して，前項の条件を満たす $\zeta\in\mathcal{H}$（$\mathrm{Dom}\, T$ は $\mathcal{H}$ において稠密だから，これは一意に定まる）を，$T^*\eta$ と定める．

定義より，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素 T の随伴 T^* は，$\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素 S であって，任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\, T$ と $\eta\in\mathrm{Dom}\, S$ に対して $\langle\eta|T\xi\rangle=\langle S\eta|\xi\rangle$ を満たす最大のものにほかならない．

Hilbert 空間の間の線型作用素 T, S について，T が稠密に定義されていて $T\subseteq S$ ならば，明らかに，$S^*\subseteq T^*$ である．

命題 1.20　$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．

(1) T, S を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とし，$T+S$ も稠密に定義されているとする．このとき, $(T+S)^* \supseteq T^*+S^*$ である．さらに, T または S が $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に属するならば, $(T+S)^* = T^*+S^*$ である．

(2) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とし，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．このとき，$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ である．

(3) T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素，S を $\mathcal{K}$ から $\mathcal{L}$ への稠密に定義された線型作用素とし，ST も稠密に定義されているとする．このとき，$(ST)^* \supseteq T^*S^*$ である．さらに，$S \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ ならば，$(ST)^* = T^*S^*$ である．

証明 (1) $\eta \in \mathrm{Dom}(T^*+S^*)$ ならば，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}(T+S)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \eta|(T+S)\xi\rangle &= \langle \eta|T\xi\rangle + \langle \eta|S\xi\rangle \\ &= \langle T^*\eta|\xi\rangle + \langle S^*\eta|\xi\rangle \\ &= \langle (T^*+S^*)\eta|\xi\rangle\end{aligned}$$

だから，$\eta \in \mathrm{Dom}(T+S)^*$ かつ $(T+S)^*\eta = (T^*+S^*)\eta$ である．よって，$(T+S)^* \supseteq T^*+S^*$ である．

さらに，$S \in \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ であると仮定する．このとき，$\eta \in \mathrm{Dom}(T+S)^*$ とすると，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \eta|T\xi\rangle &= \langle \eta|(T+S)\xi\rangle - \langle \eta|S\xi\rangle \\ &= \langle (T+S)^*\eta|\xi\rangle - \langle S^*\eta|\xi\rangle \\ &= \langle ((T+S)^*-S^*)\eta|\xi\rangle\end{aligned}$$

だから，$\eta \in \mathrm{Dom}\,T^* = \mathrm{Dom}(T^*+S^*)$ である．よって，$\mathrm{Dom}(T+S)^* \subseteq \mathrm{Dom}(T^*+S^*)$ であり，前半の結果と合わせて $(T+S)^* = T^*+S^*$ を得る．

(2) $(\eta,\zeta) \in \mathcal{K}\times\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}(\eta,\zeta) \in \mathrm{gr}((\lambda T)^*) &\iff \text{任意の } \xi \in \mathrm{Dom}\,T \text{ に対して } \langle \eta|\lambda T\xi\rangle = \langle \zeta|\xi\rangle \\ &\iff \text{任意の } \xi \in \mathrm{Dom}\,T \text{ に対して } \langle \eta|T\xi\rangle = \langle \zeta/\overline{\lambda}|\xi\rangle \\ &\iff (\eta,\zeta/\overline{\lambda}) \in \mathrm{gr}(T^*) \\ &\iff (\eta,\zeta) \in \mathrm{gr}(\overline{\lambda}T^*)\end{aligned}$$

だから，$(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$ である．

(3) $\zeta \in \mathrm{Dom}\,T^*S^*$ ならば，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,ST$ に対して

$$\langle \zeta|ST\xi\rangle = \langle S^*\zeta|T\xi\rangle = \langle T^*S^*\zeta|\xi\rangle$$

だから，$\zeta \in \mathrm{Dom}(ST)^*$ かつ $(ST)^*\zeta = T^*S^*\zeta$ である．よって，$(ST)^* \supseteq T^*S^*$ である．

さらに，$S \in \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ であると仮定する．このとき，$\zeta \in \mathrm{Dom}(ST)^*$ とすると，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,T$ に対して

$$\langle S^*\zeta|T\xi\rangle = \langle \zeta|ST\xi\rangle = \langle (ST)^*\zeta|\xi\rangle$$

だから，$S^*\zeta \in \mathrm{Dom}\,T^*$，すなわち $\zeta \in \mathrm{Dom}\,T^*S^*$ である．よって，$\mathrm{Dom}(ST)^* \subseteq \mathrm{Dom}\,T^*S^*$ であり，前半の結果と合わせて $(ST)^* = T^*S^*$ を得る． □

命題 1.21 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素 T に対して，$\mathrm{Ker}\,T^* = (\mathrm{Im}\,T)^\perp$ である．

証明　$\eta \in \mathcal{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \eta \in \operatorname{Ker} T^* &\iff \text{任意の } \xi \in \operatorname{Dom} T \text{ に対して } \langle \eta | T\xi \rangle = 0 \\ &\iff \eta \in (\operatorname{Im} T)^\perp \end{aligned}$$

だから，$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ である． □

命題 1.22　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素とする．ユニタリ作用素 $J \colon \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ を $J(\xi, \eta) = (\eta, -\xi)$ と定めると，$\operatorname{gr}(T^*) = J(\operatorname{gr}(T))^\perp$ である．

証明　$(\eta, \zeta) \in \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} (\eta, \zeta) \perp J(\operatorname{gr}(T)) &\iff \text{任意の } \xi \in \operatorname{Dom} T \text{ に対して } (\eta, \zeta) \perp (T\xi, -\xi) \\ &\iff \text{任意の } \xi \in \operatorname{Dom} T \text{ に対して } \langle \eta | T\xi \rangle = \langle \zeta | \xi \rangle \\ &\iff (\eta, \zeta) \in \operatorname{gr}(T^*) \end{aligned}$$

だから，$\operatorname{gr}(T^*) = J(\operatorname{gr}(T))^\perp$ である． □

系 1.23　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素 T に対して，その随伴 T^* は，$\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への閉作用素である．

証明　一般に，Hilbert 空間において部分線型空間の直交補空間は閉だから，主張は命題 1.22 から従う． □

命題 1.24　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) T^* は稠密に定義されている．
(b) T は可閉である．

さらに，これらの条件の下で，$T^{**} = \overline{T}$ が成り立つ．

証明　ユニタリ作用素 $J \colon \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ と $J' \colon \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ を，

$$J(\xi, \eta) = (\eta, -\xi), \qquad J'(\eta, \xi) = (\xi, -\eta) \qquad (\xi \in \mathcal{H},\ \eta \in \mathcal{K})$$

と定める．$J'J = -1_{\mathcal{H} \times \mathcal{K}}$ であることに注意する．

(a) $\Longrightarrow$ (b) および最後の主張　T^* が稠密に定義されているとすると，T^* の随伴 T^{**} が考えられる．命題 1.22 より，T^{**} のグラフは，

$$\operatorname{gr}(T^{**}) = J'(J(\operatorname{gr}(T))^\perp)^\perp = J'(J(\operatorname{gr}(T)))^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{gr}(T)}$$

である．よって，T は可閉であり，$T^{**} = \overline{T}$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　T が可閉であるとして，$\eta \in (\operatorname{Dom} T^*)^\perp$ を任意にとる．すると，任意の $\eta' \in \operatorname{Dom} T^*$ に対して $\langle (\eta', T^*\eta') | (\eta, 0) \rangle = \langle \eta' | \eta \rangle + \langle T^*\eta' | 0 \rangle = 0$ であることと命題 1.22 より

$$(\eta, 0) \in \operatorname{gr}(T^*)^\perp = J(\operatorname{gr}(T))^{\perp\perp} = \overline{J(\operatorname{gr}(T))} = J(\overline{\operatorname{gr}(T)})$$

だから，$(0, -\eta) \in \overline{\operatorname{gr}(T)}$ である．T は可閉だから，これは $\eta = 0$ を意味する（命題 1.11）．よって，$(\operatorname{Dom} T^*)^\perp = 0$ だから，T^* は稠密に定義されている． □

系 1.25　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素 T に対して，T^* は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への稠密に定義された閉作用素であり，$T^{**} = T$ を満たす．

証明　系 1.23 と命題 1.24 より，T^* は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への稠密に定義された閉作用素であり，$T^{**} = \overline{T} = T$ を満たす． □

注意 1.26　注意 1.14 で見たように，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素 T であって可閉でないものが存在する．命題 1.24 より，このような T について，$\operatorname{Dom} T^*$ は $\mathcal{H}$ において稠密でない．実は，より強く，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素 T であって，$\operatorname{Dom} T^* = 0$ であるものが存在する．このような例を構成しよう．

Hilbert 空間

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \xi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

を考え，その標準的な正規直交基底を $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と書く．また，写像 $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\phi^{-1}(\{m\})$ が無限集合となるようにとり，これを用いて，$l^2(\mathbb{N})$ 上の稠密に定義された線型作用素 T を，

$$\begin{aligned} &\operatorname{Dom} T = \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}} = \{\xi \in l^2(\mathbb{N}) \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } \xi(n) = 0\}, \\ &Te_n = e_{\phi(n)} \end{aligned}$$

によって定める．$\eta \in \operatorname{Dom} T^*$ とすると，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T = \mathbb{C}^{\oplus\mathbb{N}}$ に対して $\langle \eta | T\xi \rangle = \langle T^*\eta | \xi \rangle$ が成り立つ．特に，$\xi = e_n$ とすることで，

$$\eta(\phi(n)) = (T^*\eta)(n)$$

を得る．上式より，各 $m \in \mathbb{N}$ について，任意の $n \in \phi^{-1}(\{m\})$ に対して $(T^*\eta)(n) = \eta(m)$ となるが，$\phi^{-1}(\{m\})$ は無限集合だから，$T^*\eta \in l^2(\mathbb{N})$ より $\eta(m) = 0$ である．よって，$\eta = 0$ である．これで，$\operatorname{Dom} T^* = 0$ が示された．

命題 1.27　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された単射な線型作用素 T に対して，T^* が単射であることと T^{-1} が稠密に定義されていることとは同値であり，これらの条件の下で，$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ である．

証明　ユニタリ作用素 $J \colon \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ と $J' \colon \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ を

$$J(\xi, \eta) = (\eta, -\xi), \qquad J'(\eta, \xi) = (\xi, -\eta) \qquad (\xi \in \mathcal{H},\ \eta \in \mathcal{K})$$

と定め，ユニタリ作用素 $\iota \colon \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ と $\iota' \colon \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ を

$$\iota(\xi, \eta) = (\eta, \xi), \qquad \iota'(\eta, \xi) = (\xi, \eta) \qquad (\xi \in \mathcal{H},\ \eta \in \mathcal{K})$$

と定める．$J'\iota = -\iota' J$ であることに注意する．

$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ だから（命題 1.21），T^* が単射であることと T^{-1} が稠密に定義されていることとは同

値である．さらに，これらの条件の下で，命題 1.22 より

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}((T^{-1})^*) &= J'(\mathrm{gr}(T^{-1}))^\perp \\ &= J'(\iota(\mathrm{gr}(T)))^\perp \\ &= \iota'(J(\mathrm{gr}(T)))^\perp \\ &= \iota'(J(\mathrm{gr}(T))^\perp) \\ &= \iota'(\mathrm{gr}(T^*)) \\ &= \mathrm{gr}((T^*)^{-1})\end{aligned}$$

だから，$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ である． □

命題 1.28　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素 T に対して，

$$\mathrm{Sp}(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$$

である．

証明　$\lambda \in \mathbb{C}$ とする．$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ が連続可逆ならば，$T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} = (T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^*$ は単射であり，

$$(T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}})^{-1} = ((T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^*)^{-1} = ((T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^{-1})^* \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$$

を満たすから（命題 1.20 (1), (2), 命題 1.27），$T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}}$ は連続可逆である．よって，$\mathrm{Sp}(T^*) \subseteq \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$ である．さらに，系 1.25 より $T^{**} = T$ だから，T を T^* に置き換えれば，$\mathrm{Sp}(T^*) \supseteq \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}$ を得る． □

注意 1.29　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素 T について，$\lambda \in \mathbb{C}$ が T の固有値であるとしても，$\overline{\lambda}$ が T^* の固有値である[*3] とは限らない．反例を構成しよう．

Hilbert 空間

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \xi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{N}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

を考え，その標準的な正規直交基底を $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と書く．$l^2(\mathbb{N})$ 上の全域で定義された連続線型作用素 T を

$$Te_n = \begin{cases} e_{n-1} & (n > 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

によって定めると，T は固有値 0 をもつ．一方で，その随伴 T^* は

$$T^* e_n = e_{n+1}$$

によって与えられ，これは固有値 0 をもたない．

1.5　対称作用素

定義 1.30（対称作用素）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T が**対称**（symmetric）であるとは，任意の ξ, $\eta \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\langle \eta | T\xi \rangle = \langle T\eta | \xi \rangle$ であることをいう[*4]．

[*3] 正規作用素 T に対してはならばこれが成り立つことを，系 1.57 で示す．

[*4] 本稿では，Rudin [6, §13.3] の定義を採用した．Conway [4, §X.2.2] のように，稠密に定義されていることを対称作用素の定義に含めることもある．また，新井 [8, p. 131] のように，稠密に定義されていることを課さないものを Hermite，課すものを対称といって区別することもある．

容易に確かめられるように，T, S が対称作用素ならば，$T+S$ や λT（$\lambda \in \mathbb{R}$）も対称である．

命題 1.31　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T に対して，次の条件 (a) と (b) は同値である．さらに，T が稠密に定義されていれば，これらは条件 (c) とも同値である．

(a) T は対称である．
(b) 任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して，$\langle \xi | T\xi \rangle \in \mathbb{R}$ である．
(c) $T \subseteq T^*$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　T が対称であるとすると，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して，$\langle \xi | T\xi \rangle = \langle T\xi | \xi \rangle = \overline{\langle \xi | T\xi \rangle}$ だから，$\langle \xi | T\xi \rangle \in \mathbb{R}$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　(b) が成り立つとすると，任意の $\xi, \eta \in \operatorname{Dom} T$ に対して，分極公式より

$$\begin{aligned}
\langle \eta | T\xi \rangle &= \frac{1}{4}(\langle \xi+\eta | T(\xi+\eta) \rangle - \langle \xi-\eta | T(\xi-\eta) \rangle + i\langle \xi+i\eta | T(\xi+i\eta) \rangle - i\langle \xi-i\eta | T(\xi-i\eta) \rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle T(\xi+\eta) | \xi+\eta \rangle - \langle T(\xi-\eta) | \xi-\eta \rangle + i\langle T(\xi+i\eta) | \xi+i\eta \rangle - i\langle T(\xi-i\eta) | \xi-i\eta \rangle) \\
&= \langle T\eta | \xi \rangle
\end{aligned}$$

だから，T は対称である．

(a) $\Longleftrightarrow$ (c)（T が稠密に定義されている場合）　随伴作用素の定義から明らかである．□

命題 1.32　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする．

(1) T の固有値は，すべて実数である．
(2) 異なる二つの実数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，固有空間 $\operatorname{Ker}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})$ と $\operatorname{Ker}(T-\mu 1_{\mathcal{H}})$ は直交する．

証明　(1)　$\lambda \in \mathbb{C}$ が T の固有値であるとして，固有ベクトル $\xi \in \operatorname{Ker}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}}) \setminus \{0\}$ をとると，$\lambda\|\xi\|^2 = \langle \xi | T\xi \rangle \in \mathbb{R}$ だから（命題 1.31），$\lambda \in \mathbb{R}$ である．

(2)　$\xi \in \operatorname{Ker}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})$，$\eta \in \operatorname{Ker}(T-\mu 1_{\mathcal{H}})$ とすると，

$$\lambda\langle \eta | \xi \rangle = \langle \eta | T\xi \rangle = \langle T\eta | \xi \rangle = \mu\langle \eta | \xi \rangle$$

だから，$\langle \eta | \xi \rangle = 0$ である．よって，固有空間 $\operatorname{Ker}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})$ と $\operatorname{Ker}(T-\mu 1_{\mathcal{H}})$ は直交する．□

命題 1.33　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathcal{H}$ 上の可閉な対称作用素 T の閉包 $\overline{T}$ は，また対称である．
(2) $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された対称作用素 T は，可閉である．

証明　(1)　T を可閉な線型作用素とすると，$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の内積が $\operatorname{gr}(T)$ 上で常に実数値をとるならば，$\operatorname{gr}(\overline{T}) = \overline{\operatorname{gr}(T)}$ 上でも常に実数値をとる．命題 1.31 より，これは，T が対称ならば $\overline{T}$ も対称であることを意味する．

(2)　稠密に定義された対称作用素 T は，閉拡張 T^* をもつから（命題 1.31，系 1.23），可閉である．□

補題 1.34　T を Banach 空間 E からノルム空間 F への閉作用素とする．ある $c \geq 0$ が存在して，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\|\xi\| \leq c\|T\xi\|$ が成り立つとする．このとき，T は単射であり，その像は F において閉である．

証明　T の単射性は，仮定から明らかである．$\operatorname{Im} T$ が F において閉であることを示す．$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\operatorname{Dom} T$

上の点列とし，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\eta\in F$ に収束するとする．すると，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，仮定より任意の $m,\,n\in\mathbb{N}$ に対して $\|\xi_m-\xi_n\|\le c\|T\xi_m-T\xi_n\|$ だから，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．E は Banach 空間だから，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は極限点 $\xi\in E$ をもつ．いま T は閉だから，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれ ξ,η に収束することより，$\xi\in\operatorname{Dom}T$ かつ $\eta=T\xi\in\operatorname{Im}T$ である．よって，$\operatorname{Im}T$ は F において閉である． □

命題 1.35　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし，$\lambda=a+bi\in\mathbb{C}$（$a,\,b\in\mathbb{R}$）とする．

(1) $\xi\in\operatorname{Dom}T$ に対して，$\|(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|^2=\|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\|^2+b^2\|\xi\|^2$ である．特に，$|b|\|\xi\|\le\|(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|$ である．
(2) $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ならば，$T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．
(3) T が閉作用素であるとする．このとき，$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ならば，$T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射であり，その像は $\mathcal{H}$ において閉である．

証明　(1)　$\xi\in\operatorname{Dom}T$ とする．$T-a1_{\mathcal{H}}$ は対称だから，$\langle\xi|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\rangle\in\mathbb{R}$ である（命題 1.31）．よって，

$$
\begin{aligned}
\|(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|^2&=\|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi+ib\xi\|^2\\
&=\|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\|^2+b^2\|\xi\|^2+2\operatorname{Re}\langle ib\xi|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\rangle\\
&=\|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\|^2+b^2\|\xi\|^2-2\operatorname{Re}ib\langle\xi|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\rangle\\
&=\|(T-a1_{\mathcal{H}})\xi\|^2+b^2\|\xi\|^2
\end{aligned}
$$

である．特に，$\|(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|^2\ge b^2\|\xi\|^2$ だから，$|b|\|\xi\|\le\|(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|$ である．

(2), (3)　$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ とすると，$b\neq 0$ だから，(1) の不等式 $|b|\|\xi\|\le\|(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|$ より，$T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．さらに，T が閉作用素ならば，補題 1.34 より，$\operatorname{Im}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})$ は $\mathcal{H}$ において閉である． □

系 1.36　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素とする．$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して，次の条件 (a), (b), (c) は同値である．さらに，T が稠密に定義されている（したがって，随伴 T^* が定義される）ならば，これらは条件 (d) とも同値である．

(a) $\lambda\notin\operatorname{Sp}(T)$ である．
(b) $T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ は全射である．
(c) $T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ の像は $\mathcal{H}$ において稠密である．
(d) $T^*-\overline{\lambda}1_{\mathcal{H}}$ は単射である．

証明　(a) $\iff$ (b) $\iff$ (c)　$\lambda\notin\operatorname{Sp}(T)$ は，$T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ が全単射であることと同値である（命題 1.17）．また，命題 1.35 より，$T-\lambda 1_{\mathcal{H}}$ は常に単射であり，その像は $\mathcal{H}$ において閉である．よって，条件 (a), (b), (c) は同値である．

(c) $\iff$ (d)（T が稠密に定義されている場合）　$\operatorname{Ker}(T^*-\overline{\lambda}1_{\mathcal{H}})=\operatorname{Ker}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}})^*=(\operatorname{Im}(T-\lambda 1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ だから（命題 1.20 (1)，命題 1.21），条件 (c) と (d) は同値である． □

稠密に定義された閉対称作用素のスペクトルを調べる．本小節の以下の部分では，

$$
\mathbb{C}_{>0}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}\lambda>0\},\qquad\mathbb{C}_{\ge 0}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}\lambda\ge 0\},
$$
$$
\mathbb{C}_{<0}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}\lambda<0\},\qquad\mathbb{C}_{\le 0}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}\lambda\le 0\}
$$

と置き，$\dim\mathcal{M}$ で $\mathcal{M}$ の（Hilbert 空間としてではなく）線型空間としての次元を表す．

補題 1.37　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ をその閉部分線型空間とする．$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\perp} = 0$ ならば，$\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$ である．

証明　$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\perp} = 0$ ならば，$\mathcal{N}$ の上への直交射影の $\mathcal{M}$ への制限は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への単射線型写像となるから，$\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$ である．　□

定理 1.38　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉対称作用素とする．このとき，$\dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ は，$\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ のときと $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ のときとでそれぞれ一定である．

証明　まず，$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について，

$$|\mu - \lambda| < |\operatorname{Im} \lambda| \quad \text{ならば} \quad \operatorname{Ker}(\mu 1_{\mathcal{H}} - T^*) \cap (\operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}))^{\perp} = 0 \tag{$*$}$$

であることを示す．対偶を示すために，$\xi \in (\operatorname{Ker}(\mu 1_{\mathcal{H}} - T^*) \cap (\operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}))^{\perp}) \setminus \{0\}$ がとれたと仮定する．命題 1.21 と $\operatorname{Im}(\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T)$ が閉であること（命題 1.35 (3)）より

$$\xi \in (\operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}))^{\perp} = (\operatorname{Im}(\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T))^{\perp\perp} = \operatorname{Im}(\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T)$$

だから，$\eta \in \operatorname{Dom} T$ を用いて $\xi = (\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T)\eta$ と書ける．さらに，$\xi \in \operatorname{Ker}(\mu 1_{\mathcal{H}} - T^*)$ だから

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \eta | (\mu 1_{\mathcal{H}} - T^*)\xi \rangle \\ &= \langle (\overline{\mu} 1_{\mathcal{H}} - T)\eta | \xi \rangle \\ &= \langle (\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T)\eta | \xi \rangle + \langle (\overline{\mu} - \overline{\lambda})\eta | \xi \rangle \\ &= \|\xi\|^2 + (\mu - \lambda)\langle \eta | \xi \rangle \end{aligned}$$

であり，したがって，Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\|\xi\|^2 = -(\mu - \lambda)\langle \eta | \xi \rangle \leq |\mu - \lambda| \|\xi\| \|\eta\|$$

である．$\xi \neq 0$ だから，

$$\|\xi\| \leq |\mu - \lambda| \|\eta\|$$

が成り立つ．一方で，命題 1.35 (1) より

$$\|\xi\| = \|(\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T)\eta\| \geq |\operatorname{Im} \lambda| \|\eta\|$$

が成り立つ．$(\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T)\eta = \xi \neq 0$ より $\eta \neq 0$ だから，これら 2 式より $|\mu - \lambda| \geq |\operatorname{Im} \lambda|$ を得る．これで，($*$) が示された．

($*$) と補題 1.37 より，$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について，

$$|\mu - \lambda| < |\operatorname{Im} \lambda| \quad \text{ならば} \quad \dim \operatorname{Ker}(\mu 1_{\mathcal{H}} - T^*) \leq \dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}})$$

である．さらに，λ と μ を入れ替えてもこれが成り立つことに注意すると，

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{2} |\operatorname{Im} \lambda| \quad \text{ならば} \quad \dim \operatorname{Ker}(\mu 1_{\mathcal{H}} - T^*) = \dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}})$$

を得る．よって，写像 $\lambda \mapsto \dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ は，$\mathbb{C}_{>0}$ と $\lambda \in \mathbb{C}_{<0}$ の上でそれぞれ局所定数であり，したがって，それぞれ一定である．　□

系 1.39　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉対称作用素 T のスペクトル $\mathrm{Sp}(T)$ について，次の条件のうちただ一つが成り立つ．

(i) $\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である．
(ii) $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}_{\geq 0}$ である．
(iii) $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}_{\leq 0}$ である．
(iv) $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}$ である．

証明　どの二つの条件も同時に成り立たないことは明らかである．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とすると，$\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ であるための必要十分条件は，$\overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} - T^*$ が単射であることである（系 1.36）．このことと定理 1.38 より，$\mathbb{C}_{>0}$ と $\mathbb{C}_{<0}$ はそれぞれ，$\mathrm{Sp}(T)$ に含まれるかまったく交わらないかのいずれかである．$\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合だから（命題 1.18），

- $\mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{C}_{>0} = \emptyset$ かつ $\mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{C}_{<0} = \emptyset$ である場合，$\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であり，
- $\mathbb{C}_{>0} \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ かつ $\mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{C}_{<0} = \emptyset$ である場合，$\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}_{\geq 0}$ であり，
- $\mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{C}_{>0} = \emptyset$ かつ $\mathbb{C}_{<0} \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ である場合，$\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}_{\leq 0}$ であり，
- $\mathbb{C}_{>0} \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ かつ $\mathbb{C}_{<0} \subseteq \mathrm{Sp}(T)$ である場合，$\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{C}$ である．　□

1.6　正対称作用素

定義 1.40（正対称作用素）　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする．

(1) $c \in \mathbb{R}$ について，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\langle \xi | T\xi \rangle \geq c\|\xi\|^2$ であるとき，$T \geq c$ と書く．このような c が存在するとき，T は**下に有界**（bounded below）であるという．$T \geq 0$ であるとき，T は**正**（positive）であるという．
(2) $c \in \mathbb{R}$ について，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して $\langle \xi | T\xi \rangle \leq c\|\xi\|^2$ であるとき，$T \leq c$ と書く．このような c が存在するとき，T は**上に有界**（bounded above）であるという．$T \leq 0$ であるとき，T は**負**（negative）であるという．

容易に確かめられるように，T, S が対称作用素であり $T \geq a$，$S \geq b$ を満たすならば，$T + S \geq a + b$ や $\lambda T \geq \lambda a$（$\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$）が成り立つ．また，$T$ が可閉な対称作用素であり $T \geq a$ を満たすならば，その閉包 $\overline{T}$ も $\overline{T} \geq a$ を満たす．上に有界な対称作用素についても，同様のことが成り立つ．

命題 1.41　T は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素であり，$c \in \mathbb{R}$ について $T \geq c$ を満たすとする．$\lambda \in (-\infty, c)$ とする．

(1) $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して，$(c - \lambda)\|\xi\| \leq \|(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|$ である．
(2) $T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．
(3) T が閉作用素であるとする．このとき，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射であり，その像は $\mathcal{H}$ において閉である．

証明 (1) $\xi \in \operatorname{Dom} T$ とすると，$T \geq c$ より $\langle \xi | (T - c1_{\mathcal{H}})\xi \rangle \geq 0$ だから，

$$
\begin{aligned}
\|(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|^2 &= \|(T - c1_{\mathcal{H}})\xi + (c - \lambda)\xi\|^2 \\
&= \|(T - c1_{\mathcal{H}})\xi\|^2 + (c - \lambda)^2\|\xi\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle (c - \lambda)\xi | (T - c1_{\mathcal{H}})\xi \rangle \\
&= \|(T - c1_{\mathcal{H}})\xi\|^2 + (c - \lambda)^2\|\xi\|^2 + 2(c - \lambda)\langle \xi | (T - c1_{\mathcal{H}})\xi \rangle \\
&\geq (c - \lambda)^2\|\xi\|^2
\end{aligned}
$$

である．よって，$(c - \lambda)\|\xi\| \leq \|(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|$ である．

(2), (3) (1) の不等式 $(c - \lambda)\|\xi\| \leq \|(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})\xi\|$ より，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．さらに，T が閉作用素ならば，補題 1.34 より，$\operatorname{Im}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ は $\mathcal{H}$ において閉である． □

系 1.42 T は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素であり，$c \in \mathbb{R}$ について $T \geq c$ を満たすとする．$\lambda \in (-\infty, c)$ に対して，次の条件 (a), (b), (c) は同値である．さらに，T が稠密に定義されている（したがって，随伴 T^* が定義される）ならば，これらは条件 (d) とも同値である．

(a) $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ である．
(b) $T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は全射である．
(c) $T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ の像は $\mathcal{H}$ において稠密である．
(d) $T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ は，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ が全単射であることと同値である（命題 1.17）．また，命題 1.41 より，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は常に単射であり，その像は $\mathcal{H}$ において閉である．よって，条件 (a), (b), (c) は同値である．

(c) $\Longleftrightarrow$ (d)（T が稠密に定義されている場合） $\operatorname{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^* = (\operatorname{Im}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}}))^\perp$ だから（命題 1.20 (1)，命題 1.21），条件 (c) と (d) は同値である． □

1.7 自己随伴作用素

定義 1.43（自己随伴作用素） T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする．

(1) T が**自己随伴**（self-adjoint）であるとは，T が稠密に定義されており，かつ $T^* = T$ を満たすことをいう．
(2) T が**本質的自己随伴**（essentially self-adjoint）であるとは，T が可閉であり，かつその閉包 $\overline{T}$ が自己随伴であることをいう．

Hilbert 空間上の稠密に定義された線型作用素の随伴が閉作用素であることより（系 1.23），自己随伴作用素は閉作用素である．自己随伴作用素は，稠密に定義された閉作用素だから，それが全域で定義されていることと連続であることとは同値である（系 1.7）．

命題 1.20 (1), (2) を用いて容易に確かめられるように，T が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素であり，S が $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素ならば，$T + S$ や λT（$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$）も自己随伴である．特に，$\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 T と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$T + \lambda 1_{\mathcal{H}}$ も自己随伴である．

命題 1.44 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 T は，対称作用素の中で極大である．すなわち，$\mathcal{H}$ 上の対称作用素であって T の拡張であるものは，T 自身のみである．

証明　$\mathcal{H}$ 上の対称作用素 S が T の拡張であるとすると，$S \subseteq S^* \subseteq T^* = T \subseteq S$ だから，$S = T$ である．　□

命題 1.45　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素とする．T が単射であることと $\operatorname{Im} T$ が $\mathcal{H}$ における稠密であることとは同値であり，これらの条件の下で，T^{-1} は $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素である．

証明　命題 1.21 より $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ だから，T が単射であることと $\operatorname{Im} T$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることとは同値である．さらに，これらの条件の下で，命題 1.27 より $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$ だから，T^{-1} は自己随伴である．　□

対称作用素の自己随伴性の判定条件を述べる．次の定理とその系では，前小節の後半で用いた記号 $\mathbb{C}_{>0}$, $\mathbb{C}_{\geq 0}$, $\mathbb{C}_{<0}$, $\mathbb{C}_{\leq 0}$ を用いる．

定理 1.46　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉対称作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) T は自己随伴である．
(b) $\operatorname{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ である．
(c) ある $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ と $\mu \in \mathbb{C}_{<0}$ が存在して，$\lambda, \mu \notin \operatorname{Sp}(T)$ である．
(d) ある $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ と $\mu \in \mathbb{C}_{<0}$ が存在して，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ と $T - \mu 1_{\mathcal{H}}$ はともに全射である．
(e) ある $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ と $\mu \in \mathbb{C}_{<0}$ が存在して，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ と $T - \mu 1_{\mathcal{H}}$ の像はともに $\mathcal{H}$ において稠密である．
(f) ある $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ と $\mu \in \mathbb{C}_{<0}$ が存在して，$T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}}$ と $T^* - \overline{\mu} 1_{\mathcal{H}}$ はともに単射である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　T が自己随伴であるとする．すると，任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，命題 1.35 より $T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}} = T - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}}$ は単射だから，系 1.36 より $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ である．よって，$\operatorname{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\operatorname{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ であるとすると，特に $\pm i \notin \operatorname{Sp}(T)$ だから，$T - i 1_{\mathcal{H}}$ は全射であり，かつ $T^* - i 1_{\mathcal{H}}$ は単射である（系 1.36）．このことから，$\operatorname{Dom} T^* \subseteq \operatorname{Dom} T$ を示す．

$\xi \in \operatorname{Dom} T^*$ とする．$T - i 1_{\mathcal{H}}$ は全射だから，ある $\xi' \in \operatorname{Dom} T$ が存在して，$(T^* - i 1_{\mathcal{H}})\xi = (T - i 1_{\mathcal{H}})\xi'$ を満たす．また，$T \subseteq T^*$ だから，$\xi' \in \operatorname{Dom} T^*$ かつ $(T - i 1_{\mathcal{H}})\xi' = (T^* - i 1_{\mathcal{H}})\xi$ である．したがって，$(T^* - i 1_{\mathcal{H}})\xi = (T^* - i 1_{\mathcal{H}})\xi'$ だが，$T^* - i 1_{\mathcal{H}}$ は単射だから，これより $\xi = \xi' \in \operatorname{Dom} T$ を得る．よって，$\operatorname{Dom} T^* \subseteq \operatorname{Dom} T$ である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　$\operatorname{Sp}(T)$ が $\mathbb{R}$ の閉集合，$\mathbb{C}_{\geq 0}$，$\mathbb{C}_{\leq 0}$，$\mathbb{C}$ のいずれかであること（系 1.39）から従う．

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longleftrightarrow$ (f)　系 1.36 から従う．　□

系 1.47　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された対称作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) T は本質的自己随伴である．
(b) ある $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ と $\mu \in \mathbb{C}_{<0}$ が存在して，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ と $T - \mu 1_{\mathcal{H}}$ の像はともに $\mathcal{H}$ において稠密である．
(c) ある $\lambda \in \mathbb{C}_{>0}$ と $\mu \in \mathbb{C}_{<0}$ が存在して，$T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}}$ と $T^* - \overline{\mu} 1_{\mathcal{H}}$ はともに単射である．

証明　(a) $\Longleftrightarrow$ (c)　T は稠密に定義された対称作用素だから，可閉であり，その閉包 $\overline{T}$ は稠密に定義された閉対称作用素である（命題 1.33）．$\overline{T}$ に定理 1.46 の (a) $\Longleftrightarrow$ (f) を適用し，$(\overline{T})^* = T^*$ であることに注意すれば，条件 (a) と (c) の同値性を得る．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\operatorname{Ker}(T^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^* = (\operatorname{Im}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ だから（命題 1.20 (1)，命題 1.21），条件 (b) と (c) は同値である．　□

定理 1.48　T は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉対称作用素であり，$c \in \mathbb{R}$ について $T \geq c$ を満たす

とする．このとき，次の条件は同値である．

(a) T は自己随伴である．
(b) $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [c, \infty)$ である．
(c) ある $\lambda \in (-\infty, c)$ が存在して，$\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ である．
(d) ある $\lambda \in (-\infty, c)$ が存在して，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は全射である．
(e) ある $\lambda \in (-\infty, c)$ が存在して，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ の像は $\mathcal{H}$ において稠密である．
(f) ある $\lambda \in (-\infty, c)$ が存在して，$T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) T が自己随伴であるとする．すると，定理 1.46 より，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ である．また，任意の $\lambda \in (-\infty, c)$ に対して，命題 1.41 より $T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}} = T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射だから，系 1.42 より $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ である．よって，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq [c, \infty)$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) $\mathrm{Sp}(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合だから（命題 1.18），$\lambda \in (-\infty, c)$ が $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ を満たすとすると，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $\lambda \pm i\epsilon \notin \mathrm{Sp}(T)$ となる．よって，このとき，定理 1.46 より，T は自己随伴である．

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longleftrightarrow$ (f) 系 1.42 から従う． □

系 1.49 T は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された対称作用素であり，$c \in \mathbb{R}$ について $T \geq c$ を満たすとする．このとき，次の条件は同値である．

(a) T は本質的自己随伴である．
(b) ある $\lambda \in (-\infty, c)$ が存在して，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ の像は $\mathcal{H}$ において稠密である．
(c) ある $\lambda \in (-\infty, c)$ が存在して，$T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は単射である．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (c) T は稠密に定義された対称作用素だから，可閉であり，その閉包 $\overline{T}$ は稠密に定義された閉対称作用素である（命題 1.33）．$\overline{T}$ に定理 1.48 の (a) $\Longleftrightarrow$ (f) を適用し，$(\overline{T})^* = T^*$ であることに注意すれば，条件 (a) と (c) の同値性を得る．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^* = (\mathrm{Im}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ だから（命題 1.20 (1)，命題 1.21），条件 (b) と (c) は同値である． □

次の命題は，次小節の命題 1.53，正規作用素のスペクトル分解定理（定理 4.1），稠密に定義された閉作用素の極分解に必要な命題 4.39 の証明に用いられる．

命題 1.50 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素とする．

(1) $1_{\mathcal{H}} + T^*T$ は，$\mathrm{Dom}\, T^*T$ から $\mathcal{H}$ への全単射である．
(2) $B = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ は，$\mathcal{H}$ 上の単射な連続正自己随伴作用素であり，$\|B\| \leq 1$ を満たす．
(3) $C = T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された連続線型作用素であり，$\|C\| \leq 1$ を満たす．
(4) $\mathrm{gr}(T|_{\mathrm{Dom}\, T^*T})$ は，$\mathrm{gr}(T)$ において稠密である．

証明 (1), (2), (3) まず，$1_{\mathcal{H}} + T^*T$ が単射であることを示す．$\xi \in \mathrm{Dom}\, T^*T$ とすると，

$$\|\xi\|^2 + \|T\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle + \langle T^*T\xi | \xi \rangle = \langle (1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi | \xi \rangle$$

だから，

$$\|\xi\|^2 \leq |\langle (1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi | \xi \rangle| \leq \|(1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi\| \|\xi\|$$

が成り立つ．よって，$1_{\mathcal{H}} + T^*T$ は単射である．

次に，$B = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ と $C = T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ を別の方法で構成する．ユニタリ作用素 $J\colon \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ を，$J(\xi, \eta) = (\eta, -\xi)$ と定める．Hilbert 空間 $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ は $J(\mathrm{gr}(T))$ と $\mathrm{gr}(T^*)$ に直交直和分解されるから（命題 1.22），任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$B'\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ と $C'\xi \in \mathrm{Dom}\, T^*$ であって，

$$(0, \xi) = (-TB'\xi, B'\xi) + (C'\xi, T^*C'\xi), \tag{$*$}$$

を満たすものが一意に存在する．これにより，$\mathcal{H}$ 上の全域で定義された線型作用素 B' と，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された線型作用素 C' が定まる．($*$) の右辺の 2 項は直交するから，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|\xi\|^2 = \|TB'\xi\|^2 + \|B'\xi\|^2 + \|C'\xi\|^2 + \|T^*C'\xi\|^2 \geq \|B'\xi\|^2 + \|C'\xi\|^2$$

である．したがって，$B' \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ かつ $\|B'\| \leq 1$ であり，$C' \in \mathscr{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ かつ $\|C'\| \leq 1$ である．($*$) の両辺の第 1 成分を比較すれば，$TB' = C'$ がわかる．$\mathrm{Im}\, C' \subseteq \mathrm{Dom}\, T^*$ と合わせて，$\mathrm{Im}\, B' \subseteq \mathrm{Dom}\, T^*T$ を得る．また，($*$) の両辺の第 2 成分を比較すれば，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\xi = B'\xi + T^*C'\xi = B'\xi + T^*TB'\xi = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)B'\xi$$

であることがわかる．B' は $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された線型作用素であり，$1_{\mathcal{H}} + T^*T$ は $\mathcal{H}$ 上の単射な線型作用素だったから，上式より，$1_{\mathcal{H}} + T^*T$ は $\mathrm{Dom}\, T^*T$ から $\mathcal{H}$ への全単射を与え，かつ $B' = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ を満たす．よって，$B' = B$ かつ $C' = TB' = TB = C$ である．

最後に，$1_{\mathcal{H}} + T^*T$ が全射であることと，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}(T^*T)$ に対して

$$\langle (1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi | B(1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi \rangle = \langle (1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi | \xi \rangle = \|\xi\|^2 + \|T\xi\|^2 \geq 0$$

であることから，B は正対称作用素である．B は全域で定義されているから，自己随伴となる．これで，(1), (2), (3) のすべての主張が示された．

(4)　$\zeta \in \mathrm{Dom}\, T$ とし，$(\zeta, T\zeta) \in \mathrm{gr}(T)$ が $\mathrm{gr}(T|_{\mathrm{Dom}\, T^*T})$ に直交するとする．このとき，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T^*T$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (\zeta, T\zeta) | (\xi, T\xi) \rangle \\
&= \langle \zeta | \xi \rangle + \langle T\zeta | T\xi \rangle \\
&= \langle \zeta | \xi \rangle + \langle \zeta | T^*T\xi \rangle \\
&= \langle \zeta | (1_{\mathcal{H}} + T^*T)\xi \rangle
\end{aligned}$$

だが，(1) より $1_{\mathcal{H}} + T^*T$ は全射だから，$\zeta = 0$ である．よって，$\mathrm{gr}(T|_{\mathrm{Dom}\, T^*T})$ は $\mathrm{gr}(T)$ において稠密である．□

系 1.51　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素 T に対して，T^*T は，$\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素である．

証明　命題 1.50 (2) より，$B = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ は $\mathcal{H}$ 上の単射な連続自己随伴作用素だから，$T^*T = B^{-1} - 1_{\mathcal{H}}$ も自己随伴である（命題 1.45）．また，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T^*T$ に対して $\langle \xi | T^*T\xi \rangle = \|T\xi\|^2 \geq 0$ だから，T^*T は正である．□

1.8 正規作用素

定義 1.52（正規作用素） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T が**正規**（normal）であるとは，T が $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素であり，かつ $T^*T = TT^*$ を満たすことをいう．

正規作用素は，稠密に定義された閉作用素だから，それが全域で定義されていることと連続であることとは同値である（系 1.7）．

命題 1.20 (1), (2) を用いて容易に確かめられるように，T が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素，S が $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素であり，$TS = ST$ かつ $TS^* = S^*T$ ならば，$T + S$ や λT（$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$）も正規である．特に，$\mathcal{H}$ 上の正規作用素 T と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$T + \lambda 1_{\mathcal{H}}$ も正規である．

命題 1.53 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) T は正規である．
(b) $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$ であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$ に対して $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) T が正規であるとする．まず，$\xi \in \operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom} TT^*$ に対しては，

$$\|T\xi\|^2 = \langle T\xi|T\xi\rangle = \langle \xi|T^*T\xi\rangle = \langle \xi|TT^*\xi\rangle = \langle T^*\xi|T^*\xi\rangle = \|T^*\xi\|^2$$

だから，

$$\|T\xi\| = \|T^*\xi\| \tag{$*$}$$

である．次に，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ とする．$\operatorname{gr}(T|_{\operatorname{Dom} T^*T})$ は $\operatorname{gr}(T)$ において稠密だから（命題 1.50 (4)），$\operatorname{Dom} T^*T$ 上の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$((\xi_n, T\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\xi, T\xi)$ に収束するものがとれる．すると，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，($*$) より任意の m, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|T\xi_m - T\xi_n\| = \|T^*\xi_m - T^*\xi_n\|$ だから，$(T^*\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．したがって，$(T^*\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある点 $\eta \in \mathcal{H}$ に収束する．T^* は閉であり（系 1.23），$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T^*\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ ξ, η に収束するから，$\xi \in \operatorname{Dom} T^*$ かつ $T^*\xi = \eta$ である．さらに，($*$) より，

$$\|T^*\xi\| = \|\eta\| = \lim_{n\to\infty} \|T^*\xi_n\| = \lim_{n\to\infty} \|T\xi_n\| = \|T\xi\|$$

が成り立つ．これで，$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} T^*$ であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ がであることが示された．T を T^* に置き換えて，$T^{**} = T$ を用いれば（系 1.25），$\operatorname{Dom} T^* \subseteq \operatorname{Dom} T$ も得られる．よって，条件 (b) が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 条件 (b) が成り立つとすると，写像 $(\xi, T\xi) \mapsto (\xi, T^*\xi)$ は，$\operatorname{gr}(T)$ から $\operatorname{gr}(T^*)$ への等長線型同型である．一般に，Hilbert 空間上の線型作用素が閉であることと，そのグラフが完備であることとは同値だから，T^* が閉であることより（系 1.23），T も閉である．

次に，$T^*T = TT^*$ を示す．$(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ に対して，

$$(\xi, \eta) \in \operatorname{gr}(T^*T) \iff \text{任意の } \zeta \in \operatorname{Dom} T \text{ に対して } \langle T\xi|T\zeta\rangle = \langle \eta|\zeta\rangle$$

である．また，上式で T を T^* に置き換えて，$T^{**} = T$ を用いれば（系 1.25），

$$(\xi, \eta) \in \operatorname{gr}(T^*T) \iff \text{任意の } \zeta \in \operatorname{Dom} T \text{ に対して } \langle T^*\xi|T^*\zeta\rangle = \langle \eta|\zeta\rangle$$

を得る．仮定と分極公式より，任意の ζ, $\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$ に対して $\langle T\zeta|T\xi\rangle = \langle T^*\zeta|T^*\xi\rangle$ だから，上記の二つの同値性より，$T^*T = TT^*$ が従う． □

注意 1.54 T を Hilbert 空間上の正規作用素とすると，正規作用素の定義より $\mathrm{Dom}\, T^*T = \mathrm{Dom}\, TT^*$ であり，命題 1.53 より $\mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Dom}\, T^*$ だが，$\mathrm{Dom}\, T^*T = \mathrm{Dom}\, T$ は一般には成り立たない．

系 1.55 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 T は，正規作用素の中で極大である．すなわち，$\mathcal{H}$ 上の正規作用素であって T の拡張であるものは，T 自身のみである．

証明 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 S が T の拡張であるとすると，命題 1.53 より $\mathrm{Dom}\, S = \mathrm{Dom}\, S^* \subseteq \mathrm{Dom}\, T^* = \mathrm{Dom}\, T \subseteq \mathrm{Dom}\, S$ だから，$S = T$ である． □

系 1.56 Hilbert 空間上の正規作用素 T に対して，$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ である．

証明 $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^*$ は命題 1.53 の結果であり，$\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ は命題 1.21 ですでに示した． □

系 1.57 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\lambda \in \mathbb{C}$ とする．このとき，$\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H}) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} 1_\mathcal{H})$ である．特に，λ が T の固有値であることと，$\overline{\lambda}$ が T^* の固有値であることとは同値である．

証明 系 1.56 と命題 1.20 (1) より，$\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H}) == \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H})^* = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} 1_\mathcal{H})$ である． □

系 1.58 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ である．
(b) $T - \lambda 1_\mathcal{H}$ は単射であり，その像は $\mathcal{H}$ において閉である．
(c) $T - \lambda 1_\mathcal{H}$ は全射である．

証明 $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$ は $T - \lambda 1_\mathcal{H}$ が全単射であることと同値だが（命題 1.17），系 1.56 より $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H}) = (\mathrm{Im}(T - \lambda 1_\mathcal{H}))^\perp$ だから，これは，$T - \lambda 1_\mathcal{H}$ が単射でありその像が閉であることや，$T - \lambda 1_\mathcal{H}$ が全射であることと同値である． □

系 1.59 Hilbert 空間上の正規作用素は，対称ならば自己随伴である．

証明 Hilbert 空間上の正規作用素 T は，稠密に定義されており，命題 1.53 より $\mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Dom}\, T^*$ を満たすから，対称ならば自動的に自己随伴となる． □

命題 1.60 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とする．異なる二つの複素数 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して，固有空間 $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H})$ と $\mathrm{Ker}(T - \mu 1_\mathcal{H})$ は直交する．

証明 $\xi \in \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H})$，$\mu \in \mathrm{Ker}(T - \mu 1_\mathcal{H})$ とすると，系 1.57 より $\mu \in \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\mu} 1_\mathcal{H})$ でもあるから，

$$\lambda\langle\eta|\xi\rangle = \langle\eta|T\xi\rangle = \langle T^*\eta|\xi\rangle = \mu\langle\eta|\xi\rangle$$

であり，したがって，$\langle\eta|\xi\rangle = 0$ である．よって，固有空間 $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_\mathcal{H})$ と $\mathrm{Ker}(T - \mu 1_\mathcal{H})$ は直交する． □

命題 1.61 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とする．T が単射であることと $\mathrm{Im}\, T$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることとは同値であり，これらの条件の下で，T^{-1} は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素である．

証明 系 1.56 より $\mathrm{Ker}\, T = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ だから，T が単射であることと $\mathrm{Im}\, T$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることとは同値である．さらに，これらの条件の下で，命題 1.3 と命題 1.27 より

$$(T^{-1})^*T^{-1} = (T^*)^{-1}T^{-1} = (TT^*)^{-1} = (T^*T)^{-1} = T^{-1}(T^*)^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^*$$

だから，T^{-1} は正規である． $\square$

命題 1.50 において T が正規作用素である場合には，次が成り立つ．この命題は，正規作用素のスペクトル分解定理（定理 4.1）の証明に用いられる．

命題 1.62　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とする．$B = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$，$C = T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ と置くと，$BT \subseteq C$ かつ $BC = CB$ である．

証明　命題 1.50 で一般の稠密に定義された閉作用素に対して示したように，B と C は，$\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素である．T は正規だから $T(1_{\mathcal{H}} + T^*T) = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)T$ であり，したがって，

$$\begin{aligned}
BT &= (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}T \\
&= (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1} \\
&= (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}(1_{\mathcal{H}} + T^*T)T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1} \\
&\subseteq T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1} \\
&= C
\end{aligned}$$

である．また，これより $BC = BTB \subseteq CB$ だが，BC は全域で定義されているから，$BC = CB$ が成り立つ． $\square$

1.9　線型作用素の Hilbert 直和

Hilbert 空間の族 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ の Hilbert 直和を $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と書く．すなわち，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ は，線型空間

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\mathcal{H}_i = \left\{ (\xi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{H}_i \;\middle|\; \sum_{i\in I}\|\xi_i\|^2 < \infty \right\}$$

に内積

$$\langle (\eta_i)_{i\in I} | (\xi_i)_{i\in I} \rangle = \sum_{i\in I}\langle \eta_i | \xi_i \rangle$$

を与えて得られる Hilbert 空間である．$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間の完全直交族ならば，自然に $\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ とみなせる．

定義 1.63（線型作用素の Hilbert 直和）　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への線型作用素とするとき，$(T_i)_{i\in I}$ の **Hilbert 直和**と呼ばれる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 $T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ を，次のように定める．

- $\operatorname{Dom} T = \{(\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H} \mid (T_i\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}\}$.
- $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Dom} T$ に対して，$T\xi = (T_i\xi_i)_{i\in I}$.

容易に確かめられるように，各 $i \in I$ に対して T_i が $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素ならば，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ は $\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素となる．

命題 1.64　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への線型作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く．このとき，T が閉作用素であるための必

要十分条件は，すべての T_i が閉作用素であることである．さらに，これらの条件の下で，

$$\mathrm{gr}(T) = \overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)}$$

が成り立つ．

証明　各 $i\in I$ に対して $\mathrm{gr}(T_i) = \mathrm{gr}(T)\cap(\mathcal{H}_i\times\mathcal{K}_i)$ だから，T が閉作用素ならば T_i も閉作用素である．逆に，すべての T_i が閉作用素であるとする．すると，$(\mathrm{gr}(T_i))_{i\in I}$ は $\mathcal{H}\times\mathcal{K}$ の閉部分線型空間の直交族である．したがって，Hilbert 空間の一般論より，これら全体が張る $\mathcal{H}\times\mathcal{K}$ の閉部分線型空間は，

$$\begin{aligned}\overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)} &= \left\{\sum_{i\in I}(\xi_i,\eta_i)\in\mathcal{H}\times\mathcal{K} \;\middle|\; \text{各 } i\in I \text{ に対して } (\xi_i,\eta_i)\in\mathrm{gr}(T_i),\ \sum_{i\in I}\|(\xi_i,\eta_i)\|^2<\infty\right\}\\ &= \{((\xi_i)_{i\in I},(\eta_i)_{i\in I})\in\mathcal{H}\times\mathcal{K} \mid \text{各 } i\in I \text{ に対して } (\xi_i,\eta_i)\in\mathrm{gr}(T_i)\}\\ &= \mathrm{gr}(T)\end{aligned}$$

となる．よって，$\mathrm{gr}(T) = \overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)}$ であり，特に，T は閉作用素である．これで，すべての主張が示された． □

命題 1.65　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$, $\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ と置く．このとき，$T^* = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ である．

証明　$\eta = (\eta_i)_{i\in I}\in\mathcal{K}$ と $\zeta = (\zeta_i)_{i\in I}\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}(T^*) &\iff \text{任意の } \xi = (\xi_i)_{i\in I}\in\operatorname{Dom}T \text{ に対して } \langle\eta|T\xi\rangle = \langle\zeta|\xi\rangle\\ &\iff \text{任意の } \xi = (\xi_i)_{i\in I}\in\operatorname{Dom}T \text{ に対して } \sum_{i\in I}\langle T_i\xi_i|\eta_i\rangle = \sum_{i\in I}\langle\xi_i|\zeta_i\rangle\end{aligned}$$

であり，

$$(\eta,\zeta)\in\mathrm{gr}\left(\widehat{\bigoplus_{i\in I}}T_i^*\right) \iff \text{任意の } i\in I \text{ と } \xi_i\in\operatorname{Dom}T_i \text{ に対して } \langle T_i\xi_i|\eta_i\rangle = \langle\xi_i|\zeta_i\rangle$$

である．これら二つの条件が同値であることは，容易に確かめられる．よって，$T^* = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ である． □

命題 1.66　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ と置く．

(1) T が自己随伴であるための必要十分条件は，すべての T_i が自己随伴であることである．
(2) T が正規であるための必要十分条件は，すべての T_i が正規であることである．

証明　命題 1.65 で示したように，$T^* = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ であることに注意する．

(1)　$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i$ かつ $T^* = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}T_i^*$ であることからただちに従う．

(2)　命題 1.64 で示したように，T が閉であることと，すべての T_i が閉であることとは同値である．正規作用素の定義には閉であることが含まれているから，本主張の証明においては，T およびすべての T_i が閉である場合のみを考えればよい．以下，そのように仮定する．

T^*T を $\mathcal{H}_i \cap \operatorname{Dom} T^*T$ に制限すると $T_i^*T_i$ となり，TT^* を $\mathcal{H}_i \cap \operatorname{Dom} TT^*$ に制限すると $T_iT_i^*$ となるから，T が正規ならばすべての T_i は正規である．逆に，すべての T_i が正規であるとする．すると，$T_i^*T_i = T_iT_i^*$ であり，任意の $\xi_i \in \operatorname{Dom} T_i = \operatorname{Dom} T_i^*$ に対して $\|T_i\xi_i\| = \|T_i^*\xi_i\|$ だから（命題 1.53），$\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\xi \in \operatorname{Dom} T^*T \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \xi_i \in \operatorname{Dom} T_i^*T_i \text{ であり，} \sum_{i\in I}\|T_i\xi_i\|^2 < \infty \text{ かつ } \sum_{i\in I}\|T_i^*T_i\xi_i\|^2 < \infty \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \xi_i \in \operatorname{Dom} T_iT_i^* \text{ であり，} \sum_{i\in I}\|T_i^*\xi_i\|^2 < \infty \text{ かつ } \sum_{i\in I}\|T_iT_i^*\xi_i\|^2 < \infty \\
&\iff \xi \in \operatorname{Dom} TT^*
\end{aligned}$$

である．したがって，$\operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom} TT^*$ である．さらに，$\xi \in \operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom} TT^*$ に対して，

$$T^*T\xi = (T_i^*T_i\xi_i)_{i\in I} = (T_iT_i^*\xi_i)_{i\in I} = TT^*\xi$$

である．よって，T は正規である． □

命題 1.67　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の閉作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く（命題 1.64 より，T は $\mathcal{H}$ 上の閉作用素である）．

(1) $\overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i)} \subseteq \operatorname{Sp}(T)$ である．
(2) I が有限ならば，$\operatorname{Sp}(T) = \bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i)$ である．

証明　(1)　$\lambda \in \mathbb{C}$ について，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}(T_i - \lambda 1_{\mathcal{H}_i})$ が連続可逆ならば，各 $\lambda 1_{\mathcal{H}_i} - T_i$ は連続可逆である．よって，$\bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i) \subseteq \operatorname{Sp}(T)$ である．さらに，$\operatorname{Sp}(T)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合だから（命題 1.18），$\overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i)} \subseteq \operatorname{Sp}(T)$ が成り立つ．

(2)　I が有限ならば，$\lambda \in \mathbb{C}$ について，$T - \lambda 1_{\mathcal{H}} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}(T_i - \lambda 1_{\mathcal{H}_i})$ が連続可逆であることは，任意の $i \in I$ に対して $T_i - \lambda 1_{\mathcal{H}_i}$ が連続可逆であることと同値である．よって，$\operatorname{Sp}(T) = \bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i)$ である． □

注意 1.68　後に系 4.24 で示すように，命題 1.67 の状況に加えて各 T_i が正規ならば，$\operatorname{Sp}(T) = \overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i)}$ が成り立つ．しかし，各 T_i が $\mathcal{H}_i$ 上の全域で定義された連続線型作用素であっても，$\operatorname{Sp}(T) = \overline{\bigcup_{i\in I}\operatorname{Sp}(T_i)}$ が成り立つとは限らない．たとえば，各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $T_n = \left(\begin{smallmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ と定め，Hilbert 空間 $\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}\mathbb{C}^2$ 上の閉作用素 $T = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}_{>0}} T_n$ を考える．すると，各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して，$\operatorname{Sp}(T_n) = \{1\}$ である．一方で，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ は全射ではない（たとえば，$((0, 1/n))_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \notin \operatorname{Im}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ である）から，$\operatorname{Sp}(T) = \mathbb{C}$ である．

1.10　線型作用素の簡約

本小節では，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ の上への直交射影を，$P_{\mathcal{M}}$ と書く，

定義 1.69（線型作用素を簡約する閉部分線型空間）　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の閉部分線型空間の組 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ が T を**簡約する**（reduce）とは，$P_{\mathcal{N}}T \subseteq TP_{\mathcal{M}}$ であることをいう．$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ かつ $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ である場合は，このことを単に，$\mathcal{M}$ が T を簡約するという．

定義 1.69 の状況で, $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ が T を簡約するならば, $\xi \in \mathrm{Dom}\, T \cap \mathcal{M}$ に対して $T\xi = TP_{\mathcal{M}}\xi = P_{\mathcal{N}}T\xi \in \mathcal{N}$ だから，$T(\mathrm{Dom}\, T \cap \mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$ である．このことを踏まえて，次のように定義する．

定義 1.70（線型作用素の簡約） T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とし，$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の閉部分線型空間の組 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ は T を簡約するとする．このとき，T の定義域を $\mathrm{Dom}\, T \cap \mathcal{M}$ に制限して得られる $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への線型作用素を，T の $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ による**簡約**（reduction）という．$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ かつ $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ である場合は，これを単に，T の $\mathcal{M}$ による簡約という．

命題 1.71 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ をそれぞれ $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ の閉部分線型空間とするとき，$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ が T を簡約することと，$(\mathcal{M}^{\perp},\mathcal{N}^{\perp})$ が T を簡約することとは同値である．

証明 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ が T を簡約する，すなわち，$P_{\mathcal{N}}T \subseteq TP_{\mathcal{M}}$ であるとする．すると，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ に対して，$P_{\mathcal{M}}\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ かつ $P_{\mathcal{N}}T\xi = TP_{\mathcal{M}}\xi$ だから，$(1_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{M}})\xi = \xi - P_{\mathcal{M}}\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ かつ

$$(1_{\mathcal{K}} - P_{\mathcal{N}})T\xi = \xi - P_{\mathcal{N}}T\xi = \xi - TP_{\mathcal{M}}\xi = T(1_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{M}})\xi$$

となる．よって，$(1_{\mathcal{K}} - P_{\mathcal{N}})T \subseteq T(1_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{M}})$ である．すなわち，$(\mathcal{M}^{\perp},\mathcal{N}^{\perp})$ は T を簡約する．$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ をそれぞれ $\mathcal{M}^{\perp}$, $\mathcal{N}^{\perp}$ に置き換えれば，逆もわかる． □

命題 1.72 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の閉部分線型空間の組 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ は T を簡約するとし，対応する簡約を $T_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ と書く．

(1) T が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された線型作用素ならば，T_0 は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への稠密に定義された線型作用素である．

(2) T が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への閉作用素ならば，T_0 は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への閉作用素である．

証明 (1) $P_{\mathcal{N}}T \subseteq TP_{\mathcal{M}}$ より特に，$P_{\mathcal{M}}(\mathrm{Dom}\, T) \subseteq \mathrm{Dom}\, T \cap \mathcal{M} = \mathrm{Dom}\, T_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ である．よって，$\mathrm{Dom}\, T$ が $\mathcal{H}$ において稠密ならば，$\mathrm{Dom}\, T_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ は $\mathcal{M}$ において稠密である．

(2) $\mathrm{gr}(T_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) = \mathrm{gr}(T) \cap (\mathcal{M} \times \mathcal{N})$ であることから従う． □

$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への線型作用素とし，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 $T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ を考える．すると，明らかに，各 $(\mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i)$ は T を簡約し，対応する簡約は T_i に等しい．逆に，次が成り立つ．

命題 1.73 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ と置く．T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素とする．各 $i \in I$ に対して，$(\mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i)$ は T を簡約するとし，対応する簡約を T_i と書く．このとき，I が有限であるか，または T が閉であるならば，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ である．

証明 まず，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i \subseteq T$ を示す．各 $i \in I$ に対して $\mathrm{gr}(T_i) \subseteq \mathrm{gr}(T)$ だから，

$$\sum_{i\in I} \mathrm{gr}(T_i) \subseteq \mathrm{gr}(T)$$

である．I が有限ならば，上式より，

$$\mathrm{gr}\left(\bigoplus_{i\in I} T_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{gr}(T_i) \subseteq \mathrm{gr}(T)$$

である．また，T が閉ならば，各簡約 T_i も閉だから（命題 1.72 (2)），命題 1.64 と上式より，

$$\mathrm{gr}\left(\widehat{\bigoplus_{i\in I}} T_i\right) = \overline{\sum_{i\in I} \mathrm{gr}(T_i)} \subseteq \mathrm{gr}(T)$$

である．よって，いずれにしても，$\widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i \subseteq T$ が成り立つ．

次に，$\mathrm{Dom}\, T \subseteq \mathrm{Dom}(\widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i)$ を示す．$\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in \mathrm{Dom}\, T$ とする．各 $i \in I$ に対して，$P_{\mathcal{K}_i} T \subseteq T P_{\mathcal{H}_i}$ だから，$\xi_i = P_{\mathcal{H}_i}\xi \in \mathrm{Dom}\, T$ かつ

$$T_i\xi_i = TP_{\mathcal{H}_i}\xi = P_{\mathcal{K}_i}T\xi$$

である．上式の最右辺の $P_{\mathcal{K}_i}T\xi$ は，$T\xi \in \mathcal{K}$ の i-成分にほかならない．したがって，上式が任意の $i \in I$ に対して成り立つことより，$\xi \in \mathrm{Dom}(\widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i)$ である．よって，$\mathrm{Dom}\, T \subseteq \mathrm{Dom}(\widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i)$ である．

以上で，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ が示された． □

系 1.74 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ は T を簡約するとし，対応する簡約を $T_{\mathcal{M}}$ と書く（命題 1.72 (1) より，$T_{\mathcal{M}}$ は，$\mathcal{M}$ 上の稠密に定義された線型作用素である）．

(1) $\mathcal{M}$ は T^* を簡約し，対応する簡約は $T_{\mathcal{M}}^*$ に等しい．
(2) T が $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素ならば，$T_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の自己随伴作用素である．
(3) T が $\mathcal{H}$ 上の正規作用素ならば，$T_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の正規作用素である．

証明 命題 1.71 より，$\mathcal{M}^\perp$ も T を簡約する．対応する簡約を $T_{\mathcal{M}^\perp}$ と書くと，$T_{\mathcal{M}^\perp}$ は $\mathcal{M}^\perp$ 上の稠密に定義された線型作用素であり（命題 1.72 (1)），$T = T_{\mathcal{M}} \oplus T_{\mathcal{M}^\perp}$ が成り立つ（命題 1.73）．

(1) 命題 1.65 より $T^* = T_{\mathcal{M}}^* \oplus T_{\mathcal{M}^\perp}^*$ だから，$\mathcal{M}$ は T^* を簡約し，対応する簡約は $T_{\mathcal{M}^\perp}^*$ に等しい．

(2), (3) 命題 1.66 から従う．((2) は，(1) からも従う．) □

1.11 線型作用素のテンソル積

Hilbert 空間の有限族 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ の Hilbert テンソル積を，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と書く．すなわち，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ は，「線型空間としてのテンソル積 $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{H}_i$ に

$$\left\langle \bigotimes_{i\in I} \eta_i \middle| \bigotimes_{i\in I} \xi_i \right\rangle = \prod_{i\in I} \langle \eta_i | \xi_i \rangle$$

によって一意に定まる内積を入れて得られる内積空間」を完備化して得られる Hilbert 空間である．

定義 1.75（線型作用素のテンソル積） $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$, $\mathcal{K} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への線型作用素とするとき，$(T_i)_{i\in I}$ の**テンソル積**と呼ばれる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 $T = \bigotimes_{i\in I} T_i$ を，次のように定める．

- $\mathrm{Dom}\, T = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\bigotimes_{i\in I} \xi_i \mid$ 各 $i \in I$ に対して $\xi_i \in \mathcal{H}_i\}$.
- 各 $i \in I$ に対して $\xi_i \in \mathcal{H}_i$ とするとき，$T(\bigotimes_{i\in I} \xi_i) = \bigotimes_{i\in I} T_i\xi_i$（$\mathrm{Dom}\, T$ は線型空間としてのテンソル積 $\bigotimes_{i\in I} \mathrm{Dom}\, T_i$ に自然に線型同型だから，テンソル積の普遍性より，これによって線型作用素が一意に定まる）．

容易に確かめられるように，各 $i \in I$ に対して T_i が $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素ならば，$T = \bigotimes_{i\in I} T_i$ は $\mathcal{H} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素となる．

命題 1.76 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された線型作用素とすると，

$$\bigotimes_{i\in I} T_i^* \subseteq \left(\bigotimes_{i\in I} T_i\right)^*$$

である．

証明 任意の $\xi \in \operatorname{Dom}(\bigotimes_{i\in I} T_i)$ と $\eta \in \operatorname{Dom}(\bigotimes_{i\in I} T_i^*)$ に対して，$\langle \eta | (\bigotimes_{i\in I} T_i)\xi \rangle = \langle (\bigotimes_{i\in I} T_i^*)\eta | \xi \rangle$ であることを示せばよい．示すべき等式の両辺は (η, ξ) に関して準双線型だから，各 $i \in I$ に対して $\xi_i \in \operatorname{Dom} T_i$ かつ $\eta_i \in \operatorname{Dom} T_i^*$ であるとして，$\xi = \bigotimes_{i\in I} \xi_i$ かつ $\eta = \bigotimes_{i\in I} \eta_i$ である場合に等式を示せば十分である．このとき，

$$\begin{aligned}
\left\langle \eta \middle| \left(\bigotimes_{i\in I} T_i\right)\xi \right\rangle &= \left\langle \bigotimes_{i\in I} \eta_i \middle| \bigotimes_{i\in I} T_i\xi_i \right\rangle \\
&= \prod_{i\in I} \langle \eta_i | T_i\xi_i \rangle \\
&= \prod_{i\in I} \langle T_i^*\eta_i | \xi_i \rangle \\
&= \left\langle \bigotimes_{i\in I} T_i^*\eta_i \middle| \bigotimes_{i\in I} \xi_i \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\bigotimes_{i\in I} T_i^*\right)\eta \middle| \xi \right\rangle
\end{aligned}$$

だから，等式は成り立つ． □

命題 1.77 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$，$\mathcal{K} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{K}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された可閉作用素とすると，次が成り立つ．

(1) $\bigotimes_{i\in I} T_i$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された可閉作用素である．

(2) $\bigotimes_{i\in I} T_i$ と $\bigotimes_{i\in I} \overline{T_i}$ の閉包は，一致する．

証明 (1) 各 $i \in I$ に対して $T_i \subseteq \overline{T_i} = T_i^{**}$ だから（命題 1.24），命題 1.76 より，$\bigotimes_{i\in I} T_i \subseteq \bigotimes_{i\in I} T_i^{**} \subseteq (\bigotimes_{i\in I} T_i^*)^*$ である．$(\bigotimes_{i\in I} T_i^*)^*$ は閉作用素だから（系 1.23），$\bigotimes_{i\in I} T_i$ は可閉作用素である．

(2) $\bigotimes_{i\in I} \overline{T_i} \subseteq \overline{\bigotimes_{i\in I} T_i}$ を示せばよい．写像 $\mathit{\Phi}\colon \prod_{i\in I}(\mathcal{H}_i \times \mathcal{K}_i) \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ を

$$\mathit{\Phi}(((\xi_i, \eta_i))_{i\in I}) = \left(\bigotimes_{i\in I} \xi_i, \bigotimes_{i\in I} \eta_i\right)$$

と定めると，$\mathit{\Phi}$ は連続多重線型写像であり，各 $i \in I$ に対して S_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への線型作用素とすると，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \mathit{\Phi}\left(\prod_{i\in I} \operatorname{gr}(S_i)\right) = \operatorname{gr}\left(\bigotimes_{i\in I} S_i\right)$$

が成り立つ．よって，

$$\mathrm{gr}\left(\bigotimes_{i\in I}\overline{T_i}\right)=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\Phi\left(\prod_{i\in I}\mathrm{gr}(\overline{T_i})\right)=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\Phi\left(\overline{\prod_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)}\right)\subseteq\overline{\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\Phi\left(\prod_{i\in I}\mathrm{gr}(T_i)\right)}=\mathrm{gr}\left(\overline{\bigotimes_{i\in I}T_i}\right)$$

だから，$\bigotimes_{i\in I}\overline{T_i}\subseteq\overline{\bigotimes_{i\in I}T_i}$ である． □

定義 1.78 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への稠密に定義された可閉作用素とするとき，これらのテンソル積 $\bigotimes_{i\in I}T_i$（命題 1.77 より，これは，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された可閉作用素である）の閉包を，$(T_i)_{i\in I}$ の**閉テンソル積**といい，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ と書く．

注意 1.79 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$, $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$，$\mathcal{K}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{K}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ から $\mathcal{K}_i$ への全域で定義された連続線型作用素とすると，これらの閉テンソル積 $T=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された連続線型作用素であり，その作用素ノルムは

$$\|T\|=\prod_{i\in I}\|T_i\|$$

である．証明は，Bourbaki [2, §V.3.1, Proposition 1] を参照のこと．

2 射影値測度とそれに関する積分

2.1 射影値測度

定義 2.1（射影値測度） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．可測空間 X 上の **$\mathcal{H}$-射影値測度**（$\mathcal{H}$-projection-valued measure）とは，X の可測集合に対して $\mathcal{H}$ 上の直交射影を与える写像 Π であって，次の条件を満たすものをいう．

(i) $\Pi(X)=1_{\mathcal{H}}$ である．

(ii) Π は，弱位相に関して可算加法的である．すなわち，互いに交わらない可測集合の可算族 $(A_i)_{i\in I}$ に対して，$A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と置くと，弱位相に関して

$$\Pi(A)=\sum_{i\in I}\Pi(A_i)$$

が成り立つ（特に，$\Pi(\emptyset)=0$ である）．

注意 2.2 定義 2.1 の条件 (ii) の「弱位相」を「強位相」に変えても，定義は変わらない．このことを確かめる．Π が条件 (ii) を満たすとする．$(A_i)_{i\in I}$ を互いに交わらない可測集合の可算族として，$A=\bigcup_{i\in I}A_i$ と置

く．すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，有限部分集合 $J \subseteq I$ を大きくする極限において，

$$\begin{aligned}\left\|\left(\varPi(A) - \sum_{i \in J} \varPi(A_i)\right)\xi\right\|^2 &= \left\|\varPi\left(A \setminus \bigcup_{i \in J} A_i\right)\xi\right\|^2 \\ &= \left\langle \varPi\left(A \setminus \bigcup_{i \in J} A_i\right)\xi \middle| \varPi\left(A \setminus \bigcup_{i \in J} A_i\right)\xi \right\rangle \\ &= \left\langle \xi \middle| \varPi\left(A \setminus \bigcup_{i \in J} A_i\right)\xi \right\rangle \\ &= \langle \xi | \varPi(A)\xi \rangle - \sum_{i \in J} \langle \xi | \varPi(A_i)\xi \rangle \\ &\to 0\end{aligned}$$

となる．よって，強位相に関しても

$$\varPi(A) = \sum_{i \in I} \varPi(A_i)$$

が成り立つ．

注意 2.3 総和可能性と可換収束性とが同値であることより（「無限和のノート」 [13, 4 節] を参照のこと），定義 2.1 の条件 (ii) を次の条件に置き換えても，定義は変わらない．

(ii-1) $\varPi(\emptyset) = 0$ である．

(ii-2) 互いに交わらない可測集合の列 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ と置くと，弱位相に関して

$$\varPi(A) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \varPi(A_n)$$

が成り立つ．

命題 2.4 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\varPi$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．可測集合 $A, B \subseteq X$ に対して，次が成り立つ．

(1) $A \subseteq B$ ならば，$\varPi(A) \leq \varPi(B)$（すなわち，$\operatorname{Im} \varPi(A) \subseteq \operatorname{Im} \varPi(B)$）である．

(2) $\operatorname{Im} \varPi(X \setminus A)$ は，$\operatorname{Im} \varPi(A)$ の直交補空間である．

(3) $A \cap B = \emptyset$ ならば，$\varPi(A) \perp \varPi(B)$ である．

(4) $\varPi(A \cap B) = \varPi(A)\varPi(B) = \varPi(B)\varPi(A)$ である．

証明 (1) $A \subseteq B$ であるとする．$\xi \in \operatorname{Im} \varPi(A)$ とすると，

$$\langle \varPi(B)\xi | \xi \rangle = \langle \varPi(A)\xi | \xi \rangle + \langle \varPi(B \setminus A)\xi | \xi \rangle \geq \|\xi\|^2$$

だから，$\xi \in \operatorname{Im} \varPi(B)$ である．よって，$\varPi(A) \leq \varPi(B)$ である．

(2) $\varPi(A) + \varPi(X \setminus A) = \varPi(X) = 1_{\mathcal{H}}$ であることから従う．

(3) (1), (2) から従う．

(4)　(3) より，互いに交わらない可測集合 C, $D \subseteq X$ に対しては $\mathit{\Pi}(C)\mathit{\Pi}(D) = 0$ だから，

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Pi}(A)\mathit{\Pi}(B) &= (\mathit{\Pi}(A \cap B) + \mathit{\Pi}(A \setminus B))(\mathit{\Pi}(A \cap B) + \mathit{\Pi}(B \setminus A)) \\
&= \mathit{\Pi}(A \cap B)^2 + \mathit{\Pi}(A \cap B)\mathit{\Pi}(B \setminus A) + \mathit{\Pi}(A \setminus B)\mathit{\Pi}(A \cap B) + \mathit{\Pi}(A \setminus B)\mathit{\Pi}(B \setminus A) \\
&= \mathit{\Pi}(A \cap B)
\end{aligned}
$$

である． □

定義 2.5（射影値測度の成分）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，X の可測集合に対して複素数を与える写像 $\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ を

$$
\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(A) = \langle \eta | \mathit{\Pi}(A)\xi \rangle
$$

と定めると，容易に確かめられるように，$\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ は X 上の有限複素測度である．この有限複素測度 $\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ を，$\mathit{\Pi}$ の (η, ξ)**-成分**（(η, ξ)-component）という．

本稿の以下の部分では，定義 2.5 の記号 $\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ は断りなく用いる．明らかに，$\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ は η に関して共役線型，ξ に関して線型である．

命題 2.6　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．

(1) $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$ は X 上の有限正値測度である．
(2) $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} = \overline{\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}}$ である．
(3) 可測集合 $A \subseteq X$ と $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathit{\Pi}_{\eta,\mathit{\Pi}(A)\xi} = \mathit{\Pi}_{\mathit{\Pi}(A)\eta,\xi} = \mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(- \cap A)$ である．

証明　(1)　可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$
\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(A) = \langle \xi | \mathit{\Pi}(A)\xi \rangle = \langle \mathit{\Pi}(A)\xi | \mathit{\Pi}(A)\xi \rangle = \|\mathit{\Pi}(A)\xi\|^2 \geq 0
$$

だから，$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$ は正値である．

(2)　可測集合 $A \subseteq X$ に対して

$$
\mathit{\Pi}_{\xi,\eta}(A) = \langle \xi | \mathit{\Pi}(A)\eta \rangle = \overline{\langle \mathit{\Pi}(A)\eta | \xi \rangle} = \overline{\langle \eta | \mathit{\Pi}(A)\xi \rangle} = \overline{\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(A)}
$$

だから，$\mathit{\Pi}_{\xi,\eta} = \overline{\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}}$ である．

(3)　$A \subseteq X$ を可測集合とする．命題 2.4 (4) より，可測集合 $B \subseteq X$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathit{\Pi}_{\eta,\mathit{\Pi}(A)\xi}(B) = \langle \eta | \mathit{\Pi}(B)\mathit{\Pi}(A)\xi \rangle = \langle \eta | \mathit{\Pi}(B \cap A)\xi \rangle = \mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(B \cap A), \\
&\mathit{\Pi}_{\mathit{\Pi}(A)\eta,\xi}(B) = \langle \mathit{\Pi}(A)\eta | \mathit{\Pi}(B)\xi \rangle = \langle \eta | \mathit{\Pi}(A)\mathit{\Pi}(B)\xi \rangle = \langle \eta | \mathit{\Pi}(B \cap A)\xi \rangle = \mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(B \cap A)
\end{aligned}
$$

だから，$\mathit{\Pi}_{\eta,\mathit{\Pi}(A)\xi} = \mathit{\Pi}_{\mathit{\Pi}(A)\eta,\xi} = \mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(- \cap A)$ である． □

命題 2.7　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ と f, $g \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$
\int_X |fg|\, d|\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}| \leq \left(\int_X |f|^2\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2\, d\mathit{\Pi}_{\eta,\eta} \right)^{1/2}
$$

である．

証明　まず，可測集合 $A \subseteq X$ に対して，

$$|\Pi_{\eta,\xi}|(A) \leq \Pi_{\xi,\xi}(A)^{1/2}\Pi_{\eta,\eta}(A)^{1/2} \tag{$*$}$$

を示す．A が可測集合 $A_1, \ldots, A_n$ に分割されるとすると，Cauchy–Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|\Pi_{\eta,\xi}(A_i)| &= \sum_{i=1}^{n}|\langle\eta|\Pi(A_i)\xi\rangle| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|\langle\Pi(A_i)\eta|\Pi(A_i)\xi\rangle| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\|\Pi(A_i)\xi\|\|\Pi(A_i)\eta\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|\Pi(A_i)\xi\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|\Pi(A_i)\eta\|^2\right)^{1/2} \\
&= \|\Pi(A)\xi\|\|\Pi(A)\eta\| \\
&= \Pi_{\xi,\xi}(A)^{1/2}\Pi_{\eta,\eta}(A)^{1/2}
\end{aligned}$$

である．A の分割に関して上限をとれば，($*$) を得る．

次に，f, g がともに 0 以上の可測単関数である場合を考える．f と g を，互いに交わらない可測集合 $A_i \subseteq X$ と a_i, $b_i \geq 0$（$1 \leq i \leq n$）を用いて

$$f = \sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}, \qquad g = \sum_{i=1}^{n}b_i\chi_{A_i}$$

と表すと，($*$) と Cauchy–Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}
\int_X fg\,d|\Pi_{\eta,\xi}| &= \sum_{i=1}^{n}a_ib_i|\Pi_{\eta,\xi}|(A_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Pi_{\xi,\xi}(A_i)^{1/2}\Pi_{\eta,\eta}(A_i)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Pi_{\xi,\xi}(A_i)\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Pi_{\xi,\xi}(A_i)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_X|f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2}\left(\int_X|g|^2\,d\Pi_{\eta,\eta}\right)^{1/2} \qquad (**)
\end{aligned}$$

である．

最後に，f, g が一般の可測関数である場合を考える．$|f|$, $|g|$ のそれぞれに各点収束する 0 以上の可測単関数の単調増加列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．($**$) より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_X f_ng_n\,d|\Pi_{\eta,\xi}| \leq \left(\int_X|f_n|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2}\left(\int_X|g_n|^2\,d\Pi_{\eta,\eta}\right)^{1/2}$$

である．この不等式で $n \to \infty$ とすれば，単調収束定理より，

$$\int_X|fg|\,d|\Pi_{\eta,\xi}| \leq \left(\int_X|f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2}\left(\int_X|g|^2\,d\Pi_{\eta,\eta}\right)^{1/2}$$

を得る．　□

系 2.8 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ と可測集合 $A \subseteq X$ に対して，

$$|\Pi_{\eta,\xi}|(A) \leq \Pi_{\xi,\xi}(A)^{1/2}\Pi_{\eta,\eta}(A)^{1/2}$$

である．特に，$\Pi_{\eta,\xi}$ の全変動ノルムは，

$$\|\Pi_{\eta,\xi}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$$

を満たす．

証明 前半は，命題 2.7 で $f = g = \chi_A$ としたものである（命題 2.7 の証明の中で直接示されてもいる）．後半は，前半で $A = X$ と置けば従う． □

系 2.9 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ と $f \in L(X, \Pi)$ に対して，

$$\int_X |f|\, d|\Pi_{\eta,\xi}| \leq \left(\int_X |f|^2\, d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|$$

である．

証明 命題 2.7 で $g = 1$ としたものである． □

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．通常の測度の場合と同様に，$\Pi(A) = 0$ を満たすある可測集合 A に含まれる集合は，**Π-無視可能**であるという．「**Π-ほとんどすべて**」，「**Π-ほとんどいたるところ**」などの用語も，通常の測度の場合と同様に用いる．X 上の複素数値可測関数の「Π-無視可能な集合上での違いを無視する同値関係」による同値類の全体のなす空間を，$L(X, \Pi)$ と書く．容易に確かめられるように，$L(X, \Pi)$ は，関数の各点ごとの積と複素共役によって単位的対合代数をなす．また，$f \in L(X, \Pi)$ に対して

$$\|f\|_\infty = \min\{M \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \Pi\text{-無視可能な集合上を除いて } |f| \leq M\} \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

と書き，

$$L^\infty(X, \Pi) = \{f \in L(X, \Pi) \mid \|f\|_\infty < \infty\}$$

と置く．すなわち，$L^\infty(X, \Pi)$ は，ある Π-無視可能な集合上を除いて有界（**Π-本質的有界**）な X 上の複素数値可測関数（の同値類）全体のなす空間である．容易に確かめられるように，$L^\infty(X, \Pi)$ は $L(X, \Pi)$ の部分単位的対合代数であり，$\|{-}\|_\infty$ をノルムとして単位的 C* 代数をなす．

X 上の複素数値可測関数 f に対して，通常の測度のときと同様に，f の **Π-本質的値域** $\operatorname{ess\,ran}_\Pi f$ が定義される．すなわち，$\operatorname{ess\,ran}_\Pi f$ は，Π-ほとんどすべての $x \in X$ に対して $f(x) \in F$ となるような最小の閉集合 $F \subseteq \mathbb{C}$ である．容易に確かめられるように，

$$\operatorname{ess\,ran}_\Pi f = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f - \lambda \text{ は } L(X, \Pi) \text{ において可逆であり，乗法逆元 } 1/(f - \lambda) \text{ は } L^\infty(X, \Pi) \text{ に属する}\}$$

である．特に，$f \in L^\infty(X, \Pi)$ の（$L^\infty(X, \Pi)$ における）スペクトルは，Π-本質的値域 $\operatorname{ess\,ran}_\Pi f$ に等しい．

$f\colon X \to Y$ を可測空間の間の可測写像とすると，X 上の正値，有限実または有限複素測度 μ に対して，Y 上の同種の測度 $f_*\mu$ が

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

によって定義され，これを μ の f による像というのだった．これと同様に，射影値測度の像が定義される．すなわち，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とするとき，Y 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $f_*\mathit{\Pi}$ が

$$f_*\mathit{\Pi}(B) = \mathit{\Pi}(f^{-1}(B))$$

によって定義され，これを $\mathit{\Pi}$ の f による**像**という．明らかに，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$(f_*\mathit{\Pi})_{\eta,\xi} = f_*(\mathit{\Pi}_{\eta,\xi})$ である．

位相空間 X を Borel 集合族によって可測空間とみなしたものの上の $\mathcal{H}$-射影値測度を，X 上の **$\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度**という．

定義 2.10（射影値 Borel–Radon 測度） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ が **Radon** であるとは，$\mathit{\Pi}$ のすべての成分 $\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$（ξ, $\eta \in \mathcal{H}$）が（X 上の有限複素 Borel 測度として）Radon であることをいう．Radon な $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度を，**$\mathcal{H}$-射影値 Borel–Radon 測度**という．

注意 2.11 X を第二可算な局所コンパクト Hausdorff とすると，X 上の有限複素 Borel 測度は，すべて Radon である（Cohn [3, Proposition 7.2.3] を参照のこと．Cohn は，「Radon」の代わりに「regular」という語を用いている）．よって，このとき，X 上の射影値 Borel 測度は，すべて Radon である．

μ を局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の正値，有限実または有限複素 Borel–Radon 測度とする．このとき，$\mu|_U = 0$ を満たす最大の開集合 $U \subseteq X$ が存在し，その補集合 $X \setminus U$ を μ の台といい，$\operatorname{supp}\mu$ と書くのだった．さて，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を X 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel–Radon 測度とする．Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mathit{\Pi}(A) = 0$ は任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(A) = 0$ であることと同値である．また，A, $A' \subseteq X$ が Borel 集合であって $A' \subseteq A$ であるとき，$\mathit{\Pi}(A) = 0$ ならば $\mathit{\Pi}(A') = 0$ である（命題 2.4 (1)）．よって，Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して，

$$\mathit{\Pi}(A) = 0 \iff \text{任意の } \xi, \eta \in \mathcal{H} \text{ に対して } \mathit{\Pi}_{\eta,\xi}|_A = 0$$

である．特に，$\mathit{\Pi}(U) = 0$ を満たす最大の開集合 $U \subseteq X$ が存在し，その補集合 $X \setminus U$ は，すべての $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対する $\operatorname{supp}\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ の交叉に等しい．この $X \setminus U$ を，$\mathit{\Pi}$ の**台**という．いいかえれば，$\mathit{\Pi}$ の台とは，$\mathit{\Pi}(F) = 1_{\mathcal{H}}$ を満たす最大の閉集合 $F \subseteq X$ のことである．

2.2 射影値測度に関する積分

定義 2.12（射影値測度に関する積分） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，f の $\mathit{\Pi}$ に関する**積分**と呼ばれる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 $\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ を，次のように定める．

- $\operatorname{Dom}(\int_X f\, d\mathit{\Pi})$ は，$\xi \in \mathcal{H}$ のうち，ある $\zeta \in \mathcal{H}$ が存在して，任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \eta | \zeta \rangle = \int_X f\, d\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ が成り立つ（Riesz の表現定理より，これは，$\mathcal{H}$ 上の線型形式 $\eta \mapsto \int_X f\, d\mathit{\Pi}_{\eta,\xi}$ が連続であることと同値である）ものの全体とする．
- $\xi \in \operatorname{Dom}(\int_X f\, d\mathit{\Pi})$ に対して，前項の条件を満たす $\zeta \in \mathcal{H}$（これは一意に定まる）を，$(\int_X f\, d\mathit{\Pi})\xi$ と定める．

可測集合 $A \subseteq X$ と $f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$\int_X \chi_A f\, d\mathit{\Pi}$ を $\int_A f\, d\mathit{\Pi}$ とも書く．

定義より，$f \in L(X, \Pi)$ の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π に関する積分 $\int_X f\,d\Pi$ は，$\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T であって，条件

任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ と $\eta \in \mathcal{H}$ に対して，f は $\Pi_{\eta,\xi}$-可積分であり，$\langle \eta | T\xi \rangle = \int_X f\,d\Pi_{\eta,\xi}$ が成り立つ．

を満たす最大のものにほかならない．

$f \in L^\infty(X, \Pi)$ に対しては，系 2.8 より，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\left| \int_X f\,d\Pi_{\eta,\xi} \right| \leq \int_X |f|\,d|\Pi_{\eta,\xi}| \leq \|f\|_\infty \|\xi\| \|\eta\|$$

だから，準双線型形式 $(\eta, \xi) \mapsto \int_X f\,d\Pi_{\eta,\xi}$ は連続であり，そのノルムは $\|f\|$ 以下である．したがって，Hilbert 空間の一般論より，$T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \eta | T\xi \rangle = \int_X f\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

を満たすものが一意に存在し，この T は $\|T\| \leq \|f\|_\infty$ を満たす．この T が，積分 $\int_X f\,d\Pi$ となる．よって，$f \in L^\infty(X, \Pi)$ に対しては，

$$\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \quad \text{かつ} \quad \left\| \int_X f\,d\Pi \right\| \leq \|f\|_\infty$$

である．

命題 2.13　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \Pi)$ とすると，任意の $\xi \in \operatorname{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ と $\eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$d\Pi_{\eta, \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi} = f\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

であり，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \operatorname{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ に対して

$$d\Pi_{\left(\int_X f\,d\Pi\right)\eta, \xi} = \overline{f}\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

である．

証明　$\xi \in \operatorname{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ かつ $\eta \in \mathcal{H}$ とする．任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\Pi_{\Pi(A)\eta,\xi} = \Pi_{\eta,\xi}(- \cap A)$ だから（命題 2.6 (3)），

$$\begin{aligned}
\Pi_{\eta, \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi}(A) &= \left\langle \eta \middle| \Pi(A) \left(\int_X f\,d\Pi \right) \xi \right\rangle \\
&= \left\langle \Pi(A)\eta \middle| \left(\int_X f\,d\Pi \right) \xi \right\rangle \\
&= \int_X f\,d\Pi_{\Pi(A)\eta,\xi} \\
&= \int_A f\,d\Pi_{\eta,\xi}
\end{aligned}$$

である．よって，

$$d\Pi_{\eta, \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi} = f\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

が成り立つ．

$\xi \in \mathcal{H}$ かつ $\eta \in \mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ とすると，前段の結果と命題 2.6 (2) より，

$$d\Pi_{(\int_X f\,d\Pi)\eta,\xi} = d\overline{\Pi_{\xi,(\int_X f\,d\Pi)\eta}} = \overline{f}\,d\overline{\Pi_{\xi,\eta}} = \overline{f}\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

である． □

命題 2.14 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $f, g \in L(X, \Pi)$ および $\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ と $\eta \in \mathrm{Dom}(\int_X g\,d\Pi)$ に対して，$\overline{g}f$ は $\Pi_{\eta,\xi}$-可積分であり，

$$\left\langle \left(\int_X g\,d\Pi\right)\eta \middle| \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \right\rangle = \int_X \overline{g}f\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

が成り立つ．特に，

$$\left\| \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}$$

である．

証明 $\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ より f は $\Pi_{(\int_X g\,d\Pi)\eta,\xi}$-可積分であり，命題 2.13 より $d\Pi_{(\int_X g\,d\Pi)\eta,\xi} = \overline{g}\,d\Pi_{\eta,\xi}$ である．よって，$f\overline{g}$ は $\Pi_{\eta,\xi}$-可積分であり，

$$\left\langle \left(\int_X g\,d\Pi\right)\eta \middle| \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \right\rangle = \int_X f\,d\Pi_{(\int_X g\,d\Pi)\eta,\xi} = \int_X \overline{g}f\,d\Pi_{\eta,\xi}$$

が成り立つ．$g = f$，$\eta = \xi$ と置けば，

$$\left\| \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi \right\|^2 = \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}$$

を得る． □

次の命題より，射影値測度に関する積分の結果は，稠密に定義された線型作用素になる．

命題 2.15 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \Pi)$ に対して，

$$\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \left\{ \xi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty \right\}$$

であり，これは $\mathcal{H}$ の稠密部分線型空間である．

証明 $\int_X f\,d\Pi$ の定義域に関する主張を示す．$\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ であるとすると，命題 2.14 より $\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ である．逆に，$\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ であるとする．このとき，$\eta \in \mathcal{H}$ を任意にとると，系 2.9 より

$$\int_X |f|\,d|\Pi_{\eta,\xi}| \leq \left(\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|$$

だから，f は $\Pi_{\xi,\eta}$-可積分で

$$\left|\int_X f\,d\Pi_{\eta,\xi}\right| \leq \left(\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|$$

を満たす．よって，$\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ である．これで，$\int_X f\,d\Pi$ の定義域が $\int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} < \infty$ を満たす $\xi \in \mathcal{H}$ の全体であることが示された．

稠密性に関する主張を示す．$\xi \in \mathcal{H}$ を任意にとる．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\}$$

と置くと，$\Pi_{\Pi(A_n)\xi, \Pi(A_n)\xi} = \Pi_{\xi,\xi}(- \cap A_n)$（命題 2.6 (3)）より，

$$\int_X |f|^2 \, d\Pi_{\Pi(A_n)\xi, \Pi(A_n)\xi} = \int_{A_n} |f|^2 \, d\Pi_{\xi,\xi} \leq n^2 \Pi_{\xi,\xi}(A_n) < \infty$$

である．さらに，$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は増大列で $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ を満たすから，$n \to \infty$ のとき $\Pi(A_n)\xi \to \xi$ である（注意 2.2)．よって，$\mathrm{Dom}(\int_X f \, d\Pi) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \int_X |f|^2 \, d\Pi_{\xi,\xi} < \infty\}$ は $\mathcal{H}$ において稠密である． □

射影値測度に関する積分の結果の線型作用素の核は，次のように表される．

命題 2.16　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $f \in L(X, \Pi)$ に対して，

$$\mathrm{Ker}\left(\int_X f \, d\Pi\right) = \mathrm{Im}\, \Pi(f^{-1}(\{0\}))$$

である．

証明　$\xi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\xi \in \mathrm{Ker}\left(\int_X f \, d\Pi\right) &\iff \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \, d\Pi_{\xi,\xi} = 0 \\
&\iff \Pi_{\xi,\xi}\text{-ほとんどいたるところで } |f|^2 = 0 \\
&\iff \Pi_{\xi,\xi}(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 0 \\
&\iff \Pi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))\xi = 0 \\
&\iff \xi \in \mathrm{Im}\, \Pi(f^{-1}(\{0\}))
\end{aligned}$$

である．ここで，第一の同値性は命題 2.14 と命題 2.15 から，第二の同値性は $\Pi_{\xi,\xi}$ が正値であることから（命題 2.6)，第四の同値性は $\Pi_{\xi,\xi}(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = \|\Pi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))\xi\|^2$ であることから，最後の同値性は $\mathrm{Im}\, \Pi(f^{-1}(\{0\}))$ が $\mathrm{Im}\, \Pi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))$ の直交補空間であること（命題 2.4 (2)）から従う． □

射影値測度の像と積分について，次が成り立つ．

命題 2.17　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$f \colon X \to Y$ を可測空間の間の可測写像とし，Π を X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $g \in L(X, f_*\Pi)$ に対して，

$$\int_Y g \, d(f_*\Pi) = \int_X g \circ f \, d\Pi$$

である．

証明　任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，g が $(f_*\Pi)_{\eta,\xi} = f_*(\Pi_{\eta,\xi})$ に関して可積分であることと $g \circ f$ が $\Pi_{\eta,\xi}$ に関して可積分であることとは同値であり，これらの条件の下で，

$$\int_Y g \, d(f_*\Pi)_{\eta,\xi} = \int_Y g \, d(f_*(\Pi_{\eta,\xi})) = \int_X g \circ f \, d\Pi_{\eta,\xi}$$

が成り立つ．よって，

$$\int_Y g \, d(f_*\Pi) = \int_X g \circ f \, d\Pi$$

である． □

2.3 射影値測度に関する積分の準同型性

射影値測度に関する積分は，次の意味で，準同型性を満たす．

定理 2.18 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \Pi)$ に対して，

$$T_f = \int_X f\, d\Pi, \qquad D_f = \operatorname{Dom} T_f$$

と書くことにする．$f, g \in L(X, \Pi)$ に対して，次が成り立つ．

(1) $T_f + T_g = T_{f+g}|_{D_f \cap D_g} = T_{f+g}|_{D_f \cap D_{f+g}} = T_{f+g}|_{D_g \cap D_{f+g}}$ である．特に，f または g が $L^\infty(X, \Pi)$ に属するならば，$T_f + T_g = T_{f+g}$ である．
(2) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とすると，$\lambda T_f = T_{\lambda f}$ である．
(3) $T_1 = 1_{\mathcal{H}}$ である．
(4) $T_f T_g = T_{fg}|_{D_g \cap D_{fg}}$ である．特に，$g \in L^\infty(X, \Pi)$ ならば，$T_f T_g = T_{fg}$ である．
(5) $T_f^* = T_{\overline{f}}$ である．
(6) T_f が単射であることと f が $L(X, \Pi)$ において可逆であることとは同値であり，これらの条件の下で，$T_f^{-1} = T_{1/f}$ が成り立つ（$1/f$ は，f の $L(X, \Pi)$ における乗法逆元を表す）．

証明 (1) 線型作用素の和の定義より，$\operatorname{Dom}(T_f + T_g) = D_f \cap D_g$ である．$\xi \in D_f \cap D_g$ とすると，任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して f と g は $\Pi_{\eta,\xi}$-可積分だから $f + g$ も $\Pi_{\eta,\xi}$-可積分であり，したがって，$\xi \in D_{f+g}$ である．さらに，任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle \eta | (T_f + T_g)\xi \rangle &= \langle \eta | T_f \xi \rangle + \langle \eta | T_g \xi \rangle \\
&= \int_X f\, d\Pi_{\eta,\xi} + \int_X g\, d\Pi_{\eta,\xi} \\
&= \int_X (f + g)\, d\Pi_{\eta,\xi} \\
&= \langle \eta | T_{f+g} \xi \rangle
\end{aligned}$$

である．よって，$T_f + T_g = T_{f+g}|_{D_f \cap D_g}$ である．また，上の議論より特に $D_{f+g} \subseteq D_f \cap D_g$ だが，この式で f, g をそれぞれ $f + g$, $-g$ で置き換えることにより $D_f \subseteq D_{f+g} \cap D_{-g} = D_{f+g} \cap D_g$ が得られ，同様に，$D_g \subseteq D_{f+g} \cap D_f$ も得られる．したがって，D_f, D_g, D_{f+g} のうち二つの交叉はすべて等しいから，上式で $D_f \cap D_g$ を $D_{f+g} \cap D_f$ や $D_{f+g} \cap D_g$ に置き換えたもの成り立つ．

$f \in L(X, \Pi)$ ならば $D_f = \mathcal{H}$ であり，$g \in L(X, \Pi)$ ならば $D_g = \mathcal{H}$ である．いずれの場合も，$T_f + T_g = T_{f+g}$ となる．

(2), (3) 明らかである．

(4) 線型作用素の合成の定義より，$\xi \in \mathcal{H}$ が $\operatorname{Dom}(T_f T_g)$ に属するための必要十分条件は，$\xi \in D_g$ かつ $T_g \xi \in D_f$ であることである．$\xi \in D_g$ とすると，

$$\int_X |f|^2\, d\Pi_{T_g\xi, T_g\xi} = \int_X |fg|^2\, d\Pi_{\xi,\xi}$$

だから（命題 2.13），$T_g \xi \in D_f$ と $\xi \in D_{fg}$ とは同値である（命題 2.15）．よって，$\operatorname{Dom}(T_f T_g) = D_g \cap D_{fg}$

である．さらに，$\xi \in D_g \cap D_{fg}$ とすると，任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \eta | T_f T_g \xi \rangle = \int_X f \, d\Pi_{\eta, T_g \xi} = \int_X fg \, d\Pi_{\eta,\xi} = \langle \eta | T_{fg} \xi \rangle$$

だから（命題 2.13），$T_f T_g = T_{fg}|_{D_g \cap D_{fg}}$ である．

$g \in L^\infty(X, \Pi)$ ならば，$D_g = \mathcal{H}$ だから，$T_f T_g = T_{fg}$ となる．

(5)　$\eta \in D_{\overline{f}}$ とすると，任意の $\xi \in D_f$ に対して

$$\langle \eta | T_f \xi \rangle = \int_X f \, d\Pi_{\eta,\xi} = \overline{\int_X \overline{f} \, d\Pi_{\xi,\eta}} = \overline{\langle \xi | T_{\overline{f}} \eta \rangle} = \langle T_{\overline{f}} \eta | \xi \rangle$$

だから（命題 2.6 (1)），$\eta \in T_f^*$ かつ $T_f^* \eta = T_{\overline{f}} \eta$ である．よって，$T_{\overline{f}} \subseteq T_f^*$ である．特に，$f \in L^\infty(X, \Pi)$ ならば，$T_f^* = T_{\overline{f}}$ である．

$\operatorname{Dom} T_f^* \subseteq D_{\overline{f}}$ を示す．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{x \in X \mid |f(x)| \le n\}$ の特性関数を χ_n と置くと，χ_n と $\chi_n f$ は有界だから，前段の結果より

$$T_{\chi_n}^* = T_{\chi_n}, \qquad T_{\chi_n f}^* = T_{\chi_n \overline{f}}$$

である．このことと (4) および命題 1.20 (3) より

$$\begin{aligned} T_{\chi_n \overline{f}} &= T_{\chi_n f}^* \\ &= (T_f T_{\chi_n})^* \\ &\supseteq T_{\chi_n}^* T_f^* \\ &= T_{\chi_n} T_f^* \\ &= \Pi(\{x \in X \mid |f(x)| \le n\}) T_f^* \end{aligned}$$

だから，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T_f^*$ に対して，

$$\begin{aligned} \int_X |\chi_n \overline{f}|^2 \, d\Pi_{\xi,\xi} &= \| T_{\chi_n \overline{f}} \xi \|^2 \\ &= \| \Pi(\{x \in X \mid |f(x)| \le n\}) T_f^* \xi \|^2 \\ &\le \| T_f^* \xi \|^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

である．したがって，単調収束定理より

$$\int_X |\overline{f}|^2 \, d\Pi_{\xi,\xi} < \infty,$$

であり，これは，$\xi \in D_{\overline{f}}$ を意味する（命題 2.15）．よって，$\operatorname{Dom} T_f^* \subseteq D_{\overline{f}}$ である．

(6)　$\operatorname{Ker} T_f = \operatorname{Im} \Pi(f^{-1}(\{0\}))$ だから（命題 2.16），

$$T_f \text{ が単射} \iff \Pi(f^{-1}(\{0\})) = 0 \iff f \text{ が } L(X, \Pi) \text{ において可逆}$$

である．これらの条件が成り立つとすると，(3), (4) より

$$\begin{aligned} T_{1/f} T_f &= I|_{D_f \cap D_1} = I|_{D_f}, \\ T_f T_{1/f} &= I|_{D_{1/f} \cap D_1} = I|_{D_{1/f}} \end{aligned}$$

であり，これは，$T_f^{-1} = T_{1/f}$ を意味する．　□

系 2.19　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\varPi$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \varPi)$ とする．

(1) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$\int_X f^m \overline{f}^n \, d\varPi$ は，m 個の $\int_X f \, d\varPi$ と n 個の $(\int_X f \, d\varPi)^*$ を任意の順序で合成したもの（$m = n = 0$ の場合は $1_{\mathcal{H}}$ とする）に等しい．

(2) $\int_X f \, d\varPi$ は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素である．

証明　定理 2.18 で定義した記号 $T_f = \int_X f \, d\varPi$ と $D_f = \operatorname{Dom} T_f$ を用いる．

(1)　$m, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$T_f T_{f^m \overline{f}^n} = T_{f^{m+1} \overline{f}^n}, \qquad T_f^* T_{f^m \overline{f}^n} = T_{f^m \overline{f}^{n+1}}$$

を示せばよい．$T_f^* = T_{\overline{f}}$ だから（定理 2.18 (5)），第一の等式だけを示せば十分である．定理 2.18 (4) より，

$$T_f T_{f^m \overline{f}^n} = T_{f^{m+1} \overline{f}^n}|_{D_{f^m \overline{f}^n} \cap D_{f^{m+1} \overline{f}^n}}$$

である．また，命題 2.15 より

$$\begin{aligned} D_{f^m \overline{f}^n} &= \left\{ \xi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_X |f|^{2(m+n)} \, d\varPi_{\xi,\xi} < \infty \right\}, \\ D_{f^{m+1} \overline{f}^n} &= \left\{ \xi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_X |f|^{2(m+n+1)} \, d\varPi_{\xi,\xi} < \infty \right\} \end{aligned}$$

であり，$\varPi_{\xi,\xi}$ は有限正値測度だから（命題 2.6 (1)），$D_{f^{m+1} \overline{f}^n} \subseteq D_{f^m \overline{f}^n}$ である．よって，$T_f T_{f^m \overline{f}^n} = T_{f^{m+1} \overline{f}^n}$ である．

(2)　T_f が $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素であることは，命題 2.15 ですでに述べた．定理 2.18 (5) より $T_f = T_{\overline{f}}^*$ であり，稠密に定義された線型作用素の随伴は常に閉だから（系 1.23），T_f は閉である．さらに，(1) より，$T_f^* T_f$ と $T_f T_f^*$ はともに $T_{|f|^2}$ に等しい．よって，T_f は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素である．□

系 2.20　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\varPi$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $f \in L(X, \varPi)$ に対して，

$$\overline{\operatorname{Im}\left(\int_X f \, d\varPi \right)} = \operatorname{Im} \varPi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}))$$

である．

証明　$\int_X f \, d\varPi$ は正規だから（系 2.19 (2)），系 1.56，命題 2.16，命題 2.4 (2) より，

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Im}\left(\int_X f \, d\varPi \right)} &= \left(\operatorname{Ker}\left(\int_X f \, d\varPi \right) \right)^{\perp} \\ &= (\operatorname{Im} \varPi(f^{-1}(\{0\})))^{\perp} \\ &= \operatorname{Im} \varPi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) \end{aligned}$$

である．□

定義 2.12 の直後に述べたように，$f \in L^\infty(X, \varPi)$ に対しては $\int_X f \, d\varPi \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ である．この逆も成り立つ．

命題 2.21　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\varPi$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \varPi)$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $f \in L^\infty(X, \Pi)$ である．

(b) $\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ である．

(c) $\int_X f\,d\Pi$ は全域で定義されている．

さらに，これらの条件の下で，$\|\int_X f\,d\Pi\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) および最後の主張 $f \in L^\infty(X, \Pi)$ とすると，定義 2.12 の直後に述べたように，$\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ かつ $\|\int_X f\,d\Pi\| \le \|f\|_\infty$ である．

$\|\int_X f\,d\Pi\| \ge \|f\|_\infty$ を示す．$\|f\|_\infty = 0$ ならば明らかだから，$\|f\|_\infty > 0$ であるとする．$\epsilon \in (0, \|f\|_\infty]$ とすると，$A = \{x \in X \mid |f(x)| \ge \|f\|_\infty - \epsilon\}$ は Π-無視可能ではない．そこで，$\xi \in \operatorname{Im}\Pi(A) \setminus \{0\}$ をとると，命題 2.14 と $\Pi_{\xi,\xi} = \Pi_{\xi,\Pi(A)\xi} = \Pi_{\xi,\xi}(-\cap A)$ であること（命題 2.6 (3)）より，

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi\right\|^2 &= \int_X |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \\
&= \int_A |f|^2\,d\Pi_{\xi,\xi} \\
&\ge (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 \|\xi\|^2
\end{aligned}$$

となる．任意の $\epsilon \in (0, \|f\|_\infty]$ に対してこのような $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ が存在するから，$\|\int_X f\,d\Pi\| \ge \|f\|_\infty$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $\int_X f\,d\Pi \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であるとする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{x \in X \mid |f(x)| \le n\}$ の特性関数を χ_n と置くと，$\chi_n f$ は有界であり，すでに示した最後の主張より

$$\|\chi_n f\|_\infty = \left\|\int_X \chi_n f\,d\Pi\right\|$$

である．また，仮定と定理 2.18 (4) より

$$\int_X \chi_n f\,d\Pi = \left(\int_X f\,d\Pi\right)\left(\int_X \chi_n\,d\Pi\right) = \left(\int_X f\,d\Pi\right)\Pi(\{x \in X \mid |f(x)| \le n\})$$

だから，

$$\left\|\int_X \chi_n f\,d\Pi\right\| \le \left\|\int_X f\,d\Pi\right\| < \infty$$

である．よって，$\|\chi_n f\|_\infty$ は n によらない有限値 $\left\|\int_X f\,d\Pi\right\|$ で上から抑えられるから，$f \in L^\infty(X, \Pi)$ である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\int_X f\,d\Pi$ は稠密に定義された閉作用素だから（系 2.19 (2)），主張は系 1.7 から従う．$\square$

注意 2.22 命題 2.21 の最後の主張は，次のように示すこともできる．$L^\infty(X, \Pi)$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f \mapsto \int_X f\,d\Pi$ は，定理 2.18 より単位的対合表現であり，後に示す命題 2.24 より単射である．一般に，C* 代数の間の単射な対合準同型は等長だから（「C* 代数」 [15, 定理 3.34] を参照のこと），任意の $f \in L^\infty(X, \Pi)$ に対して，$\|\int_X f\,d\Pi\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ．

系 2.23 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$L^\infty(X, \Pi)$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f \mapsto \int_X f\,d\Pi$ は，等長な単位的対合表現である．

証明 単位的対合表現であることは定理 2.18 で，等長であることは命題 2.21 で示した．$\square$

射影値測度に関する積分は，次の意味で，単射性を満たす．

命題 2.24 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f, g \in L(X, \mathit{\Pi})$ について，$\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ と $\int_X g\,d\mathit{\Pi}$ が定義域の共通部分で一致するならば，f と g は $L(X, \mathit{\Pi})$ の元として一致する．

証明 対偶を示す．f と g が $L(X, \mathit{\Pi})$ の元として異なるとすると，

$$A = \{x \in X \mid |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}$$

が $\mathit{\Pi}$-無視可能でないような $\epsilon > 0$ が存在する．さらに，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n = \{x \in A \mid |f(x)| \leq n \text{ かつ } |g(x)| \leq n\}$$

と置くと，$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は増大列で $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ を満たすから，$\mathit{\Pi}(A_n)$ は $\mathit{\Pi}(A) \neq 0$ に弱収束する．したがって，A_n が $\mathit{\Pi}$-無視可能でないような $n \in \mathbb{N}$ がとれる．このような ϵ と n をとり，$\xi \in \operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A_n) \setminus \{0\}$ を一つ固定する．すると，$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = \mathit{\Pi}_{\xi,\mathit{\Pi}(A_n)\xi} = \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(- \cap A_n)$（命題 2.6 (3)）より

$$\int_X |f|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = \int_{A_n} |f|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \leq n^2\|\xi\|^2 < \infty,$$
$$\int_X |g|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = \int_{A_n} |g|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \leq n^2\|\xi\|^2 < \infty$$

だから，$\xi \in \operatorname{Dom}\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\bigr) \cap \operatorname{Dom}\bigl(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\bigr)$ である（命題 2.15）．さらに，定理 2.18 (1), (2) と命題 2.14 より

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\right)\xi - \left(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\right)\xi\right\|^2 &= \left\|\left(\int_X (f-g)\,d\mathit{\Pi}\right)\xi\right\|^2 \\
&= \int_X |f-g|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \\
&= \int_{A_n} |f-g|^2\,d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \\
&\geq \epsilon^2\|\xi\|^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

だから，$\bigl(\int_X f\,d\mathit{\Pi}\bigr)\xi \neq \bigl(\int_X g\,d\mathit{\Pi}\bigr)\xi$ である．これで，主張の対偶が示された． □

系 2.25 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ が自己随伴であるための必要十分条件は，f が $L(X, \mathit{\Pi})$ の元として Hermite である（あるいは同値だが，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで f が実数値である）ことである．

(2) $\int_X f\,d\mathit{\Pi}$ がユニタリであるための必要十分条件は，f が $L(X, \mathit{\Pi})$ の元としてユニタリである（あるいは同値だが，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $|f| = 1$ である）ことである．

証明 (1) 定理 2.18 (5) と命題 2.24 からただちに従う．

(2) 定義よりユニタリ作用素は全域で定義されているから，命題 2.21 より，$f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ である場合だけを考えればよい．この場合の主張は，定理 2.18 (3), (4), (5) から従う． □

射影値測度に関する積分の結果の線型作用素のスペクトルは，次のように表される．

命題 2.26　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．任意の $f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$\mathrm{Sp}\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right) = \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} f$$

である．

証明　示すべきことは，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right) \iff \lambda \in \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} f$$

であることだが，$f - \lambda$ を改めて f と置き直すことにより，$\lambda = 0$ であるとしてよい．

$0 \notin \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} f$ であるとすると，f は $L(X, \mathit{\Pi})$ において可逆であり，乗法逆元 $1/f$ は $\mathit{\Pi}$-本質的有界である．したがって，定理 2.18 (6) より，$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ は単射であり，$\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)^{-1} = \int_X 1/f\, d\mathit{\Pi} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が成り立つ．よって，$0 \notin \mathrm{Sp}\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)$ である．

逆に，$0 \in \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} f$ であるとする．このとき，$\epsilon > 0$ として $A_\epsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \epsilon\}$ と置くと，$\mathit{\Pi}(A_\epsilon) \neq 0$ である．そこで，$\xi \in \operatorname{Im} \mathit{\Pi}(A_\epsilon) \setminus \{0\}$ をとると，$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = \mathit{\Pi}_{\mathit{\Pi}(A_\epsilon)\xi,\xi} = \mathit{\Pi}_{\xi,\xi}(- \cap A_\epsilon)$（命題 2.6 (3)）より

$$\int_X |f|^2\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} = \int_{A_\epsilon} |f|^2\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \leq \epsilon^2 \|\xi\|^2 < \infty$$

だから，$\xi \in \mathrm{Dom}\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)$ である（命題 2.15）．さらに，命題 2.14 より，

$$\left\|\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)\xi\right\|^2 = \int_X |f|^2\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} \leq \epsilon^2 \|\xi\|^2$$

である．任意の $\epsilon > 0$ に対してこのような $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ が存在するから，$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ は連続可逆ではない．すなわち，$0 \in \mathrm{Sp}\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)$ である．　□

注意 2.27　一般に，C* 代数の間の単射な対合準同型は，元のスペクトルを保つ（「C* 代数」[15, 系 3.30, 定理 3.34] を参照のこと）．よって，命題 2.26 において $f \in L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ である場合の主張は，$L^\infty(X, \mathit{\Pi})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f \mapsto \int_X f\, d\mathit{\Pi}$ が等長な単位的対合表現であること（系 2.23）からも従う．

2.4　射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理

定理 2.28（射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f_n, f, g \in L(X, \mathit{\Pi})$（$n \in \mathbb{N}$）とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に $\mathit{\Pi}$-概収束し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $|f_n| \leq |g|$ であるとする．このとき，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X g\, d\mathit{\Pi})$ に対して，ξ は $\mathrm{Dom}(\int_X f_n\, d\mathit{\Pi})$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}(\int_X f\, d\mathit{\Pi})$ に属し，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\, d\mathit{\Pi}\right)\xi = \left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)\xi$$

が成り立つ．

証明　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $|f_n| \leq |g|$ であり，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に $\mathit{\Pi}$-概収束するから，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $|f| \leq |g|$ である．よって，命題 2.15 より，$\mathrm{Dom}\left(\int_X g\, d\mathit{\Pi}\right)$ は $\mathrm{Dom}\left(\int_X f_n\, d\mathit{\Pi}\right)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right)$ に含まれる．

$\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X g\,d\varPi\bigr)$ とする．前段の結果より，ξ は $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f_n\,d\varPi\bigr)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi\bigr)$ に属する．定理 2.18 (1) と系 2.9 より，任意の $\eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \eta \middle| \left(\int_X f_n\,d\varPi\right)\xi - \left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi \right\rangle\right| &= \left|\left\langle \eta \middle| \left(\int_X (f_n - f)\,d\varPi\right)\xi \right\rangle\right| \\ &= \left|\int_X (f_n - f)\,d\varPi_{\eta,\xi}\right| \\ &\le \left(\int_X |f_n - f|^2\,d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2} \|\eta\|\end{aligned}$$

だから，

$$\left\|\left(\int_X f_n\,d\varPi\right)\xi - \left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi\right\| \le \left(\int_X |f_n - f|^2\,d\varPi_{\xi,\xi}\right)^{1/2}$$

である．ここで，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に $\varPi$-概収束するから，特に $\varPi_{\xi,\xi}$-概収束する．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varPi$-ほとんどいたるところで（特に，$\varPi_{\xi,\xi}$-ほとんどいたるところで）$|f_n - f|^2 \le 4|g|^2$ であり，$\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X g\,d\varPi\bigr)$ と命題 2.15 より $|g|^2$ は $\varPi_{\xi,\xi}$-可積分である．よって，通常の Lebesgue の収束定理より，上式の右辺は 0 に収束するから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\,d\varPi\right)\xi = \left(\int_X f\,d\varPi\right)\xi$$

である． □

系 2.29　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\varPi$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$L^\infty(X,\varPi)$ 上の（ノルム $\|{-}\|_\infty$）に関して有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，$f \in L^\infty(X,\varPi)$ に $\varPi$-概収束するとする．このとき，強位相に関して

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\,d\varPi\right) = \left(\int_X f\,d\varPi\right)$$

である．

証明　定理 2.28 において，g を定値関数 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty$ とすればよい． □

命題 2.30　$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ を Hilbert 空間とし，$\varPi_1$, $\varPi_2$ をそれぞれ可測空間 X 上の $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$-射影値測度とする．$S \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_2)$ に対して，次の条件は同値である．

(a) 任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$S\varPi_1(A) = \varPi_2(A)S$ である．
(b) 任意の Borel 可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ に対して，$S(\int_X f\,d\varPi_1) \subseteq (\int_X f\,d\varPi_2)S$ である．

証明　(b) $\Longrightarrow$ (a)　可測集合 $A \subseteq X$ に対して $\varPi_1(A) = \int_X \chi_A\,d\varPi_1$ かつ $\varPi_2(A) = \int_X \chi_A\,d\varPi_2$ であり，これらは全域で定義されている．主張は，このことから明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　条件 (a) が成り立つとして，可測関数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ を任意にとる．まず，

$$S\left(\mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\varPi_1\right)\right) \subseteq \mathrm{Dom}\left(\int_X f\,d\varPi_2\right) \tag{$*$}$$

を示す．$\xi \in \mathcal{H}_1$ とすると，仮定より

$$\begin{aligned}(\varPi_2)_{S\xi,S\xi} &= \|\varPi_2(-)S\xi\|^2 \\ &= \|S\varPi_1(-)\xi\|^2 \\ &\leq \|S\|^2\|\varPi_1(-)\xi\|^2 \\ &= \|S\|^2(\varPi_1)_{\xi,\xi}\end{aligned}$$

である．したがって，$\int_X |f|^2\,d(\varPi_1)_{\xi,\xi} < \infty$ ならば，$\int_X |f|^2\,d(\varPi_2)_{S\xi,S\xi} < \infty$ である．命題 2.15 より，これは，$(*)$ を意味する．

次に，

$$S\Bigl(\int_X f\,d\varPi_1\Bigr) \subseteq \Bigl(\int_X f\,d\varPi_2\Bigr)S$$

を示す．f に各点収束する可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n| \leq |f|$ であるようにとる．仮定より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S\Bigl(\int_X f_n\,d\varPi_1\Bigr) = \Bigl(\int_X f_n\,d\varPi_2\Bigr)S \tag{$**$}$$

である．$\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi_1\bigr)$ を任意にとる．射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.28）より，ξ は $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f_n\,d\varPi_1\bigr)$（$n \in \mathbb{N}$）に属し，

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\int_X f_n\,d\varPi_1\Bigr)\xi = \Bigl(\int_X f\,d\varPi_1\Bigr)\xi$$

である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} S\Bigl(\int_X f_n\,d\varPi_1\Bigr)\xi = S\Bigl(\int_X f\,d\varPi_1\Bigr)\xi \tag{$***$}$$

である．また，$(*)$ より $S\xi \in \mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\varPi_2\bigr)$ だから，射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.28）より，$S\xi$ は $\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f_n\,d\varPi_2\bigr)$（$n \in \mathbb{N}$）に属し，

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\int_X f_n\,d\varPi_2\Bigr)S\xi = \Bigl(\int_X f\,d\varPi_2\Bigr)S\xi \tag{$****$}$$

である．以上 $(**)$, $(***)$, $(****)$ より，

$$S\Bigl(\int_X f\,d\varPi_1\Bigr)\xi = \Bigl(\int_X f\,d\varPi_2\Bigr)S\xi$$

が成り立つ．これで，主張が示された．□

2.5 射影値測度の Hilbert 直和

定義 2.31（射影値測度の Hilbert 直和） $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して，$\varPi_i$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}_i$-射影値測度とする．可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mathcal{H}$ における直交射影 $\varPi(A)$ を

$$\varPi(A) = \widehat{\bigoplus_{i\in I}}\varPi_i(A)$$

によって定めると，容易に確かめられるように，$\varPi$ は X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度である．この $\varPi$ を，$(\varPi_i)_{i\in I}$ の **Hilbert 直和**といい，$\varPi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I}\varPi_i$ と書く．

命題 2.32 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して Π_i を可測空間 X 上の $\mathcal{H}_i$-射影値測度とし，$\Pi=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\Pi_i$ と置く．このとき，任意の可測関数 $f\colon X\to\mathbb{C}$ に対して，

$$\int_X f\,d\Pi=\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)$$

である．

証明 $i\in I$ として，$\mathcal{H}_i$ を $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間とみなす．$\xi_i\in\mathcal{H}_i$ とすると，$\eta=(\eta_j)_{j\in I}\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\Pi_{\eta,\xi_i}=\langle\eta|\Pi(-)\xi_i\rangle=\sum_{j\in I}\langle\eta_j|\Pi_j(-)\xi_i\rangle=\langle\eta_i|\Pi_i(-)\xi_i\rangle=(\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i}$$

である．したがって，f が任意の $\eta_i\in\mathcal{H}_i$ に対して Π_{η_i,ξ_i}-可積分ならば，f は任意の $\eta\in\mathcal{H}$ に対して $\Pi_{\xi_i,\eta}$-可積分である．すなわち，$\mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi_i)\subseteq\mathrm{Dom}(\int_X f\,d\Pi)$ である．さらに，$\xi_i\in\mathrm{Dom}\bigl(\int_X f\,d\Pi_i\bigr)$ とすると，任意の $\eta=(\eta_j)_{j\in I}\in\mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\biggl\langle\eta\biggm|\biggl(\int_X f\,d\Pi\biggr)\xi_i\biggr\rangle&=\int_X f\,d\Pi_{\eta,\xi_i}\\&=\int_X f\,d(\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i}\\&=\biggl\langle\eta_i\biggm|\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)\xi_i\biggr\rangle\\&=\biggl\langle\eta\biggm|\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)\xi_i\biggr\rangle\end{aligned}$$

だから，

$$\biggl(\int_X f\,d\Pi\biggr)\xi_i=\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)\xi_i$$

である．よって，

$$\int_X f\,d\Pi_i\subseteq\int_X f\,d\Pi$$

である．

前段の結果は，任意の $i\in I$ に対して成り立つ．命題 1.64 および $\int_X f\,d\Pi$ が閉であること（系 2.19 (2)）と合わせれば，

$$\mathrm{gr}\biggl(\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)\biggr)=\overline{\sum_{i\in I}\mathrm{gr}\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)}\subseteq\mathrm{gr}\biggl(\int_X f\,d\Pi\biggr),$$

を得る．すなわち，

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}}\biggl(\int_X f\,d\Pi_i\biggr)\subseteq\int_X f\,d\Pi$$

である．上式の両辺はともに正規だから（系 2.19 (2)，命題 1.66），正規作用素の極大性（系 1.55）より，上式では等号が成り立つ． □

局所コンパクト Hausdorff 空間上の射影値 Borel 測度の Hilbert 直和を考える．

命題 2.33 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して Π_i を局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の $\mathcal{H}_i$-射影値 Borel 測度とし，$\Pi=\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\Pi_i$ と置く．次の条件は同値である．

(a) Π は Radon である．

(b) 任意の $i \in I$ に対して，Π_i は Radon である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $i \in I$ として，$\mathcal{H}_i$ を $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間とみなすと，任意の ξ_i, $\eta_i \in \mathcal{H}_i$ に対して $(\Pi_i)_{\xi_i,\eta_i} = \Pi_{\xi_i,\eta_i}$ である．よって，Π が Radon ならば，Π_i も Radon である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) すべての Π_i が Radon であるとして，$\mathcal{H}$ の 2 元 $\xi = (\xi_i)_{i\in I}$ と $\eta = (\eta_i)_{i\in I}$ を任意にとる．すると，任意の Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して，

$$\Pi_{\eta,\xi}(A) = \langle \eta | \Pi(A)\xi \rangle = \sum_{i\in I} \langle \eta_i | \Pi_i(A)\xi_i \rangle = \sum_{i\in I} (\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i}(A)$$

である．一方で，全変動ノルム $\|(\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i}\|$ の和は，系 2.8 と Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \|(\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i}\| &\leq \sum_{i\in I} \|\xi_i\|\|\eta_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i\in I} \|\eta_i\|^2\right)^{1/2} \\ &= \|\xi\|\|\eta\| \\ &< \infty\end{aligned}$$

と評価できる．よって，X 上の Radon な有限複素 Borel 測度全体が全変動ノルムに関してなす Banach 空間 $\mathscr{M}^1(X)$ において，$((\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i})_{i\in I}$ は絶対総和可能であり，その総和は $\Pi_{\eta,\xi}$ に等しい．特に，$\Pi_{\eta,\xi}$ は Radon である．よって，Π は Radon である． □

命題 2.34 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して Π_i を局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の $\mathcal{H}_i$-射影値 Borel–Radon 測度とし，$\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \Pi_i$ と置く．このとき，（命題 2.33 より Π は $\mathcal{H}$-射影値 Borel–Radon 測度であり，）

$$\operatorname{supp} \Pi = \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{supp} \Pi_i}$$

である．

証明 開集合 $U \subseteq X$ に対して

$$\begin{aligned}\Pi(U) = 0 &\iff \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \Pi_i(U) = 0 \\ &\iff U \cap \operatorname{supp} \Pi_i = \emptyset \\ &\iff U \cap \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{supp} \Pi_i} = \emptyset\end{aligned}$$

だから，$\operatorname{supp} \Pi = \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{supp} \Pi_i}$ である． □

2.6 射影値測度の簡約

本小節では，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ の上への直交射影を，$P_{\mathcal{M}}$ と書く．

定義 2.35（射影値測度を簡約する閉部分線型空間） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ が Π を**簡約する**（reduce）とは，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して $P\Pi(A) = \Pi(A)P$ であることをいう．

定義 2.35 の状況で，$\mathcal{M}$ が Π を簡約するとする．このとき，可測集合 $A \subseteq X$ に対して，$\mathcal{M}$ は $\Pi(A)$-安定であり，$\Pi(A)$ の定義域を制限することで $\mathcal{M}$ 上の直交射影 $\Pi_{\mathcal{M}}(A)$ が得られる．さらに，容易に確かめられるように，$\Pi_{\mathcal{M}}$ は X 上の $\mathcal{M}$-射影値測度となる．このことを踏まえて，次のように定義する．

定義 2.36（射影値測度の簡約） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ は Π を簡約するとする．このとき，上記のように定まる X 上の $\mathcal{M}$-射影値測度 $\Pi_{\mathcal{M}}$ を，Π の $\mathcal{M}$ による**簡約**（reduction）という．

例 2.37 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$A \subseteq X$ を可測集合とし，$\mathcal{M} = \operatorname{Im} \Pi(A)$ と置く．すると，任意の可測集合 $B \subseteq X$ に対して

$$P_{\mathcal{M}}\Pi(B) = \Pi(A)\Pi(B) = \Pi(A \cap B) = \Pi(B)\Pi(A) = \Pi(B)P_{\mathcal{M}}$$

だから（命題 2.4 (4)），$\mathcal{M}$ は Π を簡約し，対応する簡約 $\Pi_{\mathcal{M}}$ は

$$\operatorname{Im} \Pi_{\mathcal{M}}(B) = \Pi(B \cap A)$$

で与えられる．

命題 2.38 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間とするとき，$\mathcal{M}$ が Π を簡約することと，$\mathcal{M}^{\perp}$ が Π を簡約することとは同値である．

証明 $P_{\mathcal{M}^{\perp}} = 1_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{M}}$ であることからただちに従う． □

$(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して Π_i を可測空間 X 上の $\mathcal{H}_i$-射影値測度とし，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} \Pi_i$ を考える．すると，明らかに，各 $\mathcal{H}_i$ は Π を簡約し，対応する簡約は T_i に等しい．逆に，次が成り立つ．

命題 2.39 $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ と置く．Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．各 $i \in I$ に対して，$\mathcal{H}_i$ は Π を簡約するとし，対応する簡約を Π_i と書く．このとき，$\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} \Pi_i$ である．

証明 可測集合 $A \subseteq X$ を任意にとる．すると，各 $i \in I$ に対して $\operatorname{Im} \Pi_i(A) = \operatorname{Im} \Pi(A)P_{\mathcal{H}_i} = \Pi(A)(\mathcal{H}_i)$ だから，$\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることより，$\sum_{i \in I} \operatorname{Im} \Pi_i(A)$ は $\operatorname{Im} \Pi(A)$ において稠密である．したがって，

$$\operatorname{Im} \Pi(A) = \overline{\sum_{i \in I} \operatorname{Im} \Pi_i(A)} = \operatorname{Im} \left(\widehat{\bigoplus_{i \in I}} \Pi_i \right)(A)$$

である．よって，$\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i \in I} \Pi_i$ が成り立つ． □

命題 2.40 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ は Π を簡約するとし，対応する簡約を $\Pi_{\mathcal{M}}$ と書く．このとき，任意の可測関数 $f \colon X \to \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{M}$ は $\int_X f \, d\Pi$ を簡約し，対応する簡約は $\int_X f \, d\Pi_{\mathcal{M}}$ に等しい．

証明 命題 2.38 より，$\mathcal{M}^{\perp}$ も Π を簡約する．対応する簡約を $\Pi_{\mathcal{M}^{\perp}}$ と書くと，定義から容易に確かめられるように，$\Pi = \Pi_{\mathcal{M}} \oplus \Pi_{\mathcal{M}^{\perp}}$ が成り立つ．このことと命題 2.32 より，任意の可測関数 $f \colon X \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\int_X f \, d\Pi = \left(\int_X f \, d\Pi_{\mathcal{M}} \right) \oplus \left(\int_X f \, d\Pi_{\mathcal{M}^{\perp}} \right)$$

である．よって，$\mathcal{M}$ は $\int_X f\,d\Pi$ を簡約し，対応する簡約は $\int_X f\,d\Pi_{\mathcal{M}}$ に等しい． $\square$

2.7 可換な射影値測度の積

射影値測度の可換性について述べる前に，可換な射影値測度の積を定義するために必要な，射影値測度に対する Carathéodory の拡張定理を示しておく．

事実 2.41（Carathéodory の拡張定理） $(X, \mathfrak{A})$ を可測空間とし，σ-代数 $\mathfrak{A}$ は X 上の代数 $\mathfrak{A}^0$ によって生成されるとする[*5]．

(1) 写像 $\mu^0 \colon \mathfrak{A}^0 \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ が，$\mathfrak{A}^0$ 上で可算加法的であるとする．すなわち，$(A_i)_{i \in I}$ が互いに交わらない $\mathfrak{A}^0$ の元の可算族であり，$A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}^0$ ならば，

$$\mu^0(A) = \sum_{i \in I} \mu^0(A_i)$$

が成り立つ（特に，$\mu^0(\emptyset) = 0$ である）とする．このとき，μ^0 は，$(X, \mathfrak{A})$ 上の測度に拡張される．

(2) (1) の状況に加えて，X の可算被覆 $(A_i)_{i \in I}$ であって，任意の $i \in I$ に対して $A_i \in \mathfrak{A}^0$ かつ $\mu^0(A_i) < \infty$ であるものが存在するとする．このとき，μ^0 を拡張する $(X, \mathfrak{A})$ 上の測度は，一意である．

証明は，伊藤 [11, 定理 9.1] を参照のこと．

事実 2.42 $(X, \mathfrak{A})$ を可測空間とし，σ-代数 $\mathfrak{A}$ は X 上の π-システム $\mathfrak{A}^0$ によって生成されるとする[*6]．このとき，$(X, \mathfrak{A})$ 上の二つの有限複素測度 μ と ν が $\mathfrak{A}^0$ 上で一致するならば，$\mu = \nu$ である．

証明は，Cohn [3, Corollary 1.6.3] を参照のこと（Cohn では，有限正値測度に対してのみ主張が述べられているが，証明は，有限複素測度に対しても同様にできる）．

定理 2.43（射影値測度に対する Carathéodory の拡張定理） $(X, \mathfrak{A})$ を可測空間とし，σ-代数 $\mathfrak{A}$ は X 上の代数 $\mathfrak{A}^0$ によって生成されるとする．$\mathfrak{A}^0$ の元に対して Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の直交射影を与える写像 Π^0 が，次の条件を満たすとする．

(i) $\Pi^0(X) = 1_{\mathcal{H}}$ である．

(ii) Π^0 は，$\mathfrak{A}^0$ 上で弱位相に関して可算加法的である．すなわち，$(A_i)_{i \in I}$ が互いに交わらない $\mathfrak{A}^0$ の元の可算族であり，$A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}^0$ ならば，弱位相に関して

$$\Pi^0(A) = \sum_{i \in I} \Pi^0(A_i)$$

が成り立つ（特に，$\Pi^0(\emptyset) = 0$ である）．

このとき，Π^0 は，$(X, \mathfrak{A})$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度に一意に拡張される．

[*5] 集合 X 上の**代数**（algebra）とは，X の部分集合族 $\mathfrak{A}^0$ であって，$\mathfrak{A}^0$ の元の任意の有限族 $(A_i)_{i \in I}$ に対して $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}^0$（特に，$\emptyset \in \mathfrak{A}^0$）であり，かつ，任意の $A \in \mathfrak{A}^0$ に対して $X \setminus A \in \mathfrak{A}^0$ であるものをいう．

[*6] 集合 X 上の **π-システム**（π-system）とは，X の空でない部分集合族 $\mathfrak{A}^0$ であって，任意の A, $B \in \mathfrak{A}^0$ に対して $A \cap B \in \mathfrak{A}^0$ であるものをいう．

証明　$\xi,\eta\in\mathcal{H}$ に対して，$\Pi^0_{\eta,\xi}(A)=\langle\eta|\Pi^0(A)\xi\rangle$（$A\in\mathfrak{A}^0$）と書く．

<u>一意性</u>　Π と Π' が，ともに Π^0 を拡張する $(X,\mathfrak{A})$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度であるとする．このとき，任意の ξ, $\eta\in\mathcal{H}$ に対して，$\Pi_{\eta,\xi}$ と $\Pi'_{\eta,\xi}$ はともに $\Pi^0_{\eta,\xi}$ を拡張する $(X,\mathfrak{A})$ 上の有限複素測度だから，事実 2.42 より，$\Pi_{\eta,\xi}=\Pi'_{\eta,\xi}$ である．よって，$\Pi=\Pi'$ である．

<u>存在</u>　$\xi\in\mathcal{H}$ とすると，$\Pi^0_{\xi,\xi}\colon\mathfrak{A}^0\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ は $\mathfrak{A}^0$ 上で可算加法的だから，通常の Carathéodory の拡張定理（事実 2.41 (1)）より，$\Pi^0_{\xi,\xi}$ を拡張する $(X,\mathfrak{A})$ 上の測度 $\mu_{\xi,\xi}$ が存在し，この測度は $\mu_{\xi,\xi}(X)=\Pi^0_{\xi,\xi}(X)=\|\xi\|^2$ を満たす．これを用いて，$\xi,\eta\in\mathcal{H}$ に対して

$$\mu_{\eta,\xi}=\frac{1}{4}(\mu_{\xi+\eta,\xi+\eta}-\mu_{\xi-\eta,\xi-\eta}+i\mu_{\xi+i\eta,\xi+i\eta}-i\mu_{\xi-i\eta,\xi-i\eta})$$

と定めると，分極公式から容易に確かめられるように，$\mu_{\eta,\xi}$ は $\Pi^0_{\eta,\xi}$ を拡張する $(X,\mathfrak{A})$ 上の有限複素測度である．$\Pi^0_{\eta,\xi}$ は η に関して共役線型，ξ に関して線型であり，$\Pi^0_{\eta,\xi}$ を拡張する $(X,\mathfrak{A})$ 上の有限複素測度は一意だから（事実 2.42），$\mu_{\eta,\xi}$ も η に関して共役線型，ξ に関して線型である．同様に，$\overline{\Pi^0_{\xi,\eta}}=\Pi^0_{\eta,\xi}$ であることと事実 2.42 から，$\overline{\mu_{\xi,\eta}}=\mu_{\eta,\xi}$ であることがわかる．さらに，$\mu_{\eta,\xi}$ の全変動ノルムは，

$$\begin{aligned}\|\mu_{\eta,\xi}\|&\leq\frac{1}{4}(\|\mu_{\xi+\eta,\xi+\eta}\|+\|\mu_{\xi-\eta,\xi-\eta}\|+\|\mu_{\xi+i\eta,\xi+i\eta}\|+\|\mu_{\xi-i\eta,\xi-i\eta}\|)\\&=\frac{1}{4}(\|\xi+\eta\|^2+\|\xi-\eta\|^2+\|\xi+i\eta\|^2+\|\xi-i\eta\|^2)\\&=\|\xi\|^2+\|\eta\|^2\end{aligned}\tag{$*$}$$

（最後の等号は，中線定理から従う）と評価できる．

$A\in\mathfrak{A}$ を固定すると，($*$) より，$\|\xi\|,\|\eta\|\leq 1$ ならば $|\mu_{\eta,\xi}(A)|\leq\|\mu_{\eta,\xi}\|\leq\|\xi\|^2+\|\eta\|^2\leq 2$ である．前段で述べたことと合わせれば，写像 $(\eta,\xi)\mapsto\mu_{\eta,\xi}(A)$ が $\mathcal{H}$ 上の連続 Hermite 形式であることを得る．したがって，$\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素 $\Pi(A)$ であって，任意の $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ に対して

$$\langle\eta|\Pi(A)\xi\rangle=\mu_{\eta,\xi}(A)$$

を満たすものが，一意に存在する．

前段のように定まる Π が，Π^0 を拡張する $(X,\mathfrak{A})$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度であることを示す．$A\in\mathfrak{A}^0$ に対しては，任意の $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ に対して

$$\langle\eta|\Pi(A)\xi\rangle=\mu_{\eta,\xi}(A)=\Pi^0_{\eta,\xi}(A)=\langle\eta|\Pi^0(A)\xi\rangle$$

だから，$\Pi(A)=\Pi^0(A)$ である．したがって，Π は Π^0 の拡張であり，特に，$\Pi(X)=\Pi^0(X)=1_{\mathcal{H}}$ である．また，各 $\mu_{\eta,\xi}$ は可算加法的だから，Π は弱位相に関して可算加法的である．最後に，任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して，$\Pi(A)$ が $\mathcal{H}$ 上の直交射影であることを示す．$\Pi(A)$ が自己随伴であることはわかっているから，あとは，$\Pi(A)$ が冪等であることを示せばよい．ここでは，より強く，任意の A, $B\in\mathfrak{A}$ に対して，$\Pi(A\cap B)=\Pi(A)\Pi(B)$ であることを示す．そのために，$\xi,\eta\in\mathcal{H}$ を任意にとり，

$$\langle\eta|\Pi(A\cap B)\xi\rangle=\langle\eta|\Pi(A)\Pi(B)\xi\rangle\tag{$**$}$$

を示す．まず，A, $B\in\mathfrak{A}^0$ に対しては，命題 2.4 (4) と同様の議論により，$\Pi(A\cap B)=\Pi^0(A\cap B)=\Pi^0(A)\Pi^0(B)=\Pi(A)\Pi(B)$ がわかるから，($**$) は成り立つ．次に，$B\in\mathfrak{A}^0$ を固定すると，いま述べたように ($**$) は $A\in\mathfrak{A}^0$ に対しては成り立つから，事実 2.42 より，$A\in\mathfrak{A}$ に対しても成り立つ．最後に，$A\in\mathfrak{A}$ を固定すると，いま述べたように ($**$) は $B\in\mathfrak{A}^0$ に対しては成り立つから，事実 2.42 より，$B\in\mathfrak{A}$ に対しても成り立つ．これで，主張が示された．　□

射影値測度の可換性と，可換な射影値測度の積を定義する．

定義 2.44（射影値測度の可換性） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π_1, Π_2 をそれぞれ可測空間 X_1, X_2 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．Π_1 と Π_2 が**可換**であるとは，任意の可測集合 $A_1 \subseteq X_1$ と $A_2 \subseteq X_2$ に対して，$\Pi_1(A_1)$ と $\Pi_2(A_2)$ が可換であることをいう．

定理 2.45 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(X_i)_{i \in I}$ を可測空間の有限族とし，$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とし，これらはどの二つも可換であるとする．このとき，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π であって，各 $i \in I$ に対する任意の可測集合 $A_i \subseteq X_i$ に対して

$$\Pi\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \Pi_i(A_i)$$

を満たすものが，一意に存在する．ここで，上式の右辺は，$\Pi_i(A_i)$ すべての合成（これらは可換だから，合成は順序によらない）を表す．

証明 各 X_i の可測集合の直積として表せる X の部分集合を，可測直方体ということにする．可測直方体 $A = \prod_{i \in I} A_i$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の直交射影 $\Pi^0(A)$ を，

$$\Pi^0(A) = \prod_{i \in I} \Pi_i(A_i)$$

と定める．可測直方体 $A = \prod_{i \in I} A_i \in \mathfrak{R}$ と $B = \prod_{i \in I} B_i \in \mathfrak{R}$ が交わらなければ，ある $i \in I$ が存在して A_i と B_i は交わらないから，$\Pi_i(A_i) \perp \Pi_i(B_i)$ であり（命題 2.4 (3)），したがって，$\Pi^0(A) \perp \Pi^0(B)$ である．

次に，可測直方体の全体が生成する X 上の代数を $\mathfrak{A}^0$ と置く．容易に確かめられるように，任意の $A \in \mathfrak{A}^0$ は，互いに交わらない有限個の可測直方体 $A^{(1)}$, ..., $A^{(n)}$ の合併として表せる．このように表すとき，前段で述べたことより $\Pi^0(A^{(1)})$, ..., $\Pi^0(A^{(n)})$ は互いに直交する $\mathcal{H}$ 上の直交射影だから，それらの和 $\sum_{j=1}^{n} \Pi^0(A^{(j)})$ も $\mathcal{H}$ 上の直交射影となる．通常の測度の場合（伊藤 [11, p. 58] を参照のこと）と同様に確かめられるように，この和は $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ のとり方によらず，A のみから定まる．そこで，

$$\Pi^0(A) = \sum_{j=1}^{n} \Pi^0(A^{(j)})$$

と定めると，これは，前段の定義の拡張になっている．さらに，通常の測度の場合（伊藤 [11, 定理 9.4] を参照のこと）と同様に確かめられるように，Π^0 は $\mathfrak{A}^0$ 上で弱位相に関して可算加法的である．

$\mathfrak{A}^0$ が生成する X 上の σ-代数は，X の可測構造 $\mathfrak{A}$ にほかならない．射影値測度に対する Carathéodory の拡張定理（定理 2.43）より，前段で定義した Π^0 は，$(X, \mathfrak{A})$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π に一意に拡張される．これで，主張が示された．□

定義 2.46（可換な射影値測度の積） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(X_i)_{i \in I}$ を可測空間の有限族とし，$X = \prod_{i \in I} X_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とし，これらはどの二つも可換であるとする．このとき，定理 2.45 によって定まる X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π を，$(\Pi_i)_{i \in I}$ の**積**という．

定義 2.46 の状況で，容易に確かめられるように，射影値測度の積 Π の射影 $\mathrm{pr}_i \colon X \to X_i$ による像は，Π_i に一致する．

2.8　射影値測度のテンソル積

$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とする．各 $i\in I$ に対して，$\mathcal{M}_i$ を $\mathcal{H}_i$ の閉部分線型空間とし，$\mathcal{H}_i$ 上の $\mathcal{M}_i$ の上への直交射影を P_i と書く．すると，容易に確かめられるように，これらの直交射影の閉テンソル積 $\widehat{\bigotimes}_{i\in I} P_i$ は，$\widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ 上の $\widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathcal{M}_i$ の上への直交射影である．

定理 2.47　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族として $\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置き，$(X_i)_{i\in I}$ を可測空間の有限族として $X=\prod_{i\in I} X_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して，Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}_i$-射影値測度とする．このとき，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π であって，各 $i\in I$ に対する任意の可測集合 $A_i\subseteq X_i$ に対して

$$\Pi\left(\prod_{i\in I} A_i\right)=\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\,\Pi_i(A_i)$$

を満たすものが，一意に存在する．

証明　各 $i\in I$ について，可測集合 $A_i\subseteq X_i$ に対して，

$$\widetilde{\Pi}_i(A_i)=\Pi_i(A_i)\mathbin{\widehat{\otimes}}1$$

（右辺の 1 は，$\widehat{\bigotimes}_{j\in I\setminus\{i\}}\mathcal{H}_j$ 上の恒等作用素を表す）と定める．容易に確かめられるように，各 $\widetilde{\Pi}_i$ は X_i 上の $\mathcal{H}$-射影値測度であり，これらの射影値測度は可換である．X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π が主張の条件を満たすことは，Π が $(\widetilde{\Pi}_i)_{i\in I}$ の積であることにほかならないから，主張は，定理 2.45 から従う．　□

定義 2.48（射影値測度のテンソル積）　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族として $\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置き，$(X_i)_{i\in I}$ を可測空間の有限族として $X=\prod_{i\in I}X_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して，Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}_i$-射影値測度とする．このとき，定理 2.47 によって定まる X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π を，$(\Pi_i)_{i\in I}$ の**テンソル積**といい，$\Pi=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\Pi_i$ と書く．

$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族として $\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置き，$(X_i)_{i\in I}$ を可測空間の有限族として $X=\prod_{i\in I}X_i$ と置く．このとき，各 $i\in I$ に対して $\xi_i,\eta_i\in\mathcal{H}_i$ とし，$\xi=\bigotimes_{i\in I}\xi_i\in\mathcal{H}$，$\eta=\bigotimes_{i\in I}\eta_i\in\mathcal{H}$ と置くと，各 $i\in I$ に対する任意の可測集合 $A_i\subseteq X_i$ に対して，

$$\Pi_{\eta,\xi}\left(\prod_{i\in I}A_i\right)=\left\langle\bigotimes_{i\in I}\eta_i\middle|\left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\,\Pi_i(A_i)\right)\left(\bigotimes_{i\in I}\xi_i\right)\right\rangle=\prod_{i\in I}\langle\eta_i|\Pi_i(A_i)\xi_i\rangle=\prod_{i\in I}(\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i}(A_i)$$

が成り立つ．すなわち，$\Pi_{\eta,\xi}$ は $((\Pi_i)_{\eta_i,\xi_i})_{i\in I}$ の積測度である．

命題 2.49　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族として $\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置き，$(X_i)_{i\in I}$ を可測空間の有限族として $X=\prod_{i\in I}X_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}_i$-射影値測度とし，$\Pi=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\Pi_i$ と置く．このとき，各 $i\in I$ に対する任意の $f_i\in L(X_i,\Pi_i)$ に対して，関数 $(x_i)_{i\in I}\mapsto\prod_{i\in I}f_i(x_i)$ が定める $L(X,\Pi)$ の元を f と書くと，

$$\int_X f\,d\Pi=\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\int_{X_i}f_i\,d\Pi_i$$

が成り立つ．

証明　各 $i \in I$ に対して $\xi_i \in \mathrm{Dom}(\int_{X_i} f_i \, d\varPi_i)$ として $\xi = \bigotimes_{i \in I} \xi_i \in \mathcal{H}$ と置くと，$\varPi_{\xi,\xi}$ が $((\varPi_i)_{\xi_i,\xi_i})_{i \in I}$ の積測度であることと命題 2.15 より

$$\int_X |f|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi} = \prod_{i \in I} \int_{X_i} |f_i|^2 \, d\varPi_{\xi_i,\xi_i} < \infty$$

だから，ふたたび命題 2.15 より $\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X f \, d\varPi)$ である．さらに，各 $i \in I$ に対して $\eta_i \in \mathcal{H}_i$ として $\eta = \bigotimes_{i \in I} \eta_i \in \mathcal{H}$ と置くと，$\varPi_{\eta,\xi}$ が $((\varPi_i)_{\eta_i,\xi_i})_{i \in I}$ の積測度であることより

$$\begin{aligned}
\left\langle \eta \middle| \left(\int_X f \, d\varPi \right) \xi \right\rangle &= \int_X f \, d\varPi_{\eta,\xi} \\
&= \prod_{i \in I} \int_{X_i} f_i \, d(\varPi_i)_{\eta_i,\xi_i} \\
&= \prod_{i \in I} \left\langle \eta_i \middle| \left(\int_{X_i} f_i \, d\varPi_i \right) \xi_i \right\rangle \\
&= \left\langle \eta \middle| \left(\bigotimes_{i \in I} \int_{X_i} f_i \, d\varPi_i \right) \xi \right\rangle
\end{aligned}$$

である．線型性より，上式の最左辺と最右辺は任意の $\eta \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_i$ に対して等しいから，

$$\left(\int_X f \, d\varPi \right) \xi = \left(\bigotimes_{i \in I} \int_{X_i} f_i \, d\varPi_i \right) \xi$$

が成り立つ．よって，

$$\bigotimes_{i \in I} \int_{X_i} f_i \, d\varPi_i \subseteq \int_X f \, d\varPi$$

であり，上式の右辺は閉作用素だから（系 2.19 (2)），

$$\widehat{\bigotimes_{i \in I}} \int_{X_i} f_i \, d\varPi_i \subseteq \int_X f \, d\varPi$$

を得る．

次に，$\xi \in \mathrm{Dom}(\int_X f \, d\varPi)$ とし，$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_i$ の点列 $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ であって ξ に収束するものをとる．また，各 $n \in \mathbb{N}$ と $i \in I$ に対して $A_i^{(n)} = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq n\}$，$f_i^{(n)} = \chi_{A_i^{(n)}} f_i$ と置き，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $A^{(n)} = \prod_{i \in I} A_i^{(n)}$，$f^{(n)} = \chi_{A^{(n)}} f$ と置く．すると，射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.28）より，

$$\left(\int_X f \, d\varPi \right) \xi = \lim_{n \to \infty} \left(\int_X f^{(n)} \, d\varPi \right) \xi \tag{$*$}$$

である．また，各 $f_i^{(n)}$ が有界であることより $\widehat{\bigotimes}_{i \in I} \int_{X_i} f_i^{(n)} \, d\varPi_i$ は $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素だから（命題 2.21，注意 1.79），前段の結果より，

$$\left(\int_X f^{(n)} \, d\varPi \right) \xi = \left(\widehat{\bigotimes_{i \in I}} \int_{X_i} f_i^{(n)} \, d\varPi_i \right) \xi = \lim_{m \to \infty} \left(\widehat{\bigotimes_{i \in I}} \int_{X_i} f_i^{(n)} \, d\varPi_i \right) \xi_m \tag{$**$}$$

である．さらに，各 $n \in \mathbb{N}$ と $i \in I$ に対して $\int_{X_i} f_i^{(n)} \, d\varPi_i = (\int_{X_i} f_i \, d\varPi_i) \varPi_i(A_i^{(n)})$ であり（定理 2.18 (4)），$\xi_m \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_i$ だから，

$$\left(\widehat{\bigotimes_{i \in I}} \int_{X_i} f_i^{(n)} \, d\varPi_i \right) \xi_m = \left(\widehat{\bigotimes_{i \in I}} \int_{X_i} f_i \, d\varPi_i \right) \varPi(A^{(n)}) \xi_m \tag{$***$}$$

である．以上 (∗), (∗∗), (∗∗∗) より

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\int_{X_i} f_i\,d\Pi_i\right)\Pi(A^{(n)})\xi_m$$

だから，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して適当に $m_n\in\mathbb{N}$ をとれば，$\lim_{n\to\infty} m_n=\infty$ かつ

$$\left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi = \lim_{n\to\infty}\left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\int_{X_i} f_i\,d\Pi_i\right)\Pi(A^{(n)})\xi_{m_n}$$

が成り立つ．また，$n\to\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}\|\Pi(A^{(n)})\xi_{m_n}-\xi\| &\le \|\Pi(A^{(n)})(\xi_{m_n}-\xi)\| + \|\Pi(A^{(n)})\xi-\xi\|\\ &\le \|\xi_{m_n}-\xi\| + \|\Pi(A^{(n)})\xi-\xi\|\\ &\to 0\end{aligned}$$

である．$\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\int_{X_i} f_i\,d\Pi_i$ は閉作用素だから，これより，$\xi\in\mathrm{Dom}(\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\int_{X_i} f_i\,d\Pi_i)$ かつ

$$\left(\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\int_{X_i} f_i\,d\Pi_i\right)\xi = \left(\int_X f\,d\Pi\right)\xi$$

である．よって，

$$\int_X f\,d\Pi \subseteq \widehat{\bigotimes_{i\in I}}\int_{X_i} f_i\,d\Pi_i$$

である．

以上で，主張の等式が示された． □

$(X_i)_{i\in I}$ を第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間の有限族とすると，各 X_i の Borel 可測構造が誘導する $X=\prod_{i\in I} X_i$ 上の積可測構造は，X の Borel 可測構造に一致する（Cohn [3, Proposition 7.6.2] を参照のこと）．よって，各 $i\in I$ に対して Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}_i$-射影値 Borel 測度（$\mathcal{H}_i$ は Hilbert 空間）とすると，これらのテンソル積 Π は，X 上の $\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$-射影値 Borel 測度である．また，第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間上の射影値 Borel 測度は自動的に Radon だから（注意 2.11），各 Π_i および Π の台が定まる．これらの台について，次が成り立つ．

命題 2.50　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族として $\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置き，$(X_i)_{i\in I}$ を第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間の有限族として $X=\prod_{i\in I}X_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して Π_i を X_i 上の $\mathcal{H}_i$-射影値 Borel 測度とし，これらのテンソル積を Π と置く．このとき，

$$\operatorname{supp}\Pi = \prod_{i\in I}\operatorname{supp}\Pi_i$$

である．

証明　$S=\prod_{i\in I}\operatorname{supp}\Pi_i$ と置く．まず，S は X の閉集合であり，$\Pi(S)=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}1_{\mathcal{H}_i}=1_{\mathcal{H}}$ を満たす．次に，開集合 $U\subseteq X$ が S と交わるとする．すると，各 $i\in I$ に対して開集合 $U_i\subseteq X_i$ であって $\operatorname{supp}\Pi_i$ と交わるものを適当にとり，$\prod_{i\in I}U_i\subseteq U$ を満たすようにできる．命題 2.4 (1) と Π の定義より

$$\Pi(U)\ge \Pi\left(\prod_{i\in I}U_i\right) = \widehat{\bigotimes_{i\in I}}\Pi_i(U_i)\neq 0$$

となるから，$\Pi(U)\neq 0$ である．以上より，$\operatorname{supp}\Pi=S$ が成り立つ． □

3 連続正規作用素のスペクトル分解

3.1 射影値測度と準同型との対応

前節では，射影値測度に関する積分が単位的対合表現を与え，さらに「Lebesgue の収束定理」が成り立つことを見た．本小節では逆に，「Lebesgue の収束定理」が成り立つ単位的対合表現には，それに対応する射影値測度が一意に存在することを示す．

本小節と次小節では，可測空間 X 上の有界な複素数値可測関数全体のなす空間を，$B(X)$ と書く．容易に確かめられるように，$B(X)$ は，関数の各点ごとの積と複素共役，および絶対値の上限が与えるノルムによって，単位的 C* 代数をなす．

定義 3.1 (Lebesgue の収束条件) X を可測空間とし，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．単位的対合表現 $\pi\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が **Lebesgue の収束条件を満たす**[*7] とは，次の条件を満たすことをいう．

(L) $B(X)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に各点収束するならば，$(\pi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に弱収束する．

注意 3.2 条件 (L) の「弱収束」を「強収束」に置き換えても，条件は変わらない．このことを確かめる．X を可測空間，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，単位的対合表現 $\pi\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が Lebesgue の収束条件を満たすとする．$B(X)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，0 に各点収束するものを任意にとる．すると，$(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ も $B(X)$ 上の有界な点列であって 0 に各点収束するから，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$n \to \infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
\|\pi(f_n)\xi\|^2 &= \langle \pi(f_n)\xi | \pi(f_n)\xi \rangle \\
&= \langle \xi | \pi(f_n)^*\pi(f_n)\xi \rangle \\
&= \langle \xi | \pi(|f_n|^2)\xi \rangle \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

である．よって，$(\pi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に強収束する．

定理 3.3 X を可測空間とし，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π に対して，$B(X)$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f \mapsto \int_X f\,d\Pi$ は，Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現である．

(2) Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現 $\pi\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，写像 $A \mapsto \pi(\chi_A)$ は，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度である．

(3) (1) と (2) の対応は，互いに他の逆であり，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度と $B(X)$ の $\mathcal{H}$ 上の Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現との間の一対一対応を与える．

証明 (1) 単位的対合表現であることは系 2.23 で，Lebesgue の収束条件を満たすことは定理 2.28 で示した．

(2) $\pi\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現とする．可測集合 $A \subseteq X$ に対して，その特性関数 χ_A は $B(X)$ の射影元だから，$\pi(\chi_A)$ は $\mathcal{H}$ 上の直交射影である．また，π は単位的だから，

*7 「Lebesgue の収束条件を満たす」は，本稿だけの用語である．Arveson [1, Definition 2.6.1] は，この条件を満たす単位的対合表現を，「σ-representation」と呼んでいる．

$\pi(\chi_X) = \pi(1) = 1_{\mathcal{H}}$ である．さらに，$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を互いに交わらない X の可測集合の列として $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と置くと，π が Lebesgue の収束条件を満たすことより，$\sum_{n=0}^{N-1}\pi(\chi_{A_n}) = \pi(\chi_{A_0\cup\cdots\cup A_{N-1}})$ は $\pi(\chi_A)$ に弱収束する．よって，写像 $A \mapsto \pi(\chi_A)$ は，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度である（注意 2.3）．

(3)　まず，(2) の対応が単射であることを示す．π, $\pi'\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ は Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現であり，任意の可測集合 $A \subseteq X$ に対して $\pi(\chi_A) = \pi'(\chi_A)$ を満たすとする．このとき，X 上の可測単関数に対する π と π' の値は等しい．任意の $f \in B(X)$ に対して，f に各点収束する可測単関数の有界列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとると，π と π' が Lebesgue の収束条件を満たすことより，弱位相に関して

$$\pi(f) = \lim_{n\to\infty}\pi(f_n) = \lim_{n\to\infty}\pi'(f_n) = \pi(f)$$

である．よって，$\pi = \pi'$ である．これで，(2) の対応が単射であることが示された．

次に，X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ に対して，(1) によって $\mathit{\Pi}$ に対応する単位的対合表現を π とすると，(2) によって π に対応する $\mathcal{H}$-射影値測度は $\mathit{\Pi}$ であることを示す．$A \subseteq X$ を可測集合とすると，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\left\langle \eta \middle| \left(\int_X \chi_A \, d\mathit{\Pi}\right)\xi \right\rangle = \int_X \chi_A \, d\mathit{\Pi}_{\eta,\xi} = \mathit{\Pi}_{\eta,\xi}(A) = \langle \eta | \mathit{\Pi}(A)\xi\rangle$$

だから，

$$\int_X \chi_A \, d\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}(A)$$

が成り立つ．これは，(2) によって π に対応する $\mathcal{H}$-射影値測度が $\mathit{\Pi}$ であることを意味する．

以上で，主張の一対一対応が示された．　□

3.2　射影値測度による表現定理

前小節から引き続いて，可測空間 X 上の有界な複素数値可測関数全体のなす単位的 C* 代数を，$B(X)$ と書く．

事実 3.4（Riesz–Markov–角谷の定理）　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．X 上の有限複素 Borel–Radon 測度 μ に対して，$C_0(X)$ 上の線型形式 I_μ を

$$I_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

と定めると，$I_\mu \in C_0(X)^*$ である．さらに，これによって定まる写像 $\mu \mapsto I_\mu$ は，X 上の有限複素 Borel–Radon 測度の全体が全変動ノルムに関してなす Banach 空間 $\mathscr{M}(X)$ から $C_0(X)^*$ への等長線型同型である．

証明は，Cohn [3, Theorem 7.3.6] を参照のこと．

事実 3.5　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，μ をその上の正値 Borel–Radon 測度とする．$\mathscr{F}$ を，X 上の $\overline{\mathbb{R}}_{>0}$ に値をとる下半連続関数の集合であって，上に有向である（すなわち，任意の有限個の元 $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}$ に対して，ある元 $f \in \mathscr{F}$ が存在して，$f_1, \ldots, f_n \leq f$ を満たす）ものとする．このとき，

$$\int_X \sup_{f\in\mathscr{F}} f \, d\mu = \sup_{f\in\mathscr{F}} \int_X f \, d\mu$$

が成り立つ．

証明は，Cohn [3, Proposition 7.4.5] を参照のこと．

定理 3.6 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．非退化対合表現 $\pi\colon C_0(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，X 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel–Radon 測度 Π であって，任意の $f \in C_0(X)$ に対して

$$\pi(f) = \int_X f\, d\Pi$$

を満たすものが，一意に存在する．

証明 一意性 X 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel–Radon 測度 Π が条件を満たすとすると，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ と $f \in C_0(X)$ に対して，

$$\int_X f\, d\Pi_{\eta,\xi} = \left\langle \eta \middle| \left(\int_X f\, d\Pi\right)\xi \right\rangle = \langle \eta | \pi(f)\xi \rangle$$

が成り立つ．Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，X 上の有限複素 Borel–Radon 測度 $\Pi_{\eta,\xi}$ は上式によって一意に定まるから，条件を満たす Π はたかだか一意である．

存在 π はノルム減少だから [15, 定理 3.16]，$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$C_0(X)$ 上の線型形式 $f \mapsto \langle \eta|\pi(f)\xi\rangle$ は連続であり，そのノルムは $\|\xi\|\|\eta\|$ 以下である．したがって，Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，X 上の有限複素 Borel–Radon 測度 $\mu_{\eta,\xi}$ であって，任意の $f \in C_0(X)$ に対して

$$\langle \eta|\pi(f)\xi\rangle = \int_X f\, d\mu_{\eta,\xi}$$

を満たすものが一意に存在し，これは $\|\mu_{\eta,\xi}\| \le \|\xi\|\|\eta\|$ を満たす．さらに，$\mu_{\eta,\xi}$ は，η に関して共役線型，ξ に関して線型である．$\|\mu_{\eta,\xi}\| \le \|\xi\|\|\eta\|$ だから，$f \in B(X)$ を固定すると，$\mathcal{H}$ 上の準双線型形式 $(\eta, \xi) \mapsto \int_X f\, d\mu_{\eta,\xi}$ は連続であり，そのノルムは $\|f\|_{B(X)}$ 以下である．よって，$\widetilde{\pi}(f) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \eta|\widetilde{\pi}(f)\xi\rangle = \int_X f\, d\mu_{\eta,\xi}$$

を満たすものが一意に存在する．これによって，写像 $\widetilde{\pi}\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を定める．定義より，$\widetilde{\pi}$ は π の拡張である．

以下，$\widetilde{\pi}$ が Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現であることを示す．$\widetilde{\pi}$ が線型であることは明らかである．以下では，$\widetilde{\pi}$ が対合を保つこと，積を保つこと，$1 \in B(X)$ を $1_{\mathcal{H}} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に移すこと，Lebesgue の収束条件を満たすことを，順に示す．

$\widetilde{\pi}$ が対合を保つことを示す．π は対合を保つから，$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ と $f \in C_0(X)$ に対して，$\langle \eta|\pi(f)^*\xi\rangle = \langle \eta|\pi(\overline{f})\xi\rangle$ である．この両辺はそれぞれ

$$\langle \eta|\pi(f)^*\xi\rangle = \overline{\langle \xi|\pi(f)\eta\rangle} = \overline{\int_X f\, d\mu_{\xi,\eta}} = \int_X \overline{f}\, d\overline{\mu_{\xi,\eta}}, \qquad \langle \eta|\pi(\overline{f})\xi\rangle = \int_X \overline{f}\, d\mu_{\eta,\xi}$$

と計算されるから，これらが任意の $f \in C_0(X)$ に対して等しいことと Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$\overline{\mu_{\xi,\eta}} = \mu_{\eta,\xi}$ である．$f \in B(X)$ とすると，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \eta|\widetilde{\pi}(f)^*\xi\rangle = \overline{\langle \xi|\widetilde{\pi}(f)\eta\rangle} = \overline{\int_X f\, d\mu_{\xi,\eta}} = \int_X \overline{f}\, d\mu_{\eta,\xi} = \langle \eta|\widetilde{\pi}(\overline{f})\xi\rangle$$

だから，$\widetilde{\pi}(f)^* = \widetilde{\pi}(\overline{f})$ である．

$\widetilde{\pi}$ が積を保つことを示す．π は積を保つから，$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ と $f, g \in C_0(X)$ に対して，$\langle \eta | \pi(f)\pi(g)\xi \rangle = \langle \eta | \pi(fg)\xi \rangle$ である．この両辺はそれぞれ

$$\langle \eta | \pi(f)\pi(g)\xi \rangle = \int_X f \, d\mu_{\eta, \pi(g)\xi}, \qquad \langle \eta | \pi(fg)\xi \rangle = \int_X fg \, d\mu_{\eta, \xi}$$

と計算されるから，これらが任意の $f \in C_0(X)$ に対して等しいことと Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$d\mu_{\eta, \pi(g)\xi} = g \, d\mu_{\eta, \xi}$ である．次に，$f \in B(X)$ とすると，任意の $g \in C_0(X)$ に対して

$$\int_X fg \, d\mu_{\eta, \xi} = \int_X f \, d\mu_{\eta, \pi(g)\xi} = \langle \eta | \widetilde{\pi}(f)\pi(g)\xi \rangle = \langle \widetilde{\pi}(f)^* \eta | \pi(g)\xi \rangle = \int_X g \, d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^*\eta, \xi}$$

だから，Riesz–Markov–角谷の定理（事実 3.4）より，$d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^*\eta, \xi} = f \, d\mu_{\eta, \xi}$ である．$f, g \in B(X)$ とすると，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \eta | \widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g)\xi \rangle = \langle \widetilde{\pi}(f)^* \eta | \widetilde{\pi}(g)\xi \rangle = \int_X g \, d\mu_{\widetilde{\pi}(f)^*\eta, \xi} = \int_X fg \, d\mu_{\eta, \xi} = \langle \eta | \widetilde{\pi}(fg)\xi \rangle$$

だから，$\widetilde{\pi}(f)\widetilde{\pi}(g) = \widetilde{\pi}(fg)$ である．

$\widetilde{\pi}(1) = 1_{\mathcal{H}}$ であることを示す[*8]．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathscr{F} = \{f \in C_0(X) \mid f \geq 0, \|f\| \leq 1\}$ として事実 3.5 を用いると，

$$\langle \xi | \widetilde{\pi}(1)\xi \rangle = \int_X 1 \, d\mu_{\xi, \xi} = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X f \, d\mu_{\xi, \xi} = \sup_{f \in \mathscr{F}} \langle \xi | \pi(f)\xi \rangle$$

を得る．一方で，$\mathscr{F}$ を順序 $\leq$ によってネットとみなしたものは $C_0(X)$ の近似単位元 [15, 定義 3.72] であり，π は非退化だから，ネット $(\pi(f))_{f \in \mathscr{F}}$ は $1_{\mathcal{H}}$ に強収束する [15, 命題 4.24]．したがって，

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \langle \xi | \pi(f)\xi \rangle = \lim_{f \in \mathscr{F}} \langle \xi | \pi(f)\xi \rangle = \|\xi\|^2$$

これら 2 式より，$\langle \xi | \widetilde{\pi}(1)\xi \rangle = \|\xi\|^2$ である．すでに示したように $\widetilde{\pi}$ は対合を保つから，$\widetilde{\pi}(1)$ は自己随伴である．したがって，分極公式より，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle \eta | \widetilde{\pi}(1)\xi \rangle = \langle \eta | \xi \rangle$ が成り立つ．よって，$\widetilde{\pi}(1) = 1_{\mathcal{H}}$ である．

$\widetilde{\pi}$ が Lebesgue の収束条件を満たすことを示す．$B(X)$ 上の有界な点列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が 0 に各点収束するとすると，Lebesgue の収束定理より，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して，$n \to \infty$ のとき

$$\langle \eta | \widetilde{\pi}(f_n)\xi \rangle = \int_X f_n \, d\mu_{\eta, \xi} \to 0$$

となる．すなわち，$(\widetilde{\pi}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に弱収束する．よって，$\widetilde{\pi}$ は Lebesgue の収束条件を満たす．

以上より，$\widetilde{\pi}$ は，Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現である．定理 3.3 によって $\widetilde{\pi}$ と対応する X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ をとる．すると，任意の $f \in C_0(X)$ に対して，

$$\int_X f \, d\mathit{\Pi} = \widetilde{\pi}(f) = \pi(f)$$

である．また，$\xi, \eta \in \mathcal{H}$ とすると，任意の Borel 集合 $A \subseteq X$ に対して

$$\mathit{\Pi}_{\eta, \xi}(A) = \langle \eta | \widetilde{\pi}(\chi_A)\xi \rangle = \int_X \chi_A \, d\mu_{\eta, \xi} = \mu_{\eta, \xi}(A)$$

だから，$\mathit{\Pi}_{\eta, \xi} = \mu_{\eta, \xi}$ である．特に，$\mathit{\Pi}$ は Radon である．よって，この $\mathit{\Pi}$ は，主張の条件を満たす．　□

---

8 X がコンパクト Hausdorff 空間ならば，$C_0(X) = C(X)$ は単位的 C 代数であり，その非退化対合表現とは単位的対合表現のことにほかならない [15, 命題 4.25]．よって，この場合，明らかに，$\widetilde{\pi}(1) = \pi(1) = 1_{\mathcal{H}}$ である．

系 3.7　X を第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．非退化対合表現 $\pi\colon C_0(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，X 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ であって，任意の $f \in C_0(X)$ に対して

$$\pi(f) = \int_X f\,d\mathit{\Pi}$$

を満たすものが，一意に存在する．さらに，この $\mathit{\Pi}$ を用いて写像 $\widetilde{\pi}\colon B(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_X f\,d\mathit{\Pi}$$

と定めると，$\widetilde{\pi}$ は，$B(X)$ の $\mathcal{H}$ 上の Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現であって π の拡張である唯一のものである．

証明　第二可算な局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の射影値 Borel 測度は必ず Radon だから（注意 2.11），定理 3.6 より，条件を満たす $\mathit{\Pi}$ が一意に存在する．さらに，射影値測度と Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現との間の一対一対応（定理 3.3）より，$\widetilde{\pi}$ は，$B(X)$ の $\mathcal{H}$ 上の Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現であって π の拡張である唯一のものである．　□

3.3　連続正規作用素のスペクトル分解

本小節では，$\mathbb{C}$ の部分集合上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を，z と書く．

定理 3.8（連続正規作用素のスペクトル分解定理）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 T に対して，$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ であって

$$T = \int_{\mathbb{C}} z\,d\mathit{\Pi}$$

を満たすものが，一意に存在する．さらに，この $\mathit{\Pi}$ は，$\operatorname{supp} \mathit{\Pi} = \operatorname{Sp}(T)$ を満たす．

証明　$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ が $T = \int_{\mathbb{C}} z\,d\mathit{\Pi}$ を満たすとすると，命題 2.26 より，$\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} z = \operatorname{supp} \mathit{\Pi}$ が成り立つ．あとは，$\operatorname{Sp}(T)$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ であって $T = \int_{\operatorname{Sp}(T)} z\,d\mathit{\Pi}$ を満たすものが一意に存在することを示せばよい．

定理 3.3 より，$\operatorname{Sp}(T)$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ であって $T = \int_{\operatorname{Sp}(T)} z\,d\mathit{\Pi}$ を満たすものを与えることは，Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現 $\pi\colon B(\operatorname{Sp}(T)) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって $\pi(z) = T$ を満たすものを与えることと等価である．一方で，連続関数算が与える $C(\operatorname{Sp}(T))$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f \mapsto f(T)$ は，z を T に移す唯一の単位的対合表現であり [15, 命題 3.37]，系 3.7 より，これは，$B(\operatorname{Sp}(T))$ の $\mathcal{H}$ 上の Lebesgue の収束条件を満たす単位的対合表現に一意に拡張される．よって，条件を満たす π は一意に存在するから，条件を満たす $\mathit{\Pi}$ も一意に存在する．　□

定義 3.9（連続正規作用素のスペクトル測度）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 T に対して，連続正規作用素のスペクトル分解定理（定理 3.8）によって定まる $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ を，T の**スペクトル測度**（spectral measure）という．

連続正規作用素 T のスペクトル測度 $\mathit{\Pi}$ は，$\operatorname{Sp}(T)$ を台にもつから，$\operatorname{Sp}(T)$ 上の射影値 Borel 測度ともみなせる．

命題 3.10　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ をそのスペクトル測度とする．

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\operatorname{Im} \Pi(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ である．特に，$\operatorname{Im} \Pi(\{0\}) = \operatorname{Ker} T$ である．
(2) $\operatorname{Im} \Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \overline{\operatorname{Im} T}$ である．

証明 (1) 命題 2.16 より，$\operatorname{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \operatorname{Ker}(\int_X (z - \lambda)\, d\Pi) = \operatorname{Im} \Pi(\{\lambda\})$ である．
(2) 系 2.20 より，$\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im}(\int_X z\, d\Pi)} = \operatorname{Im} \Pi(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ である．□

系 3.11 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 T について，$\operatorname{Sp}(T)$ の孤立点は，T の固有値である．

証明 T のスペクトル測度を Π とする．λ が $\operatorname{Sp}(T)$ の孤立点ならば，$\{\lambda\}$ は $\operatorname{Sp}(T)$ の開集合だから，$\operatorname{supp} \Pi = \operatorname{Sp}(T)$ より $\Pi(\{\lambda\}) \neq 0$ である．$\operatorname{Im} \Pi(\{\lambda\}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ だから（命題 3.10 (1)），これは，λ が T の固有値であることを意味する．□

注意 3.12 系 3.11 の逆は成り立たない．すなわち，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 T について，$\lambda \in \mathbb{C}$ が T の固有値であっても，λ が $\operatorname{Sp}(T)$ の孤立点であるとは限らない．反例を構成しよう．

Hilbert 空間

$$l^2([0,1]) = \left\{ \xi\colon [0,1] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{t \in [0,1]} |\xi(t)|^2 < \infty \right\}$$

を考え，その標準的な正規直交基底を $(e_t)_{t \in [0,1]}$ と書く．また，$l^2([0,1])$ 上の全域で定義された連続線型作用素 T を，

$$Te_t = te_t$$

によって定める．すると，T は自己随伴であり，$[0,1]$ の任意の点は T の固有値だが，それらはどれも $\operatorname{Sp}(T) = [0,1]$ の孤立点ではない．

注意 3.13 T が正規とは限らない場合，系 3.11 の結論は成り立たない．すなわち，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素 T について，$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\operatorname{Sp}(T)$ の孤立点であっても，λ が T の固有値であるとは限らない．このことを見るために，Hilbert 空間上の全域で定義された連続線型作用素 T であって，$\operatorname{Sp}(T) = \{0\}$ を満たすが固有値をもたないものを構成する．

Hilbert 空間

$$l^2(\mathbb{N}_{>0}) = \left\{ \xi\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} |\xi(n)|^2 < \infty \right\}$$

を考え，その標準的な正規直交基底を $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ と書く．また，$l^2(\mathbb{N}_{>0})$ 上の全域で定義された連続線型作用素 T を，

$$Te_n = \frac{1}{n} e_{n+1}$$

によって定める．すると，容易に確かめられるように，T は固有値をもたない．また，T は全射ではない（たとえば，$e_1 \notin \operatorname{Im} T$ である）から，$0 \in \operatorname{Sp}(T)$ である．一方で，スペクトル半径公式（「C* 代数」[15, 定理 2.29] を参照のこと）より，T のスペクトル半径は

$$\|T\|_{\mathrm{Sp}} = \lim_{k \to \infty} \|T^k\|^{1/k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k!} \right)^{1/k} = 0$$

だから，$\operatorname{Sp}(T) \subseteq \{0\}$ である．よって，$\operatorname{Sp}(T) = \{0\}$ である．

3.4 連続正規作用素の Borel 可測関数算

定義 3.14（Borel 可測関数算） T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，Π をそのスペクトル測度とする．このとき，$f \in L(\mathbb{C}, \Pi)$ に対して，

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f \, d\Pi$$

と書く．

T のスペクトル測度 Π は $\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，$L(\mathbb{C}, \Pi)$ は $L(\mathrm{Sp}(T), \Pi)$ と自然に同一視される．よって，$f \in L(\mathrm{Sp}(T), \Pi)$ に対しても，$f(T)$ が定まる．

後に 4.2 節で見るように，Borel 可測関数算は，連続とは限らない正規作用素に対しても定義される．Borel 可測関数算の詳しい性質は，そこで調べる．ここでは，本節の以下の部分に必要な範囲で，Borel 可測関数算の性質を示しておく．

定理 3.15 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，Π をそのスペクトル測度とする．$L^\infty(X, \Pi)$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f \mapsto f(T)$ は，等長な単位的対合表現である．

証明 系 2.23 の特別な場合である． □

定理 3.16 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，Π をそのスペクトル測度とする．f_n, f, $g \in L(X, \Pi)$（$n \in \mathbb{N}$）とし，$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は f に Π-概収束し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して Π-ほとんどいたるところで $|f_n| \leq |g|$ であるとする．このとき，任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\, g(T)$ に対して，ξ は $\mathrm{Dom}\, f_n(T)$（$n \in \mathbb{N}$）および $\mathrm{Dom}\, f(T)$ に属し，

$$\lim_{n \to \infty} f_n(T)\xi = f(T)\xi$$

が成り立つ．

証明 射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.28）の特別な場合である． □

系 3.17 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，Π をそのスペクトル測度とする．$L^\infty(\mathbb{C}, \Pi)$ 上の（ノルム $\|-\|_\infty$ に関して）有界な点列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が，$f \in L^\infty(\mathbb{C}, \Pi)$ に Π-概収束するとする．このとき，強位相に関して

$$\lim_{n \to \infty} f_n(T) = f(T)$$

である．

証明 系 2.29 の特別な場合である． □

命題 3.18 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Π を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L^\infty(X, \Pi)$ とすると，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 $\int_X f \, d\Pi$ のスペクトル測度は，$f_*\Pi$ に等しい．さらに，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\Pi)$ に対して，

$$g\biggl(\int_X f \, d\Pi\biggr) = \int_X g \circ f \, d\Pi$$

である．

証明　命題 2.17 より

$$\int_X f\,d\Pi = \int_{\mathbb{C}} z\,d(f_*\Pi)$$

（z は，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を表す）だから，$\int_X f\,d\Pi$ のスペクトル測度は $f_*\Pi$ に等しい．さらに，ふたたび命題 2.17 より，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\Pi)$ に対して，

$$g\left(\int_X f\,d\Pi\right) = \int_{\mathbb{C}} g\,d(f_*\Pi) = \int_X g \circ f\,d\Pi$$

が成り立つ．　□

系 3.19　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，Π をそのスペクトル測度とする．$f \in L^\infty(X, \Pi)$ とすると，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素 $f(T)$ のスペクトル測度は，$f_*\Pi$ に等しい．さらに，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\Pi)$ に対して，

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T)$$

である．

証明　命題 3.18 の特別な場合である．　□

3.5　連続正規作用素の可換性とスペクトル測度

補題 3.20（Fuglede–Putnam の定理）　T_1, T_2 をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上の連続正規作用素とし，S を $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への全域で定義された連続線型作用素とする．$ST_1 = T_2S$ ならば，$ST_1^* = T_2^*S$ である．

証明　$\lambda \in \mathbb{C}$ を固定すると，$z \in \mathbb{C}$ の関数としてコンパクト一様収束位相に関して $\exp(i\overline{\lambda}z) = \sum_{n=0}^{\infty}(i\overline{\lambda}z)^n/n!$ が成り立つ．したがって，連続関数算の等長性より，ノルム位相に関して

$$\exp(i\overline{\lambda}T_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\overline{\lambda}T_1)^n}{n!}, \qquad \exp(i\overline{\lambda}T_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\overline{\lambda}T_2)^n}{n!}$$

が成り立つ．$\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への全域で定義された連続線型作用素 S が $ST_1 = T_2S$ を満たすとすると，上式と合わせて，

$$S\exp(i\overline{\lambda}T_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(i\overline{\lambda}T_1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\overline{\lambda}T_2)^nS}{n!} = \exp(i\overline{\lambda}T_2)S \tag{$*$}$$

を得る．

Banach 空間に値をとる正則写像 $f\colon \mathbb{C} \to \mathscr{L}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ を，

$$f(\lambda) = \exp(-i\lambda T_2^*)S\exp(i\lambda T_1^*)$$

と定める．すると，($*$) より，

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \exp(-i\lambda T_2^*)\exp(-i\overline{\lambda}T_2)S\exp(i\overline{\lambda}T_1)\exp(i\lambda T_1^*) \\ &= \exp(-i(\lambda T_2^* + \overline{\lambda}T_2))S\exp(i(\overline{\lambda}T_1 + \lambda T_1^*)) \end{aligned}$$

である．また，$|\exp(\pm i(\lambda\overline{z} + \overline{\lambda}z))| = 1$（$z \in \mathbb{C}$）だから，$\exp(-i(\lambda T_1^* + \overline{\lambda}T_1))$ と $\exp(i(\lambda T_2^* + \overline{\lambda}T_2))$ はユニタリ作用素である．したがって，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|f(\lambda)\| \le \|\exp(-i(\lambda T_2^* + \overline{\lambda}T_2))\|\|S\|\|\exp(-i(\lambda T_2^* + \overline{\lambda}T_1))\| = \|S\|$$

だから，Liouville の定理より，f は定数である．よって，

$$0 = f'(\lambda) = -iT_2^* \exp(-i\lambda T_2^*) S \exp(i\lambda T_1^*) + i \exp(-i\lambda T_2^*) S T_1^* \exp(i\lambda T_1^*)$$

である．上式で $\lambda = 0$ と置けば，$ST_1^* = T_2^* S$ を得る． □

定理 3.21 T_1, T_2 をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ 上の連続正規作用素，Π_1, Π_2 をそれぞれ T_1, T_2 のスペクトル測度とし，S を $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への全域で定義された連続線型作用素とする．次の条件は同値である．

(a) $ST_1 = T_2 S$ である．
(b) 任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$S\Pi_1(A) = \Pi_2(A)S$ である．
(c) 任意の有界 Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$Sf(T_1) = f(T_2)S$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $ST_1 = T_2S$ であるとする．まず，任意の $f \in C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2))$ に対して $Sf(T_1) = f(T_2)S$ であることを示す．そのために，

$$\mathscr{F} = \{f \in C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2)) \mid Sf(T_1) = f(T_2)S\}$$

と置く．$\mathscr{F}$ は，$C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2))$ の閉部分単位的代数であり，Fuglede–Putnam の定理（補題 3.20）より複素共役をとる操作で閉じているから，$C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2))$ の部分単位的 C* 代数である．仮定より $z \in \mathscr{F}$ であり，$C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2))$ は単位的 C* 代数として z によって生成されるから（Stone–Weierstrass の定理の結果），$\mathscr{F} = C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2))$ である．すなわち，任意の $f \in C(\mathrm{Sp}(T_1) \cup \mathrm{Sp}(T_2))$ に対して，$Sf(T_1) = f(T_2)S$ である．

次に，任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して $S\Pi_1(A) = \Pi_2(A)S$ であることを示す．そのために，

$$\mathfrak{A} = \{A \subseteq \mathbb{C} \mid A \text{ は Borel 集合で } S\Pi_1(A) = \Pi_2(A)S\}$$

と置く．すると，

- Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\Pi_1(\mathbb{C} \setminus A) = 1_{\mathcal{H}_1} - \Pi_1(A)$ かつ $\Pi_2(\mathbb{C} \setminus A) = 1_{\mathcal{H}_2} - \Pi_2(A)$ だから，$A \in \mathfrak{A}$ ならば $\mathbb{C} \setminus A \in \mathfrak{A}$ である．
- 互いに交わらない $\mathrm{Sp}(T)$ の Borel 集合の可算族 $(A_i)_{i \in I}$ について，$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ と置くと，弱位相に関して $\Pi(A) = \sum_{i \in I} \Pi(A_i)$ である．したがって，すべての $i \in I$ に対して $A_i \in \mathfrak{A}$ ならば，$A \in \mathfrak{A}$ である（合成の弱分離連続性）．

よって，$\mathfrak{A}$ は $\mathbb{C}$ 上の σ-代数である．あとは，任意の開集合 $U \subseteq \mathbb{C}$ が $\mathfrak{A}$ に属することをいえばよい．U のコンパクト集合の増大列 $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ であって，$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ を満たすものをとる．さらに，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，連続関数 $f_n\colon \mathbb{C} \to [0,1]$ であって $f_n(K_n) \subseteq \{1\}$ かつ $f_n(\mathbb{C} \setminus U) \subseteq \{0\}$ を満たすものをとる（Urysohn の補題）．すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n| \leq 1$ であり，$n \to \infty$ のとき f_n は χ_A に各点収束する．したがって，系 3.17 より，$n \to \infty$ のとき，弱位相に関して $f_n(T_1) \to \chi_U(T_1) = \Pi_1(U)$ かつ $f_n(T_2) \to \chi_U(T_2) = \Pi_2(U)$ となる．前段の結果より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $Sf_n(T_1) = f_n(T_2)S$ だから，極限をとれば $S\Pi_1(U) = \Pi_2(U)S$ を得る（合成の弱分離連続性）．これで，$U \in \mathfrak{A}$ が示された．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) 命題 2.30 の特別な場合である．

(c) $\Longrightarrow$ (a) 明らかである． □

3.6 コンパクト正規作用素のスペクトル分解

本小節では，コンパクト正規作用素のスペクトル分解を調べる．コンパクト作用素の定義と基本的な性質については，「コンパクト作用素のノート」 [14, 1 節] を参照のこと．

本小節では，$0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \geq 0$ の閉円板を，$B(r)$ と書く．

定理 3.22 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ をそのスペクトル測度とする．次の条件は同値である．

(a) T はコンパクトである．

(b) 任意の $r > 0$ に対して，$\mathit{\Pi}(\mathbb{C} \setminus B(r))$ は有限階数である．

証明 $\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を，z と書く．

(a) $\Longrightarrow$ (b) $r > 0$ とする．$\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)} = z \cdot \chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)} z^{-1}$ だから，Borel 可測関数算の準同型性（定理 3.15）より，

$$\mathit{\Pi}(\mathbb{C} \setminus B(r)) = \left(\int_{\mathbb{C}} z \, d\mathit{\Pi}\right)\left(\int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)} z^{-1} \, dP\right) = T\left(\int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)} z^{-1} \, dP\right)$$

である．よって，T がコンパクトならば，$\mathit{\Pi}(\mathbb{C} \setminus B(r))$ もコンパクトである [14, 命題 1.3]．ところが，$\mathit{\Pi}(\mathbb{C} \setminus B(r))$ は直交射影だから，これがコンパクトであることと有限階数であることとは同値である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $r \to 0+$ のとき，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)} z$ は z に一様収束するから，Borel 可測関数算の準同型性と等長性（定理 3.15）より，ノルム位相に関して

$$\mathit{\Pi}(\mathbb{C} \setminus B(r))T = \int_{\mathbb{C}} \chi_{\mathbb{C}\setminus B(r)} z \, d\mathit{\Pi} \to \int_{\mathbb{C}} z \, d\mathit{\Pi} = T$$

である．任意の $r > 0$ に対して $\mathit{\Pi}(\mathbb{C} \setminus B(r))$ が有限階数ならば，T は，上式のように有限階数の連続線型作用素によって近似されるから，コンパクトである [14, 命題 1.6]. □

補題 3.23 X を（集合として）無限な Hausdorff 空間とすると，X の空でない開集合の無限族であって，どの異なる 2 元も交わらないものが存在する．

証明 無限な Hausdorff 空間 X に対して，その 2 つの空でない開集合 U, V であって，互いに交わらず，どちらかは無限であるものがとれることを示せばよい．実際，これが示されたとすると，再帰によって，X の空でない開集合の無限列であって，どの異なる 2 元も交わらないものが構成できる．

点 $x \in X$ を固定する．x が X の孤立点ならば，$U = \{x\}$，$V = X \setminus \{x\}$ と置けばよい．x が X の孤立点でなければ，X が Hausdorff であることより，x の任意の近傍は無限個の点をもつ．そこで，x とは別の点 $y \in X$ を固定し，x と y を分離する開集合 U, V をとれば，これらが条件を満たす． □

系 3.24 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のコンパクト正規作用素とする．任意の $r > 0$ に対して，$\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ は有限集合である．特に，$\mathrm{Sp}(T)$ は可算集合であり，$\mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ の点はすべて $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点である．

証明 T のスペクトル測度を $\mathit{\Pi}$ とする．$r > 0$ を任意にとり，$\mathfrak{U}$ を，$\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ の空でない開集合の族であって，どの異なる 2 元も交わらないものとする．すると，

- 任意の $U \in \mathfrak{U}$ に対して，$U \subseteq \mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ だから，$\mathit{\Pi}(U) \leq \mathit{\Pi}(\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r))$ である（命題 2.4 (1)）．

- 任意の $U \in \mathfrak{U}$ に対して，U は $\mathrm{Sp}(T) = \operatorname{supp} \Pi$ の開集合だから，$\Pi(U) \neq 0$ である．
- 任意の異なる 2 元 $U, V \in \mathfrak{U}$ に対して，$U \cap V = \emptyset$ だから，$\Pi(U) \perp \Pi(V)$ である（命題 2.4 (3)）．

一方で，T はコンパクトだから，定理 3.22 より，$\Pi(\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r))$ は有限階数である．したがって，$\mathfrak{U}$ は有限族である．よって，補題 3.23 の対偶より，$\mathrm{Sp}(T) \setminus B(r)$ は有限集合である．

後半の主張は，前半の主張から従う． □

定理 3.25（コンパクト正規作用素のスペクトル分解定理） T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のコンパクト正規作用素とする．

(1) 任意の $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ に対して，λ は T の固有値であり，対応する固有空間 $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ は有限次元である．

(2) 異なる二つの複素数 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して，固有空間 $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ と $\mathrm{Ker}(T - \mu 1_{\mathcal{H}})$ は直交する．

(3) $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ の上への直交射影を P_λ と書く．すると，ノルム位相に関して

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

が成り立つ．

証明 T のスペクトル測度を Π とする．

(1) $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ は，$\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点だから，（系 3.24），T の固有値である（系 3.11），また，$\Pi(\{\lambda\})$ は $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ の上への直交射影であり（命題 2.16），$\Pi(\{\lambda\})$ は有限階数だから（命題 3.10），固有空間 $\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ は有限次元である．

(2) 命題 1.60 において，一般の正規作用素に対して示した．

(3) 有限部分集合 $F \subseteq \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ に対して，有界 Borel 可測関数 $f_F\colon \mathrm{Sp}(T) \to \mathbb{C}$ を，$f_F(\lambda) = \chi_F(\lambda)\lambda$ と定める．すると，系 3.24 より，F を大きくする極限において f_F は関数 $\lambda \mapsto \lambda$ に一様収束する．したがって，Borel 可測関数算の等長性（定理 3.15）より，同極限において $f_F(T)$ は T にノルム収束する．ここで，

$$f_F(T) = \sum_{\lambda \in F} \lambda \chi_{\{\lambda\}}(T) = \sum_{\lambda \in F} \lambda \Pi(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda \in F} \lambda P_\lambda$$

だから（命題 2.16），ノルム位相に関して

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

が成り立つ． □

注意 3.26 系 3.24 と定理 3.25 (1) は，Banach 空間上のコンパクト作用素に対しても成立する．詳しくは，「コンパクト作用素のノート」 [14, 定理 2.8, 系 2.6] を参照のこと．

3.7 応用：$\mathscr{L}(\mathcal{H})^\times$ の弧状連結性

命題 3.27 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素 A に対して，次の条件は同値である．

(a) A は連続可逆な正自己随伴作用素である．

(b) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を用いて，$A = \exp H$ と書ける．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) A が連続可逆な正自己随伴作用素であるとすると，$\mathrm{Sp}(A)$ は $\mathbb{R}_{>0}$ のコンパクト集合である．そこで，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の実数値連続関数 $\log$ に A を代入したものを $H \in \mathscr{L}(E)$ と置けば，H は自己随伴であり，連続関数算と関数の合成との整合性（「C* 代数」 [15, 命題 3.40 (2)] を参照のこと．あるいは，系 3.19 から従う，としてもよい）より，$\exp H = \exp\log A = A$ となる．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathrm{Sp}(\exp H) = \exp(\mathrm{Sp}(H)) \subseteq \exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ だから，$\exp H$ は連続可逆な正自己随伴作用素である． □

系 3.28 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続可逆な連続正自己随伴作用素全体のなす集合は，ノルム位相に関して弧状連結である．

証明 連続可逆な連続正自己随伴作用素 $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を任意にとる．命題 3.27 より，連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を用いて，$A = \exp H$ と書ける．$t \in [0,1]$ に対して連続関数 $f_t\colon \mathrm{Sp}(H) \to \mathbb{C}$ を $f_t(\lambda) = e^{t\lambda}$ と定めると，$[0,1]$ から $C(\mathrm{Sp}(H))$ への写像 $t \mapsto f_t$ は連続だから，連続関数算の等長性より，$[0,1]$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $t \mapsto f_t(H) = \exp tH$ はノルム連続である．さらに，$f_0(H) = 1_{\mathcal{H}}$ かつ $f_1(H) = \exp H = A$ であり，命題 3.27 より，すべての $f_t(H) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ は正かつ連続可逆である．よって，$\mathcal{H}$ 上の連続可逆な連続正自己随伴作用素全体のなす集合は，ノルム位相に関して弧状連結である． □

命題 3.29 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素 U に対して，次の条件は同値である．

(a) U はユニタリである．
(b) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を用いて，$U = \exp iH$ と書ける．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) U がユニタリであるとすると，$\mathrm{Sp}(A)$ は $\mathbb{U}$ のコンパクト集合である．そこで，$\log$ の Borel 可測な枝を一つ固定し，$\mathbb{U}$ 上の実数値有界 Borel 可測関数 $-i\log$ に A を代入したものを $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ と置けば，H は自己随伴であり，Borel 可測関数算と関数の合成との整合性（系 3.19）より，$\exp iH = \exp i(-i\log A) = A$ となる．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathrm{Sp}(\exp iH) = \exp(i\,\mathrm{Sp}(H)) \subseteq \exp(i\mathbb{R}) = \mathbb{U}$ だから，$\exp iH$ はユニタリである [15, 系 3.31 (2)]． □

系 3.30 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす群は，ノルム位相に関して弧状連結である．

証明 ユニタリ作用素 $U \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を任意にとる．命題 3.29 より，連続自己随伴作用素 $H \in \mathscr{L}(E)$ を用いて，$A = \exp iH$ と書ける．$t \in [0,1]$ に対して連続関数 $g_t\colon \mathrm{Sp}(H) \to \mathbb{C}$ を $g_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ と定めると，$[0,1]$ から $C(\mathrm{Sp}(H))$ への写像 $t \mapsto g_t$ は連続だから，連続関数算の等長性より，$[0,1]$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $t \mapsto g_t(H) = \exp itH$ はノルム連続である．さらに，$g_0(H) = 1_{\mathcal{H}}$ かつ $g_1(H) = \exp iH = U$ であり，命題 3.29 より，すべての $g_t(H)$ はユニタリである．よって，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす群は，ノルム位相に関して弧状連結である． □

注意 3.31 命題 3.27 と系 3.28 の証明では連続関数算しか使っていないから，これらは，証明まで含めて一般の単位的 C* 代数に対しても成り立つ．一方で，命題 3.29 の証明では Borel 可測関数算を使っており，命題 3.29 と系 3.30 は一般の単位的 C* 代数に対しては成り立たない．たとえば，$\mathbb{U}$ 上の連続関数 $\lambda \mapsto \lambda$ は $C(\mathbb{U})$ のユニタリ元だが，どんな Hermite 元（すなわち，実数値連続関数）$f \in C(\mathbb{U})$ を用いても $\exp if$ とは

表せない．また，$C(\mathbb{U})$ のユニタリ元全体のなす群を $\mathscr{U}$ と書くと，回転数を用いた議論により，1 と z が $\mathscr{U}$ の異なる弧状連結成分に属することがわかる．

T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続線型作用素とし，その極分解を $T = U|T|$ とすると，$|T|$ は $\mathcal{H}$ 上の連続正自己随伴作用素であり，U は T と同じ始空間・終空間をもつ $\mathcal{H}$ 上の部分等長作用素である（全域で定義された連続線型作用素の極分解について詳しくは，「C* 代数」[15, 3.7 節] を参照のこと）．ここで，もし T が連続可逆ならば，T の始空間と終空間はともに $\mathcal{H}$ だから，U はユニタリであり，$|T| = U^{-1}T$ は連続可逆である．このことに注意すると，次の定理が得られる．

命題 3.32　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の全域で定義された連続可逆な連続線型作用素全体のなす群 $\mathscr{L}(E)^{\times}$ は，ノルム位相に関して弧状連結である．

証明　$\mathcal{H}$ 上の連続可逆な連続正自己随伴作用素全体のなす集合を $\mathscr{A}$，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす群を $\mathscr{U}$ と書くと，上記の注意より，合成 $(U, A) \mapsto UA$ による $\mathscr{U} \times \mathscr{A}$ の像は $\mathscr{L}(\mathcal{H})^{\times}$ に等しい．$\mathscr{A}$ と $\mathscr{U}$ はノルム位相に関して弧状連結であり（系 3.28，系 3.30），合成はノルム連続だから，$\mathscr{L}(\mathcal{H})^{\times}$ はノルム位相に関して弧状連結である．□

3.8　応用：群のユニタリ表現に関する Schur の補題

本小節では，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす群を，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ と書く．

群のユニタリ表現に関する用語をまとめておく．群 G の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の**ユニタリ表現**（unitary representation）とは，群準同型 $\pi\colon G \to \mathscr{U}(\mathcal{H})$ のことをいう．このとき，$(\pi, \mathcal{H})$ は G のユニタリ表現である，ともいう．G のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が**既約**（irreducible）であるとは，$\mathcal{H} \neq 0$ であり，G-安定な $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間が 0 と $\mathcal{H}$ のみであることをいう．

$(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ と $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ を群 G のユニタリ表現とする．$T \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ が π_1 から π_2 への作用素として**同変**（equivariant）である，あるいは π_1 から π_2 への**絡作用素**（intertwining operator）であるとは，任意の $g \in G$ に対して $T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$ であることをいう．同変な連続線型作用素全体のなす空間を，$\mathscr{L}(\pi_1; \pi_2)$ あるいは $\mathscr{L}_G(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ と書く．容易に確かめられるように，同変な連続線型作用素の合成および随伴は，ふたたび同変である．同変なユニタリ作用素を，**ユニタリ同値**（unitary equivalence）という．π_1 から π_2 へのユニタリ同値が存在するとき，これらのユニタリ表現は**ユニタリ同値**（unitarily equivalent）であるという．

定理 3.33（Schur の補題）　群 G の二つの既約ユニタリ表現 $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ と $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ について，次が成り立つ．

(1) π_1 と π_2 がユニタリ同値でなければ，$\mathscr{L}(\pi_1; \pi_2) = 0$ である．
(2) π_1 と π_2 がユニタリ同値ならば，$\mathscr{L}(\pi_1; \pi_2)$ は 1 次元である．

証明　次の主張を示せば十分である．

(I) $T \in \mathscr{L}(\pi_1; \pi_2) \setminus \{0\}$ とすると，π_1 から π_2 へのユニタリ同値 U が存在して，T は U のスカラー倍である．
(II) U と V がともに π_1 から π_2 へのユニタリ同値ならば，これらはスカラー倍を除いて一致する．

(I)　$T \in \mathscr{L}(\pi_1; \pi_2) \setminus \{0\}$ とする．連続自己随伴作用素 $T^*T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ のスペクトル測度を Π とする．T^*T

は，π_1 から自身への作用素として同変だから，$\pi_1(G)$ の任意の元と可換である．したがって，定理 3.21 より，任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathrm{Sp}(T^*T)$ に対して，$\mathit{\Pi}(A)$ は $\pi_1(G)$ の任意の元と可換である．すなわち，$\mathrm{Im}\,\mathit{\Pi}(A)$ は G-安定である．ここで，$\mathrm{Sp}(T^*T)$ が 2 点以上をもつとすると，$\mathrm{Sp}(T)$ の二つの空でない開集合 A, B であって互いに交わらないものがとれる．$\mathrm{supp}\,\mathit{\Pi} = \mathrm{Sp}(T^*T)$ より $\mathit{\Pi}(A), \mathit{\Pi}(B) \neq 0$ であり，かつ $\mathit{\Pi}(A) \perp \mathit{\Pi}(B)$ だから（命題 2.4 (3)），$\mathrm{Im}\,\mathit{\Pi}(A)$ は 0 でも $\mathcal{H}$ でもないことになるが，これは π_1 の既約性に反する．よって，$\mathrm{Sp}(T^*T)$ は 1 点のみからなる．$\mathrm{Sp}(T^*T) = \{\lambda\}$ とすれば，$\mathrm{Ker}(T^*T - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Im}\,\mathit{\Pi}(\{\lambda\}) = \mathcal{H}$ だから（命題 3.10 (1)），$T^*T = \lambda 1_{\mathcal{H}}$ である．同様に，$TT^* \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_2)$ をスペクトル分解して定理 3.21 と π_2 の既約性を用いることで，ある $\lambda' \in \mathbb{C}$ が存在して $TT^* = \lambda' 1_{\mathcal{H}_2}$ と書けることがわかる．

前段の結果より

$$\lambda T = T(T^*T) = (TT^*)T = \lambda' T$$

であり，$T \neq 0$ だから，$\lambda = \lambda'$ である．さらに，$T\xi \neq 0$ を満たす $\xi \in \mathcal{H}$ をとると

$$0 < \|T\xi\|^2 = \langle \xi | T^*T\xi \rangle = \lambda \|\xi\|^2$$

だから，$\lambda > 0$ である．そこで，$U = \lambda^{-1/2} T$ と置けば，U は π_1 から π_2 へのユニタリ同値である．これで，T がユニタリ同値 U のスカラー倍として書けることが示された．

(II)　U と V がともに π_1 から π_2 へのユニタリ同値であるとする．すると，(I) の議論と同様に，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 $V^{-1}U$ をスペクトル分解して定理 3.21 と π_1 の既約性を用いることで，$V^{-1}U$ が恒等作用素のスカラー倍であることがわかる．よって，U と V は，スカラー倍を除いて一致する．□

系 3.34　群 G の既約ユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ から自身への同変な連続線型作用素は，スカラー倍のみである．

証明　Schur の補題（定理 3.33 (2)）において，$(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ と $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ をともに $(\pi, \mathcal{H})$ とすればよい．□

4　正規作用素のスペクトル分解

4.1　正規作用素のスペクトル分解

本小節では，$\mathbb{C}$ の部分集合上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を，z と書く．

定理 4.1（正規作用素のスペクトル分解定理）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 T に対して，$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ であって

$$T = \int_{\mathbb{C}} z\, d\mathit{\Pi}$$

を満たすものが，一意に存在する．さらに，この $\mathit{\Pi}$ は，$\mathrm{supp}\,\mathit{\Pi} = \mathrm{Sp}(T)$ を満たす．

証明　$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ が $T = \int_{\mathbb{C}} z\, d\mathit{\Pi}$ を満たすとすると，命題 2.26 より，$\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}}\, z = \mathrm{supp}\,\mathit{\Pi}$ が成り立つ．あとは，$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}$ であって $T = \int_{\mathbb{C}} z\, d\mathit{\Pi}$ を満たすものが一意に存在することを示せばよい．

存在　$B = (1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$，$C = T(1_{\mathcal{H}} + T^*T)^{-1}$ と置く．B は $\mathcal{H}$ 上の単射な連続正自己随伴作用素であり，$\|B\| \leq 1$ を満たす（命題 1.50 (2)）．連続正規作用素に対するスペクトル分解定理（定理 3.8）を用いて B のスペクトル測度 $\mathit{\Pi}_B$ をとると，$\mathrm{supp}\,\mathit{\Pi}_B = \mathrm{Sp}(B) \subseteq [0,1]$ であり，B の単射性より $\mathit{\Pi}_B(\{0\}) = 0$（命題 2.16）だから $\mathit{\Pi}_B((0,1]) = 1_{\mathcal{H}}$ である．単調減少実数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって $t_0 = 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ を

満たすものを一つ固定し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$P_n = \Pi_B((t_{n+1}, t_n]), \qquad \mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$$

と置く．弱位相に関して $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_n = 1_{\mathcal{H}}$ であることと命題 2.4 (3) より，$(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分線型空間の完全直交族だから，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ とみなせる．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，有界 Borel 可測関数 $f_n\colon (0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $f_n(t) = t^{-1}\chi_{(t_{n+1},t_n]}(t)$ と定めると，$\chi_{(t_{n+1},t_n]} = zf_n$ だから，$P_n = Bf_n(B) = f_n(B)B$ である（定理 3.15）．$P_n = Bf_n(B)$ より，

$$TP_n = TBf_n(B) = Cf_n(B) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$$

である．また，$P_n = f_n(B)B$ かつ $BT \subseteq C$（命題 1.62）だから，

$$P_nT = f_n(B)BT \subseteq f_n(B)C$$

である．さらに，$BC = CB$ だから（命題 1.62），定理 3.21 より，

$$Cf_n(B) = f_n(B)C$$

である．これら 3 式より，

$$P_nT \subseteq TP_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$$

だから，$\mathcal{H}_n$ は T を簡約する．そこで，対応する簡約を T_n と書くと，T が（正規だから特に）閉であることと命題 1.73 より，

$$T = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} T_n$$

が成り立つ．また，$TP_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ より $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$ であり，T が正規であることより T_n も正規だから（系 1.74 (3)），T_n は $\mathcal{H}_n$ 上の連続正規作用素である．

連続正規作用素に対するスペクトル分解定理（定理 3.8）より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，T_n のスペクトル測度 Π_n がとれる．Π_n は $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}_n$-射影値測度であり，

$$T_n = \int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi_n$$

を満たす．そこで，射影値測度の Hilbert 直和 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n$ を考えると，Π は $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度であり，命題 2.32 より

$$T = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} T_n = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} \left(\int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi_n\right) = \int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi$$

が成り立つ．これで，条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π の存在が示された．

一意性　3 段に分けて示す．

(I)　まず，自己随伴作用素 T に対する一意性を示す．このとき，$\operatorname{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$ だから（定理 1.46），証明の最初に述べたことより，$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 Π であって $T = \int_{\mathbb{R}} z\, d\Pi$ を満たすものが一意であることを示せばよい．Π がこの条件を満たすとする．関数 $1/(z+i)$ が $\mathbb{R}$ 上有界であることに注意すると，定理 2.18 (1), (4), (6) より，

$$(T - i1_{\mathcal{H}})(T + i1_{\mathcal{H}})^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{z-i}{z+i}\, d\Pi$$

を得る．$\mathbb{R}$ 上の関数 $(z-i)/(z+i)$ の値域は $\mathbb{U}$ に含まれるから，$(T-i1_{\mathcal{H}})(T+i1_{\mathcal{H}})^{-1}$ はユニタリ作用素である（系 2.25 (2)）[*9]．また，$(z-i)/(z+i)$ は同相写像 $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{U}\setminus\{1\}$ を与えるが，射影値測度の像 $\phi_*\mathit{\Pi}$ を考えると，上式と命題 2.17 より，

$$(T-i1_{\mathcal{H}})(T+i1_{\mathcal{H}})^{-1}=\int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\,d(\phi_*\mathit{\Pi})$$

が成り立つ．すなわち，$\phi_*\mathit{\Pi}$ は，ユニタリ作用素 $(T-i1_{\mathcal{H}})(T+i1_{\mathcal{H}})^{-1}$ のスペクトル測度である．よって，連続正規作用素のスペクトル測度の一意性（定理 3.8）より，$\phi_*\mathit{\Pi}$ は一意に定まり，$\mathit{\Pi}=(\phi^{-1})_*\phi_*\mathit{\Pi}$ も一意に定まる．

(II)　次に，$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\mathit{\Pi}, \mathit{\Pi}'$ と Borel 可測関数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{C}} f\,d\mathit{\Pi}=\int_{\mathbb{C}} f\,d\mathit{\Pi}' \quad \text{ならば} \quad \int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\,d\mathit{\Pi}=\int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\,d\mathit{\Pi}'$$

であることを示す．$T=\int_{\mathbb{C}} f\,d\mathit{\Pi}=\int_{\mathbb{C}} f\,d\mathit{\Pi}'$ と置くと，T は $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素であり（系 2.25 (1)），命題 2.17 より

$$T=\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} z\,d(f_*\mathit{\Pi})=\int_{\mathbb{C}} z\,d(f_*\mathit{\Pi}')$$

と書けるから，(I) で示した一意性より，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $f_*\mathit{\Pi}$ と $f_*\mathit{\Pi}'$ は等しい．したがって，これらの射影値測度の写像 $t\mapsto t^{1/2}$ による像 $f^{1/2}_*\mathit{\Pi}$ と $f^{1/2}_*\mathit{\Pi}'$ も等しい．このことと命題 2.17 より，

$$\int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\,d\mathit{\Pi}=\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} z\,d(f^{1/2}_*\mathit{\Pi})=\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} z\,d(f^{1/2}_*\mathit{\Pi}')=\int_{\mathbb{C}} f^{1/2}\,d\mathit{\Pi}'$$

を得る．

(III)　最後に，正規作用素 T に対する一意性を示す．$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ が $T=\int_{\mathbb{C}} z\,d\mathit{\Pi}$ を満たすとする．すると，系 2.19 (1) より，

$$T^*T=\int_{\mathbb{C}}|z|^2\,d\mathit{\Pi}$$

である．このことと (II) より，線型作用素

$$|T|=\int_{\mathbb{C}}|z|\,d\mathit{\Pi}$$

は $\mathit{\Pi}$ のとり方によらず，T のみから定まる[*10]．関数 $1/(1+|z|)$ が $\mathbb{C}$ 上有界であることに注意すると，上式と定理 2.18 (1), (4), (6) より，

$$T(1_{\mathcal{H}}+|T|)^{-1}=\int_{\mathbb{C}}\frac{z}{1+|z|}\,d\mathit{\Pi}$$

を得る．関数 $z/(1+|z|)$ は $\mathbb{C}$ 上有界だから，$T(1_{\mathcal{H}}+|T|)^{-1}$ は連続正規作用素である．また，$z/(1+|z|)$ は同相写像 $\psi\colon\mathbb{C}\to\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|\leq 1\}$ を与えるが，射影値測度の像 $\psi_*\mathit{\Pi}$ を考えると，上式と命題 2.17 より，

$$T(1_{\mathcal{H}}+|T|)^{-1}=\int_{\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|\leq 1\}} z\,d(\psi_*\mathit{\Pi})$$

[*9] ユニタリ作用素 $(T-i1_{\mathcal{H}})(T+i1_{\mathcal{H}})^{-1}$ を，T の **Cayley 変換**（Cayley transform）という．詳しくは，付録 A を参照のこと．

[*10] ここで定義した $|T|$ は，絶対値をとる関数に T を代入して得られる Borel 可測関数算（定義 4.5）の結果に一致する．Borel 可測関数算は，いま証明している正規作用素のスペクトル分解定理（定理 4.1）に立脚して定義されるから，この時点では Borel 可測関数算の言葉を使うことができず，回りくどいいい方になっている．

が成り立つ．すなわち，$\psi_* \varPi$ は連続正規作用素 $T(1_{\mathcal{H}} + |T|)^{-1}$ のスペクトル測度である．よって，連続正規作用素のスペクトル測度の一意性（定理 3.8）より，$\psi_* \varPi$ は一意に定まり，$\varPi = (\psi^{-1})_* \psi_* \varPi$ も一意に定まる． □

定義 4.2（正規作用素のスペクトル測度） Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 T に対して，正規作用素のスペクトル分解定理（定理 4.1）によって定まる $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 $\varPi$ を，T の**スペクトル測度**（spectral measure）という．[*11]

正規作用素 T のスペクトル測度 $\varPi$ は，$\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，$\mathrm{Sp}(T)$ 上の射影値 Borel 測度ともみなせる．

連続正規作用素の場合（3.3 節）と同様に，スペクトル測度は次の性質をもつ．ほとんど重複になるが，証明も付けておく．

命題 4.3 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{Im}\,\varPi(\{\lambda\}) = \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ である．特に，$\mathrm{Im}\,\varPi(\{0\}) = \mathrm{Ker}\,T$ である．
(2) $\mathrm{Im}\,\varPi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \overline{\mathrm{Im}\,T}$ である．[*12]

証明 (1) 命題 2.16 より，$\mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Ker}(\int_X (\lambda - z)\, d\varPi) = \mathrm{Im}\,\varPi(\{\lambda\})$ である．
(2) 系 2.20 より，$\overline{\mathrm{Im}\,T} = \overline{\mathrm{Im}(\int_X z\, d\varPi)} = \mathrm{Im}\,\varPi(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ である． □

系 4.4 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 T について，$\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点は，T の固有値である．[*13]

証明 T のスペクトル測度を $\varPi$ とする．λ が $\mathrm{Sp}(T)$ の孤立点ならば，$\{\lambda\}$ は $\mathrm{Sp}(T)$ の開集合だから，$\mathrm{supp}\,\varPi = \mathrm{Sp}(T)$ より $\varPi(\{\lambda\}) \neq 0$ である．$\mathrm{Im}\,\varPi(\{\lambda\}) = \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ だから（命題 4.3 (1)），これは，λ が T の固有値であることを意味する． □

4.2 正規作用素の Borel 可測関数算

本小節では，正規作用素の Borel 可測関数算を定義し，その性質を詳しく調べる．一部の命題は，連続正規作用素については 3.4 節ですでに述べたものであり，その証明はほとんど重複になるが，そのような命題の証明も付けておく．

定義 4.5（Borel 可測関数算） T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．このとき，$f \in L(\mathbb{C}, \varPi)$ に対して，

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f\, d\varPi$$

と書く．[*14]

T のスペクトル測度 $\varPi$ は $\mathrm{Sp}(T)$ を台にもつから，$L(\mathbb{C}, \varPi)$ は $L(\mathrm{Sp}(T), \varPi)$ と自然に同一視される．よって，$f \in L(\mathrm{Sp}(T), \varPi)$ に対しても，$f(T)$ が定まる．

[*11] T が連続正規作用素である場合には，この定義は，定義 3.9 と一致する．
[*12] 連続正規作用素に対する主張は，命題 3.10 ですでに述べた．
[*13] 連続正規作用素に対する主張は，系 3.11 ですでに述べた．
[*14] T が連続正規作用素である場合には，この定義は，定義 3.14 と一致する．

命題 4.6　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \varPi)$ に対して，

$$\operatorname{Dom} f(T) = \left\{ \xi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \, d\varPi_{\xi,\xi} < \infty \right\}$$

であり，これは $\mathcal{H}$ の稠密部分線型空間である．

証明　命題 2.15 の特別な場合である．　□

命題 4.7　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$f \in L(X, \varPi)$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $f \in L^\infty(X, \varPi)$ である．
(b) $f(T) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ である．
(c) $f(T)$ は全域で定義されている．

さらに，これらの条件の下で，$\|f(T)\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ．特に，f が $\operatorname{Sp}(T)$ 上の有界連続関数ならば，$\|f(T)\| = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(T)} |f(\lambda)|$ である．

証明　「特に」以下の主張以外は，命題 2.21 の特別な場合である．f が $\operatorname{Sp}(T)$ 上の有界連続関数ならば，$\operatorname{supp} \varPi = \operatorname{Sp}(T)$ であることより（定理 4.1），

$$\|f(T)\| = \|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(T)} |f(\lambda)|$$

が成り立つ．　□

系 4.8　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) $\operatorname{Sp}(T)$ は $\mathbb{C}$ において有界である．
(b) $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ である．
(c) T は全域で定義されている．

さらに，これらの条件の下で，$\|T\| = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(T)} |\lambda|$ が成り立つ．

証明　命題 4.7 において，f を関数 $\lambda \mapsto \lambda$ としたものである．　□

定理 4.9　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \varPi)$ に対して，$D_f = \operatorname{Dom} f(T)$ と書くことにする．$f, g \in L(\mathbb{C}, \varPi)$ に対して，次が成り立つ．

(1) $f(T) + g(T) = (f+g)(T)|_{D_f \cap D_g} = (f+g)(T)|_{D_f \cap D_{f+g}} = (f+g)(T)|_{D_g \cap D_{f+g}}$ である．特に，f または g が $L^\infty(X, \varPi)$ に属するならば，$f(T) + g(T) = (f+g)(T)$ である．
(2) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とすると，$\lambda(f(T)) = (\lambda f)(T)$ である．
(3) $1(T) = 1_{\mathcal{H}}$ である．
(4) $f(T)g(T) = (fg)(T)|_{D_g \cap D_{fg}}$ である．特に，$g \in L^\infty(X, \varPi)$ ならば，$f(T)g(T) = (fg)(T)$ である．
(5) $f(T)^* = \overline{f}(T)$ である．
(6) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$(f^m \overline{f}^n)(T)$ は，m 個の $f(T)$ と n 個の $f(T)^*$ を任意の順序で合成したもの（$m = n = 0$ の場合は $1_{\mathcal{H}}$ とする）に等しい．特に，$f(T)^* f(T) = f(T) f(T)^* = |f|^2(T)$ である．

(7) $f(T)$ が単射であることと f が $L(\mathbb{C},\varPi)$ において可逆であることとは同値であり，これらの条件の下で，$f(T)^{-1}=(1/f)(T)$ が成り立つ（$1/f$ は，f の $L(\mathbb{C},\varPi)$ における乗法逆元を表す）．

証明　(1), (2), (3), (4), (5), (7) は定理 2.18 の，(6) は系 2.19 の特別な場合である． □

系 4.10　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$L^\infty(\mathbb{C},\varPi)$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $f\mapsto f(T)$ は，等長な単位的対合表現である．[*15]

証明　系 2.23 の特別な場合である． □

命題 4.11（スペクトル写像定理）　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．任意の $f\in L(\mathbb{C},\varPi)$ に対して，$\operatorname{Sp}(f(T))=\operatorname{ess\,ran}_{\varPi}f$ である．特に，f が $\operatorname{Sp}(T)$ 上の連続関数ならば，$\operatorname{Sp}(f(T))=\overline{f(\operatorname{Sp}(T))}$ である．

証明　前半は，命題 2.26 の特別な場合である．f が $\operatorname{Sp}(T)$ 上の連続関数ならば，前半の結果と合わせて，$\operatorname{Sp}(f(T))=\operatorname{ess\,ran}_{\varPi}f=\overline{f(\operatorname{Sp}(T))}$ を得る． □

命題 4.12　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$f,\, g\in L(\mathbb{C},\varPi)$ について，$f(T)$ と $g(T)$ が定義域の共通部分で一致するならば，f と g は $L(\mathbb{C},\varPi)$ の元として一致する．

証明　命題 2.24 の特別な場合である． □

命題 4.13　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$f\in L(\mathbb{C},\varPi)$ に対して，次が成り立つ．

(1) $f(T)$ が自己随伴であるための必要十分条件は，f が $L(\mathbb{C},\varPi)$ の元として Hermite である（あるいは同値だが，$\varPi$-ほとんどいたるところで f が実数値である）ことである．特に，T が自己随伴であるための必要十分条件は，$\operatorname{Sp}(T)\subseteq\mathbb{R}$ であることである．

(2) $f(T)$ がユニタリであるための必要十分条件は，f が $L(\mathbb{C},\varPi)$ の元としてユニタリである（あるいは同値だが，$\varPi$-ほとんどいたるところで $|f|=1$ である）ことである．特に，T がユニタリであるための必要十分条件は，$\operatorname{Sp}(T)\subseteq\mathbb{U}$ であることである．

証明　(1), (2) のそれぞれの前半は，系 2.25 の特別な場合である．後半は，前半において f を関数 $\lambda\mapsto\lambda$ とし，$\operatorname{supp}\varPi=\operatorname{Sp}(T)$（定理 4.1）であることに注意すればわかる． □

定理 4.14　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$f_n,\, f,\, g\in L(X,\varPi)$（$n\in\mathbb{N}$）とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に $\varPi$-概収束し，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\varPi$-ほとんどいたるところで $|f_n|\le|g|$ であるとする．このとき，任意の $\xi\in\operatorname{Dom}g(T)$ に対して，ξ は $\operatorname{Dom}f_n(T)$（$n\in\mathbb{N}$）および $\operatorname{Dom}f(T)$ に属し，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(T)\xi=f(T)\xi$$

が成り立つ．[*16]

証明　射影値測度に関する積分の Lebesgue の収束定理（定理 2.28）の特別な場合である． □

---

*15 連続正規作用素に対する主張は，定理 3.15 ですでに述べた．
*16 連続正規作用素に対する主張は，定理 3.16 ですでに述べた．

系 4.15　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ をそのスペクトル測度とする．$L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ 上の（ノルム $\|{-}\|_\infty$ に関して）有界な点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，$f \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に $\mathit{\Pi}$-概収束するとする．このとき，強位相に関して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(T) = f(T)$$

である．[*17]

証明　系 2.29 の特別な場合である．　□

命題 4.16　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の正規作用素 $\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ のスペクトル測度は，$f_*\mathit{\Pi}$ に等しい．さらに，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\mathit{\Pi})$ に対して，

$$g\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right) = \int_X g \circ f\, d\mathit{\Pi}$$

である．[*18]

証明　命題 2.17 より

$$\int_X f\, d\mathit{\Pi} = \int_{\mathbb{C}} z\, d(f_*\mathit{\Pi})$$

（z は，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を表す）だから，$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ のスペクトル測度は $f_*\mathit{\Pi}$ に等しい．さらに，ふたたび命題 2.17 より，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\mathit{\Pi})$ に対して，

$$g\left(\int_X f\, d\mathit{\Pi}\right) = \int_{\mathbb{C}} g\, d(f_*\mathit{\Pi}) = \int_X g \circ f\, d\mathit{\Pi}$$

が成り立つ．　□

系 4.17　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ をそのスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ とすると，$\mathcal{H}$ 上の正規作用素 $f(T)$ のスペクトル測度は，$f_*\mathit{\Pi}$ に等しい．さらに，任意の $g \in L(\mathbb{C}, f_*\mathit{\Pi})$ に対して，

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T)$$

である．[*19]

証明　命題 4.16 の特別な場合である．　□

4.3　正自己随伴作用素の特徴付けと Borel 可測関数算

定理 4.18　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された線型作用素 T に対して，次の条件は同値である．

(a) T は正規であり，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ を満たす．
(b) $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 S が存在して，$T = S^2$ となる．
(c) Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ と，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素 S が存在して，$T = S^*S$ となる．
(d) T は正かつ自己随伴である．

[*17] 連続正規作用素に対する主張は，系 3.17 ですでに述べた．
[*18] 連続正規作用素に対する主張は，命題 3.18 ですでに述べた．
[*19] 連続正規作用素に対する主張は，系 3.19 ですでに述べた．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　T は正規であり，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ を満たすとする．$\mathrm{Sp}(T)$ 上の関数 $t \mapsto t^{1/2}$ に T を代入した Borel 可測関数算の結果を S とすると，S は自己随伴であり（命題 4.13 (1)），$S^2 = T$ を満たす（定理 4.9 (6)）．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　系 1.51 で示したように，$\mathcal{H}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素 S に対して，S^*S は $\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素である．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　T が正かつ自己随伴ならば，定理 1.48 より，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ である．　□

命題 4.19　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathit{\Pi}$ を可測空間 X 上の $\mathcal{H}$-射影値測度とする．$f \in L(X, \mathit{\Pi})$ に対して，$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ が正自己随伴であるための必要十分条件は，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $f \geq 0$ であることである．

証明　$\int_X f\, d\mathit{\Pi}$ は常に正規であり（系 2.19 (2)），$\mathrm{Sp}(\int_X f\, d\mathit{\Pi}) = \operatorname{ess\,ran}_{\mathit{\Pi}} f$ を満たすから（命題 2.26），主張は定理 4.18 から従う．　□

系 4.20　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}$ をそのスペクトル測度とする．$f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，$f(T)$ が正自己随伴であるための必要十分条件は，$\mathit{\Pi}$-ほとんどいたるところで $f \geq 0$ であることである．

証明　命題 4.19 の特別な場合である．　□

T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素とする．$\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とすると，$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の関数 $t \mapsto t^\alpha$ に T を代入する Borel 可測関数算が定義できる．さらに，T が単射ならば，T のスペクトル測度 $\mathit{\Pi}$ は $\mathit{\Pi}(\{0\}) = 0$ を満たすから（命題 4.3 (1)），関数 $t \mapsto t^\alpha$ は $L(X, \mathit{\Pi})$ の元を一意に定める．これらのそれぞれの場合，Borel 可測関数算の結果を，T^α と書く．

前段の状況で，T^α は正自己随伴である（系 4.20）．また，$\alpha \in \mathbb{N}$ に対しては，T^α は T を α 個合成したもの（$\alpha = 0$ の場合は $1_{\mathcal{H}}$ とする）に等しく（定理 4.9 (6)），$\alpha = -1$ に対しては，T^α は T の逆作用素に等しい（定理 4.9 (7)）．

命題 4.21　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素とする．α, $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について，$\alpha \leq \beta$ ならば，$\operatorname{Dom} T^\beta \subseteq \operatorname{Dom} T^\alpha$ である．

証明　$\mathit{\Pi}$ を T のスペクトル測度とする．命題 4.6 より，T^γ（$\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$）の定義域は，

$$\operatorname{Dom} T^\gamma = \left\{ \xi \in \mathcal{H} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} t^{2\gamma}\, d\mathit{\Pi}_{\xi,\xi} < \infty \right\}$$

（$t^{2\gamma}$ は，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の関数 $t \mapsto t^{2\gamma}$ を表す）である．$\mathit{\Pi}_{\xi,\xi}$ は有限正値測度だから（命題 2.6 (1)），上式の右辺は，γ が大きいほど小さい集合になる．よって，主張が成り立つ．　□

命題 4.22　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) T を $\mathcal{H}$ 上の正作用素，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし，$\alpha, \beta \geq 0$ または T は単射であるとする．このとき，$(T^\alpha)^\beta = T^{\alpha\beta}$ である．

(2) T を $\mathcal{H}$ 上の正作用素，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし，$\alpha, \beta \geq 0$ または「$\alpha, \beta \leq 0$ かつ T は単射」であるとする．このとき，$T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}$ である．

証明　(1)　系 4.17 の特別な場合である．

(2) (1) より $T^{-\alpha} = (T^{-1})^\alpha$ などが成り立つから，「$\alpha,\beta \le 0$ かつ T は単射」の場合は，T の代わりに T^{-1} を考えることで，$\alpha,\beta \ge 0$ の場合に帰着する．したがって，$\alpha,\beta \ge 0$ の場合に主張を示せば十分である．このとき，定理 4.9 (4) より $T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}|_{\operatorname{Dom} T^\beta \cap \operatorname{Dom} T^{\alpha+\beta}}$ だが，命題 4.21 より $\operatorname{Dom} T^{\alpha+\beta} \subseteq \operatorname{Dom} T^\beta$ だから，$T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}$ が成り立つ． □

4.4 正規作用素の Hilbert 直和とスペクトル測度

$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置く．このとき，各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とすると，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素である（命題 1.66 (2)）．このことに注意する．

命題 4.23 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して Π_i を T_i のスペクトル測度とすると，それらの Hilbert 直和 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \Pi_i$ は，T のスペクトル測度である．

証明 各 $i \in I$ に対して $T_i = \int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi_i$（$z$ は，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を表す）だから，命題 2.32 より，

$$T = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} T_i = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} \left(\int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi_i \right) = \int_{\mathbb{C}} z\, d\Pi$$

である．よって，Π は T のスペクトル測度である． □

系 4.24 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く．このとき，

$$\operatorname{Sp}(T) = \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{Sp}(T_i)}$$

である．

証明 各 $i \in I$ に対して Π_i を T_i のスペクトル測度とすると，それらの Hilbert 直和 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \Pi_i$ は T のスペクトル測度である（命題 4.23）．よって，正規作用素のスペクトルがそのスペクトル測度の台に一致すること（定理 4.1）と命題 2.34 より，

$$\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{supp} T = \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{supp} T_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{Sp}(T_i)}$$

である． □

系 4.25 $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の族とし，$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とし，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ と置く．このとき，任意の Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$f(T) = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} f(T_i)$$

である．

証明 各 $i \in I$ に対して Π_i を T_i のスペクトル測度とすると，それらの Hilbert 直和 $\Pi = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \Pi_i$ は T のスペクトル測度である（命題 4.23）．よって，命題 2.32 より，

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} \int_{\mathbb{C}} f\, d\Pi_i = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} f(T_i)$$

である. $\square$

4.5 正規作用素の簡約とスペクトル測度

命題 4.26 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ は $\varPi$ を簡約するとし，対応する簡約を $\varPi_{\mathcal{M}}$ と書く．

(1) $\mathcal{M}$ は T を簡約し[*20]，対応する簡約 $T_{\mathcal{M}}$ のスペクトル測度は $\varPi_{\mathcal{M}}$ に等しい．
(2) 任意の Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{M}$ は $f(T)$ を簡約し，対応する簡約は $f(T_{\mathcal{M}})$ に等しい．

証明 命題 2.40 より，任意の Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{M}$ は $f(T)$ を簡約し，対応する簡約は $\int_{\mathbb{C}} f\, d\varPi_{\mathcal{M}}$ に等しい．特に，T の $\mathcal{M}$ による簡約 $T_{\mathcal{M}}$ は $\int_{\mathbb{C}} z\, d\varPi_{\mathcal{M}}$（$z$ は，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を表す）に等しいから，$\varPi_{\mathcal{M}}$ は $T_{\mathcal{M}}$ のスペクトル測度である．また，これより $f(T_{\mathcal{M}}) = \int_{\mathbb{C}} f\, d\varPi_{\mathcal{M}}$ だから，$f(T)$ の $\mathcal{M}$ による簡約は $f(T_{\mathcal{M}})$ に等しい． $\square$

系 4.27 T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\varPi$ をそのスペクトル測度とする．$A \subseteq \mathbb{C}$ を Borel 集合とし，$\mathcal{M} = \operatorname{Im} \varPi(A)$ と置き，$\varPi$ の $\mathcal{M}$ による簡約（例 2.37）を $\varPi_{\mathcal{M}}$ と書く．

(1) $\mathcal{M}$ は T を簡約し，対応する簡約 $T_{\mathcal{M}}$ のスペクトル測度は $\varPi_{\mathcal{M}}$ に等しい．
(2) 任意の Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{M}$ は $f(T)$ を簡約し，対応する簡約は $f(T_{\mathcal{M}})$ に等しい．
(3) $\operatorname{Sp}(T_{\mathcal{M}}) = \operatorname{Sp}(T) \cap A$ である．特に，$\operatorname{Sp}(T) \cap A$ が有界ならば，$T_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の連続正規作用素である．

証明 (1), (2) 命題 4.26 (1), (2) の特別な場合である．

(3) (1) と定理 4.1 より，$\operatorname{Sp}(T_{\mathcal{M}}) = \operatorname{supp} \varPi_{\mathcal{M}} = (\operatorname{supp} \varPi) \cap A = \operatorname{Sp}(T) \cap A$ である．また，$\operatorname{Sp}(T_{\mathcal{M}}) = \operatorname{Sp}(T) \cap A$ が有界ならば，$T_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の連続正規作用素である（系 4.8）． $\square$

4.6 正規作用素の可換性とスペクトル測度

連続正規作用素の場合（定理 3.21）の一般化として，正規作用素の可換性とスペクトル測度について次が成り立つ．証明の主要な部分は，連続正規作用素の場合に帰着させることによって行う．

定理 4.28 T_1, T_2 をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上の正規作用素とし，$\varPi_1, \varPi_2$ をそれぞれ T_1, T_2 のスペクトル測度とする．$S \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ とすると，次の条件は同値である．

(a) $ST_1 \subseteq T_2 S$ である．
(b) 任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$S\varPi_1(A) = \varPi_2(A)S$ である．
(c) 任意の Borel 可測関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$Sf(T_1) \subseteq f(T_2)S$ である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $0 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \geq 0$ の閉円板を $B(r)$ と書き，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_1^{(n)} = \varPi_1(B(n)), \qquad \mathcal{H}_1^{(n)} = \operatorname{Im} P_1^{(n)}, \qquad P_2^{(n)} = \varPi_2(B(n)), \qquad \mathcal{H}_2^{(n)} = \operatorname{Im} P_2^{(n)}$$

[*20] この主張の逆を，系 4.29 で示す．

と置く．例 2.37 より，$\mathcal{H}_1^{(n)}$, $\mathcal{H}_2^{(n)}$ はそれぞれ Π_1, Π_2 を簡約し，対応する簡約 $\Pi_1^{(n)}$, $\Pi_2^{(n)}$ は

$$\operatorname{Im}\Pi_1^{(n)}(A) = \operatorname{Im}\Pi_1(A\cap B(n)), \qquad \operatorname{Im}\Pi_2^{(n)}(A) = \operatorname{Im}\Pi_2(A\cap B(n))$$

によって与えられる．また，系 4.27 (1), (3) より，$\mathcal{H}_1^{(n)}$, $\mathcal{H}_2^{(n)}$ はそれぞれ T_1, T_2 を簡約し，対応する簡約 $T_1^{(n)}$, $T_2^{(n)}$ のスペクトル測度はそれぞれ $\Pi_1^{(n)}$, $\Pi_2^{(n)}$ に等しく，$T_1^{(n)}$, $T_2^{(n)}$ はそれぞれ $\mathcal{H}_1^{(n)}$, $\mathcal{H}_2^{(n)}$ 上の連続線型作用素である．

$S \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_2)$ が $ST_1 \subseteq T_2S$ を満たすとする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{H}_1^{(n)}$ から $\mathcal{H}_1$ への包含写像，$S \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_2)$，$\mathcal{H}_2$ から $\mathcal{H}_2^{(n)}$ の上への直交射影をこの順に合成したものを，$S_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1^{(n)};\mathcal{H}_2^{(n)})$ と書く．すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}_1^{(n)}$ に対して

$$S_nT_1^{(n)}\xi = P_2^{(n)}ST_1\xi = P_2^{(n)}T_2S\xi = T_2^{(n)}S_n\xi$$

だから，$S_nT_1^{(n)} = T_2^{(n)}S_n$ である．したがって，定理 3.21 より，任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して

$$S_n\Pi_1^{(n)}(A) \subseteq \Pi_2^{(n)}S_n$$

が成り立つ．すなわち，

$$P_2^{(n)}S\Pi_1(A\cap B(n)) = \Pi_2(A\cap B(n))SP_1^{(n)}$$

である．上式において，有界 Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ を固定して $n\to\infty$ とすると，$P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ はそれぞれ $1_{\mathcal{H}_1}$, $1_{\mathcal{H}_2}$ に弱収束し，十分大きい任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap B(n) = A$ だから，

$$S\Pi_1(A) = \Pi_2(A)S$$

を得る（合成の弱分離連続性を用いた）．次に，$A \subseteq \mathbb{C}$ を一般の Borel 集合とすると，上式より $S\Pi_1(A\cap B(n)) = \Pi_2(A\cap B(n))S$ であり，$n\to\infty$ のとき $\Pi_1(A\cap B(n))$, $\Pi_2(A\cap B(n))$ はそれぞれ $\Pi_1(A)$, $\Pi_2(A)$ に弱収束するから，

$$S\Pi_1(A) = \Pi_2(A)S$$

を得る（合成の弱分離連続性を用いた）．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)　命題 2.30 の特別な場合である．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである．　□

T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ が T を簡約するとする．このとき，対応する簡約 $T_{\mathcal{M}}$ は，$\mathcal{M}$ 上の正規作用素である（系 1.74 (3)）．このことに注意する．

系 4.29　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，Π をそのスペクトル測度とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\mathcal{M}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathcal{M}$ は T を簡約する．

(b) $\mathcal{M}$ は Π を簡約する．

証明　$\mathcal{M}$ の上への直交射影を $P_{\mathcal{M}}$ と書く．$\mathcal{M}$ が T を簡約するとは，$P_{\mathcal{M}}T \subseteq TP_{\mathcal{M}}$ であるということであり，M が Π を簡約するとは，任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ に対して $P_{\mathcal{M}}\Pi(A) = \Pi(A)P_{\mathcal{M}}$ であるということである．よって，定理 4.28 より，条件 (a) と (b) は同値である．　□

系 4.30　T, S を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とし，$\mathit{\Pi}_T, \mathit{\Pi}_S$ をそれぞれ T, S のスペクトル測度とする．次の条件は同値である．

(a) 任意の Borel 集合 $B \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\mathit{\Pi}_S(B)T \subseteq T\mathit{\Pi}_S(B)$ である．

(b) $\mathit{\Pi}_S$ と $\mathit{\Pi}_T$ は可換である．すなわち，任意の Borel 集合 A, $B \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\mathit{\Pi}_S(B)\mathit{\Pi}_T(A) = \mathit{\Pi}_T(A)\mathit{\Pi}_S(B)$ である．

(c) 任意の $f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi}_T)$ と Borel 集合 $B \subseteq \mathbb{C}$ に対して，$\mathit{\Pi}_S(B)f(T) \subseteq f(T)\mathit{\Pi}_S(B)$ である．

(d) 任意の $g \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi}_S)$ に対して，$g(S)T \subseteq Tg(S)$ である．

(e) 任意の Borel 集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ と $g \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi}_S)$ に対して，$g(S)\mathit{\Pi}_T(A) = \mathit{\Pi}_T(A)g(S)$ である．

(f) 任意の $f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi}_T)$ と $g \in L^\infty(\mathbb{C}, \mathit{\Pi}_S)$ に対して，$g(S)f(T) \subseteq f(T)g(S)$ である．

証明　定理 4.28 より (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)，(d) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longleftrightarrow$ (f)，(b) $\Longleftrightarrow$ (e) だから，主張の条件はすべて同値である．□

定義 4.31（同時スペクトル測度，多変数 Borel 可測関数算）　$\boldsymbol{T} = (T_i)_{i \in I}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素の有限族，各 $i \in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を T_i のスペクトル測度とし，これらのスペクトル測度はどの二つも可換であるとする．このとき，$(\mathit{\Pi}_i)_{i \in I}$ の積として定まる $\mathbb{C}^I$ 上の $\mathcal{H}$-射影値測度 $\mathit{\Pi}$ を，$\boldsymbol{T}$ の**同時スペクトル測度**（simultaneous spectral measure）という．また，$f \in L(\mathbb{C}, \mathit{\Pi})$ に対して，

$$f(\boldsymbol{T}) = \int_{\mathbb{C}^I} f \, d\mathit{\Pi}$$

と書く．

定義 4.31 の状況で，$i \in I$ に対応する射影が表す関数を $z_i \colon \mathbb{C}^I \to \mathbb{C}$ と書くと，命題 2.17 より，

$$z_i(\boldsymbol{T}) = \int_{\mathbb{C}^I} z_i \, d\mathit{\Pi} = \int_{\mathbb{C}} z \, d((z_i)_* \mathit{\Pi}) = \int_{\mathbb{C}} z \, d\mathit{\Pi}_i = T_i$$

（z は，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \lambda$ を表す）である．

4.2 節で述べたスペクトル測度の性質のほとんどは，同時スペクトル測度にまで拡張される．証明は同様にできるから，詳細は省略する．

命題 4.32　T, S は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素であり，それらのスペクトル測度は可換であるとする．このとき，ST と TS は，$\operatorname{Dom} ST \cap \operatorname{Dom} TS$ 上で一致する．

証明　関数 $f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を $f(\lambda, \mu) = \lambda\mu$ と定めると，ST と TS は，ともに $f(T, S)$ の制限である（定理 2.18 (4)）．よって，ST と TS は，$\operatorname{Dom} ST \cap \operatorname{Dom} TS$ 上で一致する．□

注意 4.33　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とその稠密部分線型空間 $\mathcal{D}$，および $\mathcal{D}$ を定義域とする $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T, S であって，次の条件を満たすものが存在する．

- 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して，$\lambda T + \mu S$ は本質的自己随伴である．
- $ST = TS$ である．
- 二つの自己随伴作用素 $\overline{T}$ と $\overline{S}$ のスペクトル測度は可換でない．

詳しくは，Nelson [5, §10] を参照のこと．

4.7　正規作用素のテンソル積とスペクトル測度

命題 4.34　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とし，$T=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ と置く．このとき，T は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素である．さらに，各 $i\in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を T_i のスペクトル測度とし，$\mathit{\Pi}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathit{\Pi}_i$ と置き，$\mathbb{C}^I$ 上の関数 $(\lambda_i)_{i\in I}\mapsto\prod_{i\in I}\lambda_i$ を m と書くと，$m_*\mathit{\Pi}$ は T のスペクトル測度である．

証明　各 $i\in I$ に対して $T_i=\int_{\mathbb{C}}z d\mathit{\Pi}_i$（$z$ は，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\lambda\mapsto\lambda$ を表す）だから，命題 2.49 と命題 2.17 より，

$$T=\widehat{\bigotimes_{i\in I}}T_i=\widehat{\bigotimes_{i\in I}}\left(\int_{\mathbb{C}}z\,d\mathit{\Pi}_i\right)=\int_{\mathbb{C}^I}m\,d\mathit{\Pi}=\int_{\mathbb{C}}z\,d(m_*\mathit{\Pi})$$

である．よって，T は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素であり（系 2.19 (2)），$m_*\mathit{\Pi}$ はそのスペクトル測度である．　□

系 4.35　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とし，$T=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ と置く．このとき，

$$\mathrm{Sp}(T)=\overline{\left\{\prod_{i\in I}\lambda_i \;\middle|\; \text{各 } i\in I \text{ に対して } \lambda_i\in\mathrm{Sp}(T_i)\right\}}$$

である．

証明　各 $i\in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を T_i のスペクトル測度とし，$\mathit{\Pi}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathit{\Pi}_i$ と置き，$\mathbb{C}^I$ 上の関数 $(\lambda_i)_{i\in I}\mapsto\prod_{i\in I}\lambda_i$ を m と書くと，$m_*\mathit{\Pi}$ は T のスペクトル測度である（命題 4.34）．よって，正規作用素のスペクトルがそのスペクトル測度の台に一致すること（定理 4.1）と命題 2.50 より，

$$\mathrm{Sp}(T)=\operatorname{supp}m_*\mathit{\Pi}=\overline{m(\operatorname{supp}\mathit{\Pi})}=\overline{m\left(\prod_{i\in I}\operatorname{supp}\mathit{\Pi}_i\right)}=\overline{m\left(\prod_{i\in I}\mathrm{Sp}(T_i)\right)}$$

である．　□

系 4.36　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の自己随伴作用素とすると，$T=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ は $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素である．

証明　各 $i\in I$ に対して T_i が $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素ならば，命題 4.34 より，$T=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ は $\mathcal{H}$ 上の正規作用素である．また，系 4.35 より，各 $\mathrm{Sp}(T_i)$ が $\mathbb{R}$ に含まれるならば，$\mathrm{Sp}(T)$ も $\mathbb{R}$ に含まれる．命題 4.13 より，これは，各 T_i が自己随伴ならば T も自己随伴であることを意味する．　□

次の系において，関数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が**乗法的**（multiplicative）であるとは，$f(1)=1$ であり，かつ任意の λ, $\mu\in\mathbb{C}$ に対して $f(\lambda\mu)=f(\lambda)f(\mu)$ を満たすことをいう．

系 4.37　$(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ を Hilbert 空間の有限族とし，$\mathcal{H}=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}\mathcal{H}_i$ と置く．各 $i\in I$ に対して T_i を $\mathcal{H}_i$ 上の正規作用素とし，$T=\widehat{\bigotimes}_{i\in I}T_i$ と置く．このとき，任意の乗法的な Borel 可測関数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対して，

$$f(T)=\widehat{\bigotimes_{i\in I}}f(T_i)$$

である．

証明　各 $i \in I$ に対して $\mathit{\Pi}_i$ を T_i のスペクトル測度とし，$\mathit{\Pi} = \widehat{\bigotimes}_{i\in I} \mathit{\Pi}_i$ と置き，$\mathbb{C}^I$ 上の関数 $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i\in I}\lambda_i$ を m と書くと，$m_*\mathit{\Pi}$ は T のスペクトル測度である（命題 4.34）．また，f が乗法的であることより，$(f\circ m)((\lambda_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} f(\lambda_i)$（$(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$）である．よって，命題 2.17 と命題 2.49 より，

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f\,d(m_*\mathit{\Pi}) = \int_{\mathbb{C}^I} f\circ m\,d\mathit{\Pi} = \widehat{\bigotimes_{i\in I}}\left(\int_{\mathbb{C}} f\,d\mathit{\Pi}_i\right) = \widehat{\bigotimes_{i\in I}} f(T_i)$$

である． □

4.8　応用：稠密に定義された閉作用素の極分解

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素 T に対して，T^*T が $\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素であること（系 1.51）に注意する．

定義 4.38（絶対値）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素 T に対して，$\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素 $(T^*T)^{1/2}$ を T の**絶対値**（absolute value）といい，$|T|$ と書く．

$\mathcal{H} = \mathcal{K}$ であり，T が $\mathcal{H}$ 上の正規作用素ならば，$|T|$ は，絶対値をとる関数に T を代入して得られる Borel 可測関数算の結果に一致する．（定理 4.9 (6)，系 4.17）．

命題 4.39　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素とする．

(1) $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}|T|$ であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}|T|$ に対して $\|T\xi\| = \||T|\xi\|$ である．
(2) $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$ かつ $\overline{\operatorname{Im}|T|} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ である．

証明　(1)　$D = \operatorname{Dom} T^*T = \operatorname{Dom}|T|^2$ と置くと，命題 1.50 (4) より，$\operatorname{gr}(T|_D)$ は $\operatorname{gr}(T)$ において稠密であり，$\operatorname{gr}(|T||_D)$ は $\operatorname{gr}(|T|)$ において稠密である．まず，$\xi \in D$ に対しては，

$$\||T|\xi\|^2 = \langle |T|\xi | |T|\xi\rangle = \langle |T|^2\xi|\xi\rangle = \langle T^*T\xi|\xi\rangle = \langle T\xi|T\xi\rangle = |T\xi|^2$$

だから，

$$\||T|\xi\| = \|T\xi\| \tag{$*$}$$

である．次に，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ とする．$\operatorname{gr}(T|_D)$ は $\operatorname{gr}(T)$ において稠密だから，D 上の点列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$((\xi_n, T\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\xi, T\xi)$ に収束するものがとれる．すると，$(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であり，($*$) より任意の $m,\, n \in \mathbb{N}$ に対して $\|T\xi_m - T\xi_n\| = \||T|\xi_m - |T|\xi_n\|$ だから，$(|T|\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列である．したがって，$(|T|\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある点 $\eta \in \mathcal{H}$ に収束する．$|T|$ は閉であり，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(|T|\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ ξ, η に収束するから，$\xi \in \operatorname{Dom}|T|$ かつ $|T|\xi = \eta$ である．さらに，($*$) より，

$$\||T|\xi\| = \|\eta\| = \lim_{n\to\infty}\||T|\xi_n\| = \lim_{n\to\infty}\|T\xi_n\| = \|T\xi\|$$

が成り立つ．これで，$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom}|T|$ であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\|T\xi\| = \||T|\xi\|$ であることが示された．$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom}|T|$ を示したのと同じ方法で，$\operatorname{Dom}|T| \subseteq \operatorname{Dom} T$ も示せる．よって，主張が成り立つ．[*21]

(2)　$\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$ は (1) からただちに従う．また，$|T|$ が自己随伴であることと命題 1.21 より $\overline{\operatorname{Im}|T|} = (\operatorname{Ker}|T|)^\perp$ だから，$\overline{\operatorname{Im}|T|} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ である． □

[*21] この証明は，命題 1.53 の (a) $\Longrightarrow$ (b) の証明と類似している．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線型作用素 T に対して，$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ を T の**始空間**（initial space）といい，$\mathcal{K}$ の閉部分線型空間 $\overline{\operatorname{Im} T}$ を T の**終空間**（final space）という．T が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された連続線型作用素であり，T が誘導する始空間から終空間への連続線型作用素がユニタリであるとき，T を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**部分等長作用素**（partial isometry）という．

定理 4.40　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素とする．$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された連続線型作用素 U であって，$T = U|T|$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} T$ を満たすものが一意に存在する．さらに，この条件を満たす U は部分等長であり，T と同じ始空間・終空間をもつ．

証明　$\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}|T|$ であり，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}|T|$ に対して $\||T|\xi\| = |T\xi|$ だから（命題 4.39 (1)），等長線型同型 $V_0\colon \operatorname{Im}|T| \to \operatorname{Im} T$ を，

$$V_0|T|\xi = T\xi \qquad (\xi \in \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}|T|)$$

と定義できる．さらに，完備化の一意性より，V_0 はユニタリ作用素 $V\colon \overline{\operatorname{Im}|T|} \to \overline{\operatorname{Im} T}$ に一意に拡張される．

$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された連続線型作用素 U に対する条件 $T = U|T|$ は，$U|_{\operatorname{Im}|T|} = V$ といいかえられる．また，$(\operatorname{Im}|T|)^{\perp} = \operatorname{Ker} T$ である（命題 4.39 (2)）．よって，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への全域で定義された連続線型作用素 U であって，$T = U|T|$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} T$ を満たすものが一意に存在し，それは，$(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ を始空間，$\overline{\operatorname{Im} T}$ を終空間とする部分等長作用素である．　□

定義 4.41（極分解）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素 T に対して，定理 4.40 で定まる分解 $T = U|T|$ を，T の**極分解**（polar decomposition）という．

極分解は，次のようにも特徴付けられる．

命題 4.42　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への稠密に定義された閉作用素とする．A は $\mathcal{H}$ 上の正自己随伴作用素，U は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への部分等長作用素であり，$T = UA$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$ を満たすとする．このとき，$T = UA$ は T の極分解である．

証明　部分等長作用素の定義から容易に確かめられるように，U^*U は $(\operatorname{Ker} U)^{\perp}$ の上への直交射影である．仮定より $(\operatorname{Ker} U)^{\perp} = (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} A}$ だから（A が自己随伴であることと命題 1.21 を用いた），$T^*T = AU^*UA = A^2$ であり（命題 1.20 (3)），したがって，$|T| = (T^*T)^{1/2} = (A^2)^{1/2} = A$ である（命題 4.22 (1)）．これより，$T = U|T|$ かつ $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$ だから（命題 4.39），極分解の一意性（定理 4.40）より，$T = UA = U|T|$ は T の極分解である．　□

4.9　応用：Stone の定理

本小節では，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素全体のなす群を，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ と書く．

定義 4.43（強連続一径数ユニタリ群）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．群準同型 $U\colon \mathbb{R} \to \mathscr{U}(\mathcal{H})$ を，$\mathcal{H}$ 上の**一径数ユニタリ群**（one-parameter unitary group）という．$\mathcal{H}$ 上の一径数ユニタリ群 U は，$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ の強位相に関して連続であるとき，**強連続**（strongly continuous）であるという．

補題 4.44　U を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の一径数ユニタリ群とする．$\mathcal{H}$ 上の線型作用素 H を，次のように定める．

- $\mathrm{Dom}\, H$ は，極限値

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\xi-\xi}{t}\in\mathcal{H}$$

が存在する $\xi\in\mathcal{H}$ の全体とする．

- $\xi\in\mathrm{Dom}\, H$ に対して，

$$H\xi=\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\xi-\xi}{t}$$

と定める．

このとき，次が成り立つ．

(1) H は対称である．

(2) 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$U(t)(\mathrm{Dom}\, H)=\mathrm{Dom}\, H$ である．

(3) 任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\, H$ に対して，$\mathbb{R}$ から $\mathcal{H}$ への写像 $t\mapsto U(t)\xi$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi=iU(t)H\xi=iHU(t)\xi\qquad(t\in\mathbb{R})$$

が成り立つ．

証明 (1) 任意の $\xi,\eta\in\mathrm{Dom}\, H$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\eta|H\xi\rangle&=\lim_{t\to 0}\left\langle\eta\middle|\frac{1}{i}\cdot\frac{U(t)\xi-\xi}{t}\right\rangle\\&=\lim_{t\to 0}\left\langle-\frac{1}{i}\cdot\frac{U(-t)\eta-\eta}{t}\middle|\xi\right\rangle\\&=\lim_{t\to 0}\left\langle\frac{1}{i}\cdot\frac{U(-t)\eta-\eta}{-t}\middle|\xi\right\rangle\\&=\langle H\eta|\xi\rangle\end{aligned}$$

だから，H は対称である．

(2) $t\in\mathbb{R}$ とする．任意の $\xi\in\mathrm{Dom}\, H$ に対して，$s\to 0$ のとき

$$\frac{U(t+s)\xi-U(t)\xi}{s}=U(t)\left(\frac{U(s)\xi-\xi}{s}\right)\to iU(t)H\xi\tag{$*$}$$

だから，$U(t)\xi\in\mathrm{Dom}\, H$ である．したがって，$U(t)(\mathrm{Dom}\, H)\subseteq\mathrm{Dom}\, H$ である．t を $-t$ に置き換えれば，$U(-t)(\mathrm{Dom}\, H)\subseteq\mathrm{Dom}\, H$，すなわち $\mathrm{Dom}\, H\subseteq U(t)(\mathrm{Dom}\, H)$ もわかる．よって，$U(t)(\mathrm{Dom}\, H)=\mathrm{Dom}\, H$ である．

(3) $\xi\in\mathrm{Dom}\, H$ とする．($*$) より，$\mathbb{R}$ から $\mathcal{H}$ への写像 $t\mapsto U(t)\xi$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi=iU(t)H\xi$$

を満たす．また，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t)\xi&=\lim_{s\to 0}\frac{U(t+s)\xi-U(t)\xi}{s}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{U(s)U(t)\xi-U(t)\xi}{s}\\&=iHU(t)\xi\end{aligned}$$

である． □

定理 4.45（Stone の定理） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 H に対して，$U(t) = \exp(itH)$（$t \in \mathbb{R}$）と定めると，U は $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群である．

(2) $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群 U に対して，$\mathcal{H}$ 上の線型作用素 H を補題 4.44 と同様に定めると，H は $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素である．

(3) (1) と (2) の対応は，互いに他の逆であり，$\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素と $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群との間の一対一対応を与える．

証明 (1) $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ とすると，系 4.10 より，$U(t_1+t_2) = U(t_1)U(t_2)$ である．また，$t \in \mathbb{R}$ に対する $\mathbb{R}$ 上の関数 $\lambda \mapsto \exp(it\lambda)$ は，常に $|\exp(it\lambda)| = 1$ を満たし，$t \to t_0$ のとき関数 $\lambda \mapsto \exp(it_0\lambda)$ に各点収束するから，定理 4.14 より，このとき $U(t)$ は $U(t_0)$ に強収束する．よって，U は $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群である．

(2), (3) 次の二つの主張を示せばよい．

- H を $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素，H から (1) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群を U，U から (2) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素を H' とすると，$H' = H$ である．
- $\mathcal{H}$ 上の任意の強連続一径数ユニタリ群は，$\mathcal{H}$ 上のある自己随伴作用素から (2) の方法で得られる．

これらの主張を，以下の (I)–(IV) で示す．

(I) H を $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素，H から (1) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群を U，U から (2) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素を H' とし，$H' = H$ を示す．

$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対する $\mathbb{R}$ 上の関数 $\lambda \mapsto (1/i)(\exp(it\lambda) - 1)/t$ は，常に $|(1/i)(\exp(it\lambda) - 1)/t| \leq |\lambda|$（$\lambda \in \mathbb{R}$）を満たし，$t \to 0$ のとき関数 $\lambda \mapsto \lambda$ に各点収束する．したがって，定理 4.14 より，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対して，

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{i} \cdot \frac{U(t)\xi - \xi}{t} = H\xi$$

だから，$\xi \in \operatorname{Dom} H'$ かつ $H'\xi = H\xi$ である．よって，$H \subseteq H'$ である．ところが，H は自己随伴で H' は対称だから（補題 4.44 (1)），自己随伴作用素の極大性（命題 1.44）より，$H' = H$ である．

(II) U を $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群とし，U から (2) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 H（補題 4.44 (1) より，これは対称である）が稠密に定義されていることを示す．

$\mathbb{R}$ 上のコンパクト台をもつ滑らかな複素数値関数の全体を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ と書き，$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ と $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$T_f\xi = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(t)\xi \, dt \in \mathcal{H}$$

と定める（Hilbert 空間に値をとる積分については，宮島 [16, 3.4.1 節] を参照のこと）．すると，任意の $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，

$$\begin{aligned} \frac{U(s)T_f\xi - T_f\xi}{s} &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \frac{U(s+t)\xi - U(t)\xi}{s} \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t-s) - f(t)}{s} \cdot U(t)\xi \, dt \end{aligned} \tag{$*$}$$

である．ここで，

$$\left| \frac{f(t-s) - f(t)}{s} + f'(t) \right| = \left| \frac{1}{s} \int_{t-s}^{t} (-f'(u) + f'(t)) \, du \right| \leq \sup_{|u_1 - u_2| \leq s} |f'(u_1) - f'(u_2)|$$

であり，$s \to 0$ のとき，上式の最左辺は t によらず 0 に収束するから，$\mathbb{R}$ 上の関数 $t \mapsto (f(t-s)-f(t))/s$ は $-f'$ に一様収束する．したがって，($*$) より

$$\lim_{s\to 0}\frac{U(s)T_f\xi - T_f\xi}{s} = -\int_{\mathbb{R}} f'(t)U(t)\xi\,dt$$

となるから，$T_f\xi \in \operatorname{Dom} H$ である．さて，$\epsilon > 0$ に対して，$f_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を $f_\epsilon \geq 0$，$\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t)\,dt = 1$ かつ $\operatorname{supp} f_\epsilon \subseteq [-\epsilon, \epsilon]$ を満たすようにとる．すると，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\epsilon \to 0+$ のとき

$$\|T_{f_\epsilon}\xi - \xi\| = \left\|\int_{\mathbb{R}} f(t)(U(t)\xi - \xi)\,dt\right\| \leq \sup_{t\in[-\epsilon,\epsilon]}\|U(t)\xi - \xi\| \to 0$$

となる．よって，$\operatorname{Dom} H$ は $\mathcal{H}$ において稠密である．

(III)　(II) から引き続いて，H が本質的自己随伴であることを示す．系 1.47 より，そのためには，$H^* \mp i1_{\mathcal{H}}$ が単射であることをいえばよい．

$\eta \in \operatorname{Dom} H^*$ が $H^*\eta = \pm i\eta$ を満たすとして，$\xi \in \operatorname{Dom} H$ を任意にとる．補題 4.44 (3) より，$\mathbb{R}$ 上の関数 $t \mapsto \langle \eta | U(t)\xi \rangle$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}\langle \eta|U(t)\xi\rangle = i\langle \eta|HU(t)\xi\rangle = i\langle H^*\eta|U(t)\xi\rangle = \pm\langle \eta|U(t)\xi\rangle$$

を満たす．この微分方程式を解き，初期条件 $\langle \eta|U(0)\xi\rangle = \langle \eta|\xi\rangle$ に注意すれば，

$$\langle \eta|U(t)\xi\rangle = e^{\pm t}\langle \eta|\xi\rangle$$

を得る．一方で，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$|\langle \eta|U(t)\xi\rangle| \leq \|U(t)\|\|\xi\|\|\eta\| = \|\xi\|\|\eta\|$ である．よって，上式が成り立つためには，$\langle \xi|\eta\rangle = 0$ でなければならない．任意の $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対してこれが成り立ち，(II) で示したように $\operatorname{Dom} H$ は $\mathcal{H}$ において稠密だから，$\eta = 0$ を得る．これで，H が本質的自己随伴であることが示された．

(IV)　U を $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群，U から (2) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素を H（(III) で示したように，これは本質的自己随伴である），その閉包 $\overline{H}$ から (1) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群を U' とし，$U' = U$ を示す[*22]．

$\xi \in \operatorname{Dom} H$ を任意にとる．補題 4.44 (3) より，

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi = iHU(t)\xi = i\overline{H}U(t)\xi$$

である．一方で，(I) で示したことより，U' から (2) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の線型作用素は $\overline{H}$ だから，ふたたび補題 4.44 (3) より，

$$\frac{d}{dt}U'(t)\xi = i\overline{H}U'(t)\xi$$

である．したがって，$\eta(t) = (U'(t) - U(t))\xi$ と置くと，

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \frac{d}{dt}(U'(t) - U(t))\xi = i\overline{H}(U'(t) - U(t))\xi = i\overline{H}\eta(t)$$

[*22] 定理の結論より実は $\overline{H} = H$ だが，そのことはここでは必要ない．

だから，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\eta(t)\|^2 &= \left\langle \frac{d}{dt}\eta(t) \middle| \eta(t) \right\rangle + \left\langle \eta(t) \middle| \frac{d}{dt}\eta(t) \right\rangle \\
&= \langle i\overline{H}\eta(t)|\eta(t)\rangle + \langle \eta(t)|i\overline{H}\eta(t)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，$\|\eta(t)\|$ は t によらない定数だが，$\eta(0) = U'(0)\xi - U(0)\xi = 0$ だから，$\eta(t)$ は常に 0 である．すなわち，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U'(t)\xi = U(t)\xi$ である．任意の $\xi \in \operatorname{Dom} H$ に対してこれが成り立ち，(II) で示したように $\operatorname{Dom} H$ は $\mathcal{H}$ において稠密だから，$U' = U$ を得る． □

定義 4.46（強連続一径数ユニタリ群の生成，無限小生成作用素） $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 H から定理 4.45 (1) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群を，**H が生成する強連続一径数ユニタリ群**という．
(2) $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群 U から定理 4.45 (2) の方法で定まる $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素を，U の**無限小生成作用素**（inifinitesimal generator）という．

命題 4.47 U を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の強連続一径数ユニタリ群とし，H を U の無限小生成作用素とする．次の条件は同値である．

(a) $U\colon \mathbb{R} \to \mathscr{U}(\mathcal{H})$ は $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ のノルム位相に関して連続である．
(b) H は $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素である．

証明 (b) $\Longrightarrow$ (a)　H が $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素であるとすると，$\operatorname{Sp}(H)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合だから，$t \in \mathbb{R}$ が $t_0 \in \mathbb{R}$ に近づく極限において，$\operatorname{Sp}(H)$ 上の関数 $\lambda \mapsto \exp(it\lambda)$ は関数 $\lambda \mapsto \exp(it_0\lambda)$ に一様収束する．したがって，このとき，$U(t) = \exp(itH)$ は $U(t_0) = \exp(it_0H)$ にノルム収束する（定理 3.15）．よって，U は $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ のノルム位相に関して連続である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　U が $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ のノルム位相に関して連続であるとすると，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $t \in [-\delta, \delta]$ に対して

$$
\sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(H)} |\exp(it\lambda) - 1| = \|\exp(itH) - 1_{\mathcal{H}}\| = \|U(t) - 1_{\mathcal{H}}\| \leq 1
$$

が成り立つ（命題 4.7）．すなわち，任意の $t \in [-\delta, \delta]$ と $\lambda \in \operatorname{Sp}(H)$ に対して，

$$
t\lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[2\pi n - \frac{\pi}{3}, 2\pi n + \frac{\pi}{3}\right]
$$

が成り立つ．これは，$\operatorname{Sp}(H)$ が有界でなければありえない．よって，H は $\mathcal{H}$ 上の連続自己随伴作用素である（系 4.8）． □

付録 A　Cayley 変換と自己随伴作用素のスペクトル分解

本付録では，対称作用素の Cayley 変換について解説する．その応用として，対称作用素の拡張について述べ，また，自己随伴作用素のスペクトル分解定理を定理 4.1 とは異なる方法で証明する．本付録を理解するのに，正規作用素や Hilbert 直和に関する知識は必要ない．

本節において，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の（全域で定義されているとは限らない）線型作用素 U が**等長**（isometric）であるとは，任意の $\xi \in \operatorname{Dom} U$ に対して $\|U\xi\| = \|\xi\|$ であることをいう．

A.1　Cayley 変換

定義 A.1（Cayley 変換・逆変換）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T に対して，$(T - i1_{\mathcal{H}})(T + i1_{\mathcal{H}})^{-1}$ を，T の **Cayley 変換**（Cayley transform）という（命題 1.35 (2) より，$T + i1_{\mathcal{H}}$ が単射であることに注意する）．

(2) $\mathcal{H}$ 上の等長作用素 U であって $1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であるものに対して，$i(1_{\mathcal{H}} + U)(1_{\mathcal{H}} - U)^{-1}$ を，U の **Cayley 逆変換**（inverse Cayley transform）という．

定理 A.2　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) $\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T に対して，T の Cayley 変換 $U = (T - i1_{\mathcal{H}})(T + i1_{\mathcal{H}})^{-1}$ は，$\mathcal{H}$ 上の等長作用素であり，$1_{\mathcal{H}} - U$ は単射である．さらに，$\operatorname{Dom} U = \operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$ かつ $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ である．

(2) $\mathcal{H}$ 上の等長作用素 U であって $1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であるものに対して，U の Cayley 逆変換 $T = i(1_{\mathcal{H}} + U)(1_{\mathcal{H}} - U)^{-1}$ は，$\mathcal{H}$ 上の対称作用素である．さらに，$\operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ かつ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} + U)$ である．

(3) (1) と (2) の対応は，互いに他の逆であり，$\mathcal{H}$ 上の対称作用素 T と $\mathcal{H}$ 上の等長作用素 U であって $1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であるものとの間の一対一対応を与える．さらに，この一対一対応は，線型作用素の拡張関係を保つ．

証明　(1)　命題 1.35 (1), (2) より，$T + i1_{\mathcal{H}}$ は $\operatorname{Dom} T$ から $\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$ への全単射，$T - i1_{\mathcal{H}}$ は $\operatorname{Dom} T$ から $\operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ への全単射であり，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して

$$\|(T + i1_{\mathcal{H}})\xi\| = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|(T - i1_{\mathcal{H}})\xi\|^2$$

が成り立つ．よって，U は等長作用素であり，$\operatorname{Dom} U = \operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$ かつ $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ を満たす．次に，$1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であることを示す．$\eta \in \operatorname{Dom} U$ とすると，上記のことより，ある $\xi \in \operatorname{Dom} T$ が一意に存在して，$\eta = (T + i1_{\mathcal{H}})\xi$ かつ $U\eta = (T - i1_{\mathcal{H}})\xi$ となる．これより，$(1_{\mathcal{H}} - U)\eta = 2i\xi$ だから，$(1_{\mathcal{H}} - U)\eta = 0$ ならば $\xi = 0$ であり，したがって $\eta = 0$ となる．よって，$1_{\mathcal{H}} - U$ は単射である．

(2)　$1_{\mathcal{H}} - U$ は $\operatorname{Dom} U$ から $\operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ への全単射，$1_{\mathcal{H}} + U$ は $\operatorname{Dom} U$ から $\operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} + U)$ への全射だから，$\operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ かつ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} + U)$ である．次に，T が対称であることを示す．$\xi \in \operatorname{Dom} T$ とすると，上記のことより，ある $\eta \in \operatorname{Dom} U$ が一意に存在して，$\xi = (1_{\mathcal{H}} - U)\eta$ かつ $T\xi = i(1_{\mathcal{H}} + U)\eta$ となる．$\xi' \in \operatorname{Dom} T$ として，同様に $\eta' \in \operatorname{Dom} U$ をとると，

$$\begin{aligned}\langle \xi' | T\xi \rangle &= \langle (1_{\mathcal{H}} - U)\eta' | i(1_{\mathcal{H}} + U)\eta \rangle \\ &= \langle i(1_{\mathcal{H}} + U)\eta' | (1_{\mathcal{H}} - U)\eta \rangle \\ &= \langle T\xi' | \xi \rangle\end{aligned}$$

を得る．よって，T は対称である．

(3)　まず，T を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素，U をその Cayley 変換とし，U の Cayley 逆変換が T に一致することを示す．$\eta \in \operatorname{Dom} U$ とすると，(1) で述べたように，ある $\xi \in \operatorname{Dom} T$ が一意に存在して，$\eta = (T + i1_{\mathcal{H}})\xi$ か

つ $U\eta = (T - i1_{\mathcal{H}})\xi$ となる．したがって，

$$(1_{\mathcal{H}} - U)\eta = 2i\xi, \qquad (1_{\mathcal{H}} + U)\eta = 2T\xi$$

である．η が $\operatorname{Dom} U$ 全体を動くとき ξ は $\operatorname{Dom} T$ 全体を動くから，$\operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} - U) = \operatorname{Dom} T$ であり，

$$\begin{aligned} T\xi &= \frac{1}{2}(1_{\mathcal{H}} + U)\eta \\ &= \frac{1}{2}(1_{\mathcal{H}} + U)(1_{\mathcal{H}} - U)^{-1}(2i\xi) \\ &= i(1_{\mathcal{H}} + U)(1_{\mathcal{H}} - U)^{-1}\xi \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，U の Cayley 逆変換は T に一致する．

次に，U を $\mathcal{H}$ 上の等長作用素であって $1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であるもの，T をその Cayley 変換とし，T の Cayley 変換が U に一致することを示す．$\xi \in \operatorname{Dom} T$ とすると，(1) で述べたように，$\xi \in \operatorname{Dom} U$ が一意に存在して，$\eta = (1_{\mathcal{H}} - U)\xi$ かつ $T\eta = i(1_{\mathcal{H}} + U)\xi$ となる．したがって，

$$(T + i1_{\mathcal{H}})\xi = 2i\eta, \qquad (T - i1_{\mathcal{H}})\xi = 2iU\eta$$

である．ξ が $\operatorname{Dom} T$ 全体を動くとき η は $\operatorname{Dom} U$ 全体を動くから，$\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}}) = \operatorname{Dom} U$ であり，

$$\begin{aligned} U\eta &= \frac{1}{2i}(T - i1_{\mathcal{H}})\xi \\ &= \frac{1}{2i}(T - i1_{\mathcal{H}})(T + i1_{\mathcal{H}})^{-1}(2i\eta) \\ &= (T - i1_{\mathcal{H}})(T + i1_{\mathcal{H}})^{-1}\eta \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，T の Cayley 変換は U に一致する．

Cayley 変換・逆変換が線型作用素の拡張関係を保つことは，明らかである．これで，すべての主張が示された． □

補題 A.3　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし，U をその Cayley 変換とする．

(1) T が閉であること，$\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$ が $\mathcal{H}$ において閉であること，$\operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ が $\mathcal{H}$ において閉であること，U が閉であることは，すべて同値である．

(2) T が稠密に定義されていることと，$\operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることとは同値である．

(3) T が自己随伴であることと，U がユニタリであることとは同値である．

証明　(1)　命題 1.35 (1) より，$\xi \in \operatorname{Dom} T$ に対して $\|(T \pm i1_{\mathcal{H}})\xi\|^2 = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|(\xi, T\xi)\|^2$ だから，$\operatorname{gr}(T)$, $\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$, $\operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ はすべて等長線型同型である．また，U は $\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$ を定義域，$\operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ を値域とする等長作用素だから，$\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$, $\operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$, $\operatorname{gr}(U)$ はすべて位相線型空間として同型である．よって，$\operatorname{gr}(T)$, $\operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$, $\operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$, $\operatorname{gr}(U)$ が完備であるかどうかは常に一致する．すなわち，主張の条件はすべて同値である．

(2)　$\operatorname{Dom} T = \operatorname{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$（定理 A.2 (2)）であることから従う．

(3)　定理 1.46 と，$\operatorname{Dom} U = \operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}})$ かつ $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}})$ であることより，

$$\begin{aligned} T \text{ が自己随伴} &\iff \operatorname{Im}(T + i1_{\mathcal{H}}) = \operatorname{Im}(T - i1_{\mathcal{H}}) = \mathcal{H} \\ &\iff \operatorname{Dom} U = \operatorname{Im} U = \mathcal{H} \\ &\iff U \text{ がユニタリ} \end{aligned}$$

である． $\square$

系 A.4　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし，U をその Cayley 変換とする．次の条件は同値である．

(a) T は可閉である．

(b) U の閉包 $\overline{U}$ について，$1_{\mathcal{H}} - \overline{U}$ は単射である．

さらに，これらの条件の下で，T の閉包 $\overline{T}$ の Cayley 変換は，$\overline{U}$ に等しい．

証明　T が可閉であるとは，T を拡張する閉対称作用素 $\widetilde{T}$ が存在するということであり（命題 1.33 (1)），定理 A.2 と補題 A.3 より，これは，U を拡張する等長作用素 $\widetilde{U}$ であって $1_{\mathcal{H}} - \overline{U}$ が単射であるものが存在することと同値である．これらの条件が成り立つならば，$\widetilde{T}$ のうち最小のものは閉包 $\overline{T}$ であり，$\widetilde{U}$ のうち最小のものは閉包 $\overline{U}$ である．よって，ふたたび定理 A.2 より，主張が成り立つ． $\square$

補題 A.5　U を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の等長作用素とする．

(1) $\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密ならば，$1_{\mathcal{H}} - U$ は単射である．

(2) U がユニタリ作用素であるとする．このとき，$\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることと，$1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であることとは同値である．

証明　(1)　$\xi \in \mathrm{Ker}(1_{\mathcal{H}} - U)$ とすると，任意の $\eta \in \mathrm{Dom}(1_{\mathcal{H}} - U)$ に対して，

$$\langle (1_{\mathcal{H}} - U)\eta | \xi \rangle = \langle \eta | \xi \rangle - \langle U\eta | \xi \rangle = \langle \eta | \xi \rangle - \langle U\eta | U\xi \rangle = 0$$

である．よって，$\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密ならば，$1_{\mathcal{H}} - U$ は単射である．

(2)　U がユニタリならば，$\mathrm{Ker}(1_{\mathcal{H}} - U) = (\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U))^{\perp}$ だから（系 1.56），$\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることと，$1_{\mathcal{H}} - U$ が単射であることとは同値である． $\square$

定理 A.6　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) Cayley 変換・逆変換は，$\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された対称作用素 T と，$\mathcal{H}$ 上の等長作用素 U であって $\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であるものとの間の一対一対応を与える．

(2) Cayley 変換・逆変換は，$\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉対称作用素 T と，$\mathcal{H}$ 上の閉等長作用素 U であって $\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であるものとの間の一対一対応を与える．

(3) Cayley 変換・逆変換は，$\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 T と，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U であって $\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}} - U)$ が $\mathcal{H}$ において稠密であるものとの一対一対応を与える．

証明　(1)　定理 A.2，補題 A.3 (2)，補題 A.5 (1) から従う．

(2)　(1) と補題 A.3 (1) から従う．

(3)　定理 A.2 と補題 A.5 (2) から従う． $\square$

A.2　対称作用素の拡張

定理 A.7　T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された対称作用素とする．

(1) T が自己随伴作用素に拡張できるための必要十分条件は，$(\mathrm{Im}(T + i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ と $(\mathrm{Im}(T - i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ の

Hilbert 空間としての次元[*23] が一致することである．

(2) T が極大対称作用素である（すなわち，T を真に拡張する対称作用素が存在しない）ための必要十分条件は，T が閉であり，かつ，$(\mathrm{Im}(T+i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ または $(\mathrm{Im}(T-i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ が 0 であることである．

証明　T の Cayley 変換を U とする．U は $\mathcal{H}$ 上の等長作用素であり，$\mathrm{Dom}\,U=\mathrm{Im}(T+i1_{\mathcal{H}})$ かつ $\mathrm{Im}\,U=\mathrm{Im}(T-i1_{\mathcal{H}})$ を満たす（定理 A.2 (1)）．$\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}}-U)$ は $\mathcal{H}$ において稠密だから（定理 A.6 (1)），U を拡張する任意の等長作用素 $\widetilde{U}$ に対しても，$\mathrm{Im}(1_{\mathcal{H}}-\widetilde{U})$ が $\mathcal{H}$ において稠密であることに注意する．

(1)　定理 A.6 (1) と上記の注意より，

$$
\begin{aligned}
&T\text{ が自己随伴作用素に拡張できる}\\
&\iff U\text{ がユニタリ作用素に拡張できる}\\
&\iff (\mathrm{Dom}\,U)^{\perp}\text{ と }(\mathrm{Im}\,U)^{\perp}\text{ の Hilbert 空間としての次元が一致する}\\
&\iff (\mathrm{Im}(T+i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}\text{ と }(\mathrm{Im}(T-i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}\text{ の Hilbert 空間としての次元が一致する}
\end{aligned}
$$

である．

(2)　定理 A.6 (1), (2) と定理 A.2 (1)，および上記の注意より，

$$
\begin{aligned}
&T\text{ が極大対称作用素}\\
&\iff U\text{ が極大等長作用素}\\
&\iff U\text{ が閉であり，かつ，}(\mathrm{Dom}\,U)^{\perp}\text{ または }(\mathrm{Im}\,U)^{\perp}\text{ が }0\\
&\iff T\text{ が閉であり，かつ，}(\mathrm{Im}(T+i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}\text{ または }(\mathrm{Im}(T-i1_{\mathcal{H}}))^{\perp}\text{ が }0
\end{aligned}
$$

である．□

A.3　自己随伴作用素のスペクトル分解

本小節では，$\mathbb{C}$ の部分集合上の関数 $\lambda\mapsto\lambda$ を，z と書く．

定理 A.8（自己随伴作用素のスペクトル分解定理）　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己随伴作用素 T に対して，$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π であって，

$$
T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\Pi
$$

を満たすものが一意に存在する．さらに，この Π は，$\mathrm{supp}\,\Pi=\mathrm{Sp}(T)$ を満たす．

証明　$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π が $T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\Pi$ を満たすとすると，命題 2.26 より，$\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{ess\,ran}_{\Pi}\,z=\mathrm{supp}\,\Pi$ が成り立つ．あとは，$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π であって $T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\Pi$ を満たすものが一意に存在することを示せばよい．

T の Cayley 変換を $U=(T-i1_{\mathcal{H}})(T+i1_{\mathcal{H}})^{-1}$ とする．U はユニタリ作用素だから（定理 A.6 (3)），連続正規作用素のスペクトル分解定理（定理 3.8）より，$U=\int_{\mathbb{C}} z\,d\Pi'$ を満たす $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π' が一意に存在する．U がユニタリであることより $\mathrm{Sp}(U)\subseteq\mathbb{U}$ であり（命題 4.13），$1_{\mathcal{H}}-U$ が単射であることより $\Pi'(\{1\})=\mathrm{Ker}(1_{\mathcal{H}}-U)=0$ だから（命題 3.10 (1)），Π' は $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度とみなせる．

[*23] Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底の濃度（これは，正規直交基底のとり方によらず一定である）を，$\mathcal{H}$ の Hilbert 空間としての次元という．

さて，写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U} \setminus \{1\}$ を $\phi(t) = (t-i)/(t+i)$ と定めると，ϕ は同相写像であり，その逆写像は $\phi^{-1}(\lambda) = i(1+\lambda)/(1-\lambda)$ で与えられる．$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π が $T = \int_{\mathbb{R}} z\, d\Pi$ を満たすとすると，定理 2.18 (1), (4), (6) と命題 2.17 より，

$$U = (T - i1_{\mathcal{H}})(T + i1_{\mathcal{H}})^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \phi\, d\Pi = \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\, d(\phi_* \Pi)$$

が成り立つ．一方で，$\mathbb{U} \setminus \{1\}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π' が $U = \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\, d\Pi'$ を満たすとすると，T は U の Cayley 逆変換 $i(1_{\mathcal{H}} + U)(1_{\mathcal{H}} - U)^{-1}$ に等しいことと，（定理 A.2），定理 2.18 (1), (4), (6) と命題 2.17 より，

$$T = i(1_{\mathcal{H}} + U)(1_{\mathcal{H}} - U)^{-1} \subseteq \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} \phi^{-1}\, d\Pi' = \int_{\mathbb{R}} z\, d((\phi^{-1})_* \Pi')$$

が成り立つ．T と $\int_{\mathbb{R}} z\, d((\phi^{-1})_* \Pi')$ はともに自己随伴だから（系 2.25 (1)），自己随伴作用素の極大性（命題 1.44）より，

$$T = \int_{\mathbb{R}} z\, d((\phi^{-1})_* \Pi')$$

である．以上より，$T = \int_{\mathbb{R}} z\, d\Pi$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π と，$U = \int_{\mathbb{U}\setminus\{1\}} z\, d\Pi'$ を満たす $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ 上の $\mathcal{H}$-射影値 Borel 測度 Π' とは，同相写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U} \setminus \{1\}$ を通して一対一に対応する．前段で述べたように，このような Π' は一意に存在するから，このような Π も一意に存在する． □

参考文献

連続正規作用素のスペクトル分解については Arveson [1] を，連続とは限らない正規作用素のスペクトル分解については Rudin [6] と Conway [4] を参考にした．ユニタリ表現に関する Schur の補題（定理 3.33）の証明については，Tao [7] を参考にした．命題 2.49 の証明，および稠密に定義された閉作用素の極分解については，片岡 [12] を参考にした．本稿で前提とした C* 代数の理論は，「C* 代数」 [15] で解説している．

[1] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques: Chapitres 1 à 5*, Springer, 2003.

[3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Springer, 2013.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd edition, Springer, 2007.

[5] E. Nelson, “Analytic vectors”, *Annals of Mathematics* **70**.3 (1959), pp. 572–615.

[6] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1991.

[7] T. Tao, What’s New: ‘The Peter-Weyl theorem, and non-abelian Fourier analysis on compact groups’, 2011.（2020 年 9 月 29 日アクセス）
`https://terrytao.wordpress.com/2011/01/23/`
`the-peter-weyl-theorem-and-non-abelian-fourier-analysis-on-compact-groups/`

[8] 新井朝雄，『量子力学の数学的構造 I』，朝倉書店，1999.

[9] 新井朝雄，『量子力学の数学的構造 II』，朝倉書店，1999.

[10] 新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[11] 伊藤清三，『ルベーグ積分入門』，新装版，裳華房，2017.

[12] 片岡祐太,「mathematical analysis」, 2019 年 3 月 24 日版.（現在非公開）

[13] 箱,「無限和のノート」, 2020 年 9 月 29 日版.
https://o-ccah.github.io

[14] 箱,「コンパクト作用素のノート」, 2021 年 6 月 2 日版.
https://o-ccah.github.io

[15] 箱,「C* 代数」, 2024 年 7 月 10 日版.
https://o-ccah.github.io

[16] 宮島静雄,『関数解析』, 横浜図書, 2005.