分裂簡約 Lie 代数

箱

2025 年 8 月 10 日

概要

分裂簡約 Lie 代数の構造論および表現論を解説する．構造論については，分裂簡約 Lie 代数からルート系が定義されることを見たあと，それを用いて分裂可能単純 Lie 代数を分類する．表現論については，最高ウェイト理論を解説する．

目次

記号と用語

- 本稿を通して，特に断らない限り，$\mathbb{K}$ を可換体とし，線型空間などの係数体は $\mathbb{K}$ であるとする．
- 線型空間 V のテンソル代数を $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{T}^n(V)$ と書き，対称代数を $\mathbf{S}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{S}^n(V)$ と書く．
- Lie 代数に関する記号と用語は，「Lie 代数」 [4] による．
- ルート系に関する記号と用語は，「ルート系」 [5] による．

1　Cartan 部分代数

1.1　Cartan 部分代数

定義 1.1（Cartan 部分代数）　有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の **Cartan 部分代数**（Cartan subalgebra）とは，$\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ であって，$\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ を満たすものをいう．

$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{g}'$ をその部分 Lie 代数とするとき，$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ならば，明らかに，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数でもある．

命題 1.2　有限次元冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ 自身を唯一の Cartan 部分代数にもつ．

証明　明らかに，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．これが唯一の Cartan 部分代数であることを示す．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の真部分 Lie 代数とし，$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})$ を満たす最大の $p \in \mathbb{N}$ をとる．すると，

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h} + \mathscr{C}^p(\mathfrak{g})] \subseteq \mathfrak{h} + \mathscr{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$$

となるから，$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathscr{C}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ が成り立つ．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ではない．　□

系 1.3　$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする．このとき，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の極大冪零部分 Lie 代数（すなわち，冪零部分 Lie 代数の中で包含関係に関して極大なもの）である．

証明　定義より，Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は冪零である．また，$\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}'$ が $\mathfrak{h}$ を含むとすると，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}'$ の Cartan 部分代数でもあるから，命題 1.2 より $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ である．　□

系 1.4　$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ がともに $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であり，$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$ を満たすならば，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ である．

証明　系 1.3 から従う．　□

命題 1.5　$(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ を有限次元 Lie 代数の有限族とし，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{g}_i$ と置く．各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数とすると，$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．逆に，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は，す

べてこのようにして得られる．

証明　冪零 Lie 代数の直和は冪零である [4, 命題 4.3 (4)]．また，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ の部分線型空間として，$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ と置くと，$\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{N}_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$ である．よって，各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数とすると，$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．

逆に，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とする．各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i$ への射影による $\mathfrak{h}$ の像を $\mathfrak{h}_i$ と置くと，それらの直和 $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ は冪零だから [4, 命題 4.3 (2), (4)]，系 1.3 より $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ が成り立つ．また，$\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{N}_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$ は $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ に等しいから，任意の $i \in I$ に対して $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$ は $\mathfrak{h}_i$ に等しい．よって，各 $\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数である．　□

命題 1.6　$\mathbb{K}$ を可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

(1) $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ について，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であることと，$\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}$ が $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Cartan 部分代数であることとは同値である．

(2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする．このとき，$\mathbb{K}'$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}'$ について，$\mathfrak{h}'$ が $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数であることと，$\mathfrak{h}'_{[\mathbb{K}]}$ が $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ の Cartan 部分代数であることとは同値である．さらに，$\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ の任意の Cartan 部分代数は，$\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ を用いて $\mathfrak{h}'_{[\mathbb{K}]}$ と書ける．

証明　(1)　冪零性が係数拡大で不変であること [4, 命題 4.2 (1)] から従う．

(2)　前半の主張は，冪零性が係数の制限で不変であること [4, 命題 4.2 (2)] から従う．

後半の主張を示す．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ の Cartan 部分代数とする．$\mathfrak{h}$ が冪零であることより $\operatorname{span}_{\mathbb{K}'} \mathfrak{h}$ も冪零だから，系 1.3 より $\mathfrak{h} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}'} \mathfrak{h}$ が成り立つ．よって，後半の主張は，前半の主張から従う．　□

1.2　同時広義固有空間に関する準備

本小節では，S を集合，V を線型空間とし，写像 $\rho\colon S \to \operatorname{End}(V)$ が定まっているとき，$\lambda \in \mathbb{K}^S$ に対して

$$V^{\lambda}(S) = \{v \in V \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対してある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } (\rho(h) - \lambda(h))^n v = 0\}$$

と書く．S が 1 元集合 $\{s\}$ である場合には，$V^{\lambda}(S)$ を単に $V^{\lambda(s)}(s)$ と書く．定義から明らかに，$V^{\lambda}(S)$ は V の部分線型空間であり，

$$V^{\lambda}(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s)$$

が成り立つ．

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，S をその部分集合とするとき，特に断らなければ，写像 $\operatorname{ad}|_S\colon S \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ を考えることにより，記号 $\mathfrak{g}^{\lambda}(S)$（$\lambda \in \mathbb{K}^S$）を用いる．すなわち，

$$\mathfrak{g}^{\lambda}(S) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対してある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } (\operatorname{ad}(s) - \lambda(s))^n x = 0\}$$

と書く．この記号は，本節の以下の部分を通して用いる．

命題 1.7　S を集合，V を線型空間とし，$\rho\colon S \to \operatorname{End}(V)$ を写像とする．このとき，和 $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^{\lambda}(S)$ は直和である．

証明　異なる有限個の元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}^S$ を任意にとり，各 $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して $v_i \in V^{\lambda_i}(S)$ とするとき，$v_1 + \cdots + v_k = 0$ ならば $v_1 = \cdots = v_k = 0$ であることを示せばよい．この主張を，k に関する帰納法で

示す．$k=0,1$ のとき，主張は明らかである．$k\geq 2$ とし，k がより小さい場合には主張が成り立つとする．$\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k$ は異なるから，$\lambda_1(s)=\cdots=\lambda_k(s)$ が成り立たないような $s\in S$ がとれる．各 v_i は $\rho(s)$ の広義固有空間 $V^{\lambda_i(s)}(s)$ に属し，線型代数の一般論より，広義固有空間の和 $\sum_{\mu\in\mathbb{K}}V^{\mu}(s)$ は直和である．したがって，$v_1+\cdots+v_k=0$ ならば，任意の $\mu\in\mathbb{K}$ に対して

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,k\},\ \lambda_i(s)=\mu} v_i=0$$

が成り立つ．s のとり方より，任意の $\mu\in\mathbb{K}$ に対して $\{i\in\{1,\ldots,k\}\mid\lambda_i(s)=\mu\}$ は $\{1,\ldots,k\}$ 全体にはならない．よって，上式と帰納法の仮定より，$v_1=\cdots=v_k=0$ を得る．これで，帰納法が完成した． □

命題 1.8　S を集合，$V_1,\ V_2,\ W$ を線型空間とし，$\rho_1\colon S\to\mathrm{End}(V_1)$，$\rho_2\colon S\to\mathrm{End}(V_2)$，$\sigma\colon S\to\mathrm{End}(W)$ を写像とする．$\mathit{\Phi}\colon V_1\times V_2\to W$ は双線型写像であり，任意の $s\in S$，$v_1\in V_1$，$v_2\in V_2$ に対して

$$\mathit{\Phi}(\rho_1(s)v_1,v_2)+\mathit{\Phi}(v_1,\rho_2(s)v_2)=\sigma(s)\mathit{\Phi}(v_1,v_2)$$

を満たすとする．このとき，任意の $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{K}^S$ に対して，

$$\mathit{\Phi}(V_1^{\lambda_1}(S),V_2^{\lambda_2}(S))\subseteq W^{\lambda_1+\lambda_2}(S)$$

が成り立つ．

証明　仮定より，任意の $s\in S$，$v_1\in V_1$，$v_2\in V_2$ に対して

$$(\sigma(s)-\lambda_1(s)-\lambda_2(s))\mathit{\Phi}(v_1,v_2)=\mathit{\Phi}((\rho_1(s)-\lambda_1(s))v_1,(\rho_2(s)-\lambda_2(s))v_2)$$

だから，$n\in\mathbb{N}$ とすると

$$(\sigma(s)-\lambda_1(s)-\lambda_2(s))^n\mathit{\Phi}(v_1,v_2)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathit{\Phi}((\rho_1(s)-\lambda_1(s))^{n-k}v_1,(\rho_2(s)-\lambda_2(s))^{k}v_2)$$

である．よって，$v_1\in V_1^{\lambda_1}(S)$ かつ $v_2\in V_2^{\lambda_2}(S)$ ならば，$\mathit{\Phi}(v_1,v_2)\in W^{\lambda_1+\lambda_2}(S)$ である． □

系 1.9　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし，S をその部分集合とする．このとき，任意の $\lambda,\ \mu\in\mathbb{K}^S$ に対して，$[\mathfrak{g}^{\lambda}(S),\mathfrak{g}^{\mu}(S)]\subseteq\mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(S)$ が成り立つ．特に，$\mathfrak{g}^0(S)$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．

証明　命題 1.8 から従う． □

系 1.10　$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，S をその部分集合とし，$B\colon\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ を不変な双線型形式とする．このとき，任意の $\lambda,\ \mu\in\mathbb{K}^S$，$\lambda+\mu\neq 0$ に対して，$B(\mathfrak{g}^{\lambda}(S),\mathfrak{g}^{\mu}(S))=0$ が成り立つ．

証明　写像 $\rho_1,\ \rho_2\colon S\to\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を $\rho_1(x)=\rho_2(x)=\mathrm{ad}(x)$ によって定め，写像 $\sigma\colon S\to\mathrm{End}(\mathbb{K})$ を $\sigma(x)=0$ によって定めると，B の不変性より，これらは命題 1.8 の仮定を満たす．よって，任意の $\lambda,\ \mu\in\mathbb{K}^S$，$\lambda+\mu\neq 0$ に対して，$B(\mathfrak{g}^{\lambda}(S),\mathfrak{g}^{\mu}(S))\subseteq\mathbb{K}^{\lambda+\mu}(S)=0$ である． □

補題 1.11　V を線型空間，$x,\ y\in\mathrm{End}(V)$ とし，ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)^n y=0$ を満たすとする．このとき，任意の $\lambda\in\mathbb{K}$ に対して，広義固有空間 $V^{\lambda}(x)$ は y-安定である．

証明　双線型写像 $\mathit{\Phi}\colon\ \mathrm{End}(V)\times V\to V$ を $\mathit{\Phi}(z,v)=z(v)$ によって定めると，任意の $z\in\mathrm{End}(V)$ と $v\in V$ に対して $x(\mathit{\Phi}(z,v))=\mathit{\Phi}(z,x(v))+\mathit{\Phi}(\mathrm{ad}(x)z,v)$ が成り立つ．したがって，$\mathit{\Phi}$ に対して命題 1.8 を適用するこ

とで，$\Phi(\mathrm{End}(V)^0(\mathrm{ad}(x)), V^\lambda(x)) \subseteq V^\lambda(x)$ を得る．仮定より $y \in \mathrm{End}(V)^0(\mathrm{ad}(x))$ だから，$V^\lambda(x)$ は y-安定である． □

命題 1.12　S を集合，V を有限次元線型空間とし，$\rho\colon S \to \mathrm{End}(V)$ を写像とする．このとき，次の条件は同値である．

(a) 直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ が成立し，任意の $\lambda \in \mathbb{K}^S$ に対して，$V^\lambda(S)$ は $\rho(S)$-安定である．
(b) $\rho(S)$ の任意の元は三角化可能であり，かつ任意の s, $s' \in S$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s') = 0$ を満たす．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　条件 (a) が成り立つとして，s, $s' \in S$ とすると，広義固有空間分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ が成立し，各 $V^\mu(s)$ は $\rho(s')$-安定である．広義固有空間分解が成立することより，$\rho(s)$ は三角化可能である．また，任意の $\mu \in \mathbb{K}$ に対して，$\rho_\mu(s'') = \rho(s'')|_{V^\mu(s)}$（$s'' \in S$）と書くと，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s'))|_{V^\mu(s)} &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho_\mu(s))^n \rho_\mu(s') \\
&= \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho_\mu(s) - \mu)^n \rho_\mu(s') \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\rho_\mu(s) - \mu)^{n-k} \rho_\mu(s') (-(\rho_\mu(s) - \mu))^k
\end{aligned}
$$

である．$\rho_\mu(s) - \mu$ は冪零だから，n が十分大きいとき，上式の最右辺は 0 となる．任意の $\mu \in \mathbb{K}$ に対してこれが成り立ち，V が有限次元であることより $V^\mu(s) \neq 0$ となる $\mu \in \mathbb{K}$ は有限個だから，n が十分大きいとき $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s') = 0$ となる．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　条件 (b) が成り立つとする．まず，$\lambda \in \mathbb{K}^S$ とすると，任意の $s \in S$ に対して $V^{\lambda(s)}(s)$ は $\rho(S)$-安定だから（補題 1.11），$V^\lambda(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s)$ も $\rho(S)$-安定である．

次に，直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ が成立することを示す．和 $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ が直和であることは，命題 1.7 ですでに示した．$V = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ であることを，次元 $\dim_{\mathbb{K}} V$ に関する帰納法で示す．次元がより小さい場合には主張が成り立つとする．ある $\lambda \in \mathbb{K}^S$ が存在して $V = V^\lambda(S)$ となるならば，主張は明らかである．そうでないとすると，ある $s \in S$ が存在して，直和分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ が非自明な（すなわち，0 でない直和因子が二つ以上存在する）ものとなる（任意の $s \in S$ に対して，仮定より $\rho(s)$ が三角化可能であり，したがって，広義固有空間分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ が成立することを用いた）．仮定より，各 $V^\mu(s)$ は $\rho(S)$-安定だから，帰納法の仮定より，$V^\mu(s) = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} (V^\lambda(S) \cap V^\mu(s))$ が成り立つ．これで，帰納法が完成した． □

系 1.13　$\mathfrak{g}$ を代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする．このとき，直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ が成立する．

証明　係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であることより，$\mathfrak{g}$ 上の任意の線型写像は三角化可能である．また，$\mathfrak{h}$ が冪零であることより $\mathscr{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ がとれ，この p について，任意の h, $h' \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h))^p \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h') = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h)^p h') = 0$ が成り立つ．よって，主張は，命題 1.12 から従う． □

命題 1.14　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする．このとき，ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p = 0$ が成り立つ．

証明　必要ならば係数拡大を考えることにより，一般性を失わず，係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する．このとき，系 1.13 より，直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ が成立する．$\mathfrak{g}$ は有限次元だから，$\Delta = \{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \mid \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0\}$

と置くと, Δ は有限である．さらに, $\mathbb{K}$ は標数 0 だから, $p \in \mathbb{N}$ を任意の $\lambda \in \Delta \setminus \{0\}$ に対して $(\Delta + p\lambda) \cap \Delta = \emptyset$ を満たすようにとれる．$\lambda \in \Delta \setminus \{0\}$ とするとき，任意の $\mu \in \Delta$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}))^p \mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}^{\mu+p\lambda}(\mathfrak{h}) = 0$ だから（系 1.9），$\mathfrak{g}$ の直和分解と合わせて $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}))^p = 0$ を得る．よって，この p が主張の条件を満たす． □

命題 1.15 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とし，$B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ を不変な非退化双線型形式とする．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ に対して，$B|_{\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$ は非退化である．

証明 必要ならば係数拡大を考えることにより，一般性を失わず，係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する．このとき，系 1.13 より，直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ が成立する．$\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ とし，$x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$ を任意にとると，B の非退化性より，ある $y \in \mathfrak{g}$ が存在して $B(x, y) \neq 0$ となる．一方で，任意の $\mu \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{-\lambda\}$ に対して $B(\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h})) = 0$ だから（系 1.10），必要ならば y をその $\mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$-成分に置き換えることで，$y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ としてよい．以上より，$B|_{\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$ は左非退化である．右非退化性も，同様に確かめられる．よって，$B|_{\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$ は非退化である． □

1.3 Cartan 部分代数の存在

補題 1.16 $\mathfrak{g}$ を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とする．$a \in \mathfrak{h}$ が次の条件を満たすとする．

(i) $\mathfrak{g}^0(a)$ は，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で極小である．
(ii) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(a)$ である．

このとき，$\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ（すなわち，$\mathfrak{g}^0(a)$ は $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で最小である）．

証明 条件 (i), (ii) が満たされるとして，$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^0(a)$ と置く．$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり（系 1.9），条件 (ii) より $\mathfrak{h}$ を含む．随伴表現が誘導する $\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ 上の表現を，それぞれ $\rho_{\mathfrak{m}}$ と $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}$ と書く．$x \in \mathfrak{m}$ を任意にとり，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$\rho_{\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$, $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$ の固有多項式をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
p(T, \lambda) &= T^r + p_1(\lambda) T^{r-1} + \cdots + p_r(\lambda), \\
q(T, \lambda) &= T^{n-r} + q_1(\lambda) T^{n-r-1} + \cdots + q_{n-r}(\lambda)
\end{aligned}
$$

（ここで，$n = \dim \mathfrak{g}$，$r = \dim \mathfrak{m}$ である）と書く．上式と $p(T, \lambda) = \det(T - \rho_{\mathfrak{m}}(a) - \lambda \rho_{\mathfrak{m}}(x))$ および $q(T, \lambda) = \det(T - \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a) - \lambda \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(x))$ を比較すれば，各 p_i と q_i がたかだか i 次の $\mathbb{K}$ 係数多項式であることがわかる．また，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a + \lambda x)$ の固有多項式は，$p(T, \lambda) q(T, \lambda)$ である．以下，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$
p(T, \lambda) = T^r \iff \rho_{\mathfrak{m}}(a + \lambda x) \text{ は冪零} \iff \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}^0(a + \lambda x) \tag{$*$}
$$

であることに注意する．

$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^0(a)$ だから，($*$) より $p(T, 0) = T^r$ である．一方で，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a)$ の固有多項式 $p(T, 0) q(T, 0)$ の根 0 の重複度は，対応する広義固有空間の次元 $\dim \mathfrak{m} = r$ に等しい．したがって，$q(T, 0)$ は 0 を根にもたない．すなわち，$q_{n-r}(0) \neq 0$ であり，特に，多項式 q_{n-r} は 0 ではない．このことと $\mathbb{K}$ が無限可換体であることより，$q_{n-r}(\lambda) \neq 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{K}$ が無限個存在する．このような λ に対しては，$\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$ は可逆だから，$\mathfrak{g}^0(a + \lambda x) \subseteq \mathfrak{m}$ が成り立つ．条件 (i) と合わせて，$\mathfrak{g}^0(a + \lambda x) = \mathfrak{m}$ を得るから，($*$) より $p(T, \lambda) = T^r$ であ

る．$p(T,\lambda)=T^r$ であるということは $p_1(\lambda)=\cdots=p_r(\lambda)=0$ であるということにほかならず，$p_1,\ \dots,\ p_r$ は多項式だから，これが無限個の $\lambda\in\mathbb{K}$ に対して成り立つことより，すべての $\lambda\in\mathbb{K}$ に対しても成り立つ．したがって，($*$) より，$\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{g}^0(a+\lambda x)$ である．よって，

$$\mathfrak{g}^0(a)=\mathfrak{m}\subseteq\bigcap_{x\in\mathfrak{m},\ \lambda\in\mathbb{K}}\mathfrak{g}^0(a+\lambda x)=\mathfrak{g}^0(\mathfrak{m})\subseteq\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$$

だから，$\mathfrak{g}^0(a)=\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ． □

定理 1.17　$\mathfrak{g}$ を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．
(b) $\mathfrak{h}$ は，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{g}}$ に属し，かつこの中で極小である．
(c) $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるとする．任意の $x\in\mathfrak{h}$ に対して，$\mathfrak{h}$ が冪零であることより $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(x)$ は冪零だから，$\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}^0(x)$ である．そこで，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{h}}$ の中で極小なもの $\mathfrak{g}^0(a)$（$a\in\mathfrak{h}$）をとると（次元が最小のものをとればよい），補題 1.16 より，任意の $x\in\mathfrak{h}$ に対して $\mathfrak{g}^0(a)\subseteq\mathfrak{g}^0(x)$ である．

$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(a)$ であることを示す．$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}^0(a)$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり（系 1.9），$\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}^0(a)$ だから，随伴表現は $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}^0(a)/\mathfrak{h}$ 上の表現を誘導する．この表現を ρ と書くと，任意の $x\in\mathfrak{h}$ に対して，$\mathfrak{g}^0(a)\subseteq\mathfrak{g}^0(x)$ であることより，$\rho(x)$ は冪零である．したがって，$\mathfrak{h}\subsetneq\mathfrak{g}^0(a)$ であると仮定すると，Engel の定理 [4, 系 4.9] より，$\mathfrak{g}^0(a)/\mathfrak{h}$ の 0 でない元であって $\rho(\mathfrak{h})$ によって零化されるものが存在する．すなわち，$y\in\mathfrak{g}^0(a)\setminus\mathfrak{h}$ であって $[\mathfrak{h},y]\subseteq\mathfrak{h}$ を満たすものが存在する．ところが，これは $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ であることに反するから，背理法より，$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(a)$ である．

$\mathfrak{h}$ が $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{g}}$ の中で極小であることを示す．$x\in\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}^0(x)\subseteq\mathfrak{h}$ を満たすとすると，$x\in\mathfrak{g}^0(x)\subseteq\mathfrak{h}$ だから，$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(a)$ が $(\mathfrak{g}^0(y))_{y\in\mathfrak{h}}$ の中で最小であることより，$\mathfrak{g}^0(x)=\mathfrak{h}$ である．よって，$\mathfrak{h}$ は $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{g}}$ の中で極小である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(a)$（$a\in\mathfrak{g}$）が $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{g}}$ の中で極小であるとする．すると，$a\in\mathfrak{g}^0(a)=\mathfrak{h}$ であり，仮定より特に $\mathfrak{g}^0(a)$ は $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{h}}$ の中で極小だから，補題 1.16 より，$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(a)=\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　$\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ であるとする．このとき，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ の任意の元は冪零だから，$\mathfrak{h}$ は冪零である [4, 系 4.10]．また，$\mathscr{C}^p(\mathfrak{h})=0$ を満たす $p\in\mathbb{N}$ をとると

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{h})^{p+1}\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathrm{ad}(\mathfrak{h})^p\mathfrak{h}=\mathscr{C}^p(\mathfrak{h})=0$$

となるから，$\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ である．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である． □

系 1.18（Cartan 部分代数の存在）　無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，Cartan 部分代数をもつ．

証明　定理 1.17 より，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{h}}$ の中で極小なものをとれば（次元が最小のものをとればよい），それが $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である． □

1.4 多項式写像に関する準備

本小節では，有限次元線型空間 V に対して，V 上の多項式関数全体のなす単位的結合 $\mathbb{K}$-代数を，$\mathrm{Pol}(V)$ と書く．係数体 $\mathbb{K}$ が無限可換体である場合，これは，双対空間の対称代数 $\mathbf{S}(V^*)$ に自然に同型である．

V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とし，$\phi\colon V \to W$ を多項式写像（すなわち，任意の $g \in W^*$ に対して $g \circ \phi \in \mathrm{Pol}(V)$ であるような写像）とするとき，多項式写像 $\phi\colon V \to W$ による引き戻しが単位的 $\mathbb{K}$-代数の準同型 $\phi^*\colon \mathrm{Pol}(W) \to \mathrm{Pol}(V)$ を定めることに注意する．

定義 1.19（支配的な多項式写像） V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．多項式写像 $\phi\colon V \to W$ が**支配的**（dominant）であるとは，ϕ による引き戻し $\phi^*\colon \mathrm{Pol}(W) \to \mathrm{Pol}(V)$ が単射であることをいう．

V を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．V の部分集合であって V 上の多項式関数の族の共通零点集合として書けるものの全体は，閉集合系の公理を満たす．これによって定まる位相を，V の **Zariski 位相**（Zariski topology）という．Zariski 位相を考えていることを明示する意味で，「Zariski 閉集合」，「Zariski 開集合」，「Zariski 稠密集合」などという．容易に確かめられるように，$\mathrm{Pol}(V)$ は整域であり，このことから，V の任意の空でない Zariski 開集合が V において Zariski 稠密であることが従う．

本小節の以下の部分では，可換環 A から B への環準同型全体のなす空間を，$\mathrm{Hom}(A, B)$ と書く．また，可換環 A の $S \subseteq A$ による局所化を $S^{-1}A$ と書き，$S = \{s\}$ である場合にはこれを $A[s^{-1}]$ とも書く．

補題 1.20 V を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．$v \in V$ に対して，$\mathrm{ev}_v \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Pol}(V), \mathbb{K})$ を，$\mathrm{ev}_v(f) = f(v)$ によって定める．このとき，写像 $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ は，V から $\mathrm{Hom}(\mathrm{Pol}(V), \mathbb{K})$ への線型同型写像である．

証明 $\mathrm{Pol}(V)$ は双対空間の対称代数 $\mathbf{S}(V^*)$ に自然に同型だから，V^* の基底 $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ を一つ固定すると，$\mathrm{Pol}(V)$ から $\mathbb{K}$ への環準同型は，ϕ_1, …, ϕ_n の行き先を決めるごとに一意に定まる．一方で，V の元も，ϕ_1, …, ϕ_n の値を決めるごとに一意に定まる．よって，写像 $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ は，V から $\mathrm{Hom}(\mathrm{Pol}(V), \mathbb{K})$ への線型同型写像である． □

補題 1.21 A と B を整域とし，A は B に部分環として含まれ，B は単位的 A-代数として有限生成であるとする．このとき，ある $a \in A \setminus \{0\}$ と A 上代数的独立な x_1, …, $x_n \in B$ が存在して，$B[a^{-1}]$ が $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$ 上整となる．

証明 $S = A \setminus \{0\}$ と置き，分数体 $\mathrm{Frac}(A) = S^{-1}A$ と局所化 $S^{-1}B$ を考える．Noether の正規化補題 [1, Chapter 5, Exercise 16] より，$\mathrm{Frac}(A)$ 上代数的独立な x_1, …, $x_n \in S^{-1}B$ が存在して，$S^{-1}B$ が $\mathrm{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$ 上整となる．必要ならば分母を払うことで，x_1, …, $x_n \in B$ としてよい．

任意の $y \in B$ に対して，ある $s \in S$ が存在して，sy が $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整となることを示す．y は（$S^{-1}B$ の元とみなすと）$\mathrm{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$ 上整だから，ある $d \in \mathbb{N}$ と $p_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$（$i \in \{0, \dots, d-1\}$）が存在して，

$$y^d + p_{d-1}(x_1, \dots, x_n)y^{d-1} + \cdots + p_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

を満たす．上式で分母を払うことで，ある $s \in S$ と $q_i(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots, x_n]$（$i \in \{0, \dots, d-1\}$）が存

在して，
$$(sy)^d + p_{d-1}(x_1, \dots, x_n)(sy)^{d-1} + \cdots + p_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$
を満たすことがわかる．よって，sy は $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整である．

B の単位的 A-代数としての有限生成系 y_1, …, y_m をとる．前段の結果より，各 j に対して，$s_j \in S$ を $s_j y_j$ が $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整となるようにとれる．$a = s_1 \cdots s_m \in S$ と置けば，任意の j に対して ay_j は $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整である．$B[a^{-1}]$ は単位的 $A[a^{-1}]$-代数として ay_1, …, ay_m によって生成されるから，このことより，$B[a^{-1}]$ は $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$ 上整である． □

補題 1.22　A と B を整域とし，A は B に部分環として含まれ，B は単位的 A-代数として有限生成であるとする．このとき，任意の $b \in B \setminus \{0\}$ に対して，ある $a \in A \setminus \{0\}$ が存在して，任意の代数閉体 $\mathbb{K}$ と，任意の $\tau \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{K})$ であって $\tau(a) \neq 0$ を満たすものに対して，τ を拡張する $\widetilde{\tau} \in \operatorname{Hom}(B, \mathbb{K})$ であって $\widetilde{\tau}(b) \neq 0$ を満たすものが存在する．

証明　$b \in B \setminus \{0\}$ とすると，局所化 $B[b^{-1}]$ も整域であり，A を部分環として含み，単位的 A-代数として有限生成である．したがって，補題 1.21 より，ある $a \in A \setminus \{0\}$ と A 上代数的独立な x_1, …, $x_n \in B[b^{-1}]$ が存在して，$B[b^{-1}, a^{-1}]$ が $A[x_1, \dots, x_n][a^{-1}]$ 上整となる．$\mathbb{K}$ を代数閉体とし，$\tau \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{K})$ が $\tau(a) \neq 0$ を満たすとすると，τ は $\tau' \in \operatorname{Hom}(A[a^{-1}], \mathbb{K})$ に一意に拡張される．さらに，x_1, …, x_n は A 上代数的独立であり，したがって $A[a^{-1}]$ 上代数的独立でもあるから，τ' を拡張する $\tau'' \in \operatorname{Hom}(A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n], \mathbb{K})$ が存在する．$B[a^{-1}, b^{-1}]$ は $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$ 上整だから，上昇定理の系 [1, Chapter 5, Exercise 2] より，τ'' を拡張する $\tau''' \in \operatorname{Hom}(B[a^{-1}, b^{-1}], \mathbb{K})$ が存在する．$\widetilde{\tau} = \tau'''|_B \in \operatorname{Hom}(B, \mathbb{K})$ が主張の条件を満たす環準同型となる． □

命題 1.23　V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．多項式写像 $\phi\colon V \to W$ に対する次の条件について，(a) $\iff$ (b) $\Longleftarrow$ (c) が成り立つ．さらに，$\mathbb{K}$ が代数閉ならば，これらの条件は同値である．

(a) ϕ は支配的である．
(b) $\phi(V)$ は W において Zariski 稠密である．
(c) V の任意の Zariski 稠密開集合の ϕ による像は，W のある Zariski 稠密開集合を含む．

証明　(a) $\iff$ (b)　次のとおり，主張の同値性が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\phi \text{ が支配的でない} &\iff \text{ある } g \in \operatorname{Pol}(W) \setminus \{0\} \text{ が存在して，} g \circ \phi = 0 \\
&\iff \text{ある } g \in \operatorname{Pol}(W) \setminus \{0\} \text{ が存在して，} \phi(V) \subseteq g^{-1}(\{0\}) \\
&\iff W \text{ の真の Zariski 閉集合であって } \phi(V) \text{ を含むものが存在する} \\
&\iff \phi(V) \text{ が } W \text{ において Zariski 稠密でない．}
\end{aligned}$$

(c) $\Longrightarrow$ (b)　明らかである．

(a) $\Longrightarrow$ (c) ($\mathbb{K}$ が代数閉である場合)　ϕ が支配的であるとする．すると，ϕ による引き戻し $\phi^*\colon \operatorname{Pol}(W) \to \operatorname{Pol}(V)$ は単射環準同型だから，これによって $\operatorname{Pol}(W)$ を $\operatorname{Pol}(V)$ の部分環とみなして補題 1.22 を適用することで，次を得る．

> 任意の $f \in \operatorname{Pol}(V) \setminus \{0\}$ に対して，ある $g \in \operatorname{Pol}(W) \setminus \{0\}$ が存在して，$\tau \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Pol}(W), \mathbb{K})$ であって $\tau(g) \neq 0$ を満たす任意のものに対して，$\widetilde{\tau} \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Pol}(V), \mathbb{K})$ であって $\widetilde{\tau} \circ \phi^* = \tau$ かつ $\widetilde{\tau}(b) \neq 0$ を満たすものが存在する．

補題 1.20 に注意すれば，これは，次のように書き換えられる．

> 任意の $f \in \mathrm{Pol}(V) \setminus \{0\}$ に対して，ある $g \in \mathrm{Pol}(W) \setminus \{0\}$ が存在して，$w \in W$ であって $g(w) \neq 0$ を満たす任意のものに対して，$v \in \phi^{-1}(\{w\})$ であって $f(v) \neq 0$ を満たすものが存在する．

この命題の「$w \in W$ であって」以下の部分は，$\phi(\{f \neq 0\}) \supseteq \{g \neq 0\}$ であることを意味する．よって，V の任意の Zariski 稠密開集合の ϕ による像は，W のある Zariski 稠密開集合を含む． □

V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間，$\phi\colon V \to W$ を多項式写像とし，$x_0 \in V$ とする．$\phi(x_0+h)$ を $h \in V$ に関して次数ごとに整理して

$$\phi(x_0+h) = \phi(x_0) + \delta_1(h) + \cdots + \delta_n(h) \qquad (\delta_i\colon V \to W \text{ は斉 } i \text{ 次多項式写像})$$

と表すときの線型写像 $\delta_1\colon V \to W$ を，ϕ の点 x_0 における**微分**（derivative）といい，$\phi'(x_0)$ と書く．

命題 1.24　V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．多項式写像 $\phi\colon V \to W$ のある点 $x_0 \in V$ における微分 $\phi'(x_0)\colon V \to W$ が全射ならば，ϕ は支配的である．

証明　一般性を失わず，$\phi(0) = 0$ であり，$\phi'(0)\colon V \to W$ が全射であるとする．すなわち，ϕ は全射線型写像 $\phi'(0)$ と 2 次以上の項のみからなる多項式写像との和であるとする．$g \in \mathrm{Pol}(W) \setminus \{0\}$ とし，g の斉 i 次部分を g_i と書き，$n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid g_i \neq 0\}$ と置く．すると，$g \circ \phi$ は斉 n 次多項式関数 $g_n \circ \phi'(0)$ と $n+1$ 次以上の項のみからなる多項式関数との和となり，$\phi'(0)$ は全射であり $g_n \neq 0$ だから，$g \circ \phi \neq 0$ を得る．よって，ϕ による引き戻し $\phi^*\colon \mathrm{Pol}(W) \to \mathrm{Pol}(V)$ は単射だから，ϕ は支配的である． □

1.5　Cartan 部分代数の共役性

V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．線型写像 $T\colon V \to V$ が**局所冪零**（locally nilpotent）であるとは，任意の $v \in V$ に対して，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$T^n(v) = 0$ を満たすことをいう．V が有限次元である場合には，T が冪零であることと局所冪零であることとは同値である．

V 上の局所冪零な線型写像 T に対して，V 上の線型写像 e^T を，

$$e^T(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n(v)$$

（右辺は有限項を除き 0 である）と定める[*1]．容易に確かめられるように，T と S が互いに可換な V 上の局所冪零な線型写像ならば，$e^{T+S} = e^T e^S = e^S s^T$ が成り立つ．特に，e^T は，e^{-T} を逆にもつ V の自己線型同型である．また，A が結合的とは限らない代数であり，D がその上の局所冪零な導分ならば，e^D は結合的とは限らない代数 A の自己同型である．

定義 1.25（初等自己同型）　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．$\mathrm{ad}(x)$ が冪零であるような $x \in \mathfrak{g}$ に対する自己同型 $e^{\mathrm{ad}(x)}$ の全体が生成する $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の部分群を，$\mathrm{Aut}_{\mathrm{e}}(\mathfrak{g})$ と書く．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{e}}(\mathfrak{g})$ の元を，$\mathfrak{g}$ の**初等自己同型**（elementary automorphism）という．

[*1] 本小節の範囲では，V が有限次元である（したがって，T が冪零である）場合だけで十分である．一般の場合の定義は，3 節や 4 節で用いられる．

$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする．このとき，$\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$，$x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ とすると，$\mathrm{ad}(x)$ は冪零だから（命題 1.14），$e^{\mathrm{ad}(x)} \in \mathrm{Aut_e}(\mathfrak{g})$ が定まる．本小節の以下の部分では，この形の初等自己同型全体が生成する $\mathrm{Aut_e}(\mathfrak{g})$ の部分群を，$E(\mathfrak{h})$ と書くことにする．

補題 1.26　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする．$\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ であって $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \neq 0$ を満たすもの（$\mathfrak{g}$ が有限次元であることと命題 1.7 より，このような λ は有限個である）を重複なく列挙して，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．

(1) $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})\}$ と置くと，$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ は $\mathfrak{h}$ の Zariski 稠密開集合である．
(2) 写像 $\phi\colon \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \cdots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}$ を

$$\phi(h, x_1, \ldots, x_n) = e^{\mathrm{ad}(x_1)} \cdots e^{\mathrm{ad}(x_n)}(h)$$

と定めると，これは支配的な多項式写像である．

証明　(1)　$h \in \mathfrak{g}$ とする．直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$ が成立するから（系 1.13），

$$\mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i(h)=0} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$$

である．したがって，$\mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ であるための必要十分条件は，$\lambda_1(h), \ldots, \lambda_n(h)$ がいずれも 0 でないことである．よって，$\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$ は，$\mathfrak{h}$ 上の多項式関数 $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ の非零点集合だから，$\mathfrak{h}$ の Zariski 稠密開集合である．

(2)　$p \in \mathbb{N}$ を任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h}))^p = 0$ を満たすようにとると（命題 1.14），写像 ϕ は

$$\phi(h, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{p-1} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \mathrm{ad}(x_1)^{k_1} \cdots \mathrm{ad}(x_n)^{k_n}(h)$$

と書けるから，これは多項式写像である．次に，ϕ が支配的であることを示すために，$h \in \mathfrak{h}$ を固定して，微分 $\phi'(h, 0, \ldots, 0)$ を求める．$\phi(h+u, 0, \ldots, 0) = h + u$（$u \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$）より

$$\phi'(h, 0, \ldots, 0)(u, 0, \ldots, 0) = u$$

であり，$\phi(h, 0, \ldots, v_i, \ldots, 0) = h + [v_i, h] + \sum_{k=2}^{p-1} \mathrm{ad}(v_i)^k(h)$（$v_i \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$）より

$$\phi'(h, 0, \ldots, 0)(0, 0, \ldots, v_i, \ldots, 0) = [v_i, h]$$

である．したがって，微分 $\phi'(h, 0, \ldots, 0)\colon \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \cdots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}$ は，

$$\phi'(h, 0, \ldots, 0)(u, v_1, \ldots, v_n) = u + [v_1, h] + \cdots + [v_n, h]$$

で与えられる．ここで，$h \in \mathfrak{h}$ を $\lambda_1(h), \ldots, \lambda_n(h)$ がいずれも 0 でないようにとっておけば，$\mathrm{ad}(h)$ は各 $\mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$ 上で線型同型となるから，上式より，$\phi'(h, 0, \ldots, 0)$ の像は $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$（系 1.13）となる．よって，命題 1.24 より，ϕ は支配的である．　□

補題 1.27　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}_1$ と $\mathfrak{h}_2$ をその Cartan 部分代数とする．このとき，$\phi_1 \in E(\mathfrak{h}_1)$ と $\phi_2 \in E(\mathfrak{h}_2)$ であって，$\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ を満たすものが存在する．

証明　各 $i \in \{1,2\}$ に対して，定理 1.17 より $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_i$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{i,\mathrm{reg}} &= \{h \in \mathfrak{h}_i \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_i)\} \\ &= \{h \in \mathfrak{h}_i \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{h}_i\}\end{aligned}$$

と置く．すると，補題 1.26 と命題 1.23 より，$E(\mathfrak{h}_i)\mathfrak{h}_{i,\mathrm{reg}}$ は $\mathfrak{g}$ のある Zariski 稠密開集合を含む．特に，$E(\mathfrak{h}_1)\mathfrak{h}_{1,\mathrm{reg}} \cap E(\mathfrak{h}_2)\mathfrak{h}_{2,\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ である．すなわち，各 $i \in \{1,2\}$ に対して $\phi_i \in E(\mathfrak{h}_i)$ と $h_i \in \mathfrak{h}_{i,\mathrm{reg}}$ をとって，$\phi_1(h_1) = \phi_2(h_2)$ となるようにできる．各 $i \in \{1,2\}$ に対して

$$\phi_i(\mathfrak{h}_i) = \phi_i(\mathfrak{g}^0(h_i)) = \mathfrak{g}^0(\phi_i(h_i))$$

だから，$\phi_1(h_1) = \phi_2(h_2)$ より $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ である．　□

定理 1.28（Cartan 部分代数の共役性）　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathrm{e}}(\mathfrak{g})$ の部分群 $E(\mathfrak{h})$ は，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$（系 1.18 より存在する）のとり方によらない．これを E と書くと，E は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群である．
(2) $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は，すべて E（(1) の記号）の下で共役である．

証明　(1)　$\mathfrak{h}_1$ と $\mathfrak{h}_2$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると，補題 1.27 より，$\phi_1 \in E(\mathfrak{h}_1)$ と $\phi_2 \in E(\mathfrak{h}_2)$ を $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ となるようにとれる．各 $i \in \{1,2\}$ に対して

$$E(\mathfrak{h}_i) = \phi_i E(\mathfrak{h}_i)\phi_i^{-1} = E(\phi_i(\mathfrak{h}_i))$$

だから，$\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ より $E(\mathfrak{h}_1) = E(\mathfrak{h}_2)$ である．

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とし，$\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ とすると，$\phi(\mathfrak{h})$ も $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数だから，

$$\phi E\phi^{-1} = \phi E(\mathfrak{h})\phi^{-1} = E(\phi(\mathfrak{h})) = E$$

が成り立つ．よって，E は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群である．

(2)　(1) の証明の前段の状況で，$\phi_2^{-1}\phi_1 \in E$ は，$\mathfrak{h}_1$ を $\mathfrak{h}_2$ に移す．　□

系 1.29　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は，すべて等しい次元をもつ．

証明　$\overline{\mathbb{K}}$ を $\mathbb{K}$ の代数閉包とする．$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると，それらの係数拡大 $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ と $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の Cartan 部分代数だから（命題 1.6），Cartan 部分代数の共役性（定理 1.28）より，$\dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})} = \dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ である．よって，$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}'$ である．　□

定義 1.30（階数）　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の次元（系 1.18 と系 1.29 より，これは一意に定まる）を，$\mathfrak{g}$ の**階数**（rank）という．

系 1.31　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

(1) $\mathfrak{g}$ の階数は，$x \in \mathfrak{g}$ に対する部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}^0(x)$ の次元の最小値に等しい．
(2) $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{g}^0(x)$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}^0(x)$ の次元が $\mathfrak{g}$ の階数に等しいことである．
(3) $\mathfrak{g}$ の任意の Cartan 部分代数は，(2) の方法で得られる．

証明　定理 1.17 で示したように，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x\in\mathfrak{g}}$ に属し，かつこの中で極小であることである．このことと階数の定義から，主張が従う．□

1.6　簡約 Lie 代数の Cartan 部分代数

命題 1.32　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．
(b) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ が存在して，$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'\oplus\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ と書ける．

証明　簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，半単純 Lie 代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に（Lie 代数として）直和分解される [4, 定理 6.23]．よって，主張は，命題 1.5 から従う．□

補題 1.33　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は，可換である．

証明　$\mathfrak{g}$ の随伴表現の $\mathfrak{h}$ への制限を $\rho\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ と置くと，ρ のトレース形式は，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B の制限 $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ にほかならない．半単純性に関する Cartan の判定法 [4, 定理 6.10] より B は非退化だから，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}=B|_{\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})\times\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})}$ も非退化である（定理 1.17，命題 1.15）．したがって，$\mathfrak{h}$ は簡約である [4, 定理 6.23]．一方で，$\mathfrak{h}$ は冪零でもあるから，$\mathfrak{h}$ は可換である．□

補題 1.34　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする．このとき，任意の $x\in\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ に対して，その $\mathfrak{g}$ における半単純部分 x_{s} と冪零部分 x_{n} は，ともに $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ に属する．特に，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると，任意の $x\in\mathfrak{h}$ に対して，その $\mathfrak{g}$ における半単純部分 x_{s} と冪零部分 x_{n} は，ともに $\mathfrak{h}$ に属する．

証明　$x,y\in\mathfrak{g}$ として，y の半単純部分を y_{s} と書くと，

$$x\in\mathfrak{g}^0(y)\iff x\in\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(y_{\mathrm{s}})\iff[x,y_{\mathrm{s}}]=0$$

である．上式において，x をその半単純部分 x_{s} に置き換えても，同じ同値性が成り立つ．$\mathrm{ad}(x_{\mathrm{s}})$ は $\mathrm{ad}(x)$ の線型写像としての半単純部分だから，Jordan 分解に関する一般論より，$\mathrm{ad}(x_{\mathrm{s}})$ は $\mathrm{ad}(x)$ の定数項をもたない多項式として表せる．したがって，$[x,y_{\mathrm{s}}]=0$ ならば $[x_{\mathrm{s}},y_{\mathrm{s}}]=0$ である．上記の同値性と合わせて，$x\in\mathfrak{g}^0(y)$ ならば $x_{\mathrm{s}}\in\mathfrak{g}^0(y)$ であることを得る．よって，x が $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})=\bigcap_{y\in\mathfrak{h}}\mathfrak{g}^0(y)$ に属するならば，x_{s} と $x_{\mathrm{n}}=x-x_{\mathrm{s}}$ も $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ に属する．

$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ならば，$\mathfrak{h}$ は冪零であり，$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ（定理 1.17）．よって，後半の主張は，前半の主張から従う．□

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分線型空間 $\mathfrak{h}$ が（$\mathfrak{g}$ において）**極大可換**（maximally commutative）であるとは，$\mathfrak{h}$ が可換であり，かつ $\mathfrak{g}$ の可換な部分線型空間であって $\mathfrak{h}$ を真に含むものが存在しないことをいう．容易に確かめられるように，これが成り立つための必要十分条件は，$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ であることである．

定理 1.35　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．

(b) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ において極大可換であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元は半単純である．

証明 定理 1.17 ですでに示したように，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ であることである．また，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が半単純ならば，その同時固有値 0 の同時広義固有空間 $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ は，同時固有値 0 の同時固有空間，すなわち $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に等しい．よって，主張を示すためには，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるとして，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が半単純であることを示せばよい．

命題 1.32 より，一般性を失わず，$\mathfrak{g}$ は半単純であると仮定する．$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるとして，$x \in \mathfrak{h}$ を任意にとり，その Jordan 分解を $(x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}})$ と書く．すると，$x_{\mathrm{n}} \in \mathfrak{h}$ であり（補題 1.34），$\mathfrak{h}$ は可換だから（補題 1.33），$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{n}})$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元と可換である．さらに，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{n}})$ は冪零だから，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{n}})$ の任意の元も冪零である．したがって，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B と書くと，

$$B(\mathfrak{h}, x_{\mathrm{n}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{n}})) = 0$$

である．$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})\times\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})}$ は非退化だから（定理 1.17，命題 1.15），上式より，$x_{\mathrm{n}} = 0$ を得る．よって，$x = x_{\mathrm{s}}$ であり，x は半単純である．すなわち，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は半単純である． □

2 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

Lie 代数

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}\, x = 0\}$$

を考え，

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置くと，(H, X, Y) は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の基底である．これを，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の**標準基底**（standard basis）という．これらの元 H, X, Y は，関係式

$$[H, X] = 2X, \qquad [H, Y] = -2Y, \qquad [X, Y] = H$$

を満たす．

本節では，特に断らなくても，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を記号 (H, X, Y) で表す．

2.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群のウェイト

定義 2.1（ウェイト） V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とする．$H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の V への作用の固有値，固有ベクトル，固有空間を，それぞれ，V の**ウェイト**（weight），**ウェイトベクトル**（weight vector），**ウェイト空間**（weight space）という．H の V への作用における固有値 $\lambda \in \mathbb{K}$ の重複度を，V におけるウェイト λ の**重複度**（multiplicity）という．

定義 2.2（ウェイト加群） $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V は，それがウェイト空間の直和に分解される（すなわち，$H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の V への作用が対角化可能である）とき，**ウェイト加群**（weight module）であるという．

命題 2.3 V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とする．$v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルならば，Xv はウェイト $\lambda + 2$ のウェイトベクトルであり，Yv はウェイト $\lambda - 2$ のウェイトベクトルである．

証明　$v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルであるとすると，$Hv = \lambda v$ だから，

$$HXv = XHv + [H, X]v = \lambda Xv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv,$$
$$HYv = YHv + [H, Y]v = \lambda Yv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv$$

である．すなわち，Xv はウェイト $\lambda + 2$ のウェイトベクトルであり，Yv はウェイト $\lambda - 2$ のウェイトベクトルである． □

命題 2.4　$f \colon V \to W$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の間の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-準同型とする．$v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルならば，$f(v) \in W$ はウェイト λ のウェイトベクトルである．

証明　$v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルであるとすると，$Hv = \lambda v$ だから，

$$Hf(v) = f(Hv) = \lambda f(v)$$

である．すなわち，$f(v)$ はウェイト λ のウェイトベクトルである． □

2.2　最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群

定義 2.5（極大ベクトル）　$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V のウェイトベクトル $e \neq 0$ であって $Xe = 0$ を満たすものを，V の**極大ベクトル**（maximal vector）という．V の極大ベクトルであって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群として生成するものを，$V$ の**極大生成ベクトル**（maximal generating vector）という．

定義 2.6（最高ウェイト加群）　$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の極大生成ベクトルをもつとき，V は**最高ウェイト λ の最高ウェイト加群**（highest weight module of highest weight λ）であるという．

命題 2.7　$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．V をウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の極大ベクトル e をもつ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$e_n = \frac{1}{n!} Y^n e$$

と定める．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$He_n = (\lambda - 2n)e_n, \qquad Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \qquad Ye_n = (n + 1)e_{n+1}$$

が成り立つ．ただし，$e_{-1} = 0$ とみなす．

以下では，さらに，e が V の極大生成ベクトルである（したがって，V は最高ウェイト λ の最高ウェイト加群である）とする．

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n \neq 0$ であるとする．このとき，$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は V の基底である．
(3) ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n = 0$ であるとして，$m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \neq 0\}$ と置く．このとき，$(e_0, \dots, e_m)$ は V の基底であり，$\lambda = m$ である．

証明　(1)　H の作用に関する主張は命題 2.3 から従い，Y の作用に関する主張は e_n の定義から明らかである．X の作用に関する主張を，$n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$e_0 = e$ は極大ベクトルだから

$Xe_0=0$ である．$n\geq 1$ とし，$Xe_{n-1}=(\lambda-n+2)e_{n-2}$ が成り立つとすると，

$$\begin{aligned}
nXe_n &= XYe_{n-1}\\
&= YXe_{n-1}+[X,Y]e_{n-1}\\
&= Y(\lambda-n+2)e_{n-2}+He_{n-1}\\
&= (n-1)(\lambda-n+2)e_{n-1}+(\lambda-2n+2)e_{n-1}\\
&= n(\lambda-n+1)e_{n-1}
\end{aligned}$$

となり，$Xe_n=(\lambda-n+1)e_{n-1}$ が成り立つ．これで，帰納法が完成した．

(2)　(1) より，$\operatorname{span}\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ は V の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群である．$e_0=e$ は V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群として生成するから，$V=\operatorname{span}\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ である．また，仮定より e_n はいずれも 0 でなく，(1) よりすべて異なるウェイトのウェイトベクトルだから，$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は線型独立である．よって，$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は V の基底である．

(3)　$(e_0,\dots,e_m)$ が V の基底であることは，(2) と同様にして示せる．また，$e_m\neq 0$ かつ $e_m=0$ であり，一方で (1) より $Xe_{m+1}=(\lambda-m)e_m$ だから，$\lambda=m$ が成り立つ．　□

最高ウェイト $\lambda\in\mathbb{K}$ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，もし存在すれば，その構造は命題 2.7 によって決まってしまう．分類を完成させるために，与えられた最高ウェイトの最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群を具体的に構成する．

$\lambda\in\mathbb{K}$ に対して，線型空間としては $M(\lambda)=\mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}$ と定め（その標準基底を $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と書く），H, X, $Y\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の $M(\lambda)$ への線型作用を

$$He_n=(\lambda-2n)e_n,\qquad Xe_n=(\lambda-n+1)e_{n-1},\qquad Ye_n=(n+1)e_{n+1}$$

によって定める（ただし，$e_{-1}=0$ とみなす）．これらの作用を標準基底 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関して行列表示すれば，

$$H=\begin{pmatrix}\lambda &&&\\ &\lambda-2&&\\ &&\lambda-4&\\ &&&\ddots\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}0&\lambda&&\\ &0&\lambda-1&\\ &&0&\ddots\\ &&&\ddots\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}0&&&\\ 1&0&&\\ &2&0&\\ &&\ddots&\ddots\end{pmatrix}$$

となる．容易に確かめられるように，これらの作用によって，$M(\lambda)$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群をなす．明らかに，$e_0$ は $M(\lambda)$ のウェイト λ の極大生成ベクトルである．

さらに，$\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする．このとき，$M(\lambda)$ において $Xe_{\lambda+1}=(\lambda-(\lambda+1)+1)e_\lambda=0$ だから，

$$N(\lambda)=\operatorname{span}\{e_{\lambda+1},e_{\lambda+2},\dots\}$$

と定めると，これは $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群である．これを用いて

$$L(\lambda)=M(\lambda)/N(\lambda)$$

と定め，$M(\lambda)$ から $N(\lambda)$ への等化準同型による各 e_n の像をそのまま e_n と書く．明らかに，$L(\lambda)$ は $(e_0,\dots,e_\lambda)$ を基底にもつ $\lambda+1$ 次元の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群であり，$e_0$ は $L(\lambda)$ のウェイト λ の極大生成ベクトルである．H, X, $Y\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の $L(\lambda)$ への作用を基底 $(e_0,\dots,e_\lambda)$ に関して行列表示すれば，

$$H=\begin{pmatrix}\lambda&&&&\\ &\lambda-2&&&\\ &&\lambda-4&&\\ &&&\ddots&\\ &&&&-\lambda\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}0&\lambda&&&\\ &0&\lambda-1&&\\ &&0&\ddots&\\ &&&\ddots&1\\ &&&&0\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}0&&&&\\ 1&0&&&\\ &2&0&&\\ &&\ddots&\ddots&\\ &&&\lambda&0\end{pmatrix}$$

となる．

定理 2.8（最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類） $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．$\lambda \in \mathbb{K}$ とする．

(1) $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする．このとき，最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，同型を除いて $M(\lambda)$ のみである．$M(\lambda)$ は無限次元かつ既約なウェイト加群であり，そのウェイトは λ, $\lambda-2$, $\lambda-4$, $\ldots$（すべて重複度 1）である．

(2) $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする．このとき，最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，同型を除いて $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ のみである．$M(\lambda)$ は無限次元かつ可約なウェイト加群であり，そのウェイトは λ, $\lambda-2$, $\lambda-4$, $\ldots$（すべて重複度 1）である．$L(\lambda)$ は $\lambda+1$ 次元かつ既約なウェイト加群であり，そのウェイトは λ, $\lambda-2$, $\lambda-4$, $\ldots$, $-\lambda$（すべて重複度 1）である．

証明 最高ウェイト加群の分類に関する主張は，命題 2.7 から従う．次元とウェイトに関する主張は，明らかである．

既約性に関する主張を示す．まず，$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとすると，$M(\lambda)$ は，部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $N(\lambda) \neq 0$, $M(\lambda)$ をもつから，可約である．次に，$\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとして，$M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $N \neq 0$ を任意にとる．$v \in M \setminus \{0\}$ を一つ固定して $v = \sum_{n=0}^{m} c_n e_n$（$c_n \in \mathbb{K}$，$c_m \neq 0$）と表すと，命題 2.7 より

$$X^m v = \sum_{n=0}^{m} c_n X^m e_n = c_m(\lambda - p + 1)(\lambda - p + 2)\cdots\lambda e_0$$

である．これは，$\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ より e_0 の 0 でないスカラー倍であり，N に属する．e_0 は $M(\lambda)$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群として生成するから，$N = M(\lambda)$ となる．よって，$M(\lambda)$ は既約である．$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である場合に $L(\lambda)$ が既約であることも，同様にして示せる． □

系 2.9 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．V をウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の極大ベクトル e をもつ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とし，$e$ が生成する V の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ を M と置く．M が有限次元ならば，$\lambda = \dim M - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．

証明 e は M の極大生成ベクトルだから，主張は，最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.8）から従う． □

2.3 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群

補題 2.10 A を単位的結合代数とする[*2]．

(1) h, $x \in A$ が $[h,x] = 2x$ を満たすならば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$[h,x^n] = 2nx^n$ が成り立つ．

(2) h, x, $y \in A$ が $[h,x] = 2x$ かつ $[x,y] = h$ を満たすならば，任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して，$[x^n,y] = nx^{n-1}(h+n-1) = n(h-n+1)x^{n-1}$ が成り立つ．

証明 (1) $[h,x] = 2x$ だから，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$[h,x^n] = \sum_{i=0}^{n-1} x^i [h,x] x^{n-1-i} = 2nx^n$$

[*2] 本小節の範囲では，$A = \mathbf{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}))$ であり，下記の h, x, y がそれぞれ H, X, Y である場合だけで十分である．一般の場合の主張は，補題 3.21 の証明で用いられる（この補題は，存在定理（定理 3.22）の証明で用いられる）．

である．

(2)　$[x,y]=h$ であることと (1) より，$n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して，

$$\begin{aligned}
[x^n,y] &= \sum_{i=1}^{n-1} x^i[x,y]x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i h x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i(x^{n-1-i}h+[h,x^{n-1-i}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i(x^{n-1-i}h+2(n-1-i)x^{n-1-i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^{n-1}(h+2(n-1-i)) \\
&= nx^{n-1}(h+n-1)
\end{aligned}$$

である．また，(1) より $[h,x^{n-1}]=2(n-1)x^{n-1}$ だから，

$$\begin{aligned}
nx^{n-1}(h+n-1) &= n(h+n-1)x^{n-1}-[h,x^{n-1}] \\
&= n(h+n-1)x^{n-1}-2(n-1)x^{n-1} \\
&= n(h-n+1)x^{n-1}
\end{aligned}$$

である．□

命題 2.11　$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．0 でない有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V は，極大ベクトルをもつ．

証明　$X\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}^2$ 上の線型写像として冪零だから，その V への作用も冪零である [4, 命題 6.32 (2)]．そこで，$X^n\in\mathbf{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}))$ の V への作用が 0 になるような最小の $n\in\mathbb{N}$ をとる．$V\neq 0$ だから，$n\geq 1$ である．$X^{n-1}v\neq 0$ を満たす $v\in V$ をとり，$e=X^{n-1}v$ と置く．すると，$e\neq 0$ かつ $Xe=0$ である．また，

$$n(H-n+1)e=n(H-n+1)X^{n-1}v=[X^n,Y]v=0$$

（第 2 の等号は補題 2.10 (2) から，第 3 の等号は X^n の V への作用が 0 であることから従う）だから，$He=(n-1)e$ である．よって，e は V の極大ベクトルである．□

定理 2.12（有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類）　$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は，$\lambda\in\mathbb{N}$ に対する $L(\lambda)$ で同型を除いて尽くされる．$L(\lambda)$ は $\lambda+1$ 次元のウェイト加群であり，そのウェイトは $\lambda,\ \lambda-2,\ \lambda-4,\ \ldots,\ -\lambda$（すべて重複度 1）である．

証明　0 でない有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は極大ベクトルをもち（命題 2.11），有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の場合，それは自動的に極大生成ベクトルとなる．よって，主張は，最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.8）から従う．□

系 2.13　$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．V を有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とし，それにおけるウェイト $\lambda\in\mathbb{K}$ の重複度を m_λ と書く．

(1) V はウェイト加群であり，そのウェイトはすべて整数である．
(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$m_\lambda = m_{-\lambda}$ である．
(3) $m_0 \geq m_2 \geq m_4 \geq \cdots$ かつ $m_1 \geq m_3 \geq m_5 \geq \cdots$ である．
(4) V は完全可約である．さらに，$L(\lambda)$（$\lambda \in \mathbb{N}$）の V における重複度は，$m_{\lambda+2} - m_\lambda$ である．

証明　Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より V は完全可約だから，主張は，V が有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群である場合に示せば十分である．この場合の主張は，いずれも，有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.12）から容易に確かめられる．　□

系 2.14　$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．V を有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とし，そのウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイト空間を V_λ と書く．

(1) X の作用が定める V_λ から $V_{\lambda+2}$ への線型写像（命題 2.3 より定まる）は，λ が -1 以下の整数のとき単射であり，-1 以上の整数のとき全射である．
(2) Y の作用が定める V_λ から $V_{\lambda-2}$ への線型写像（命題 2.3 より定まる）は，λ が 1 以下の整数のとき全射であり，1 以上の整数のとき単射である．

証明　Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より V は完全可約だから，主張は，V が有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群である場合に示せば十分である．この場合の主張は，いずれも，有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.12）から容易に確かめられる．　□

3　分裂簡約 Lie 代数

3.1　分裂簡約 Lie 代数とそのルート系

定義 3.1（分裂半単純・簡約 Lie 代数）　$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の**分裂化 Cartan 部分代数**（splitting Cartan subalgebra）とは，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ であって，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ が同時対角化可能であるものをいう．このような $\mathfrak{h}$ が存在するとき，$\mathfrak{g}$ は**分裂可能**（splittable）であるといい，組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を**分裂簡約 Lie 代数**（split reductive Lie algebra）という．さらに，$\mathfrak{g}$ が半単純・単純である場合には，それぞれ，組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を**分裂半単純 Lie 代数**（split semisimple Lie algebra）・**分裂単純 Lie 代数**（split simple Lie algebra）という．

分裂簡約 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への**同型**（isomorphism）とは，同型 $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ であって $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ を満たすものをいう．これが存在するとき，$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ は**同型**（isomorphic）であるという．

$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とすると，$\mathfrak{h}$ は可換であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元は半単純である（定理 1.35）．したがって，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であるためには，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が三角化可能であれば十分である．

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とするとき，写像 $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ に対応する $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の同時固有空間を，$\mathfrak{g}_\alpha$ と書く．すなわち，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \alpha(h)x\}$$

と書く．明らかに，$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ となりうるのは $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ のときだけである．

定義 3.2（分裂簡約 Lie 代数のルート系） 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート系**（root system）を，

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

と定める．$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の各元を，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート**（root）という．

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると，$\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能であり，定理 1.35 より $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{Z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ だから，直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する．これを，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート空間分解**（root space decomposition）といい，各 $\mathfrak{g}_\alpha$（$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$）を，**ルート空間**（root space）という．$\mathfrak{g}$ は有限次元だから，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は有限である．

注意 3.3 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数の有限族とし，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く．このとき，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は，各 $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_i$ を用いて $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ と書ける（命題 1.5）．$h = \sum_{i \in I} h_i$（$h_i \in \mathfrak{h}_i$）に対して，

$$\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}(h_i)$$

だから，$\mathrm{ad}_\mathfrak{h}(h)$ が対角化可能であるための必要十分条件は，各 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_i}(h_i)$ が対角化可能であることである．したがって，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，各 $\mathfrak{h}_i$ が $\mathfrak{g}_i$ の分裂化 Cartan 部分代数であることである．さらに，これらの条件の下で，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i & (\alpha = 0) \\ (\mathfrak{g}_i)_{\alpha|_{\mathfrak{h}_i}} & (\alpha|_{\mathfrak{h}_i} \neq 0 \text{ かつ任意の } j \in I \setminus \{i\} \text{ に対して } \alpha|_{\mathfrak{h}_j} = 0) \\ 0 & (\text{任意の } j \in I \text{ に対して } \alpha|_{\mathfrak{h}_j} \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ．特に，$\mathfrak{h}^*$ から $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i^*$ への自然な線型同型写像は，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\coprod_{i \in I} \Delta(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ への全単射を与える．

注意 3.4 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とすると，$\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の（Lie 代数としての）直和に分解される [4, 定理 6.23]．よって，注意 3.3 の特別な場合として，次のことがいえる．

- $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は，$\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ を用いて，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ と書ける．$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，$\mathfrak{h}'$ が $\mathfrak{g}'$ の分裂化 Cartan 部分代数であることである．
- 上記の条件の下で，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) & (\alpha = 0) \\ \mathfrak{g}'_{\alpha|_{\mathfrak{h}'}} & (\alpha \neq 0 \text{ かつ } \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0) \\ 0 & (\alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} \neq 0) \end{cases}$$

  が成り立つ．特に，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ に含まれ，V から $\mathfrak{h}'^*$ への線型同型写像 $\alpha \mapsto \alpha|_{\mathfrak{h}'}$ は，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ への全単射を与える．

注意 3.5　$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし，$\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると，$\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}$ は $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Cartan 部分代数であり（命題 1.6 (1)），$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}}(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}) = \{T_{(\mathbb{K}')} \mid T \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\}$ は同時対角化可能だから，$(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})$ は $\mathbb{K}'$ 上の分裂簡約 Lie 代数である．また，$\alpha' \in (\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})^*$ に対して，

$$(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')})_{\alpha'} = \begin{cases} (\mathfrak{g}_\alpha)_{(\mathbb{K}')} & (\alpha' = \alpha_{(\mathbb{K}')},\ \alpha \in \mathfrak{h}^*) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が成り立つ．特に，$\mathfrak{h}^*$ から $(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})^*$ への写像 $\alpha \mapsto \alpha_{(\mathbb{K}')}$ は，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})$ への全単射を与える．これにより，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})$ は，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の $\mathbb{K}'$ への係数拡大と同一視できる．

命題 3.6　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．

(1) 任意の α, $\beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つ．
(2) $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ を不変な双線型形式とする．このとき，任意の α, $\beta \in \mathfrak{h}^*$ であって $\alpha + \beta \neq 0$ を満たすものに対して，$B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ が成り立つ．
(3) $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ を非退化かつ不変な双線型形式とする．このとき，任意の $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して，双線型形式 $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}\colon \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathbb{K}$ は非退化である．特に，双線型形式 $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ は非退化である．

証明　(1)　$x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$y \in \mathfrak{g}_\beta$ とすると，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y]$$

だから，$[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．よって，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．

(2)　$\alpha + \beta \neq 0$ であるとして，$\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$ を満たす $h \in \mathfrak{h}$ をとる．$x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$y \in \mathfrak{g}_\beta$ とすると，B の不変性より

$$0 = B([h, x], y) + B(x, [h, y]) = \alpha(h)B(x, y) + \beta(h)B(x, y)$$

だから，$B(x, y) = 0$ である．よって，$B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ である．

(3)　$x \in \mathfrak{g}_\alpha$ が $B(x, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = 0$ を満たすとする．(2) より，任意の $\beta \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}$ に対しても $B(x, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ だから，$B(x, \mathfrak{g}) = 0$ である．B は非退化だから，これより，$x = 0$ を得る．同様にして，$y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が $B(\mathfrak{g}_\alpha, y) = 0$ を満たすならば $y = 0$ であることもわかる．よって，$B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ は非退化である．特に，$\alpha = 0$ として，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ が非退化であることを得る．　□

系 3.7　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．任意の $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)$ のすべての元は冪零である．

証明　$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ は有限集合だから，$p \in \mathbb{N}$ を $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}) + p\alpha$ が $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ と交わらないようにとれる．このとき，任意の $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ に対して $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)^p \mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+p\alpha} = 0$ だから（命題 3.6 (1)），$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)^p \mathfrak{g} = 0$ である．よって，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)$ のすべての元は冪零である．　□

3.2　分裂簡約 Lie 代数における $\mathfrak{sl}_2$-三対

定義 3.8（$\mathfrak{sl}_2$-三対）　$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を (H, X, Y) と書く．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ における **$\mathfrak{sl}_2$-三対**（$\mathfrak{sl}_2$-triple）とは，$\mathfrak{g}$ の元の組 (h, x, y) であって，H, X, Y をそれぞれ h, x, y に移す $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ から $\mathfrak{g}$ への線型写像が単射準同型であるものをいう．

注意 3.9 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 h, x, y が，少なくとも一つは 0 でなく，関係式 $[h,x]=2x$, $[h,y]=-2y$, $[x,y]=h$ を満たすとする．このとき，容易に確かめられるように，h, x, y はいずれも 0 でない．さらに，h, x, y は $\mathrm{ad}(h)$ の異なる固有空間に属するから，これらは線型独立である．よって，このとき，(h,x,y) は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．

定理 3.10 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．各 $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ および $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ は 1 次元である．
(2) $H_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$ であって $\alpha(H_\alpha)=2$ を満たすものが一意に存在する．
(3) H_α を (2) のとおりに定める．任意の $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ に対して，$Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ であって $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$ を満たすものが一意に存在する．さらに，このとき，$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．

証明 $\mathfrak{g}$ 上の非退化かつ不変な双線型形式 B を一つ固定する（$\mathfrak{g}$ は簡約だから，$\mathfrak{g}$ の有限次元表現であって，非退化なトレース形式をもつものが存在する [4, 定理 6.23]．このトレース形式を B とすればよい [4, 命題 3.23 (1)]）．命題 3.6 (3) より，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ や $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ も非退化である．次の 4 段階に分けて，主張を示す．

(I) $\mathfrak{h}_\alpha$ が 1 次元であることを示す．$\mathfrak{h}$ 上の双線型形式 $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化だから，$h_\alpha\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ であって任意の $h\in\mathfrak{h}$ に対して $B(h,h_\alpha)=\alpha(h)$ を満たすものが（一意に）存在する．$x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ とすると，$[x,y]\in\mathfrak{h}$（命題 3.6 (1)）であり，任意の $h\in\mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}B(h,[x,y])&=B([h,x],y)\\&=\alpha(h)B(x,y)\\&=B(h,h_\alpha)B(x,y)\\&=B(h,B(x,y)h_\alpha)\end{aligned}$$

だから，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ が非退化であることより

$$[x,y]=B(x,y)h_\alpha \tag{$*$}$$

が成り立つ．一方で，$\mathfrak{g}_\alpha\neq 0$ であることと $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が非退化であることより，$B(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha})=\mathbb{K}$ である．よって，$\mathfrak{h}_\alpha=B(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha})h_\alpha=\mathbb{K}h_\alpha$ であり，$\mathfrak{h}_\alpha$ は 1 次元である．

(II) $\alpha(H_\alpha)=2$ を満たす $H_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$ が一意に存在することを示す．(I) で示したように $\mathfrak{h}_\alpha$ は 1 次元だから，あとは，$\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}\neq 0$ であることをいえばよい．$\mathfrak{h}_\alpha$ は 1 次元だから，$\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のそれぞれの 1 次元部分線型空間 $\mathfrak{g}'_\alpha$ と $\mathfrak{g}'_{-\alpha}$ を，$[\mathfrak{g}'_\alpha,\mathfrak{g}'_{-\alpha}]=\mathfrak{h}_\alpha$ を満たすようにとれる．ここで，$\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}=0$ であると仮定すると，$[\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{g}'_\alpha]=[\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{g}'_{-\alpha}]=0$ となる．したがって，$\mathfrak{s}=\mathfrak{h}_\alpha+\mathfrak{g}'_\alpha+\mathfrak{g}'_{-\alpha}$ と置くと，

$$[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{h}_\alpha,\qquad[\mathfrak{s},[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]]=[\mathfrak{s},\mathfrak{h}_\alpha]=[\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{h}_\alpha]=0$$

となるから，$\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数である．$\mathfrak{s}$ の冪零根基は $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{h}_\alpha$ だから [4, 定理 5.15]，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha)$ のすべての元は冪零である [4, 命題 5.10]．一方で，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha)\subseteq\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能でもあるから，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha)=0$ となる．随伴表現 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ が $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上で単射であることと合わせれば，$\mathfrak{h}_\alpha=0$ を得るが，これは (I) に反する．よって，背理法より，$\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha}\neq 0$ である．

(III) 任意の $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ に対して，$(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるような $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ をとれることを示す．$B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が非退化であることと ($*$) より $[X_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=\mathfrak{h}_\alpha$ だから，$Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$ となるようにとれる．H_α, X_α, Y_α はいずれも 0 でなく，ルート空間分解に関して異なる直和因子に属するから，

これらは線型独立である．また，これらは関係式

$$[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha, \qquad [H_\alpha, Y_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha, \qquad [X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$$

を満たす．よって，$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．

(IV) $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が 1 次元であることを示す（このことから，(3) の一意性も従う）．$\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ には非退化な双線型形式 $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が存在するから，$\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ の次元は等しい．以下，$\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が 1 次元であることを示す．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を (H, X, Y) と書き，(III) でとった $\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ と随伴表現によって，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とみなす．すると，任意の $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して，

$$\begin{aligned} Hy &= [H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha) = -2y, \\ Xy &= [X_\alpha, y] = B(X_\alpha, y)h_\alpha \end{aligned}$$

となる（第 2 式の第 2 の等号は，($*$) による）．ここで，$y \neq 0$ かつ $B(X_\alpha, y) = 0$ であるとすると，y は有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $\mathfrak{g}$ のウェイト -2 の極大ベクトルとなるが，これは系 2.9 に反する．よって，任意の $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ に対して $B(X_\alpha, y) = 0$ だが，そのためには，$\mathfrak{g}_{-\alpha}$ はたかだか 1 次元でなければならない．一方で，$-\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ より $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq 0$ だから，$\mathfrak{g}_{-\alpha}$ は 1 次元である． □

3.3 被約ルート系の公理を満たすことの証明

補題 3.11 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると，任意の α, $\beta \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，$\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である．ここで，H_α は，定理 3.10 によって定まるものとする．

証明 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$-三対となるようにとり（定理 3.10 (3)），これよ随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とみなす．すると，$H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ は $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$ に $\beta(H_\alpha)$ 倍で作用するから，有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $\mathfrak{g}$ はウェイト $\beta(H_\alpha)$ をもつ．系 2.13 (1) より，これは整数である． □

補題 3.12 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元部分線型空間とし，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(h)x\}$$

と書く．$\alpha \in \mathfrak{h}^*$，$H_\alpha \in \mathfrak{h}$，$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ とし，これらは次の条件を満たすとする[*3]．

(i) $\alpha(H_\alpha) = 2$ である．
(ii) $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である．
(iii) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\mathrm{ad}(X_\alpha)$ と $\mathrm{ad}(Y_\alpha)$ は局所冪零である．

このとき，

$$\theta_\alpha = e^{\mathrm{ad}(X_\alpha)} e^{\mathrm{ad}(-Y_\alpha)} e^{\mathrm{ad}(X_\alpha)} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると，次が成り立つ．

(1) θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし，$\theta_\alpha|_\mathfrak{h}$ は，$s_{H_\alpha}(h) = h - \alpha(h)H_\alpha$ によって定まる $\mathfrak{h}$ 上の線型写像 s_{H_α} に等しい．
(2) $(\theta_\alpha|_\mathfrak{h})^*$ は，$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$ によって定まる $\mathfrak{h}^*$ 上の線型写像 s_α に等しい．

[*3] 本小節の範囲では，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数であり，$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が定理 3.10 のように定まる $\mathfrak{sl}_2$-三対である場合だけで十分である．一般の場合の主張は，存在定理（定理 3.22）の証明で用いられる．

(3) s_α を (2) のとおりに定める．このとき，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ である．

証明 (1) 条件 (i) より，直和分解 $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \mathbb{K}\alpha$ が成立する．$h \in \operatorname{Ker}\alpha$ に対しては，$\operatorname{ad}(X_\alpha)h = \alpha(h)X_\alpha = 0$ かつ $\operatorname{ad}(Y_\alpha)h = -\alpha(h)Y_\alpha = 0$ だから，

$$\theta_\alpha(h) = h = s_{H_\alpha}(h)$$

である．また，容易に確かめられるように，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$（その標準基底を (H, X, Y) と書く）において $e^{\operatorname{ad}(X)}e^{\operatorname{ad}(-Y)}e^{\operatorname{ad}(X)}(H) = -H$ が成り立つから，条件 (ii) と (i) より，

$$\theta_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha = s_{H_\alpha}(H_\alpha)$$

である．よって，θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし，$\theta_\alpha|_\mathfrak{h} = s_{H_\alpha}$ が成り立つ．

(2) (1) より，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ と $h \in \mathfrak{h}$ に対して，

$$\begin{aligned}(\theta_\alpha|_\mathfrak{h})^*(\lambda)(h) &= \lambda(\theta_\alpha(h)) \\ &= \lambda(h - \alpha(h)H_\alpha) \\ &= \lambda(h) - \lambda(H_\alpha)\alpha(h) \\ &= s_\alpha(\lambda)(h)\end{aligned}$$

である．よって，$(\theta_\alpha|_\mathfrak{h})^* = s_\alpha$ が成り立つ．

(3) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．θ_α は $\mathfrak{g}$ の自己同型だから，

$$\begin{aligned}\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta_\alpha^{-1}(x) \in V_\lambda\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, \theta_\alpha^{-1}(x)] = \lambda(h)\theta_\alpha^{-1}(x)\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [\theta_\alpha(h), x] = \lambda(h)x\}\end{aligned}$$

である．ここで，(1) と (2) より，θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし，$(\theta_\alpha|_\mathfrak{h})^{*-1} = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$ を満たす．よって，上式と合わせて，

$$\begin{aligned}\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = s_\alpha(\lambda)(h)x\} \\ &= \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}\end{aligned}$$

を得る． □

定理 3.13 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．このとき，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ 上の被約ルート系であり，$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の双対ルート $\alpha^\vee \in V^*$ は

$$\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha) \qquad (\lambda \in V)$$

によって与えられ，ルート鏡映 $s_\alpha \colon V \to V$ は

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha \qquad (\lambda \in V)$$

によって与えられる．特に，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が分裂半単純 Lie 代数ならば，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ 上の被約ルート系である．ここで，H_α は，定理 3.10 によって定まるものとする．

証明　注意 3.4 より，$\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subseteq V$ である．また，各 $\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，$\alpha \in V$ かつ $\alpha(H_\alpha) = 2$ だから，主張の式によって定義される線型写像 $s_\alpha \colon V \to V$ は鏡映である．

以下，$\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ と鏡映 s_α（$\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$）が被約ルート系の公理 (RS1)–(RS4)（「ルート系」 [5, 定義 1.5] を参照のこと）を満たすことを確かめる．

(RS1)　$\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が有限であることと 0 を含まないことは明らかである．$h \in \mathfrak{h}$ が任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して $\alpha(h) = 0$ を満たすとすると，ルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ より，$\mathrm{ad}(h) = 0$ である．すなわち，$h \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ である．これは，V 上の線型形式であって任意の $\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ において値 0 をとるものが 0 しかないことを意味する．よって，$\operatorname{span} \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = V$ である．

(RS2)　$\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とし，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる．すると，系 3.7 より $\mathrm{ad}(X_\alpha)$ と $\mathrm{ad}(Y_\alpha)$ は冪零だから，これらは補題 3.12 の仮定を満たす．したがって，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\mathfrak{g}_\lambda$ と $\mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型によって移り合う．よって，s_α は $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を安定にする．

(RS3)　補題 3.11 で示したように，任意の $\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して，$\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である．

(RS4)　$\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とする．$\mathrm{ad}(H_\alpha)$ は $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ には $2\alpha(H_\alpha) = 4$ 倍写像として作用するから，命題 3.6 (1) と合わせて，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{2\alpha} &= [H_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\
&\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}], \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\
&\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] \\
&\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{3\alpha}]
\end{aligned}$$

を得る．ところが，$\mathfrak{g}_\alpha$ は 1 次元だから（定理 3.10 (1)），$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ である．また，すでに示した (RS1)–(RS3) より $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ はルート系だから，ルート系の一般論 [5, 系 1.25] より $3\alpha \notin \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ であり，したがって，$\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$ である．よって，上式より $\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ であり，これは $2\alpha \notin \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を意味する．□

定理 3.13 の状況で，$\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とするとき，記号の濫用で，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対しても

$$\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha), \qquad s_\alpha(\lambda) = \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$$

として，双対ルート $\alpha^\vee$ やルート鏡映 s_α を $\mathfrak{h}^*$ 上に拡張する．すなわち，$Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0\}$ と置くと直和分解 $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$ が成立するが，$\alpha^\vee$ は Z 上では値 0 をとるとして拡張し，s_α は Z 上では恒等写像であるとして拡張する．このとき，$\alpha^\vee \in \mathfrak{h}^{**}$ は自然な線型同型 $\mathfrak{h}^{**} \cong \mathfrak{h}$ を通して H_α に対応するから，しばしばこれらを同一視して $\alpha^\vee = H_\alpha$ などと書く．また，Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$ の V への作用も，Z 上には自明に作用するとして，$\mathfrak{h}^*$ への作用に拡張する．

系 3.14　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．このとき，$(H_\alpha)_{\alpha \in \mathit{\Pi}}$ は $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の基底である．特に，$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が分裂半単純 Lie 代数ならば，$(H_\alpha)_{\alpha \in \mathit{\Pi}}$ は $\mathfrak{h}$ の基底である．ここで，H_α は，定理 3.10 によって定まるものとする．

証明　定理 3.13 とルート系の一般論 [5, 命題 1.13 (1), 命題 2.17] より，$\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$ は $\mathfrak{h}'$ 上の被約ルート系であり，$\mathit{\Pi}^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \mathit{\Pi}\}$ はその基底である．特に，$(H_\alpha)_{\alpha \in \mathit{\Pi}}$ は $\mathfrak{h}'$ の基底である．□

系 3.15　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数，$\alpha, \beta \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を線型独立な二つのルートとし，

$$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$$

と置く．

(1) $I_{\beta,\alpha}$ は，$p,\ q \in \mathbb{N}$ を用いて $I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける．
(2) (1) の p と q について，$p-q = -n(\beta,\alpha) = -\beta(H_\alpha)$ である．
(3) (1) の p と q について，$\gamma = \beta - q\alpha$ と置くと，$p+q = -n(\gamma,\alpha) = -\gamma(H_\alpha)$ であり，これは 0, 1, 2, 3 のいずれかである．

証明　定理 3.13 とルート系の一般論 [5, 命題 1.29] から従う．□

命題 3.16　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．二つのルート $\alpha,\ \beta \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ について，$\alpha+\beta \neq 0$ ならば，$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．

証明　$\alpha=\beta$ ならば $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ だから，主張は明らかである．$\alpha \neq \pm\beta$ である場合を考える．$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は被約ルート系だから（定理 3.13），このとき，α と β は線型独立である [5, 系 1.25]．$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとり，これと随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とみなす．$I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ を系 3.15 のとおりに定めると，

$$\mathfrak{s} = \bigoplus_{j \in I_{\beta,\alpha}} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$$

は $\mathfrak{g}$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群であり（命題 3.6 (1)），各 $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ は $\mathfrak{s}$ のウェイト $(\beta+j\alpha)(H_\alpha) = -(p-q)+2j$（系 3.15 (2)）のウェイト空間であり，これらはすべて 1 次元である（定理 3.10 (1)）．したがって，有限次元 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $\mathfrak{s}$ のウェイトは $-(p+q),\ -(p+q)+2,\ \dots,\ p+q$ であり，これらの重複度はすべて 1 だから，系 2.13 (4) より，$\mathfrak{s}$ は最高ウェイト $p+q$ の有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $L(p+q)$ に同型である．$X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の $L(p+q)$ への作用は，0 でない各ウェイト空間を，そのウェイトに 2 を加えたウェイト空間に全射に移す．よって，

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = \mathrm{ad}(X_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = X\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

が成り立つ．□

系 3.17　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とし，Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+，負ルート全体のなす集合を Δ_- と書く．

(1) $\bigoplus_{\alpha\in\Pi}\mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は，$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ である．
(2) $\bigoplus_{\alpha\in-\Pi}\mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は，$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_-}\mathfrak{g}_\alpha$ である．
(3) $\bigoplus_{\alpha\in\Pi\cup(-\Pi)}\mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ である．特に，$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が分裂半単純 Lie 代数ならば，$\bigoplus_{\alpha\in\Pi\cup(-\Pi)}\mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成する．

証明　(1)　$\mathfrak{n}_+$ は，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり（命題 3.6 (1)），$\bigoplus_{\alpha\in\Pi}\mathfrak{g}_\alpha$ を含む．次に，$\beta\in\Delta_+$ とすると，ルート系の一般論 [5, 命題 2.13] より，単純ルートの列 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Pi$ を，$\alpha_1+\cdots+\alpha_k = \beta$ であり，かつ任意の $i \in \{1,\dots,k\}$ に対して $\alpha_1+\cdots+\alpha_i \in \Delta_+$ であるようにとれる．このとき，命題 3.16 を繰り返し適用することで，$\mathfrak{g}_\beta = [[\mathfrak{g}_{\alpha_1},\mathfrak{g}_{\alpha_2}],\dots,\mathfrak{g}_{\alpha_k}]$ を得る．よって，$\bigoplus_{\alpha\in\Pi}\mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{n}_+$ を Lie 代数として生成する．

(2)　(1) と同様である．

(3)　$\bigoplus_{\alpha\in\Pi\cup(-\Pi)}\mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数を，$\mathfrak{g}'$ と置く．$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり，$\bigoplus_{\alpha\in\Pi\cup(-\Pi)}\mathfrak{g}_\alpha$ を含むから（注意 3.4），$\mathfrak{g}' \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ である．次に，(1) と (2) より，$\bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{n}_- \subseteq \mathfrak{g}'$ である．また，任意の $\alpha\in\Pi$ に対して $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}'$ であり（H_α は，定理 3.10 によって定まるもの

とする），$(H_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ は $\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の基底だから（系 3.14），$\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{g}'$ である．よって，

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=(\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\mathfrak{g}_\alpha\subseteq\mathfrak{g}'$$

（第 1 の等号は，注意 3.4 から従う）である．以上より，$\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ が成り立つ． □

3.4 存在定理

本節の以下の部分では，$\delta_{\alpha\beta}$ を Kronecker のデルタとする．

Π をルート系の基底とすると，異なる二つの単純ルート $\alpha,\beta\in\Pi$ に対して，Cartan 整数 $n(\beta,\alpha)$ は 0 以下の整数である [5, 命題 2.2]．本節の以下の部分では，このことに注意する．

補題 3.18 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．Δ を V 上のルート系とし，Π をその基底とする．Π が自由に生成する単位的結合 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus\Pi})$（$\mathbb{K}^{\oplus\Pi}$ の標準基底を $(e_\gamma)_{\gamma\in\Pi}$ と書く）を考え，$\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus\Pi})$ 上の線型写像 $\widehat{H}_\alpha$, $\widehat{X}_\alpha$, $\widehat{Y}_\alpha$（$\alpha\in\Pi$）を，

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_\alpha(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})&=\left(-\sum_{i=1}^{k}n(\gamma_i,\alpha)\right)(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
\widehat{X}_\alpha(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})&=\begin{cases}0 & (k=0)\\ (\widehat{Y}_{\gamma_1}\widehat{X}_\alpha-\delta_{\alpha\gamma_1}\widehat{H}_\alpha)(e_{\gamma_2}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}) & (k\geq 1),\end{cases}\\
\widehat{Y}_\alpha(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})&=e_\alpha\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k}
\end{aligned}$$

によって定める（まず $\widehat{H}_\alpha$ と $\widehat{Y}_\alpha$ を定め，次にそれらを用いて $\widehat{X}_\alpha$ を次数 k に関して再帰的に定める）．このとき，任意の $\alpha,\beta\in\Pi$ に対して，次が成り立つ．

(1) $[\widehat{H}_\alpha,\widehat{H}_\beta]=0$.
(2) $[\widehat{H}_\alpha,\widehat{X}_\beta]=n(\beta,\alpha)\widehat{X}_\beta$.
(3) $[\widehat{H}_\alpha,\widehat{Y}_\beta]=-n(\beta,\alpha)\widehat{Y}_\beta$.
(4) $[\widehat{X}_\alpha,\widehat{Y}_\beta]=\delta_{\alpha\beta}\widehat{H}_\alpha$.

証明 (1), (4) 明らかである．

(3) 任意の $\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\Pi$ に対して，

$$\begin{aligned}
&[\widehat{H}_\alpha,\widehat{Y}_\beta](e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
&=\left(-n(\beta,\alpha)-\sum_{i=1}^{k}n(\beta_i,\alpha)\right)(e_\beta\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})-\left(-\sum_{i=1}^{k}n(\beta_i,\alpha)\right)(e_\beta\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
&=-n(\beta,\alpha)(e_\beta\otimes e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})\\
&=-n(\beta,\alpha)Y_\beta(e_{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes e_{\gamma_k})
\end{aligned}$$

である．よって，$[\widehat{H}_\alpha,\widehat{Y}_\beta]=-n(\beta,\alpha)\widehat{Y}_\beta$ が成り立つ．

(2)　任意の $\gamma \in \Pi$ に対して，(1), (3), (4) より，

$$\begin{aligned}
0 &= [\widehat{H}_\alpha, [\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma]] \\
&= [[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta], \widehat{Y}_\gamma] + [\widehat{X}_\beta, [\widehat{H}_\alpha, \widehat{Y}_\gamma]] \\
&= [[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta], \widehat{Y}_\gamma] - n(\gamma, \alpha)[\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma] \\
&= [[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\gamma, \alpha)\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma] \\
&= [[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma] + (n(\beta, \alpha) - n(\gamma, \alpha))[\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma] \\
&= [[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma] + (n(\beta, \alpha) - n(\gamma, \alpha))\delta_{\beta\gamma}\widehat{H}_\beta \\
&= [[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta, \widehat{Y}_\gamma]
\end{aligned}$$

である．よって，任意の $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Pi$ に対して

$$\begin{aligned}
([\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta)(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= ([\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta)\widehat{Y}_{\gamma_1} \cdots \widehat{Y}_{\gamma_k} 1 \\
&= \widehat{Y}_{\gamma_1} \cdots \widehat{Y}_{\gamma_k}([\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta)1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから，$[\widehat{H}_\alpha, \widehat{X}_\beta] = n(\beta, \alpha)\widehat{X}_\beta$ が成り立つ．　□

補題 3.19　V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．Δ を V 上の被約ルート系とし，Π をその基底とする．$\widetilde{\mathfrak{g}}$ を，$\alpha \in \Pi$ に対する生成元

$$\widetilde{H}_\alpha, \quad \widetilde{X}_\alpha, \quad \widetilde{Y}_\alpha$$

と $\alpha, \beta \in \Pi$ に対する関係式

(R1) $[\widetilde{H}_\alpha, \widetilde{H}_\beta] = 0$
(R2) $[\widetilde{H}_\alpha, \widetilde{X}_\beta] = n(\beta, \alpha)\widetilde{X}_\beta$
(R3) $[\widetilde{H}_\alpha, \widetilde{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha)\widetilde{Y}_\beta$
(R4) $[\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{Y}_\beta] = \delta_{\alpha\beta}\widetilde{H}_\alpha$

によって定まる Lie 代数とする．$\lambda \in V$ に対して

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{x \in \widetilde{\mathfrak{g}} \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } [\widetilde{H}_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\}$$

と書き，

$$\widetilde{\mathfrak{h}} = \widetilde{\mathfrak{g}}_0, \qquad \widetilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \qquad \widetilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\lambda \in (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi) \setminus \{0\}} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

と定める．

(1) 任意の $\lambda, \mu \in V$ に対して，$[\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \widetilde{\mathfrak{g}}_\mu] \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である．
(2) 各 $\alpha \in \Pi$ に対して $\widetilde{H}_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{g}}_0$，$\widetilde{X}_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$，$\widetilde{Y}_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ であり，直和分解 $\widetilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ が成立する．
(3) $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であり，直和分解 $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ が成立する．（したがって，$\lambda \in V \setminus ((\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi))$ に対しては，$\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda = 0$ である．）
(4) $(\widetilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\widetilde{\mathfrak{h}}$ の基底である．
(5) $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ は Lie 代数として $(\widetilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ によって生成される．

(6) $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は Lie 代数として $(\widetilde{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ によって生成される．[*4]

証明 (1) $x\in\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$，$y\in\widetilde{\mathfrak{g}}_\mu$ とすると，任意の $\alpha\in\Pi$ に対して

$$[h,[x,y]]=[[h,x],y]+[x,[h,y]]=\alpha^\vee(\lambda)[x,y]+\alpha^\vee(\mu)[x,y]$$

だから，$[x,y]\in\widetilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である．よって，$[\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda,\widetilde{\mathfrak{g}}_\mu]\subseteq\widetilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である．

(2) $\widetilde{H}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_0$，$\widetilde{X}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$，$\widetilde{Y}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ は，それぞれ関係式 (R1), (RS2), (RS3) から従う．

$\widetilde{\mathfrak{g}}$ は線型空間として「$\widetilde{H}_\alpha$, $\widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{Y}_\alpha$（$\alpha\in\Pi$）からなる有限列において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの」全体で生成されるが，前段の結果と (1) より，このような元はある $\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ に含まれる．よって，$\widetilde{\mathfrak{g}}=\sum_{\lambda\in V}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ が成り立つ．さらに，線型代数の一般論より，この和は直和である．

(3), (4), (5), (6)（$(\widetilde{H}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ の線型独立性を除く） (1) より，$\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数である．(2) より，これらの和 $\widetilde{\mathfrak{h}}+\widetilde{\mathfrak{n}}_++\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は直和である．

$(\widetilde{H}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$, $(\widetilde{X}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$, $(\widetilde{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数を，それぞれ $\widetilde{\mathfrak{h}}'$, $\widetilde{\mathfrak{n}}'_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}'_-$ と置く．これらは，それぞれ $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ に含まれる．主張を示すためには，$\widetilde{\mathfrak{g}}'=\widetilde{\mathfrak{h}}'\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}'_+\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}'_-$ が $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 全体に一致することをいえばよい．$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の生成元 $\widetilde{H}_\alpha$, $\widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{Y}_\alpha$ をすべて含むから，そのためには，$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ が $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であることをいえばよい．そのためには，$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ が $\operatorname{ad}(\widetilde{H}_\alpha)$, $\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)$, $\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)$ によって安定であることをいえば十分である．このことは，$\widetilde{\mathfrak{g}}'$ が線型空間として

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}_\beta && (\beta\in\Pi),\\ &[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]] && (k\geq 1\text{ は整数，}\beta_1,\dots,\beta_k\in\Pi)\end{aligned}$$

の全体によって生成されることと，次の主張から従う．

主張 3.20 上記の元に $\operatorname{ad}(\widetilde{H}_\alpha)$, $\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)$, $\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)$ を施した結果について，次の表に述べたことが成り立つ．ここで，$c=n(\beta_1,\alpha)+\cdots+n(\beta_k,\alpha)$ と置いた．

	$\widetilde{H}_\beta$	$[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]$	$[\widetilde{Y}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{Y}_{\beta_2},\widetilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\operatorname{ad}(\widetilde{H}_\alpha)$	0	$c[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]$	$-c[\widetilde{Y}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{Y}_{\beta_2},\widetilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)$	$-n(\alpha,\beta)\widetilde{X}_\alpha$	$[\widetilde{X}_\alpha,[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]]$	$\begin{cases}\in\widetilde{\mathfrak{h}}' & (k=1)\\ \in\widetilde{\mathfrak{n}}'_+ & (k\geq 2)\end{cases}$
$\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)$	$n(\alpha,\beta)\widetilde{Y}_\alpha$	$\begin{cases}\in\widetilde{\mathfrak{h}}' & (k=1)\\ \in\widetilde{\mathfrak{n}}'_+ & (k\geq 2)\end{cases}$	$[\widetilde{Y}_\alpha,[\widetilde{Y}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{Y}_{\beta_2},\widetilde{Y}_{\beta_1}]]]$

主張 3.20 の証明 $\widetilde{H}_\beta$ の列の主張は，関係式 (R1), (R2), (R3) から従う．$[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]$ の列の主張と $[\widetilde{Y}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{Y}_{\beta_2},\widetilde{Y}_{\beta_1}]]$ の列の主張は同様に示せるから，前者のみを考える．$\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)$ の行の主張は，明らかである．$\operatorname{ad}(\widetilde{H}_\alpha)$ の行の主張は，(1) と (2) より $[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]\in\widetilde{\mathfrak{g}}_{\beta_1+\cdots+\beta_k}$ であることから従う．$\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)$ の主張について，$k=1$ のときは，関係式 (R4) より，

$$\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)\widetilde{X}_{\beta_1}=\delta_{\alpha\beta_1}\widetilde{H}_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{h}}'$$

[*4] より強く，$\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ と $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ がそれぞれ $(\widetilde{X}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ と $(\widetilde{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ を基本族とする自由 Lie 代数であることまでいえる．証明は，Bourbaki [3, §VIII.4.2, Proposition 3] を参照のこと．

である．また，$[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]\in\widetilde{\mathfrak{h}}'\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}'_+$ であるとすると，関係式 (R4) より，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_{k+1}},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]\\
&=\operatorname{ad}(\widetilde{X}_{\beta_{k+1}})\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]-\delta_{\alpha\beta_{k+1}}\operatorname{ad}(\widetilde{H}_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]\\
&\in\operatorname{ad}(\widetilde{X}_{\beta_{k+1}})(\widetilde{\mathfrak{h}}'\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}'_+)+\widetilde{\mathfrak{n}}'_+\\
&=\widetilde{\mathfrak{n}}'_+
\end{aligned}$$

となる．よって，帰納的に，$k\geq 2$ のとき $\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)[\widetilde{X}_{\beta_k},\dots,[\widetilde{X}_{\beta_2},\widetilde{X}_{\beta_1}]]\in\widetilde{\mathfrak{n}}'_+$ であることを得る． //

$(\widetilde{H}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ の線型独立性　生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と補題 3.18 より，Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus\Pi})$ 上の表現であって $\widetilde{H}_\alpha$, $\widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{Y}_\alpha$ をそれぞれ $\widehat{H}_\alpha$, $\widehat{X}_\alpha$, $\widehat{Y}_\alpha$ に移すものが，一意に存在する．各 $\alpha\in\Pi$ に対して，$\mathbb{K}^{\oplus\Pi}$（を $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus\Pi})$ の部分線型空間とみなしたもの）は $\widehat{H}_\alpha$-安定であり，$\mathbb{K}^{\oplus\Pi}$ の標準基底に関する $\widehat{H}_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus\Pi}}$ の行列表示は，(β,β)-成分が $n(\beta,\alpha)$ である対角行列である．Cartan 行列 $(n(\beta,\alpha))_{(\beta,\alpha)\in\Pi\times\Pi}$ は正則だから [5, 命題 4.2]，$(\widehat{H}_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus\Pi}})_{\alpha\in\Pi}$ は $\operatorname{End}(\mathbb{K}^{\oplus\Pi})$ において線型独立である．特に，$(\widetilde{H}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ において線型独立である． □

補題 3.21　V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．Δ を V 上の被約ルート系とし，Π をその基底とする．$\widetilde{\mathfrak{g}}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ を，補題 3.19 のとおりに定義する．異なる二つの単純ルート α, $\beta\in\Pi$ に対して

$$\widetilde{X}_{\alpha\beta}=\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\beta,\qquad \widetilde{Y}_{\alpha\beta}=\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{Y}_\beta$$

と定め，$\widetilde{X}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\widetilde{\mathfrak{a}}_+$ と置き，$\widetilde{Y}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\widetilde{\mathfrak{a}}_-$ と置く．このとき，

$$\widetilde{\mathfrak{a}}_+=\bigoplus_{\lambda\in(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi)\setminus\{0\}}(\widetilde{\mathfrak{a}}_+\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda)\subseteq\widetilde{\mathfrak{n}}_+,\qquad \widetilde{\mathfrak{a}}_-=\bigoplus_{\lambda\in(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}\Pi)\setminus\{0\}}(\widetilde{\mathfrak{a}}_-\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda)\subseteq\widetilde{\mathfrak{n}}_-$$

が成り立つ．

証明　どちらも同様だから，$\widetilde{\mathfrak{a}}_+$ に関する主張を示す．$\widetilde{\mathfrak{a}}_+$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルであり，特に $\operatorname{ad}(\widetilde{\mathfrak{h}})$-安定だから，線型代数の一般論より，

$$\widetilde{\mathfrak{a}}_+=\bigoplus_{\lambda\in V}(\widetilde{\mathfrak{a}}_+\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$$

が成り立つ．あとは，$\widetilde{\mathfrak{a}}_+$ が $\widetilde{\mathfrak{n}}_+=\bigoplus_{\lambda\in(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi)\setminus\{0\}}\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ に含まれることを示せばよい．以下，$\widetilde{X}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\widetilde{\mathfrak{g}}$ の部分線型空間を，$\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+$ と置く．

まず，$[\widetilde{\mathfrak{n}}_-,\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+]=0$ を示す．$\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ は Lie 代数として $(\widetilde{Y}_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ によって生成されるから（補題 3.19 (6)），そのためには，任意の α, β, $\gamma\in\Pi$（$\alpha\neq\beta$）に対して $[\widetilde{Y}_\gamma\widetilde{X}_{\alpha\beta}]=0$ であることをいえばよい．$\gamma\neq\alpha$ のとき，関係式 (R2) と (R4) より，

$$\begin{aligned}
[\widetilde{Y}_\gamma,\widetilde{X}_{\alpha\beta}]&=\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\gamma)\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\beta\\
&=\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\gamma)\widetilde{X}_\beta\\
&=-\delta_{\beta\gamma}\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{H}_\beta\\
&=\delta_{\beta\gamma}n(\alpha,\beta)\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\alpha\\
&=0
\end{aligned}$$

である（$n(\beta,\alpha)=0$ ならば $n(\alpha,\beta)=0$ であり，$n(\beta,\alpha)<0$ ならば $\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\alpha=0$ だから，最後の等式が成り立つ）．$\gamma=\alpha$ のとき，関係式 (R2), (R3), (R4) と補題 2.10 (2) より，

$$\begin{aligned}
[\widetilde{Y}_\alpha,\widetilde{X}_{\alpha\beta}] &= \operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\widetilde{X}_\beta \\
&= \operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\operatorname{ad}(\widetilde{Y}_\alpha)\widetilde{X}_\beta-(1-n(\beta,\alpha))\operatorname{ad}(\widetilde{X}_\alpha)^{-n(\beta,\alpha)}(\operatorname{ad}(\widetilde{H}_\alpha)-n(\beta,\alpha))\widetilde{X}_\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

である．よって，いずれの場合にも，$[\widetilde{Y}_\gamma\widetilde{X}_{\alpha\beta}]=0$ が成り立つ．

次に，$\widetilde{\mathfrak{a}}_+\subseteq\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ を示す．$\widetilde{\mathfrak{g}}$ の随伴表現に対応する包絡代数の表現を $\rho\colon\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})\to\operatorname{End}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ と書くと，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{a}}_+ &= \rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}))\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+ \\
&= \rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{h}}))\rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+ && \text{(補題 3.19 (3)，Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 [4, 系 2.5][*5])} \\
&= \rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{h}}))\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+ && \text{(前段の結果)} \\
&\subseteq \rho(\mathbf{U}(\widetilde{\mathfrak{n}}_+))\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+ && \text{(補題 3.19 (1), (2) より } [\widetilde{\mathfrak{h}},\widetilde{X}_{\alpha\beta}]\subseteq\mathbb{K}\widetilde{X}_{\alpha\beta}) \\
&\subseteq \widetilde{\mathfrak{n}}_+ && (\widetilde{\mathfrak{a}}^0_+\subseteq\widetilde{\mathfrak{n}}_+)
\end{aligned}$$

である．これで，主張が示された． □

定理 3.22（存在定理） V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間とする．$\varDelta$ を V 上の被約ルート系とし，$\varPi$ をその基底とする．$\mathfrak{g}$ を，$\alpha\in\varPi$ に対する生成元

$$H_\alpha,\quad X_\alpha,\quad Y_\alpha$$

と $\alpha,\beta\in\varPi$ に対する関係式

(R1) $[H_\alpha,H_\beta]=0$
(R2) $[H_\alpha,X_\beta]=n(\beta,\alpha)X_\beta$
(R3) $[H_\alpha,Y_\beta]=-n(\beta,\alpha)Y_\beta$
(R4) $[X_\alpha,Y_\beta]=\delta_{\alpha\beta}H_\alpha$
(R5) $\operatorname{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta=0$（$\alpha\neq\beta$ の場合）
(R6) $\operatorname{ad}(Y_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}Y_\beta=0$（$\alpha\neq\beta$ の場合）

によって定まる Lie 代数とし，$\mathfrak{h}=\operatorname{span}\{H_\alpha\mid\alpha\in\varPi\}$ と定める．

(1) $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数である．
(2) $(H_\alpha)_{\alpha\in\varPi}$ は $\mathfrak{h}$ の基底である．
(3) (2) より，各 $\alpha\in\varPi$ に対して $\alpha^\vee$ を H_α に移すことで V^* から $\mathfrak{h}$ への線型同型写像が定まるが，これが誘導する線型同型写像 $\varPhi\colon V\to\mathfrak{h}^*$ は，ルート系 $\varDelta$ から $\varDelta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ への同型である．

証明 補題 3.19 と補題 3.21 の記号を用いると，$\mathfrak{g}$ は商 Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}/(\widetilde{\mathfrak{a}}_+\oplus\widetilde{\mathfrak{a}}_-)$ であり，等化準同型を $\varpi\colon\widetilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$

*5 Poincaré–Birkhoff–Witt の定理（の定式化の一つ）は，「$\mathfrak{g}$ が（任意の可換体上の）Lie 代数であり，$(x_i)_{i\in I}$ が $\mathfrak{g}$ の全順序集合 I で添字付けられた基底であるとき，$n\in\mathbb{N}$ と $i_1,\ldots,i_n\in I$ が $i_1\leq\cdots\leq i_n$ を満たす範囲を動くときの $x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ の全体が，包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底をなす」ことを主張している．この主張のうち，「（線型空間として）生成する」ことは，帰納法によって容易に証明できる．ここで必要なのは，「（線型空間として）生成する」ことだけである．

と書くと，$\varpi(\widetilde{H}_\alpha) = H_\alpha$，$\varpi(\widetilde{X}_\alpha) = X_\alpha$，$\varpi(\widetilde{Y}_\alpha) = Y_\alpha$ である．補題 3.19 (2), (3) より，直和分解

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

が成立する．このことと補題 3.21 より，$\mathfrak{g}_\lambda = \varpi(\widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda) = \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda / ((\widetilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \widetilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$ と置くと，直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in V} \mathfrak{g}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)} \mathfrak{g}_\lambda \tag{$*$}$$

が成立する．

直和分解 ($*$) における $\lambda = 0$ に対応する因子については，$(\widetilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \widetilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \widetilde{\mathfrak{g}}_0 = 0$ だから（補題 3.21），ϖ は $\widetilde{\mathfrak{h}} = \widetilde{\mathfrak{g}}_0$ から $\mathfrak{g}_0$ への同型を与える．$(\widetilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\widetilde{\mathfrak{h}}$ の基底だから，$(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ の基底である．これで (2) が示され，したがって，線型同型写像 $\Phi\colon V \to \mathfrak{h}^*$ を (3) のように定義できる．

$\lambda \in V$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda \subseteq \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } [H_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\}$$

だが，λ が動くとき，左辺の和は直和分解 ($*$) を与え，右辺の和は線型代数の一般論より直和だから，上式では等号が成り立つ．(3) の線型同型写像 $\Phi\colon V \to \mathfrak{h}^*$ を用いれば，

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\lambda &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } \lambda \in \Pi \text{ に対して } [H_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \Phi(\lambda)(h)x\} \end{aligned} \tag{$**$}$$

とも書ける．

主張 3.23　$\alpha \in \Pi$ とする．

(1) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\operatorname{ad}(X_\alpha)$ と $\operatorname{ad}(Y_\alpha)$ は局所冪零である．

(2) $\mathfrak{g}$ の自己同型 θ_α を

$$\theta_\alpha = e^{\operatorname{ad}(X_\alpha)} e^{\operatorname{ad}(-Y_\alpha)} e^{\operatorname{ad}(X_\alpha)} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると（(1) より可能である），任意の $\lambda \in V$ に対して，$\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ が成り立つ．

主張 3.23 の証明　(1)　どちらも同様だから，$\operatorname{ad}(X_\alpha)$ が局所冪零であることを示す．$\operatorname{ad}(X_\alpha)$ は $\mathfrak{g}$ 上の導分だから，$\operatorname{ad}(X_\alpha)$ を繰り返し施すと 0 になる元全体は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数をなす．任意の $\beta \in \Pi$ に対して，H_β, X_β, Y_β に $\operatorname{ad}(X_\alpha)$ を繰り返し施すと 0 になることを示せばよい．これは，

$$\begin{aligned} &\operatorname{ad}(X_\alpha)^2 H_\beta = \operatorname{ad}(X_\alpha)(-n(\beta,\alpha)X_\alpha) = 0, \\ &\operatorname{ad}(X_\alpha) X_\alpha = 0, \\ &\operatorname{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)} X_\beta = 0 & (\beta \neq \alpha), \\ &\operatorname{ad}(X_\alpha)^3 X_\beta = \operatorname{ad}(X_\alpha)^2(\delta_{\alpha\beta} H_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

であることから従う．

(2)　$\Phi(\alpha)(H_\alpha) = \alpha^\vee(\alpha) = 2$ であり，$\mathfrak{g}_\lambda$ は ($**$) のように書け，$H_\alpha \neq 0$ であることと関係式 (R2), (R3), (R4) より $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対である（注意 3.9）．よって，$\Phi(\alpha)$ と H_α, X_α, Y_α は補題 3.12 の仮定を満たし，主張はこの補題の (3) から従う．　//

主張 3.24　$\mathfrak{g}_\lambda$（$\lambda \in V$）は，$\lambda = 0$ ならば $\mathfrak{h}$ であり，$\lambda \in \Delta$ ならば 1 次元であり，それ以外ならば 0 である．特に，$\mathfrak{g}$ は有限次元であり，直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する．

主張 3.24 の証明　$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ はすでに示した．($*$) より，$\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ となりうるのは，$\lambda \in (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)$ のときだけである．$\lambda \in \mathbb{Z}\Delta$ が一つのルートの整数倍として書けなければ，ある $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ が存在して $s(\lambda) \notin (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cup (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\leq 0}} \Pi)$ となるから [5, 命題 2.15]，主張 3.23 (2) より，$\mathfrak{g}_\lambda = 0$ である．

以下，ルート $\alpha \in \Delta$ と正の整数 m に対して，

$$\dim \mathfrak{g}_{m\alpha} = \begin{cases} 1 & (m = 1) \\ 0 & (m \geq 2) \end{cases}$$

を示す．被約ルート系 Δ の任意のルートが Weyl 群の作用によって単純ルートに移せる [5, 定理 2.10 (2)] ことと主張 3.23 (2) より，単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対してこれを示せば十分である．$\widetilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda\in(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi)\setminus\{0\}} \widetilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ は Lie 代数として $(\widetilde{X}_\beta)_{\beta\in\Pi}$ によって生成されるから（補題 3.19 (5)），$\mathfrak{n}_+ = \varpi(\widetilde{\mathfrak{n}}_+) = \bigoplus_{\lambda\in(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi)\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$ は Lie 代数として X_α によって生成される．したがって，$\mathfrak{n}_+$ は線型空間として

$$X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_k} \text{ において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの（}k \in \mathbb{N}_{>0}\text{，}\beta_1, \ldots, \beta_k \in \Pi\text{）} \qquad (***)$$

の全体によって生成される．($***$) は直和因子 $\mathfrak{g}_{\beta_1+\cdots+\beta_k}$ に属するが（補題 3.21 (1)），$\beta_1 + \cdots + \beta_k = m\alpha$ となるのは $k = m$ かつ $\beta_1 = \cdots = \beta_k = \alpha$ のときだけである．$m \geq 2$ のとき，($***$) は常に 0 だから，$\mathfrak{g}_{m\alpha} = 0$ である．$m = 1$ のとき，($***$) は X_α だから，$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{K}X_\alpha$ である．もし $X_\alpha = 0$ ならば $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha] = 0$ となりすでに示した (2) に矛盾するから，$X_\alpha \neq 0$ であり，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ を得る．これで，主張が示された．　//

主張 3.25　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数であり，そのルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\Phi(\Delta)$ に等しい．

主張 3.25 の証明　$\mathfrak{g}$ が半単純であること　$\mathfrak{g}$ の任意の可解イデアル $\mathfrak{r}$ が 0 であることを示す．$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，特に $\operatorname{ad}(\mathfrak{h})$-安定だから，主張 3.24 と線型代数の一般論より，直和分解

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha)$$

が成立する．

まず，$\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$ を示す．上式より，そのためには，任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha = 0$ を示せばよい．被約ルート系 Δ の任意のルートが Weyl 群の作用によって単純ルートに移せる [5, 定理 2.10 (2)] ことと主張 3.23 (2) より，単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対してこれを示せば十分である．この場合，主張 3.24 より，$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{K}X_\alpha$ である．また，関係式 (R2), (R3), (R4) と $H_\alpha \neq 0$ であることより $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$-三対だから（注意 3.9），$\operatorname{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の単純部分 Lie 代数である．よって，

$$\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{r} \cap \mathbb{K}X_\alpha \subseteq \mathfrak{r} \cap \operatorname{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\} = 0$$

が成り立つ．

次に，$\mathfrak{r} = 0$ を示す．$\alpha \in \Pi$ を任意にとる．前段で示したように $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$ であり，($**$) が成り立つから，$[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_\alpha] = \Phi(\alpha)(\mathfrak{r})\mathfrak{g}_\alpha$ である．一方で，$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから，$[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$ である．したがって，$\Phi(\alpha)(\mathfrak{r}) = 0$ である．任意の $\alpha \in \Pi$ に対してこれが成り立ち，$\Phi(\Pi)$ は $\mathfrak{h}^*$ の基底だから，$\mathfrak{r} = 0$ である．

$\underline{\mathfrak{h}\text{ が }\mathfrak{g}\text{ の分裂化 Cartan 部分代数であること}}$　(∗∗) のとおり $\mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ の同時固有空間の直和に同時固有値 0 の同時固有空間は $\mathfrak{h}$ である．よって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数である（定理 1.35）．

$\underline{\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \Phi(\Delta)}$　(∗∗) と主張 3.24 から従う．　//

これで，すべての主張が示された．　□

3.5　一意性定理と同型定理

命題 3.26　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．各 $\alpha \in \Pi$ に対して，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる．このとき，任意の α, $\beta \in \Pi$ に対して，次が成り立つ．

(1) $[H_\alpha, H_\beta] = 0$.
(2) $[H_\alpha, X_\beta] = n(\beta,\alpha)X_\beta$.
(3) $[H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta,\alpha)Y_\beta$.
(4) $[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta}H_\alpha$.
(5) $\mathrm{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta = 0$（$\alpha \neq \beta$ の場合）.
(6) $\mathrm{ad}(Y_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}Y_\beta = 0$（$\alpha \neq \beta$ の場合）.

証明　(1), (2), (3)　明らかである．

(4)　$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ であることは明らかである．$\alpha \neq \beta$ であるとすると，ルート系の基底の定義より $\alpha - \beta \notin \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \cup \{0\}$ だから，$[X_\alpha, Y_\beta] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = 0$ である（命題 3.6 (1)）．

(5)　$\alpha \neq \beta$ であるとする．$I_{\beta,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$ と置くと，系 3.15 (1) より，p, $q \in \mathbb{N}$ を用いて $I_{\beta,\alpha} = [-q,p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける．ルート系の基底の定義より $\beta - \alpha \notin \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ だから，$q = 0$ であり，系 3.15 (2) と合わせて $p = p - q = -n(\beta,\alpha)$ を得る．よって，

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}X_\beta \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+(1-n(\beta,\alpha))\alpha} = 0$$

である（命題 3.6 (1)）．

(6)　(5) と同様である．　□

定理 3.27（一意性定理）　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．各 $\alpha \in \Pi$ に対して，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる．$(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ を，被約ルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とその基底 Π から存在定理（定理 3.22）の方法で定まる分裂半単純 Lie 代数とする（ただし，存在定理における H_α, X_α, Y_α を，ここではそれぞれ $H_{0,\alpha}$, $X_{0,\alpha}$, $Y_{0,\alpha}$ と書く）．このとき，準同型 $\phi\colon \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}$ であって $H_{0,\alpha}$, $X_{0,\alpha}$, $Y_{0,\alpha}$ をそれぞれ H_α, X_α, Y_α に移すものが一意に存在する．さらに，この ϕ は，$(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ から $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ への同型である．

証明　生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と命題 3.26 より，準同型 $\phi\colon \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}$ であって $H_{0,\alpha}$, $X_{0,\alpha}$, $Y_{0,\alpha}$ をそれぞれ H_α, X_α, Y_α に移すものが一意に存在する．X_α と Y_α の全体は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成するから（系 3.17 (3)），この ϕ は全射である．さらに，存在定理（定理 3.22 (3)）より，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0)$ と $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は同型だから，

$$\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{h}_0^* + \#\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0) = \dim \mathfrak{h}^* + \#\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ．よって，ϕ は同型である．さらに，ϕ は，$\mathfrak{h}_0 = \mathrm{span}\{H_{0,\alpha} \mid \alpha \in \Pi\}$ を $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ に移すから，$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ から $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ への同型である． □

定理 3.28（同型定理） $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とし，Π_1 と Π_2 をそれぞれルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ の基底とする．$\Phi\colon \mathfrak{h}_1^* \to \mathfrak{h}_2^*$ をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型であって Π_1 を Π_2 に移すものとし，各 $\alpha \in \Pi_1$ に対して，$\phi_\alpha\colon (\mathfrak{g}_1)_\alpha \to (\mathfrak{g}_2)_{\Phi(\alpha)}$ を線型同型とする．このとき，$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型 ϕ であって

$$(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \Phi, \qquad \phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha \qquad (\alpha \in \Pi_1)$$

を満たすものが一意に存在する．

証明 各 $i \in \{1, 2\}$ と $\alpha \in \Pi_i$ に対して，$\mathfrak{g}_i$ における $\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_{i,\alpha}, X_{i,\alpha}, Y_{i,\alpha})$ を定理 3.10 のようにとる．必要ならば各 $X_{2,\alpha}$ をスカラー倍だけ調整して，$\phi_\alpha(X_{1,\alpha}) = X_{2,\alpha}$ であるとする．

ϕ を $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型とする．各 $\mathfrak{g}_\alpha$ は 1 次元だから（定理 3.10 (1)），$\phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha$ であるための必要十分条件は，

$$\phi(X_{1,\alpha}) = X_{2,\Phi(\alpha)} \tag{$*$}$$

であることである．また，線型同型写像 $\Phi^{*-1}\colon \mathfrak{h}_1^* \to \mathfrak{h}_2^*$ は各 $H_{1,\alpha} = \alpha^\vee$ を $H_{2,\Phi(\alpha)} = \Phi(\alpha)^\vee$ に移すから，$(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \Phi$ であるための必要十分条件は，任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して

$$\phi(H_{1,\alpha}) = H_{2,\Phi(\alpha)} \tag{$**$}$$

であることである．次に，ϕ が任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して ($*$) と ($**$) を満たすとする．すると，各 $\alpha \in \Pi_1$ に対して，$\phi(Y_{1,\alpha}) = \phi((\mathfrak{g}_1)_{-\alpha}) = (\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$ であり，$(\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$ は 1 次元だから（定理 3.10 (1)），ある $c_\alpha \in \mathbb{K}$ を用いて $\phi(Y_{1,\alpha}) = c_\alpha Y_{2,\Phi(\alpha)}$ と書ける．ところが，

$$\begin{aligned} H_{2,\Phi(\alpha)} &= \Phi(H_{1,\alpha}) \\ &= \Phi([X_{1,\alpha}, Y_{2,\alpha}]) \\ &= [\Phi(X_{1,\alpha}), \Phi(Y_{1,\alpha})] \\ &= c_\alpha [X_{2,\Phi(\alpha)}, Y_{2,\Phi(\alpha)}] \\ &= c_\alpha H_{2,\Phi(\alpha)} \end{aligned}$$

だから，$c_\alpha = 1$ であり，

$$\phi(Y_{1,\alpha}) = Y_{2,\Phi(\alpha)} \tag{$***$}$$

が成り立つ．

前段の議論より，$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型 ϕ が主張の条件を満たすための必要十分条件は，任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して ($*$), ($**$), ($***$) が成り立つことである．一意性定理（定理 3.27）より，このような ϕ は，一意に存在する． □

系 3.29 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂可能簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数は，すべて $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の下で共役である．

証明 $\mathfrak{g}$ が半単純である場合に示せば十分だから（注意 3.4），以下ではそのように仮定する．$\overline{\mathbb{K}}$ を $\mathbb{K}$ の代数閉包とする．$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると，それらの係数拡大 $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ と $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の Cartan 部分代数だから（命題 1.6），Cartan 部分代数の共役性（定理 1.28）より，$\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の自己同型であって $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$

を $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ に移すものが存在する．この自己同型が誘導するルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}, \mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})})$ から $\Delta(\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}, \mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})})$ への同型を，$\Psi\colon (\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})})^* \to (\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})})^*$ と置く．$\mathfrak{h}^*$ から $(\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})})^*$ への写像 $\alpha \mapsto \alpha_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\Delta(\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}, \mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})})$ に移し，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ と $\Delta(\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}, \mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})})$ についても同様だから（注意 3.5），Ψ は，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ への同型 $\Psi\colon \mathfrak{h}^* \to (\mathfrak{h}')^*$ を誘導する．よって，同型定理（定理 3.28）より，$\mathfrak{g}$ の自己同型であって $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}'$ に移すものが存在する． □

命題 3.30　標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{g}$ は単純である．
(b) $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約である．

証明　明らかに，$\mathfrak{g} = 0$ と $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \emptyset$ とは同値である．以下では，$\mathfrak{g} \neq 0$ である（したがって，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq \emptyset$ である）場合を考える．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が二つの空でない被約ルート系 Δ_1 と Δ_2 の直和に分解されるとする．存在定理（定理 3.22）より，各 $i \in \{1, 2\}$ に対して，Δ_i に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ がとれる．$\Delta_i \neq \emptyset$ だから，$\mathfrak{g}_i \neq 0$ である．また，これらの直和 $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ は，$\Delta_1 \sqcup \Delta_2 = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数である（注意 3.3）．同型定理（定理 3.28）より，Lie 代数 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ は $\mathfrak{g}$ に同型である．よって，$\mathfrak{g}$ は単純でない．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$\mathfrak{g}$ が単純でないとすると，$\mathfrak{g}$ は 0 でない半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の（Lie 代数としての）直和に分解できる．$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の Cartan 部分代数だから，各 $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_i$ を用いて，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ と書ける．$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であることから，各 $\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ の分裂化 Cartan 部分代数であり，$\mathfrak{h}^*$ から $\mathfrak{h}_1^* \oplus \mathfrak{h}_2^*$ への自然な同型によって，ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は二つの空でないルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ の直和に移される（注意 3.3）．よって，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は可約である． □

$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．存在定理（定理 3.22），同型定理（定理 3.28），系 3.29 より，分裂可能半単純 Lie 代数の同型類，分裂半単純 Lie 代数の同型類，被約ルート系の同型類は一対一に対応する．さらに，命題 3.30 より，その中で，分裂可能単純 Lie 代数の同型類，分裂単純 Lie 代数の同型類，既約な被約ルート系の同型類は一対一に対応する．分裂可能半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ または分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が **$\mathbf{A}_l$ 型**（$l \geq 1$），**$\mathbf{B}_l$ 型**（$l \geq 1$），**$\mathbf{C}_l$ 型**（$l \geq 1$），**$\mathbf{D}_l$ 型**（$l \geq 2$），**$\mathbf{E}_6$ 型**，**$\mathbf{E}_7$ 型**，**$\mathbf{E}_8$ 型**，**$\mathbf{F}_4$ 型**，**$\mathbf{G}_2$ 型**であるとは，そのルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ がその型であることをいう．A_l 型，B_l 型，C_l 型，D_l 型を総称して**古典型**（classical type）といい，E_6 型，E_7 型，E_8 型，F_4 型，G_2 型を総称して**例外型**（exceptional type）という．D_2 以外の各型のルート系は既約だから，それらには分裂可能単純 Lie 代数が対応する．

$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし，$\overline{\mathbb{K}}$ をその代数閉包とする．$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とすると，その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\overline{\mathbb{K}}$ 上の半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.26 (1)]，$\overline{\mathbb{K}}$ が代数閉であることより自動的に分裂可能である．このことを踏まえて，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が各型であるとは，分裂可能半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ がその型であることをいう．$\mathfrak{g}$ が分裂可能である場合には，この定義は前段のものと一致する．$\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ が単純ならば $\mathfrak{g}$ も単純だから [4, 命題 6.27 (1)]，$\mathfrak{g}$ が D_2 以外の型をもつならば，$\mathfrak{g}$ は単純である．

3.6　古典型分裂単純 Lie 代数

本小節では，標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の古典型分裂（半）単純 Lie 代数を，具体的に構成する．以下，n 次単位行列を I_n と書き，行列単位を $E_{i,j}$ と書く．また，$\mathbb{K}$ 上の $m \times n$ 行列全体のなす空間を $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ $(m = n$

の場合は，$\mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})$）と書き，$\mathbb{K}$ 上の n 次対称行列全体のなす空間を $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{K})$ と書き，$\mathbb{K}$ 上の n 次歪対称行列全体のなす空間を $\mathrm{SkewSym}(n,\mathbb{K})$ と書く．

A_l（$l \geq 1$）型の分裂単純 Lie 代数

$\mathfrak{gl}(l+1,\mathbb{K})$ の部分 Lie 代数

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(l+1,\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.37],

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_{l+1}) \mid x_1,\,\dots,\,x_{l+1} \in \mathbb{K},\, x_1+\dots+x_{l+1} = 0\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である（Cartan 部分代数であることは，定理 1.35 を用いて確かめられる）．対応するルート系は

$$\begin{aligned}&\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\},\\ &\text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は，} \epsilon_i(\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_{l+1})) = x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

だから，$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は A_l 型の分裂単純 Lie 代数である．各ルートの双対ルートは

$$H_{\pm(\epsilon_i-\epsilon_j)} = \pm(E_{i,i} - E_{j,j})$$

であり，ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}E_{i,j},\\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}E_{j,i}\end{aligned}$$

である．

B_l（$l \geq 1$）型の分裂単純 Lie 代数

対称双線型形式 $\mathit{\Phi}\colon \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \to \mathbb{K}$ を，標準基底に関して行列表示

$$\widetilde{S}_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l & 0 \\ I_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

をもつものとして定める．すると，

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1},\mathit{\Phi})\\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1,\mathbb{K}) \mid \widetilde{S}_l X + X^{\mathrm{T}}\widetilde{S}_l = 0\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B & 2v \\ C & -A^{\mathrm{T}} & 2w \\ w^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}(l,\mathbb{K}),\, B,\, C \in \mathrm{SkewSym}(l,\mathbb{K}),\, v,\, w \in \mathbb{K}^l \right\}\end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.38 (1)],

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_l,-x_1,\dots,-x_l,0) \mid x_1,\,\dots,\,x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である（Cartan 部分代数であることは，定理 1.35 を用いて確かめられる）．対応するルート系は

$$\begin{aligned}&\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \le i < j \le l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \le i \le l\},\\ &\text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は，} \epsilon_i(\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_l,-x_1,\dots,-x_l,0)) = x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

だから，$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は B_l 型の分裂単純 Lie 代数である．各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}H_{\pm(\epsilon_i-\epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i}-E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j}-E_{l+j,l+j})),\\ H_{\pm(\epsilon_i+\epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i}-E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j}-E_{l+j,l+j})),\\ H_{\pm\epsilon_i} &= \pm(E_{i,i}-E_{l+i,l+i})\end{aligned}$$

であり，ルート空間は

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j}-E_{l+j,l+i}) &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 & 0\\ 0 & -E_{j,i} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i}-E_{l+i,l+j}) &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 & 0\\ 0 & -E_{i,j} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j}-E_{j,l+i}) &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & E_{i,j}-E_{j,i} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j}-E_{l+j,i}) &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ E_{i,j}-E_{j,i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{\epsilon_i} &= \mathbb{K}(2E_{i,2l+1}+E_{2l+1,l+i}) &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e_i\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & e_i^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i} &= \mathbb{K}(2E_{l+i,2l+1}+E_{2l+1,i}) &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2e_i\\ e_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である（$\mathbb{K}^l$ の標準基底を $(e_1,\dots,e_l)$ と書いた）．

　次に，B_l 型の分裂単純 Lie 代数を，別の方法で実現する．$g \in GL(2l+1,\mathbb{K})$ を

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_l & \frac{1}{2}I_l & 0\\ \frac{1}{2}I_l & -\frac{1}{2}I_l & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & I_l & 0\\ I_l & -I_l & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と定め，Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l+1,\mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto gXg^{-1}$ を $\operatorname{Ad}(g)$ と書く．この自己同型は，

$$\operatorname{Ad}(g)\begin{pmatrix} A & B & v\\ C & D & w\\ v' & w' & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B+C+D) & \frac{1}{2}(A-B+C-D) & \frac{1}{2}(v+w)\\ \frac{1}{2}(A+B-C-D) & \frac{1}{2}(A-B-C+D) & \frac{1}{2}(v-w)\\ v'+w' & v'-w' & x\end{pmatrix}$$

で与えられる．$\mathfrak{g}' = \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}' = \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{h}$ と置くと，$(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$ も B_l 型の分裂単純 Lie 代数である．$\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{h}'$ や，対応するルート系などを求めよう．Φ の g による押し出し $\Phi'\colon \mathbb{K}^{2l+1}\times\mathbb{K}^{2l+1} \to \mathbb{K}$ は，標準基底に関して行列表示

$$(g^{-1})^{\mathrm{T}}\widetilde{S}_l g^{-1} = 2I_{l,l+1} = \begin{pmatrix} 2I_l & 0\\ 0 & -2I_{l+1}\end{pmatrix}$$

をもつ対称双線型形式だから，

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}' &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \varPhi') \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \mid I_{l,l+1}X + X^{\mathrm{T}} I_{l,l+1} = 0\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{o}(l, \mathbb{K}),\, D \in \mathfrak{o}(l+1, \mathbb{K}),\, B \in \mathrm{Mat}(l, l+1, \mathbb{K}) \right\}\end{aligned}$$

である．この Lie 代数を，$\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$ と書く．また，

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}' &= \{\mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l, -x_1, \ldots, -x_l, 0) \mid x_1,\, \ldots,\, x_l \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 \\ \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,\, \ldots,\, x_l \in \mathbb{K} \right\}\end{aligned}$$

であり，対応するルート系は

$$\varDelta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') = \{\pm(\epsilon'_i \pm \epsilon'_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon'_i \mid 1 \leq i \leq l\},$$

各 $\epsilon'_i \in \mathfrak{h}'^*$ は，$\epsilon'_i\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 \\ \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x_i$ で与えられる元

であり，各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}H_{\pm(\epsilon'_i - \epsilon'_j)} &= \pm\mathrm{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} - E_{j,j} & 0 \\ E_{i,i} - E_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm(\epsilon'_i + \epsilon'_j)} &= \pm\mathrm{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} + E_{j,j} & 0 \\ E_{i,i} + E_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm\epsilon'_i} &= \pm\mathrm{Ad}(g)(E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} & 0 \\ E_{i,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり，ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & e_i \\ e_i^{\mathrm{T}} & -e_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_i \\ e_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & -e_i \\ e_i^{\mathrm{T}} & e_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である（$\mathbb{K}^l$ の標準基底を $(e_1, \ldots, e_l)$ と書いた）．

さらに，$\mathbb{K}$ が -1 の平方根をもつと仮定し，その一つを $\sqrt{-1}$ と書く．$h \in GL(2l+1, \mathbb{K})$ を

$$h = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\, I_{l+1} \end{pmatrix}$$

と定め，Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto hXh^{-1}$ を $\mathrm{Ad}(h)$ と書く．この自己同型は，

$$\mathrm{Ad}(h) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}\, B \\ -\sqrt{-1}\, C & D \end{pmatrix}$$

で与えられる．$\mathfrak{g}'' = \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{g}'$，$\mathfrak{h}'' = \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h}'$ と置くと，$(\mathfrak{g}'', \mathfrak{h}'')$ も B_l 型の分裂単純 Lie 代数である．$\mathfrak{g}''$ と $\mathfrak{h}''$ を求めよう．$\mathit{\Phi}'$ の h による押し出し $\mathit{\Phi}'' \colon \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \to \mathbb{K}$ は，標準基底に関して行列表示

$$(h^{-1})^{\mathrm{T}} 2I_{l,l+1} h^{-1} = 2I_{2l+1}$$

をもつ対称双線型形式だから，

$$\mathfrak{g}'' = \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \mathit{\Phi}'') = \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$$

である．また，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}'' &= \left\{ \mathrm{Ad}(h) \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 \\ \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \mathrm{Ad}(h) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}\, \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 \\ -\sqrt{-1}\, \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}$$

である．対応するルート系なども，前段と同様にして求められる．

C_l（$l \geq 1$）型の分裂単純 Lie 代数

$\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$ の部分 Lie 代数

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{sp}(l, \mathbb{K}) \\
&= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid J_l X + X^{\mathrm{T}} J_l = 0\} \qquad \left(J_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}),\ B,\ C \in \mathrm{Sym}(l, \mathbb{K}) \right\}
\end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.38 (2)],

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l, -x_1, \ldots, -x_l) \mid x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である（Cartan 部分代数であることは，定理 1.35 を用いて確かめられる）．対応するルート系は

$$\begin{aligned}
&\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}, \\
&\text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は，} \epsilon_i(\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l, -x_1, \ldots, -x_l)) = x_i \text{ で与えられる元}
\end{aligned}$$

だから，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は C_l 型の分裂単純 Lie 代数である．各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}
H_{\pm(\epsilon_i-\epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i}-E_{l+i,l+i})-(E_{j,j}-E_{l+j,l+j})),\\
H_{\pm(\epsilon_i+\epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i}-E_{l+i,l+i})+(E_{j,j}-E_{l+j,l+j})),\\
H_{\pm 2\epsilon_i} &= \pm(E_{i,i}-E_{l+i,l+i})
\end{aligned}$$

であり，ルート空間は

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j}-E_{l+j,l+i}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i}-E_{l+i,l+j}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j}+E_{j,l+i}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & E_{i,j}+E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j}+E_{l+j,i}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j}+E_{j,i} & 0 \end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{2\epsilon_i} &= \mathbb{K}E_{i,l+i} \qquad\qquad\quad = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
\mathfrak{g}_{-2\epsilon_i} &= \mathbb{K}E_{l+i,i} \qquad\qquad\quad = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,i} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．

D_l（$l \geq 2$）型の分裂（半）単純 Lie 代数

　対称双線型形式 $\varPhi\colon \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \to \mathbb{K}$ を，標準基底に関して行列表示

$$S_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

をもつものとして定める．すると，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \varPhi)\\
&= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid S_l X + X^{\mathrm{T}} S_l = 0\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}),\ B,\ C \in \mathrm{SkewSym}(l, \mathbb{K}) \right\}
\end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり [4, 命題 6.38 (1)],

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1,\ \dots,\ x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である（Cartan 部分代数であることは，定理 1.35 を用いて確かめられる）．対応するルート系は

$$\begin{aligned}
&\varDelta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\},\\
&\text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は，} \epsilon_i(\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l)) = x_i \text{ で与えられる元}
\end{aligned}$$

だから，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は D_l 型の分裂半単純 Lie 代数（$l \geq 3$ ならば，分裂単純 Lie 代数）である．各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}
H_{\pm(\epsilon_i-\epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i}-E_{l+i,l+i})-(E_{j,j}-E_{l+j,l+j})),\\
H_{\pm(\epsilon_i+\epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i}-E_{l+i,l+i})+(E_{j,j}-E_{l+j,l+j}))
\end{aligned}$$

であり，ルート空間は

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j,l+i}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i,l+j}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}_{\epsilon_i+\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j} - E_{j,l+i}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}_{-\epsilon_i-\epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j} - E_{l+j,i}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．

次に，D_l 型の分裂単純 Lie 代数を，別の方法で実現する．$g \in GL(2l, \mathbb{K})$ を

$$
g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_l & \frac{1}{2}I_l \\ \frac{1}{2}I_l & -\frac{1}{2}I_l \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & I_l \\ I_l & -I_l \end{pmatrix}
$$

と定め，Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto gXg^{-1}$ を $\mathrm{Ad}(g)$ と書く．この自己同型は，

$$
\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B+C+D) & \frac{1}{2}(A-B+C-D) \\ \frac{1}{2}(A+B-C-D) & \frac{1}{2}(A-B-C+D) \end{pmatrix}
$$

で与えられる．$\mathfrak{g}' = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}' = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ と置くと，$(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ も D_l 型の分裂単純 Lie 代数である．$\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{h}'$ や，対応するルート系などを求めよう．$\varPhi$ の g による押し出し $\varPhi' \colon \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \to \mathbb{K}$ は，標準基底に関して行列表示

$$
(g^{-1})^{\mathrm{T}} S_l g^{-1} = 2I_{l,l} = \begin{pmatrix} 2I_l & 0 \\ 0 & -2I_l \end{pmatrix}
$$

をもつ対称双線型形式だから，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}' &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \varPhi') \\
&= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid I_{l,l}X + X^{\mathrm{T}} I_{l,l} = 0\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \,\middle|\, A,\ D \in \mathfrak{o}(l, \mathbb{K}),\ B \in \mathrm{Mat}(l, \mathbb{K}) \right\}
\end{aligned}
$$

である．この Lie 代数を，$\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$ と書く．また，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}' &= \{\mathrm{Ad}(g)\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1,\ \dots,\ x_l \in \mathbb{K}\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1,\ \dots,\ x_l \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}
$$

であり，対応するルート系は

$$
\begin{aligned}
&\varDelta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') = \{\pm(\epsilon'_i \pm \epsilon'_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}, \\
&\text{各 } \epsilon'_i \in \mathfrak{h}'^* \text{ は，} \epsilon'_i\left(\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix}\right) = x_i \text{ で与えられる元}
\end{aligned}
$$

であり，各ルートの双対ルートは

$$
\begin{aligned}
H_{\pm(\epsilon'_i-\epsilon'_j)} &= \pm\mathrm{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm\begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} - E_{j,j} \\ E_{i,i} - E_{j,j} & 0 \end{pmatrix}, \\
H_{\pm(\epsilon'_i+\epsilon'_j)} &= \pm\mathrm{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm\begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} + E_{j,j} \\ E_{i,i} + E_{j,j} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であり，ルート空間は

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}'_{\epsilon'_i-\epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix} &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i+\epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix} &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-E_{i,j}+E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j}+E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}'_{\epsilon'_i+\epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 0 & E_{i,j}-E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j}+E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j}+E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i-\epsilon'_j} &= \mathbb{K}\,\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j}-E_{j,i} & 0 \end{pmatrix} &&= \mathbb{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(-E_{i,j}+E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j}+E_{j,i}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．

さらに，$\mathbb{K}$ が -1 の平方根をもつと仮定し，その一つを $\sqrt{-1}$ と書く．$h \in GL(2l, \mathbb{K})$ を

$$
h = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}\,I_l \end{pmatrix}
$$

と定め，Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto hXh^{-1}$ を $\mathrm{Ad}(h)$ と書く．この自己同型は,

$$
\mathrm{Ad}(h)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}\,B \\ -\sqrt{-1}\,C & D \end{pmatrix}
$$

で与えられる．$\mathfrak{g}'' = \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{g}'$，$\mathfrak{h}'' = \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h}'$ と置くと，$(\mathfrak{g}'', \mathfrak{h}'')$ も D_l 型の分裂単純 Lie 代数である．$\mathfrak{g}''$ と $\mathfrak{h}''$ を求めよう．$\varPhi'$ の h による押し出し $\varPhi''\colon \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \to \mathbb{K}$ は，標準基底に関して行列表示

$$
(h^{-1})^{\mathrm{T}} 2I_{l,l} h^{-1} = 2I_{2l}
$$

をもつ対称双線型形式だから,

$$
\mathfrak{g}'' = \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \varPhi'') = \mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})
$$

である．また,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}'' &= \left\{ \mathrm{Ad}(h)\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \mathrm{Ad}(h)\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}\ \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ -\sqrt{-1}\ \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}
$$

である．対応するルート系なども，前段と同様にして求められる．

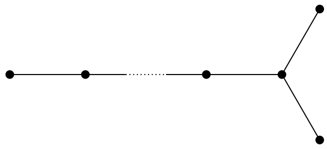
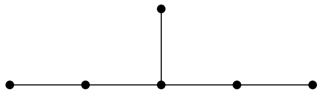
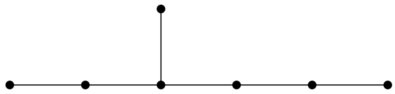
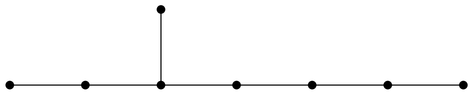
3.7 分裂可能単純 Lie 代数の分類

本小節では，標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型の（同型を除いて一意に存在する）分裂可能単純 Lie 代数を，それぞれ $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$, $\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$ と書く．

定理 3.31（分裂可能単純 Lie 代数の分類） $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．次に挙げる Lie 代数は，いずれも $\mathbb{K}$ 上の分裂可能単純 Lie 代数である．$\mathbb{K}$ 上の任意の分裂可能単純 Lie 代数は，これらのいずれかに同型である．（表 1 も参照のこと.）

- $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ $(l \geq 1)$
- $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$ $(l \geq 1)$

表 1　分裂可能単純 Lie 代数の分類

型	分裂可能単純 Lie 代数	Dynkin 図形
A_l $(l \geq 1)$	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$	
B_l $(l \geq 1)$	$\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$	
C_l $(l \geq 1)$	$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{K})$	
D_l $(l \geq 2)$	$\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$	
E_6	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$	
E_7	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$	
E_8	$\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$	
F_4	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$	
G_2	$\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$	

- $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{K})$ $(l \geq 1)$
- $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$ $(l \geq 2)$
- $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$, $\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$

証明　存在定理（定理 3.22），同型定理（定理 3.28），系 3.29，命題 3.30 より，分裂可能単純 Lie 代数の同型類と被約な既約ルート系の同型類とは一対一に対応する．よって，主張は，被約な既約ルート系の分類 [5, 定理 4.13, 4.3 節] と前小節で述べた古典型分裂可能単純 Lie 代数の構成から従う．　□

系 3.32（標数 0 の代数閉体上の単純 Lie 代数の分類）　$\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする．次に挙げる Lie 代数は，いずれも $\mathbb{K}$ 上の単純 Lie 代数である．$\mathbb{K}$ 上の任意の単純 Lie 代数は，これらのいずれかに同型である．

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ $(n \geq 2)$
- $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ ($n = 3$ または ≥ 5)
- $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ $(n \geq 1)$
- $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$, $\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$

証明　$\mathbb{K}$ は代数閉だから，$\mathbb{K}$ 上の任意の単純 Lie 代数は分裂可能であり，前小節で述べたように $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$ かつ $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$ である．よって，主張は，分裂可能単純 Lie 代数の分類定理（定理 3.31）から従う．　□

表 2　古典型分裂可能（半）単純 Lie 代数の偶然同型

型	分裂可能（半）単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$\mathrm{A}_1 \cong \mathrm{B}_1 \cong \mathrm{C}_1$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(1,2,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(1,\mathbb{K})$	$\bullet$
$\mathrm{B}_2 \cong \mathrm{C}_2$	$\mathfrak{o}(2,3,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(2,\mathbb{K})$	$\bullet\!\Rightarrow\!\bullet$
$\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1 \cong \mathrm{D}_2$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2,2,\mathbb{K})$	$\bullet \quad \bullet$
$\mathrm{A}_3 \cong \mathrm{D}_3$	$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(3,3,\mathbb{K})$	$\bullet\!-\!\!-\!\bullet\!-\!\!-\!\bullet$

注意 3.33（古典型分裂可能（半）単純 Lie 代数の偶然同型） 低階数でのルート系の同型と同型定理（定理 3.28）から，古典型分裂可能（半）単純 Lie 代数の間の同型が得られる（表 2）．これらを，**偶然同型**（accidental isomorphism）という．分類定理（定理 3.31）に挙げた分裂可能単純 Lie 代数の間の同型は，同表（「$\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1 \cong \mathrm{D}_2$」の行を除く）に挙げたもので尽くされている．

4　分裂簡約 Lie 代数の表現

4.1　$\mathfrak{g}$-加群のウェイト

定義 4.1（ウェイト） $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，V を $\mathfrak{g}$-加群とする．$\mathfrak{h}$ の V への作用の同時固有値（これは，$\mathfrak{h}$ から $\mathbb{K}$ への写像である），同時固有ベクトル，同時固有空間を，それぞれ，V の（$\mathfrak{h}$ に関する）**ウェイト**（weight），**ウェイトベクトル**（weight vector），**ウェイト空間**（weight space）という．$\mathfrak{h}$ の V の作用における同時固有値 $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ の重複度を，V におけるウェイト λ の**重複度**（multiplicity）という．

定義 4.1 の状況で，V におけるウェイト $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ のウェイト空間を，V_λ と書く．すなわち，

$$V_\lambda = \{v \in V \mid 任意の\ h \in \mathfrak{h}\ に対して\ hv = \lambda(h)v\}$$

と書く．明らかに，$V_\lambda \neq 0$ となりうるのは $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ のときだけである．同時固有空間に関する一般論より，和 $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ は直和である．

注意 4.2 定義 4.1 において，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$（その標準基底を (H, X, Y) と書く），$\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$ とし，線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ を $\mathbb{K}$ と同一視したものが，定義 2.1 にほかならない．

定義 4.3（ウェイト加群） $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$-加群 V は，それが（$\mathfrak{h}$ に関する）ウェイト空間の直和に分解される（すなわち，$\mathfrak{h}$ の V への作用が同時対角化可能である）とき，（$\mathfrak{h}$ に関する）**ウェイト加群**（weight module）であるという．

命題 4.4 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．V を $\mathfrak{g}$-加群とすると，任意の α, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ が成り立つ．

証明 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$v \in V_\lambda$ とすると，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$hxv = [h,x]v + xhv = \alpha(h)xv + \lambda(h)xv$$

だから，$xv \in V_{\lambda+\alpha}$ である．よって，$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ である． □

命題 4.5　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．$f\colon V \to W$ を $\mathfrak{g}$-加群の間の $\mathfrak{g}$-準同型とすると，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$f(V_\lambda) \subseteq W_\lambda$ が成り立つ．

証明　$v \in V_\lambda$ とすると，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$hf(v) = f(hv) = \lambda(h)f(v)$$

だから，$f(v) \in W_\lambda$ である．よって，$f(V_\lambda) \subseteq W_\lambda$ である． □

4.2　最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群

定義 4.6（極大ベクトル）　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底，$\mathit{\Pi}$ に関する正ルート全体のなす集合を $\mathit{\Delta}_+$ と書き，$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Delta}_+} \mathfrak{g}_\alpha$ と置く．$\mathfrak{g}$-加群 V の（$\mathfrak{h}$ に関する）ウェイトベクトル $e \neq 0$ であって $\mathfrak{n}_+ e = 0$ を満たすものを，V の（$\mathfrak{h}$ と $\mathit{\Pi}$ に関する）**極大ベクトル**（maximal vector）という．V の極大ベクトルであって V を $\mathfrak{g}$-加群として生成するものを，V の（$\mathfrak{h}$ と $\mathit{\Pi}$ に関する）**極大生成ベクトル**（maximal generating vector）という．

定義 4.7（最高ウェイト加群）　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．$\mathfrak{g}$-加群 V が（$\mathfrak{h}$ と $\mathit{\Pi}$ に関する）ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトルをもつとき，V は（$\mathfrak{h}$ と $\mathit{\Pi}$ に関する）**最高ウェイト λ の最高ウェイト加群**（highest weight module of highest weight λ）であるという．

注意 4.8　定義 4.6 と定義 4.7 において，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$（その標準基底を (H, X, Y) と書く），$\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$，$\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$ とし，線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ を $\mathbb{K}$ と同一視したものが，定義 2.5 と定義 2.6 にほかならない．

命題 4.9　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．$\mathfrak{g}$-加群 V のウェイトベクトル $e \neq 0$ が極大ベクトルであるための必要十分条件は，任意の単純ルート $\alpha \in \mathit{\Pi}$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha v = 0$ であることである．

証明　$\mathit{\Pi}$ に関する正ルート全体のなす集合を $\mathit{\Delta}_+$ と書き，$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Delta}_+} \mathfrak{g}_\alpha$ と置くと，$\bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Pi}} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{n}_+$ を Lie 代数として生成する（系 3.17 (1)）．よって，主張が成り立つ． □

命題 4.10　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．$\mathit{\Pi}$ に関する正ルート全体のなす集合を $\mathit{\Delta}_+$ と書き，$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Delta}_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ と置く．V をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とする．

(1) $V = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e$ が成り立つ．
(2) V の任意のウェイトは $\lambda - \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}$ に属し，その重複度はすべて有限である．また，ウェイト λ の重複度は 1 である．
(3) V はウェイト加群である．

証明 (1) e は V を $\mathfrak{g}$-加群として生成し，Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 [4, 系 2.5][*6] より $\mathbf{U}(\mathfrak{g}) = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$ だから，$V = \mathbf{U}(\mathfrak{g})e = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)e = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e$ である．

(2), (3) $\mathit{\Pi}$ に関する正ルートを重複なく列挙して α_1, …, α_k とし，各 $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}$ を一つずつ固定する．すると，Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 [4, 系 2.5][*7] より $y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}$（$q_1$, …, $q_k \in \mathbb{N}$）の全体は $\mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)$ を線型空間として生成するから，(1) と合わせて

$$V = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k} e \mid q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}\}$$

を得る．ここで，各 $y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k} e$ は，ウェイト $\lambda - \sum_{i=1}^{k} q_i\alpha_i$ のウェイトベクトルである（命題 4.4）．よって，V の任意のウェイトは $\lambda - \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}$ に属し，V はウェイト加群である．また，任意の $\mu \in \lambda - \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathit{\Pi}$ に対して，$\lambda - \sum_{i=1}^{k} q_i\alpha_i = \mu$ を満たす $(q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{N}^k$ はたかだか有限個であり，$\mu = \lambda$ のときはこのような組は $(0, \dots, 0)$ のみである．よって，V の任意のウェイトの重複度は有限であり，ウェイト λ の重複度は 1 である． □

系 4.11 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 V の最高ウェイトは一意に定まり，V の極大生成ベクトルはスカラー倍を除いて一意である．

証明 命題 4.10 (2) から従う． □

注意 4.12 系 4.11 の状況で，V は，極大生成ベクトル以外の極大ベクトルをもちうる．たとえば，2.2 節で定義した $M(\lambda)$（$\lambda \in \mathbb{K}$）は最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群であり，その極大生成ベクトルはスカラー倍を除いて e_0 のみだが，$\lambda \in \mathbb{N}$ のとき，$e_{\lambda+1}$ は $M(\lambda)$ のウェイト $-\lambda - 2$ の極大ベクトルである．

系 4.13 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 V から自身への $\mathfrak{g}$-準同型は，恒等写像 id_V のスカラー倍のみである．

証明 V がウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトル e をもつとする．$f\colon V \to V$ を $\mathfrak{g}$-準同型とすると，$f(e) \in f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda = \mathbb{K}e$ だから（命題 4.5，命題 4.10 (2)），ある $c \in \mathbb{K}$ が存在して $f(e) = ce$ となる．e は V を $\mathfrak{g}$-加群として生成するから，これより，$f = c\,\mathrm{id}_V$ である． □

系 4.14 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．V を最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とする．

(1) 各 $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は，V に $\lambda(z)$ 倍写像として作用する．
(2) V は直既約[*8] である．
(3) さらに，V が有限次元であるとする．このとき，V は既約である．

証明 (1) $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の V への作用は，$\mathfrak{g}$-準同型だから，系 4.13 よりスカラー倍である．一方で，$e \in V$ をウェイト λ の極大生成ベクトルとすると，$ze = \lambda(z)e$ である．よって，z は，V に $\lambda(z)$ 倍写像として作用する．

(2) 明らかに，$V \neq 0$ である．$V = V' \oplus V''$ を直和分解とすると，対応する射影 $p\colon V \to V'$ は $\mathfrak{g}$-準同

*6 脚注 *5 を参照のこと．
*7 脚注 *5 を参照のこと．
*8 $\mathfrak{g}$-加群 V が**直既約**（indecomposable）であるとは，$V \neq 0$ であり，かつ V が二つの 0 でない部分加群の直和として書けないことをいう．

型だから，系 4.13 より $p = c\mathrm{id}_V$（$c \in \mathbb{K}$）と書ける．$c \neq 0$ ならば $V' = p(V) = V$ であり，$c = 0$ ならば $V' = p(V) = 0$ である．よって，V は直既約である．

(3)　Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より，V の $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$-加群としての既約分解 $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ がとれる．各 V_i は $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$-安定だが，(1) より $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$-安定でもあるから，$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ は $\mathfrak{g}$-加群としての既約分解でもある．(2) より V は直既約だから，I は 1 元集合であり，V は既約である．□

系 4.15　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．V をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とし，W をその真部分加群とする．このとき，$W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi,\ \lambda \neq \mu} V_\mu$ であり，V/W はウェイト λ の極大生成ベクトル $e + W$ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．

証明　直和分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi} V_\mu$ が成り立ち（命題 4.10 (2), (3)），W は $\mathfrak{h}$-安定だから，同時固有空間に関する一般論より，

$$W = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi} (V_\mu \cap W)$$

が成り立つ．V_λ は 1 次元（命題 4.10 (2)）だから $V_\lambda \cap W$ は 0 または V_λ だが，後者の場合 $e \in V_\lambda \subseteq W$ となり，e が V を $\mathfrak{g}$-加群として生成することと W が V の真部分加群であることに反する．よって，$V_\lambda \cap W = 0$ であり，上記の直和分解と合わせて $W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi,\ \lambda \neq \mu} V_\mu$ を得る．また，これより $e + W \neq 0$ だから，$e + W$ は V/W のウェイト λ の極大生成ベクトルである．□

4.3　Verma 加群

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き，$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と置く．このとき，$\mathfrak{h}$ が可換であること（定理 1.35）と命題 3.6 (1) より $[\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+] \subseteq \mathfrak{n}_+$ だから，1 次元 $\mathfrak{b}_+$-加群 $\mathbb{K}v_\lambda$ を，

$$(h + x)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \qquad (h \in \mathfrak{h},\ x \in \mathfrak{n}_+)$$

によって定義できる．このことを踏まえて，次のように定義する．

定義 4.16（Verma 加群）　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き，$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と置く．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，上記の 1 次元 $\mathfrak{b}_+$-加群 $\mathbb{K}v_\lambda$ を用いて，**Verma 加群**（Verma module）$M(\lambda)$ を

$$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda$$

と定める（ここで，$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を自然に右 $\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$-加群とみなしている）．また，

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda)$$

と定める．

命題 4.17　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．

(1) Verma 加群 $M(\lambda)$ は，ウェイト λ の極大生成ベクトル e_λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．

(2) V をウェイト λ の極大ベクトル e をもつ $\mathfrak{g}$-加群とする．このとき，$\mathfrak{g}$-準同型 $\phi\colon M(\lambda)\to V$ であって e_λ を e に移すものが，一意に存在する．

証明 Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き，$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ と置く．

(1) 任意の $h\in\mathfrak{h}$ に対して，$he_\lambda = h\otimes v_\lambda = 1\otimes hv_\lambda = \lambda(h)e_\lambda$ である．任意の $x\in\mathfrak{n}_+$ に対して，$xe_\lambda = x\otimes v_\lambda = 1\otimes xv_\lambda = 0$ である．明らかに，e_λ は $M(\lambda)$ を $\mathfrak{g}$-加群として生成する．以上より，e_λ は $M(\lambda)$ のウェイト λ の極大生成ベクトルである．

(2) e が V のウェイト λ の極大ベクトルであることを用いて容易に確かめられるように，$(u, v_\lambda)\in \mathbf{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{K}v_\lambda$ を $ue\in V$ に移す双線形写像は，$\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$-均衡である．よって，テンソル積の普遍性より，線型写像 $\phi\colon M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)}\mathbb{K}v_\lambda\to V$ であって各 $u\otimes v_\lambda$ を ue に移すものが，一意に存在する．この ϕ が，条件を満たす一意な $\mathfrak{g}$-準同型である． □

定理 4.18 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ とする．

(1) Verma 加群 $M(\lambda)$ の真部分加群 N に対して商加群 $M(\lambda)/N$ を与える対応は，$M(\lambda)$ の真部分加群と最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群の同型類との間の一対一対応である．

(2) Verma 加群 $M(\lambda)$ は，最大真部分加群 $N(\lambda)$ をもつ．これに対応する最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$ は既約であり，その他の真部分加群 N に対応する最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 $M(\lambda)/N$ は無限次元かつ可約である．

証明 (1) 系 4.15 より，$M(\lambda)$ の真部分加群 N に対して，$M(\lambda)/N$ は最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群である．

最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群が，同型を除いて $M(\lambda)$ の真部分加群による商で尽くされることを示す．V をウェイト λ の極大生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群とすると，Verma 加群の普遍性（命題 4.17 (1)）より，$\mathfrak{g}$-準同型 $\phi\colon M(\lambda)\to V$ であって e_λ を e に移すものが一意に存在する．e は V を $\mathfrak{g}$-加群として生成するから，この ϕ は全射であり，したがって，$\mathfrak{g}$-同型 $M(\lambda)/\operatorname{Ker}\phi\cong V$ を誘導する．$V\neq 0$ だから，$\operatorname{Ker}\phi$ は $M(\lambda)$ の真部分加群である．

N と N' が $M(\lambda)$ の真部分加群であり，$\mathfrak{g}$-同型 $\psi\colon M(\lambda)/N\to M(\lambda)/N'$ が存在するとして，$N = N'$ を示す．$\pi\colon M(\lambda)\to M(\lambda)/N$ と $\pi'\colon M(\lambda)\to M(\lambda)/N'$ を等化準同型とすると，$\psi(\pi(e))$ と $\pi'(e)$ はともに $M(\lambda)/N'$ の極大生成ベクトルだから（系 4.15），ある $c\in\mathbb{K}^\times$ が存在して $\psi(\pi(e)) = c\pi'(e)$ が成り立つ（系 4.11）．Verma 加群の普遍性（命題 4.17 (2)）と合わせて，$\psi\circ\pi = c\pi'$ を得る．よって，

$$N' = \operatorname{Ker}(\psi\circ\pi) = \operatorname{Ker}\pi' = N'$$

が成り立つ．

(2) 系 4.15 より，$M(\lambda)$ のすべての真部分加群の和はまたは真部分加群であり，これが $M(\lambda)$ の最大真部分加群 $N(\lambda)$ となる．$M(\lambda)$ の真部分加群 N に対して，$M(\lambda)/N$ が既約であることは，N が $M(\lambda)$ の真部分加群の中で極大であることと同値だが，$M(\lambda)$ は最大真部分加群 $N(\lambda)$ をもつから，この条件を満たすものは $N = N(\lambda)$ のみである．また，$M(\lambda)/N$ が有限次元であるとすると，$M(\lambda)/N$ は既約だから（系 4.14 (3)），$N = N(\lambda)$ となる．これで，すべての主張が示された． □

定義 4.19（Verma 加群の既約商） $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して，Verma 加群 $M(\lambda)$ をその最大真部分加群 $N(\lambda)$ で割って得られる最

高ウェイト既約 $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$（定理 4.18）を，**Verma 加群の既約商**（irreducible quotient of the Verma module）という．$M(\lambda)$ から $L(\lambda)$ への等化準同型による $e_\lambda \in M(\lambda)$ の像を，そのまま $e_\lambda \in L(\lambda)$ と書く．

注意 4.20 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると，$\mathfrak{h}$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の分裂化 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ と $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の直和として書ける（注意 3.4）．$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底，$\mathit{\Pi}$ に関する正ルート全体のなす集合を $\mathit{\Delta}_+$ と書き，

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Delta}_+} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \mathit{\Delta}_+} \mathfrak{g}'_{\alpha|_{\mathfrak{h}'}}, \qquad \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \qquad \mathfrak{b}'_+ = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}_+$$

と置く．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ として $\lambda' = \lambda|_{\mathfrak{h}'} \in (\mathfrak{h}')^*$ と置き，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ のそれぞれの上の Verma 加群

$$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda, \qquad M(\lambda') = \mathbf{U}(\mathfrak{g}') \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}'_+)} \mathbb{K}v_{\lambda'}$$

とその極大生成ベクトル

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda), \qquad e_{\lambda'} = 1 \otimes v_{\lambda'} \in M(\lambda')$$

を考える．

$M(\lambda)$ を $\mathfrak{g}'$-加群とみなすと，e_λ はウェイト λ' の極大生成ベクトルだから，$M(\lambda')$ の普遍性（命題 4.17 (2)）より，$\mathfrak{g}'$-準同型 $\phi\colon M(\lambda') \to M(\lambda)$ であって $e_{\lambda'}$ を e_λ に移すものが（一意に）存在する．また，任意の $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に対して z の $M(\lambda')$ への作用を $\lambda(z)$ 倍写像と定めることで $M(\lambda')$ は $\mathfrak{g}$-加群をなし，$e_{\lambda'}$ はウェイト λ の極大生成ベクトルとなるから，$M(\lambda)$ の普遍性（命題 4.17 (2)）より，$\mathfrak{g}$-準同型 $\psi\colon M(\lambda) \to M(\lambda')$ であって e_λ を $e_{\lambda'}$ に移すものが（一意に）存在する．さらに，Verma 加群の普遍性から誘導される準同型の一意性（命題 4.17 (2)）を用いて確かめられるように，ϕ と ψ は互いに他の逆である．以上より，$M(\lambda)$ は，$M(\lambda')$ に上記の方法で $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の作用を定めて得られる $\mathfrak{g}$-加群に同型である．

$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の各元は $M(\lambda)$ にスカラー倍によって作用するから，前段の同型を通して，$M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群と $M(\lambda')$ の部分 $\mathfrak{g}'$-加群は一対一に対応する．よって，前段の同型によって $M(\lambda)$ と $M(\lambda')$ を同一視するとき，$N(\lambda) = N(\lambda')$ かつ $L(\lambda) = L(\lambda')$ である．

注意 4.21 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$（その標準基底を (H, X, Y) と書く），$\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$，$\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$ とし，線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ を $\mathbb{K}$ と同一視する．最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の分類（定理 2.8）と定理 4.18 を比較すれば，2.2 節で定義した $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ が，Verma 加群とその既約商に同型であることが確かめられる．

4.4 整ベクトルと優整ベクトルに関する補足

$\mathit{\Delta}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 有限次元線型空間 V 上の被約ルート系とし，$\mathit{\Pi}$ をその基底とするとき，$\lambda \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ が } \mathit{\Delta} \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意のルート } \alpha \in \mathit{\Delta} \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z} \\
&\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \mathit{\Pi} \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}, \\
\lambda \text{ が } (\mathit{\Delta}, \mathit{\Pi}) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \mathit{\Pi} \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

と定義するのだった [5, 定義 3.1]．

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．$\mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ 上の被約ルート系であり，$\alpha \in \mathit{\Delta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の双対ルート $\alpha^\vee$ は $\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha)$

($\lambda \in V$)(H_α は定理 3.10 によって定まるものとする)によって与えられる(定理 3.13).したがって,$\lambda \in V$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ が } \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意のルート } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \\
&\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \\
\lambda \text{ が } (\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

である.

前段の状況で,「整ベクトル」と「優整ベクトル」の定義を拡張して,$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対してもこれらの用語を用いることにする.すなわち,上記の同値性が $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対しても成り立つとすることで,「λ が $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである」ことと「λ が $(\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\Pi)$ に関する優整ベクトルである」ことを定義する.$Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0\}$ と置き,直和分解 $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$ に関する射影を $\mathrm{pr}_V \colon \mathfrak{h}^* \to V$ と書くと,

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ が } \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \mathrm{pr}_V(\lambda) \text{ が } \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル}, \\
\lambda \text{ が } (\Delta,\Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \mathrm{pr}_V(\lambda) \text{ が } (\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\Pi) \text{ に関する優整ベクトル}
\end{aligned}
$$

である.

この拡張された定義に関して,次が成り立つ.この命題は,定理 4.29 の証明で用いられる.

命題 4.22 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし,Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする.$\mathfrak{h}^*$ の部分集合 $\mathfrak{X}$ が,次の条件を満たすとする.

(i) ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が存在して,$\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$ となる.
(ii) $\mathfrak{X}$ は $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$-安定である.

このとき,$\mathfrak{X}$ は有限である.

証明 $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ および $Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0\}$ と置き,直和分解 $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$ に関する射影を $\mathrm{pr}_V \colon \mathfrak{h}^* \to V$ および $\mathrm{pr}_Z \colon \mathfrak{h}^* \to Z$ と書く.$\Pi \subseteq V$ だから,条件 (i) より,$\mathrm{pr}_Z(\mathfrak{X}) \subseteq \{\mathrm{pr}_Z(\lambda)\}$ である.また,$\mathrm{pr}_V(\mathfrak{X})$ は,$\mathrm{pr}_V(\lambda) - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$ に含まれ $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$-安定だから,ルート系の一般論 [5, 命題 3.5] より,有限である.よって,$\mathfrak{X}$ は有限である. □

4.5 条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$-加群

定義 4.23(条件 (CD) を満たす $\mathfrak{g}$-加群) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする.$\mathfrak{g}$-加群 V が**条件 (CD) を満たす**[*9] とは,$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の元の V への作用が対角化可能であることをいう.

注意 4.24 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ を満たす(これは,$\mathfrak{g}$ が半単純ならば成り立つ)ならば,明らかに,任意の $\mathfrak{g}$-加群は条件 (CD) を満たす.

命題 4.25 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし,V を既約 $\mathfrak{g}$-加群とする.任意の $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に対して,次の条件は同値である.

(a) z の V への作用はスカラー倍である.
(b) z の V への作用は対角化可能である.

[*9] 「条件 (CD) を満たす」は,本稿だけの用語である.“center” と “diagonalizable” の頭文字をとって “(CD)” とした.

(c) z の V への作用は固有値をもつ．

特に，$\mathbb{K}$ が代数閉ならば，任意の有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群は条件 (CD) を満たす．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c)　明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　z の V への作用を $\rho(z)$ と書く．$\rho(z)$ が固有値 $c \in \mathbb{K}$ をもつとすると，$\rho(z) - c\mathrm{id}_V$ は V から自身への単射でない $\mathfrak{g}$-準同型だから，$\mathrm{Ker}(\rho(z) - c\mathrm{id}_V)$ は V の 0 でない部分加群である．V は既約だから，$\mathrm{Ker}(\rho(z) - c\mathrm{id}_V) = V$ である．すなわち，$\rho(z) = c\mathrm{id}_V$ が成り立つ．

<u>最後の主張</u>　$\mathbb{K}$ が代数閉であるとすると，有限次元線型空間 $V \neq 0$ 上の線型変換は必ず固有値をもつ．よって，主張は，すでに示した同値性から従う．□

命題 4.26　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．V を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．

(1) V の任意のウェイトは，$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである．
(2) V が条件 (CD) を満たすとする．このとき，V は完全可約なウェイト加群である．
(3) V が条件 (CD) を満たすとし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．このとき，$V \neq 0$ ならば V は極大ベクトルをもち，V が既約ならば V は最高ウェイト加群である．

証明　各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる．

(1)　V がウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ のウェイトベクトル $v \neq 0$ をもつとする．$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とみなす．すると，$Hv = H_\alpha v = \lambda(H_\alpha)v$ だから，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V はウェイト $\lambda(H_\alpha)$ をもつ．したがって，系 2.13 (1) より，$\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である．これが任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して成り立つから，λ は $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである．

(2)　V が完全可約であることを示す．$\omega \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})^*$ に対して

$$V_{(\omega)} = \{v \in V \mid \text{任意の } z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \text{ に対して } zv = \omega(z)v\}$$

と置くと，仮定より，直和分解 $V = \bigoplus_{\omega \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})^*} V_{(\omega)}$ が成立する．さらに，$\mathfrak{g}$ の任意の元の作用と $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の元の作用が可換であることから確かめられるように，各 $V_{(\omega)}$ は V の部分加群である．Weyl の完全可約性定理 [4, 定理 6.20] より，各 $V_{(\omega)}$ は $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$-加群として完全可約だが，一方で，$V_{(\omega)}$ の任意の部分線型空間は $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$-安定だから，$V_{(\omega)}$ は $\mathfrak{g}$-加群としても完全可約である．よって，$\mathfrak{g}$-加群 V は完全可約である．

V がウェイト加群であることを示す．$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とみなす．すると，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V はウェイト加群だから（系 2.13 (1)），H_α の V への作用は対角化可能である．また，仮定より，$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の元の V への作用は対角化可能である．ここで，

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\} \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$$

であり（注意 3.4，系 3.14），$\mathfrak{h}$ は可換だから（定理 1.35），$\mathfrak{h}$ の V への作用は同時対角化可能である．すなわち，$\mathfrak{g}$-加群 V はウェイト加群である．

(3)　$V \neq 0$ であるとする．V は有限次元だからそのウェイトは有限個であり，一方で，(2) より V は少なくとも一つのウェイトをもつ．そこで，Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書くと，V のウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ であって $\lambda + \Delta_+$ が V のウェイトを含まないものがとれる．$e \in V_\lambda \setminus \{0\}$ をとると，任意の $\alpha \in \Delta_+$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha e \in V_{\lambda+\alpha} = 0$ だから（命題 4.4），e は極大ベクトルである．さらに，V が既約ならば，e は V を $\mathfrak{g}$-加群として生成するから，e は極大生成ベクトルである．□

命題 4.27 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．V_1 と V_2 は条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$-加群であり，任意のウェイト $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ の V_1 における重複度と V_2 における重複度が等しいとする．このとき，V_1 と V_2 は $\mathfrak{g}$-同型である．

証明 V_1 と V_2 はウェイト加群だから（命題 4.26 (2)），仮定より，V_1 と V_2 の次元は等しい．この共通の次元に関する帰納法で，主張を示す．$\dim V_1=\dim V_2=0$ である場合には，主張は明らかである．$\dim V_1=\dim V_2\geq 1$ であるとして，次元がより小さい場合には主張が成り立つとする．V_1 と V_2 は有限次元だから，そのウェイトは有限個である．そこで，ルート系 $\varDelta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底 $\varPi$ を一つ固定し，それに関する正ルート全体のなす集合を $\varDelta_+$ と書くと，V_1 と V_2 のウェイト $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ であって $\lambda+\varDelta_+$ が V_1 と V_2 のウェイトを含まないものがとれる．各 $i\in\{1,2\}$ に対してウェイトベクトル $e_i\in V_i\setminus\{0\}$ をとると，λ のとり方より，これは極大ベクトルである．そこで，e_i が生成する部分加群を $W_i\subseteq V_i$ と置くと，W_i は最高ウェイト λ の有限次元最高ウェイト加群だから，$L(\lambda)$ に同型である（定理 4.18 (2)）．V_i は完全可約だから（命題 4.26 (2)），部分加群 $V_i'\subseteq V_i$ であって W_i の補空間であるものがとれる．V_1' と V_2' はふたたび主張の仮定を満たすから，帰納法の仮定より，これらは $\mathfrak{g}$-同型である．よって，$V_1=L(\lambda)\oplus V_1'$ と $V_2=L(\lambda)\oplus V_2'$ も $\mathfrak{g}$-同型である．これで，帰納法が完成した． □

4.6 最高ウェイト理論

補題 4.28 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．V を $\mathfrak{g}$-加群とし，$\rho\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ を対応する表現とする．$\alpha\in\varDelta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ とし，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとり，V 上の線型写像 $\rho(X_\alpha)$ と $\rho(Y_\alpha)$ は局所冪零であるとする．このとき，

$$\theta_\alpha^\rho=e^{\rho(X_\alpha)}e^{\rho(-Y_\alpha)}e^{\rho(X_\alpha)}\in GL(V)$$

と定めると，任意の $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して，$\theta_\alpha^\rho(V_\alpha)=V_{s_\alpha(\lambda)}$ が成り立つ．

証明 a, $x\in\mathfrak{g}$ とし，$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(a)$ は冪零であり，$\rho(a)$ は局所冪零であるとする．すると，任意の $v\in V$ に対して

$$\begin{aligned}\rho(e^{\operatorname{ad}(a)}(x))v&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\operatorname{ad}(\rho(a))^n\rho(x)v\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p+q=n}\frac{1}{p!\,q!}\rho(a)^p\rho(x)(-\rho(a))^qv\\&=\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,q!}\rho(a)^p\rho(x)(-\rho(a))^qv\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\rho(a)^p\rho(x)e^{-\rho(a)}v\\&=e^{\rho(a)}\rho(x)e^{-\rho(a)}v\end{aligned}$$

だから（どの総和も有限項を除いて 0 になることに注意する），

$$\rho(e^{\operatorname{ad}(a)}(x))=e^{\rho(a)}\rho(x)e^{-\rho(a)}$$

が成り立つ．したがって，$\operatorname{ad}(X_\alpha)$ と $\operatorname{ad}(Y_\alpha)$ が冪零であること（系 3.7）に注意して $\theta_\alpha=e^{\operatorname{ad}(X_\alpha)}e^{\operatorname{ad}(-Y_\alpha)}e^{\operatorname{ad}(X_\alpha)}\in$

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ と定めると，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\rho(\theta_\alpha(x)) = \theta_\alpha^\rho \rho(x)(\theta_\alpha^\rho)^{-1} \tag{$*$}$$

が成り立つ．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．($*$) より，

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha^\rho(V_\lambda) &= \{v \in V \mid (\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) \in V_\lambda\} \\
&= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) = \lambda(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v)\} \\
&= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \theta_\alpha^\rho\rho(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) = \lambda(h)v\} \\
&= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(\theta_\alpha(h))v = \lambda(h)v\}
\end{aligned}$$

である．ここで，補題 3.12 (1), (2) より，θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし，$(\theta_\alpha|_\mathfrak{h})^{*-1} = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$ を満たす．よって，上式と合わせて，

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha^\rho(V_\lambda) &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)v = \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))v\} \\
&= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)v = s_\alpha(\lambda)(h)v\} \\
&= V_{s_\alpha(\lambda)}
\end{aligned}$$

を得る． □

定理 4.29 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，次の条件は同値である．

(a) λ は $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルである．

(b) 任意の $\alpha \in \Pi$ に対して，$\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のすべての元の $L(\lambda)$ への作用は局所冪零である．

(c) $L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合は，$\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$-安定である．

(d) $L(\lambda)$ は有限次元である．

さらに，これらの条件の下で，$L(\lambda)$ におけるウェイトの重複度は，$\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ の作用の各軌道上で一定である．

証明 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる．

(a) $\Longrightarrow$ (b) λ が $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルであるとする．$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって $L(\lambda)$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とみなす．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を (H, X, Y) と書くとき，Y の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $L(\lambda)$ への作用が局所冪零であることを示したい．Y は $\mathbb{K}^2$ 上の線型写像として冪零だから，その任意の有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群への作用も冪零である [4, 命題 6.32 (2)] したがって，$L(\lambda)$ のすべての有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の和が $L(\lambda)$ 全体となることを示せばよい．

W を $L(\lambda)$ の有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とすると，任意の $x \in \mathrm{span}_\mathbb{K}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$ に対して

$$x\mathfrak{g}W \subseteq \mathfrak{g}xW + [x, \mathfrak{g}]W \subseteq \mathfrak{g}W$$

だから，$\mathfrak{g}W$ も $L(\lambda)$ の有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群である．したがって，$L(\lambda)$ のすべての有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の和は，$L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群である．$L(\lambda)$ は既約 $\mathfrak{g}$-加群だから，あとは，$L(\lambda)$ 有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群であって 0 でないことを示せばよい．

e_λ が生成する $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群が有限次元であることを示そう．$m=\lambda(H_\alpha)$ と置くと，仮定より，$m\in\mathbb{N}$ である．e_λ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 $L(\lambda)$ のウェイト m の極大ベクトルだから，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$e_{\lambda,n}=\frac{1}{n!}Y_\alpha^n e_\lambda$$

と置くと，e_λ が生成する $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{e_{\lambda,n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ である（命題 2.7 (2), (3)）．ここで，$e_{\lambda,m+1}$ に注目すると，命題 2.7 (1) より

$$X_\alpha e_{\lambda,m+1}=(m-(m+1)+1)e_{\lambda,m}=0$$

である．また，$\beta\in\mathit{\Pi}\setminus\{\alpha\}$ とすると，$[X_\beta,Y_\alpha]=0$ であり（命題 3.26 (4)），e_λ は $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ の極大ベクトルだから，

$$X_\beta e_{\lambda,m+1}=\frac{1}{(m+1)!}X_\beta Y_\alpha^{m+1}e_\lambda=\frac{1}{(m+1)!}Y_\alpha^{m+1}X_\beta e_\lambda=0$$

である．もし $e_{\lambda,m+1}\neq 0$ ならば，上式より $e_{\lambda,m+1}$ は $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ の極大ベクトルであり（命題 4.9），$L(\lambda)$ は既約 $\mathfrak{g}$-加群だから，これは自動的に極大生成ベクトルとなる．ところが，$e_{\lambda,m+1}$ のウェイトは $\lambda-(m+1)\alpha$ だから（命題 4.4），これは，最高ウェイトの一意性（系 4.11）に矛盾する．よって，背理法より $e_{\lambda,m+1}=0$ であり，e_λ が生成する $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群は有限次元である．これで，主張が示された．

(b) $\Longrightarrow$ (c)，最後の主張　条件 (b) が成り立つとすると，各 $\alpha\in\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して $\theta_\alpha^\rho\in GL(V)$ を補題 4.28 のとおりに定義でき，これは任意の $\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対して $\theta_\alpha^\rho(V_\mu)=V_{s_\alpha(\mu)}$ を満たす．よって，任意の $w\in\mathbf{W}(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$ と $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して，$L(\lambda)$ におけるウェイト λ と $w(\lambda)$ の重複度は等しい．特に，$L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合は，$\mathbf{W}(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$-安定である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合を $\mathfrak{X}$ と置くと，$\mathfrak{X}\subseteq\lambda-\mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\mathit{\Pi}$ である（命題 4.10 (2)）．さらに，$\mathfrak{X}$ が $\mathbf{W}(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$-安定であるとすると，$\mathfrak{X}$ は命題 4.22 の仮定を満たすから，有限である．$L(\lambda)$ はウェイト加群であり，その各ウェイトの重複度は有限だから（命題 4.10 (2), (3)），このとき，$L(\lambda)$ は有限次元である．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　$\alpha\in\mathit{\Pi}$ とし，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $(H_\alpha,X_\alpha,Y_\alpha)$ によって V を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群とみなす．すると，$He_\lambda=H_\alpha e_\lambda=\lambda(H_\alpha)v$ かつ $Xe_\lambda=X_\alpha e_\lambda=0$ だから，e_λ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-加群 V のウェイト $\lambda(H_\alpha)$ の極大ベクトルである．したがって，系 2.9 より，$\lambda(H_\alpha)\in\mathbb{N}$ である．これが任意の単純ルート $\alpha\in\mathit{\Pi}$ に対して成り立つから，λ は $(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\mathit{\Pi})$ に関する優整ベクトルである．□

定理 4.30（最高ウェイト理論）　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし，$\mathit{\Pi}$ をルート系 $\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の基底とする．

(1) 条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 V は，最高ウェイト加群であり，その最高ウェイトは，$(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\mathit{\Pi})$ に関する優整ベクトルである．
(2) $(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\mathit{\Pi})$ に関する優整ベクトル $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して，Verma 加群の既約商 $L(\lambda)$ は，条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群である．
(3) (1) と (2) の対応は，条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群の同型類と $(\mathit{\Delta}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\mathit{\Pi})$ に関する優整ベクトルとの間の，互いに他の逆を与える一対一対応である．

証明　主張は，次のことから従う．

- 条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群は，最高ウェイト加群である（命題 4.26）．

- 最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の最高ウェイト既約 $\mathfrak{g}$-加群は，同型を除いて $L(\lambda)$ のみである（定理 4.18）．
- $L(\lambda)$ が有限次元であるための必要十分条件は，λ が $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルであることである（定理 4.29）． □

注意 4.31 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする．

(1) 注意 4.24 と命題 4.25 より，$\mathbb{K}$ が代数閉であるかまたは $\mathfrak{g}$ が半単純ならば，最高ウェイト理論（定理 4.30）において，「条件 (CD) を満たす」はなくても同じである．

(2) $\mathbb{K}$ が代数閉でなく $\mathfrak{g}$ が半単純でなければ，条件 (CD) を満たさない有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群が存在しうる．たとえば，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし，$\mathfrak{g}$ を 1 次元可換 Lie 代数 $\mathbb{R}$ とすると，写像 $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ 上の既約表現だが，条件 (CD) を満たさない．

(3) $\mathfrak{g}$ が半単純でなければ，（$\mathbb{K}$ が代数閉であっても，）条件 (CD) を満たさない有限次元 $\mathfrak{g}$-加群が存在する．実際，$\lambda \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ であって $\lambda|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0$ を満たすものを一つ固定すると，写像 $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda(x) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{K}^2$ 上の表現だが，条件 (CD) を満たさない．

参考文献

全体を通して，Bourbaki [3] を参考にした．補題 1.21 と補題 1.22 の証明については，Atiyah–MacDonald [1, Chapter 5, Exercises 20, 21] を参考にした．

[1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7*, Springer, 2006.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8*, Springer, 2006.

[4] 箱，「Lie 代数」，2025 年 5 月 24 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/lie-algebra.html

[5] 箱，「ルート系」，2025 年 8 月 7 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/root-system.html