数理統計

箱

2025 年 5 月 5 日

概要

数理統計の基礎を解説する．統計モデルを定義したあと，推定と仮説検定のそれぞれについて，基本的な定義や定理を述べる．

目次

記号と用語

- $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$，$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$（$a \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$）とする．
- 集合 $\mathcal{X}$ を考えるとき，その部分集合 $\mathcal{A}$ の特性関数を，$1_{\mathcal{A}}$ と書く．
- T を集合 $\mathcal{X}$ から可測空間 $\mathcal{Y}$ への写像とするとき，T を可測にする $\mathcal{X}$ 上の可測構造の中で最小のものを，$\sigma[T]$ と書く．
- 位相空間 $\mathcal{X}$ におけるその部分集合 $\mathcal{A}$ の内部を，$\mathrm{int}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A})$ と書く．

1　統計モデル

1.1　統計モデル

定義 1.1（統計モデル）　可測空間 $\mathcal{X}$ とその上の確率測度の族 $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ との組 $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を，**統計モデル**（statistical model）という．$\mathcal{X}$ をこの統計モデルの**標本空間**（sample space）といい，Θ をこの統計モデルの**パラメータ空間**（parameter space）という．

$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとするとき，次の記号と用語を用いる．

- $\mathcal{X}$ から集合 $\mathcal{Y}$ への写像 $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を，**統計量**（statistic）という．
- 各 $\theta \in \Theta$ に対して，確率空間 $(\mathcal{X}, P_\theta)$ 上の確率変数としての期待値，条件付き期待値，分散，共分散を，それぞれ $E_\theta[\phi]$, $E_\theta[\phi|\mathfrak{F}]$, $\mathrm{Var}_\theta[\phi]$, $\mathrm{Cov}_\theta[\phi, \psi]$ などと書く（ϕ と ψ は有限次元実線型空間に値をとる可測統計量であり，$\mathfrak{F}$ は $\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数である）．
- 有限次元実線型空間に値をとる可測統計量 ϕ が $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$**-可積分**であるとは，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，ϕ が P_θ-可積分であることをいう．
- 部分集合 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$ が $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$**-無視可能**であるとは，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$\mathcal{N}$ が P_θ-無視可能であることをいう．「$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-ほとんどすべての」，「$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-ほとんど確実に」などの用語も，同様に用いる．

1.2　十分性

定義 1.2（十分性）　$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．

(1) $\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数 $\mathfrak{F}$ がこの統計モデルに対して**十分**（sufficient）であるとは，任意の可測集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ に対して，$\mathfrak{F}$-可測関数 $1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ であって，任意の $\theta \in \Theta$ に対して条件付き期待値 $E_\theta[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の代表元であるものがとれることをいう．

(2) $\mathcal{Y}$ を可測空間とし，$T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を可測統計量とする．T がこの統計モデルに対して**十分**であるとは，σ-代数 $\sigma[T]$ がこの統計モデルに対して十分であることをいう．

命題 1.3　$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．$\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数 $\mathfrak{F}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分である．

(b) 任意の有限次元実線型空間 $\mathcal{V}$ と $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-可積分な可測写像 $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ に対して，$\mathfrak{F}$-可測写像 $1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ であって，任意の $\theta \in \Theta$ に対して条件付き期待値 $E_\theta[\phi|\mathfrak{F}]$ の代表元であるものがとれる．

証明　(b) $\Longrightarrow$ (a)　条件 (b) が成り立つとする．このとき，任意の可測集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ に対して，条件付き期待値 $E_\theta[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の $\theta \in \Theta$ によらない代表元 $1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ がとれる．任意の $\theta \in \Theta$ に対して，条件付き期待値の順序保存性より，P_θ-ほとんど確実に $0 \leq 1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}} \leq 1$ である．そこで，$1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}$ の 0 以下の値は 0 に，1 以上の値は 1 に修正して得られる関数を改めて $1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}$ と書くと，これも条件付き期待値 $E_\theta[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の $\theta \in \Theta$ によらない代表元である．よって，$\mathfrak{F}$ は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分である．

(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\mathfrak{F}$ が統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分であるとする．任意の有限次元実線型空間 $\mathcal{V}$ と

$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-可積分な可測写像 $\phi\colon \mathcal{X}\to\mathcal{V}$ に対して，条件付き期待値 $E_\theta[\phi|\mathfrak{F}]$ の $\theta\in\Theta$ によらない代表元がとれることを示したい．$\mathcal{V}$ の基底を一つ固定して成分ごとに考えることにより，一般性を失わず，$\mathcal{V}=\mathbb{R}$ であると仮定する．さらに，正の部分と負の部分への分解を考えることにより，一般性を失わず，$\phi\geq 0$ であると仮定する．

$\mathcal{X}$ 上の可測単関数の増加列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，ϕ に各点収束するものをとる．$\mathfrak{F}$ の十分性より，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，条件付き期待値 $E_\theta[\phi_n|\mathfrak{F}]$ の $\theta\in\Theta$ によらない代表元 $\phi_{n,\mathfrak{F}}\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ がとれる．条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理より，任意の $\theta\in\Theta$ に対して，$(E_\theta[\phi_n|\mathfrak{F}])_{n\in\mathbb{N}}$ は $E_\theta[\phi|\mathfrak{F}]$ に P_θ-概収束する．そこで，関数 $\phi_{\mathfrak{F}}\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\phi_{\mathfrak{F}}(x)=\begin{cases}\limsup_{n\to\infty}\phi_{n,\mathfrak{F}}(x) & (\limsup_{n\to\infty}\phi_{n,\mathfrak{F}}(x)<\infty)\\ 0 & (\limsup_{n\to\infty}\phi_{n,\mathfrak{F}}(x)=\infty)\end{cases}$$

と定めると，これは $E_\theta[\phi|\mathfrak{F}]$ の $\theta\in\Theta$ によらない代表元である．これで，主張が示された． □

$\mathfrak{F}$ が統計モデル $(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分であるとき，$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-可積分な可測写像 $\phi\colon \mathcal{X}\to\mathcal{V}$（$\mathcal{V}$ は有限次元実線型空間）に対して，条件付き期待値 $E_\theta[\phi|\mathfrak{F}]$ の $\theta\in\Theta$ によらない代表元を，単に $E[\phi|\mathfrak{F}]$ と書く．これは，$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-ほとんど確実に一意に定まる．

補題 1.4 $(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の σ-有限測度とし，各 P_θ は μ-絶対連続であるとする．このとき，パラメータの列 $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ を適当に選んで $Q=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}P_{\theta_n}$ と置けば，各 P_θ は Q-絶対連続となる．

証明 $\mu(\mathcal{X})=\infty$ ならば，$\mathcal{X}$ の分割 $(\mathcal{X}_i)_{i\in\mathbb{N}_{>0}}$ であって任意の $i\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して $0<\mu(\mathcal{X}_i)<\infty$ を満たすものをとり，可測集合 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{X}$ に対して

$$\mu'(\mathcal{A})=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\mu(\mathcal{X}_i)^{-1}\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{X}_i)$$

と定めることにより，μ と同値な有限測度 μ' が得られる．そこで，一般性を失わず，μ は有限であると仮定する．

各 $\theta\in\Theta$ に対して，Radon–Nikodym 微分 $dP_\theta/d\mu$ の代表元 f_θ を一つ固定し，$\mathcal{S}_\theta=\{x\in\mathcal{X}\mid f_\theta(x)>0\}$ と置く．μ は有限だから，パラメータの列 $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ を，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_{\theta_n}\right)=\sup\left\{\mu\left(\bigcup_{\theta\in\Theta'}S_\theta\right)\;\middle|\;\Theta' \text{ は } \Theta \text{ の可算部分集合}\right\}$$

を満たすようにとれる．$Q=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}P_{\theta_n}$ と置き, 各 P_θ が Q-絶対連続であることを示す．可測集合 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{X}$ であって $Q(\mathcal{A})=0$ を満たすものを任意にとる．Q の定義より，任意の $n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して，$P_{\theta_n}(\mathcal{A})=0$ だから，$\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{S}_{\theta_n})=0$ である．また，$(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ のとり方より，$\mu(\mathcal{S}_\theta\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{\theta_n})=0$ である．したがって，

$$\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{S}_\theta)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{S}_{\theta_n})+\mu\left(\mathcal{S}_\theta\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}_{\theta_n}\right)=0$$

だから，$P_\theta(\mathcal{A})=0$ である．よって，P_θ は Q-絶対連続である． □

定理 1.5（因子分解定理） $(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の σ-有限測度とし，各 P_θ は μ-絶対連続であるとする．このとき，$\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数 $\mathfrak{F}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathfrak{F}$ は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分である．

(b) 可測関数 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathfrak{F}$-可測関数の族 $(h_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{\theta\in\Theta}$ が存在して，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，μ-ほとんどいたるところで $dP_\theta/d\mu = gh_\theta$ が成り立つ．

証明　補題 1.4 より，パラメータの列 $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ を適当に選んで $Q = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} P_{\theta_n}$ と置けば，各 P_θ は Q-絶対連続となる．以下，条件 (a) と (b) が，ともに次の条件 (c) と同値であることを示す．

(c) 任意の $\theta \in \Theta$ に対して，Radon–Nikodym 微分 dP_θ/dQ の代表元として，$\mathfrak{F}$-可測であるものがとれる．

(a) $\Longrightarrow$ (c)　$\mathfrak{F}$ が統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分であるとする．可測集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ に対して，条件付き期待値 $E_\theta[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の $\theta \in \Theta$ によらない代表元 $1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ をとる．$\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$ とすると，任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$\int_\mathcal{B} 1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\, dP_\theta = \int_\mathcal{B} 1_\mathcal{A}\, dP_\theta$$

だから，上式で $\theta = \theta_n$ として両辺に 2^{-n} を掛けたものの $n \in \mathbb{N}_{>0}$ にわたる和をとれば,

$$\int_\mathcal{B} 1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\, dQ = \int_\mathcal{B} 1_\mathcal{A}\, dQ$$

を得る．したがって，$1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}$ は確率測度 Q に関する条件付き期待値 $E_Q[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の代表元でもある．

$\theta \in \Theta$ とし，可測空間 $(\mathcal{X}, \mathfrak{F})$ 上の確率測度 $P_\theta|_\mathfrak{F}$ と $Q|_\mathfrak{F}$ を考える．P_θ が Q-絶対連続であることより $P_\theta|_\mathfrak{F}$ は $Q|_\mathfrak{F}$-絶対連続だから，Radon–Nikodym 微分 $dP_\theta|_\mathfrak{F}/dQ|_\mathfrak{F}$ が定まる．$\mathfrak{F}$-可測関数 $dP_\theta|_\mathfrak{F}/dQ|_\mathfrak{F}$（の一つの代表元）が dP_θ/dQ の代表元であることを示す．$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ を可測集合とすると，$1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}$ が条件付き期待値 $E_\theta[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ や $E_Q[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の代表元であることより，

$$\begin{aligned}
\int_\mathcal{A} \frac{dP_\theta|_\mathfrak{F}}{dQ|_\mathfrak{F}}\, dQ &= \int_\mathcal{X} 1_\mathcal{A} \frac{dP_\theta|_\mathfrak{F}}{dQ|_\mathfrak{F}}\, dQ \\
&= \int_\mathcal{X} 1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}} \frac{dP_\theta|_\mathfrak{F}}{dQ|_\mathfrak{F}}\, dQ \\
&= \int_\mathcal{X} 1_{\mathcal{A},\mathfrak{F}}\, dP_\theta \\
&= \int_\mathcal{X} 1_\mathcal{A}\, dP_\theta \\
&= P_\theta(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$(dP_\theta|_\mathfrak{F}/dQ|_\mathfrak{F}) \cdot Q = P_\theta$ だから，$dP_\theta|_\mathfrak{F}/dQ|_\mathfrak{F}$ は dP_θ/dQ の代表元である．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　条件 (c) が成り立つとして，dP_θ/dQ を $\mathfrak{F}$-可測関数とみなす．$\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$ を可測集合とすると，任意の $\theta \in \Theta$ と $\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$ に対して

$$\int_\mathcal{B} E_Q[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]\, dP_\theta = \int_\mathcal{B} E_Q[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}] \frac{dP_\theta}{dQ}\, dQ = \int_\mathcal{B} 1_\mathcal{A} \frac{dP_\theta}{dQ}\, dQ = \int_\mathcal{B} 1_\mathcal{A}\, dP_\theta$$

だから，$E_Q[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ は条件付き期待値 $E_\theta[1_\mathcal{A}|\mathfrak{F}]$ の $\theta \in \Theta$ によらない代表元である．よって，$\mathfrak{F}$ は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　条件 (b) を満たす可測関数 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathfrak{F}$-可測関数の族 $(h_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{\theta\in\Theta}$ がとれたとする．このとき，$k_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g h_{\theta_n}$ は $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ に値をとる $\mathfrak{F}$-可測関数であり，μ-ほとんどいたるところで $dQ/d\mu = gk_1$ が成り立つ．gk_1 は μ-ほとんどいたるところで有限だから，k_1 の値 ∞ を 0 に修正して得られる $\mathfrak{F}$-可測関数を $k\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と置くと，これも μ-ほとんどいたるところで $dQ/d\mu = gk$ を満たす．

各 $\theta \in \Theta$ に対して，可測関数 $\phi_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，

$$\phi_\theta(x) = \begin{cases} h_\theta(x)/k(x) & (k(x) > 0) \\ 0 & (k(x) = 0) \end{cases}$$

と定める．すると，

$$\phi_\theta \cdot Q = \phi_\theta gk \cdot \mu = 1_{k>0} gh_\theta \cdot \mu = 1_{k>0} \cdot P_\theta$$

が成り立つ．さらに，μ-ほとんどいたるところで $dQ/d\mu = gk$ であることより $\{k = 0\}$ は Q-無視可能だから，P_θ が Q-絶対連続であることより P_θ-無視可能であり，したがって，$1_{k>0} \cdot P_\theta = P_\theta$ である．よって，dP_θ/dQ の代表元として，$\mathfrak{F}$-可測関数 ϕ_θ がとれる．

(c) $\Longrightarrow$ (b)　条件 (c) が成り立つとして，dP_θ/dQ を $\mathfrak{F}$-可測関数とみなす．任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$P_\theta = (dQ/d\mu)(dP_\theta/dQ) \cdot \mu$ だから，$g = dQ/d\mu$，$h_\theta = dP_\theta/dQ$ と置けばよい．□

系 1.6　$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の σ-有限測度とし，各 P_θ は μ-絶対連続であるとする．このとき，可測空間 $\mathcal{Y}$ と可測統計量 $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) T は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ に対して十分である．
(b) 可測関数 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と可測関数の族 $(h_\theta\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}_{\geq 0})_{\theta\in\Theta}$ が存在して，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，μ-ほとんどすべての $x \in \mathcal{X}$ に対して $(dP_\theta/d\mu)(x) = g(x)h_\theta(T(x))$ が成り立つ．

証明　因子分解定理（定理 1.5）と Doob–Dynkin の補題から従う．□

1.3　完備性

定義 1.7（完備性）　$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．

(1) $\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数 $\mathfrak{F}$ がこの統計モデルに対して**完備**（complete）であるとは，任意の $\mathfrak{F}$-可測統計量 $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\text{任意の } \theta \in \Theta \text{ に対して } \phi \text{ が } P_\theta\text{-可積分かつ } E_\theta[\phi] = 0 \implies (P_\theta)_{\theta\in\Theta}\text{-ほとんど確実に } \phi = 0$$

が成り立つことをいう．
(2) $\mathcal{Y}$ を可測空間とし，$T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を可測統計量とする．T がこの統計モデルに対して**完備**であるとは，σ-代数 $\sigma[T]$ がこの統計モデルに対して完備であることをいう．

1.4　指数型分布族

定義 1.8（指数型分布族）　$\mathcal{X}$ を可測空間とする．$\mathcal{X}$ 上の測度 μ，可測写像 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$（$\mathcal{V}$ は有限次元実線型空間），写像 $a\colon \Theta \to \mathcal{V}^*$ と $b\colon \Theta \to \mathbb{R}$（$\Theta$ は集合）を用いて

$$P_\theta = f_\theta \cdot \mu, \qquad f_\theta(x) = g(x)\exp(\langle a(\theta), T(x)\rangle - b(\theta))$$

と表せる確率測度の族 $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ を，$\mathcal{X}$ 上の**指数型分布族**（exponential family）という．さらに，Θ が $\mathcal{V}^*$ の部分集合で $a\colon \Theta \to \mathcal{V}^*$ が包含写像である場合には，$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ を，$\mathcal{X}$ 上の**自然パラメータの指数型分布族**（exponential family with natural parameters）という．

定義 1.8 の状況で，$\mathcal{V}=\mathbb{R}^d$ である場合には，しばしば $\mathbb{R}^d$ 上の標準内積が定める線型同型写像によって $(\mathbb{R}^d)^*$ を $\mathbb{R}^d$ と同一視する．

注意 1.9　定義 1.8 の状況を考える．

(1) 任意の $\theta\in\Theta$ に対して，P_θ が $\mathcal{X}$ 上の確率測度であることより，$\mathcal{X}$ 上の関数 $x\mapsto h(x)\exp(\langle a(\theta),T(x)\rangle)$ は μ-可積分であり，

$$b(\theta)=\log\biggl(\int_{\mathcal{X}} g(x)\exp(\langle a(\theta),T(x)\rangle)\,d\mu(x)\biggr)$$

が成り立つ．

(2) $g\cdot\mu$ を改めて μ と置くことで，g は定数関数 1 であると仮定できる．

命題 1.10　$\mathcal{X}$ を可測空間とする．$\mathcal{V}$ を有限次元実線型空間，Θ を $\mathcal{V}^*$ の開集合とし，$\mathcal{X}$ 上の測度 μ，可測写像 $g\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T\colon\mathcal{X}\to\mathcal{V}$，関数 $b\colon\Theta\to\mathbb{R}$ を用いて

$$P_\theta=f_\theta\cdot\mu,\qquad f_\theta(x)=g(x)\exp(\langle\theta,T(x)\rangle-b(\theta))$$

と表せる自然パラメータの指数型分布族 $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ を考える．$\mathcal{W}$ を有限次元実線型空間とし，$\phi\colon\mathcal{X}\to\mathcal{W}$ を $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-可積分な可測統計量とする．

(1) 任意の多項式関数 $p\colon\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ に対して，$\phi\cdot p(T)$ は $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-可積分である．

(2) Θ 上の関数 b と $\theta\mapsto E_\theta[\phi]$ は無限階微分可能であり，任意の $k\in\mathbb{N}$，α_1，…，$\alpha_k\in\mathcal{V}^*$，$\theta\in\Theta$ に対して，

$$D^k_\theta(e^{b(\theta)}\,E_\theta[\phi])(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=e^{b(\theta)}\,E_\theta[\phi\cdot\alpha_1\cdots\alpha_k(T)]$$

が成り立つ（上式の右辺における $\alpha_1\cdots\alpha_k$ は，$\mathcal{V}$ 上の多項式関数 $v\mapsto\alpha_1(v)\cdots\alpha_k(v)$ を表す．(1) より，上式の右辺における期待値が定義される）．特に，任意の $\alpha\in\mathcal{V}^*$ と $\theta\in\Theta$ に対して，

$$D_\theta(E_\theta[\phi])(\alpha)=E_\theta[\phi\cdot\alpha(T)]-E_\theta[\phi]\,E_\theta[\alpha(T)]$$

が成り立つ．

証明　一般性を失わず，g は定数関数 1 であると仮定する（注意 1.9 (2)）．また，一般性を失わず，$\mathcal{V}=\mathbb{R}^d$ であると仮定し，$\mathbb{R}^d$ 上の標準内積が定める線型同型写像によって $(\mathbb{R}^d)^*$ を $\mathbb{R}^d$ と同一視する．

(1)　$\theta=(\theta_1,\dots,\theta_d)\in\Theta$ として，$\epsilon>0$ を $\prod_{i=1}^d[\theta_i-\epsilon,\theta_i+\epsilon]\subseteq\Theta$ を満たすようにとる．$p\colon\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ は多項式関数だから，適当な定数 $C\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ をとれば，任意の $v\in\mathcal{V}$ に対して

$$|p(v)|\leq C\max_{s\in\{\pm1\}^d}\exp(\langle s\epsilon,v\rangle)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}}|\phi(x)p(T(x))|\,dP_\theta(x)&=\int_{\mathcal{X}}|\phi(x)p(T(x))|\exp(\langle\theta,T(x)\rangle-b(\theta))\,d\mu(x)\\&\leq Ce^{-b(\theta)}\int_{\mathcal{X}}|\phi(x)|\biggl(\max_{s\in\{\pm1\}^d}\exp(\langle s\epsilon,T(x)\rangle)\biggr)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

であり，任意の $s\in\{\pm1\}^d$ に対して ϕ が $P_{\theta+s\epsilon}$-可積分であることから，この式の最も左辺は有限である．よって，$\phi\cdot p(T)$ は P_θ-可積分である．

(2)　前半の主張を示す．任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi] = \int_{\mathcal{X}} \phi(x) \exp(\langle \theta, T(x) \rangle)\, d\mu(x)$$

であり，任意の $k \in \mathbb{N}$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^d$，$\theta \in \Theta$ に対して

$$D_\theta^k(\exp(\langle \theta, T(x) \rangle))(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \alpha_1 \cdots \alpha_k(T(x)) \exp(\langle \theta, T(x) \rangle) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

である．よって，(1) と積分記号下の微分に関する定理より，Θ 上の関数 $\theta \mapsto e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi]$ は無限階微分可能であり，任意の $k \in \mathbb{N}$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^d$，$\theta \in \Theta$ に対して

$$\begin{aligned} D_\theta^k(e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi])(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) &= \int_{\mathcal{X}} \phi(x) \alpha_1 \cdots \alpha_k(T(x)) \exp(\langle \theta, T(x) \rangle)\, d\mu(x) \\ &= e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_k(T)] \end{aligned}$$

が成り立つ．ϕ を定数関数 1 とすれば，Θ 上の関数 e^b が無限階微分可能であることがわかり，したがって，Θ 上の関数 b と $\theta \mapsto E_\theta[\phi]$ が無限階微分可能であることもわかる．

後半の主張を示す．任意の $\alpha \in \mathbb{R}^d$ と $\theta \in \Theta$ に対して，前半の主張より，

$$D_\theta(e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi])(\alpha) = e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi \cdot \alpha(T)]$$

であり，一方で

$$\begin{aligned} D_\theta(e^{b(\theta)}\, E_\theta[\phi])(\alpha) &= D_\theta(e^{b(\theta)})(\alpha)\, E_\theta[\phi] + e^{b(\theta)} D_\theta(E_\theta[\phi])(\alpha) \\ &= e^{b(\theta)}\, E_\theta[\alpha(T)]\, E_\theta[\phi] + e^{b(\theta)} D_\theta(E_\theta[\phi])(\alpha) \end{aligned}$$

である．これらの二つの式を比較して，主張の等式を得る．　□

定理 1.11　$\mathcal{X}$ を可測空間とする．$\mathcal{X}$ 上の測度 μ，可測写像 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$（$\mathcal{V}$ は有限次元実線型空間），写像 $a\colon \Theta \to \mathcal{V}^*$ と $b\colon \Theta \to \mathbb{R}$（$\Theta$ は集合）を用いて

$$P_\theta = f_\theta \cdot \mu, \qquad f_\theta(x) = g(x) \exp(\langle a(\theta), T(x) \rangle - b(\theta))$$

と表せる指数型分布族 $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ を考える．

(1) μ が σ-有限であるとする．このとき，T は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ に対して十分である．
(2) $a(\Theta)$ が $\mathcal{V}^*$ において内点をもつとする．このとき，T は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ に対して完備である．

証明　(1)　因子分解定理（定理 1.5）から従う．

(2)　一般性を失わず，g は定数関数 1 であると仮定する（注意 1.9 (2)）．

Doob–Dynkin の補題より，$\mathcal{X}$ から $\mathbb{R}$ への任意の $\sigma[T]$-可測統計量は，可測写像 $T\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ を用いて $\phi \circ T$ と表せる．任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$\phi \circ T$ は P_θ-可積分で $E_\theta[\phi \circ T] = 0$ を満たすと仮定する．任意の $\theta \in \Theta$ に対して，

$$\begin{aligned} E_\theta[\phi \circ T] &= \int_{\mathcal{X}} \phi(T(x)) \exp(\langle a(\theta), T(x) \rangle - b(\theta))\, d\mu(x) \\ &= e^{-b(\theta)} \int_{\mathcal{V}} \phi(v) \exp(\langle a(\theta), v \rangle)\, dT_*\mu(v) \end{aligned}$$

だから，上記の仮定は，任意の $\alpha \in a(\Theta)$ に対して

$$\int_{\mathcal{V}} \phi(v) \exp(\langle \alpha, v \rangle) \, dT_*\mu(v) = 0$$

であることを意味する．さらに，$\beta \in \mathcal{V}^*$ とすると，関数 $v \mapsto \phi(v) \exp(\langle \alpha, v \rangle)$ が $T_*\mu$-可積分であることからこれと絶対値が等しい関数 $v \mapsto \phi(v) \exp(\langle \alpha - i\beta, v \rangle)$ も $T_*\mu$-可積分であり，積分記号下の微分に関する定理を用いて確かめられるように，$\mathrm{int}_{\mathcal{V}^*}(a(\Theta)) + i\mathcal{V}^*$ 上の関数 $\alpha - i\beta \mapsto \int_{\mathcal{V}} \phi(v) \exp(\langle \alpha - i\beta, v \rangle) \, dT_*\mu(v)$ は正則である．ところが，$\beta = 0$ のときはこの積分は 0 だから，一致の定理より，任意の $\alpha - i\beta \in \mathrm{int}_{\mathcal{V}^*}(a(\Theta)) + i\mathcal{V}^*$ に対して

$$\int_{\mathcal{V}} \phi(v) \exp(\langle \alpha - i\beta, v \rangle) \, dT_*\mu(v) = 0$$

が成り立つ．$\alpha \in \mathrm{int}_{\mathcal{V}^*}(a(\Theta))$ を固定すると，上式の左辺を $\beta \in \mathcal{V}^*$ の関数とみなしたものは，$\mathcal{V}$ 上の有限 Borel 測度 $\phi \exp(\langle \alpha, - \rangle) \cdot T_*\mu(v)$ の Fourier 変換である．したがって，Fourier 変換の単射性より

$$\phi \exp(\langle \alpha, - \rangle) \cdot T_*\mu(v) = 0$$

だから，$T_*\mu$-ほとんどいたるところで $\phi = 0$ である．すなわち，μ-ほとんどいたるところで $\phi \circ T = 0$ である．特に，$(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$-ほとんど確実に $\phi \circ T = 0$ である．以上より，T は統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ に対して完備である． □

2　推定

2.1　不偏推定量

定義 2.1（不偏推定量） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ を統計モデルとし，$\mathcal{V}$ を有限次元実線型空間，$g\colon \Theta \to \mathcal{V}$ を写像とする．可測統計量 $\delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ が $g(\theta)$ の**不偏推定量**（unbiased estimator）であるとは，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，δ が P_θ-可積分かつ $E_\theta[\delta] = g(\theta)$ を満たすことをいう．

定義 2.2（一様最小分散不偏推定量） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ を統計モデルとし，$\mathcal{V}$ を有限次元実内積空間，$g\colon \Theta \to \mathcal{V}$ を写像とする．$g(\theta)$ の**一様最小分散不偏推定量**（uniformly minimum-variance unbiased estimator，UMVUE）とは，$g(\theta)$ の不偏推定量 $\delta_0\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ であって，$g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $\delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ と $\theta \in \Theta$ に対して

$$E_\theta[\|\delta_0 - g(\theta)\|^2] \leq E_\theta[\|\delta - g(\theta)\|^2]$$

を満たすものをいう．

定理 2.3（Rao–Blackwell の定理） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ を統計モデルとし，$\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数 $\mathfrak{F}$ はこれに対して十分であるとする．$\mathcal{V}$ を有限次元実線型空間，$g\colon \Theta \to \mathcal{V}$ を写像とし，$\delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ を $g(\theta)$ の不偏推定量とする．

(1) $E[\delta|\mathfrak{F}]$ は $g(\theta)$ の不偏推定量である．

(2) $w\colon \Theta \times \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ は関数であり，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $w(\theta, -)$ は凸であるとする．このとき，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，

$$E_\theta[w(\theta, E[\delta|\mathfrak{F}])] \leq E_\theta[w(\theta, \delta)]$$

が成り立つ．特に，$\mathcal{V}$ が有限次元実内積空間ならば，$g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $\delta'\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ と $\theta \in \Theta$ に対して，

$$E_\theta[\|E[\delta|\mathfrak{F}] - g(\theta)\|^2] \le E_\theta[\|\delta - g(\theta)\|^2]$$

が成り立つ．

証明 (1) 条件付き期待値の性質より，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$E[\delta|\mathfrak{F}]$ は P_θ-可積分であり $E_\theta[E[\delta|\mathfrak{F}]] = E_\theta[\delta] = g(\theta)$ が成り立つ．よって，$E[\delta|\mathfrak{F}]$ は $g(\theta)$ の不偏推定量である．

(2) 前半の主張は，条件付き期待値に対する Jensen の不等式から従う．前半の主張において $w(\theta, v) = \|v - g(\theta)\|^2$ とすれば，後半の主張が従う． □

定理 2.4（Lehmann–Scheffé の定理） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，$\mathcal{X}$ の可測構造の部分 σ-代数 $\mathfrak{F}$ はこれに対して完備かつ十分であるとする．$\mathcal{V}$ を有限次元実線型空間とし，$g\colon \Theta \to \mathcal{V}$ を写像とする．

(1) $g(\theta)$ の不偏推定量が存在するとする．このとき，$\mathfrak{F}$-可測な $g(\theta)$ の不偏推定量が，$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-ほとんど確実に一意に存在する．

(2) δ_0, $\delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ を $g(\theta)$ の不偏推定量とし，δ_0 は $\mathfrak{F}$-可測であるとする．$w\colon \Theta \times \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ は関数であり，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $w(\theta, -)$ は凸であるとする．このとき，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，

$$E_\theta[w(\theta, \delta_0)] \le E_\theta[w(\theta, \delta)]$$

が成り立つ．特に，$\mathcal{V}$ が有限次元実内積空間ならば，δ_0 は $g(\theta)$ の一様最小分散不偏推定量である．

証明 (1) <u>存在</u> $\delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ を $g(\theta)$ の不偏推定量とすると，Rao–Blackwell の定理（定理 2.3 (1)）より，$E[\delta|\mathfrak{F}]$ は $\mathfrak{F}$-可測な $g(\theta)$ の不偏推定量である．

<u>一意性</u> δ_0, $\delta_0'\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ がともに $\mathfrak{F}$-可測な $g(\theta)$ の不偏推定量であるとする．このとき，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $E_\theta[\delta_0 - \delta_0'] = g(\theta) - g(\theta) = 0$ だから，$\mathfrak{F}$ の完備性より，$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-ほとんど確実に $\delta_0 - \delta_0' = 0$ が成り立つ．

(2) Rao–Blackwell の定理（定理 2.3 (1)）より，$E[\delta|\mathfrak{F}]$ は $\mathfrak{F}$-可測な $g(\theta)$ の不偏推定量だから，(1) の一意性より，$(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$-ほとんど確実に $\delta_0 = E[\delta|\mathfrak{F}]$ である．よって，主張は，Rao–Blackwell の定理（定理 2.3 (2)）から従う． □

2.2 Fisher 情報量

定義 2.5（Fisher 情報量） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，パラメータ空間 Θ は有限次元実線型空間 $\mathcal{V}$ の部分集合であるとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ を用いて $f_\theta \cdot \mu$ と表されているとする．$\theta_0 \in \mathrm{int}_{\mathcal{V}}(\Theta)$ とし，次の条件が満たされるとする．

(FI1) μ-ほとんどすべての $x \in \mathcal{X}$ に対して，関数 $\theta \mapsto f_\theta(x)$ は，θ_0 のある近傍において正であり，θ_0 において微分可能である（したがって，微分 $(D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}$ が定義される）．

(FI2) $\mathcal{X}$ 上 μ-ほとんどいたるところで定義され $\mathcal{V}^*$ に値をとる写像 $x \mapsto (D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}$ は，P_{θ_0}-2 乗可積分である．

このとき，

$$I(\theta_0) = E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0} \otimes (D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}]$$

と定め，これを統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ の θ_0 における **Fisher 情報量**（Fisher information）という．

定義 2.5 の状況で，Fisher 情報量 $I(\theta_0)$ は，正値対称テンソルである．すなわち，$\mathcal{V}$ 上の双線型形式 $(v, w) \mapsto \langle I(\theta_0), v\otimes w\rangle$ は対称であり，任意の $v\in\mathcal{V}$ に対して $\langle I(\theta_0), v\otimes v\rangle \geq 0$ である．

注意 2.6　定義 2.5 の状況を考える．パラメータ θ_0 の下での $(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}$ の期待値（いま，$(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}$ は P_{θ_0}-2 乗可積分であると仮定しているから，この期待値が定義される）は，

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}] &= \int_{\mathcal{X}} (D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0} f_{\theta_0}(x)\, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} (D_\theta f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}\, d\mu(x) \end{aligned}$$

と表せる．ここで，微分と積分の順序交換ができると仮定すると，

$$E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}] = \left(D_\theta \int_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\, d\mu(x)\right)\Bigg|_{\theta=\theta_0} = (D_\theta 1)|_{\theta=\theta_0} = 0$$

となる．これが成り立つとき，Fisher 情報量は，

$$I(\theta_0) = \mathrm{Var}_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}]$$

とも書ける．

積分記号下の微分に関する定理より，μ-可積分関数 $h\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，$\mu$-無視可能な集合 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{X}$，$\theta_0$ の近傍 $\Xi\subseteq\Theta$ が存在して次の条件を満たす場合には，前段で述べた微分と積分の順序交換を正当化できる．

(i) 任意の $x\in\mathcal{X}\setminus\mathcal{N}$ に対して，関数 $\theta\mapsto f_\theta(x)$ は Ξ 上で微分可能である．
(ii) 任意の $\theta_1\in\Xi$ に対して，μ-ほとんどすべての $x\in\mathcal{X}\setminus\mathcal{N}$ に対して $\|(D_\theta f_\theta(x))|_{\theta=\theta_1}\|_{\mathcal{V}} \leq h(x)$ が成り立つ．

ここで，$\mathcal{V}$ 上のノルム $\|\text{–}\|_{\mathcal{V}}$ を一つ固定した（有限次元実線型空間上のノルムはすべて同値だから，上記の条件を成否は，このノルムのとり方には依存しない）．

$\mathcal{V}$ を（可換体上の）有限次元線型空間，$T\in\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{V}^*$ を非退化対称テンソルとするとき，T は線型同型写像 $\Phi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{V}^*$ を定める．T を $\Phi^{-1}\otimes\Phi^{-1}$ で移して得られる非退化対称テンソル $T^\vee = (\Phi^{-1}\otimes\Phi^{-1})(T)\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ を，T の**逆形式**（inverse form）という．

定理 2.7（Cramér–Rao の不等式）　$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，パラメータ空間 Θ は有限次元実線型空間 $\mathcal{V}$ の部分集合であるとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いて $f_\theta\cdot\mu$ と表されているとする．$\mathcal{W}$ を有限次元実線型空間，$g\colon\Theta\to\mathcal{W}$ を写像とし，$\delta\colon\mathcal{X}\to\mathcal{W}$ を可測統計量とする．$\theta_0\in\mathrm{int}_{\mathcal{V}}(\Theta)$ とし，次の条件が満たされるとする（条件 (FI1) と (FI2) は，定義 2.5 のものと同一である）．

(FI1) μ-ほとんどすべての $x\in\mathcal{X}$ に対して，関数 $\theta\mapsto f_\theta(x)$ は，θ_0 のある近傍において正であり，θ_0 において微分可能である（したがって，微分 $(D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}\in\mathcal{V}^*$ が定義される）．
(FI2) $\mathcal{X}$ 上 μ-ほとんどいたるところで定義され $\mathcal{V}^*$ に値をとる写像 $x\mapsto(D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}$ は，P_{θ_0}-2 乗可積分である．
(FI3) Fisher 情報量 $I(\theta_0)$ は非退化である（したがって，逆形式 $I(\theta)^\vee\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ が定義される）．

(FI4) g は θ_0 において微分可能であり（したがって，微分 $Dg(\theta_0) \in \operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ が定義される），δ は P_{θ_0}-2 乗可積分であり，

$$\begin{gathered} E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}] = 0, \\ E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0} \otimes \delta] = Dg(\theta_0) \end{gathered}$$

が成り立つ（いま，$(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}$ と δ は 2 乗可積分であると仮定しているから，上式の左辺の期待値が定義される）．

このとき，$\mathcal{W} \otimes \mathcal{W}$ 上の対称テンソルの間の不等式

$$\operatorname{Var}_{\theta_0}[\delta] \geq (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee)$$

が成り立つ．

証明　$I(\theta_0)$ が定める $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}^*$ への線型同型写像を $\varPhi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ と書き，$u(x) = \varPhi^{-1}((D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}) \in \mathcal{V}$ と置く．$(D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0}$ は μ-ほとんどすべての $x \in \mathcal{X}$ に対して定義され x の関数として P_{θ_0}-2 乗可積分だから，$u(x)$ も同様である．また，条件 (ii) より，

$$E_{\theta_0}[u] = \varPhi^{-1}(E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}]) = 0, \tag{$*$}$$

$$E_{\theta_0}[u \otimes \delta] = (\varPhi^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}})(E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0} \otimes \delta]) = (\varPhi^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}})(Dg(\theta_0)) \tag{$**$}$$

かつ

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_{\theta_0}[u] &= (\varPhi^{-1} \otimes \varPhi^{-1})(\operatorname{Var}_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}]) \\ &= (\varPhi^{-1} \otimes \varPhi^{-1})(I(\theta_0)) \\ &= I(\theta_0)^\vee \end{aligned} \tag{$***$}$$

である．

以下，

$$\begin{aligned} &\operatorname{Var}_{\theta_0}[\delta - Dg(\theta_0) \circ u] \\ &= \operatorname{Var}_{\theta_0}[\delta] - \operatorname{Cov}_{\theta_0}[\delta, Dg(\theta_0) \circ u] - \operatorname{Cov}_{\theta_0}[Dg(\theta_0) \circ u, \delta] + \operatorname{Var}_{\theta_0}[Dg(\theta_0) \circ u] \end{aligned} \tag{$****$}$$

の左辺の各項を計算する．まず，($***$) より，

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_{\theta_0}[Dg(\theta_0) \circ u] &= (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(\operatorname{Var}_{\theta_0}[u]) \\ &= (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee) \end{aligned}$$

である．次に，($*$) と ($**$) より，

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}_{\theta_0}[Dg(\theta_0) \circ u, \delta] &= (Dg(\theta_0) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}})(\operatorname{Cov}_{\theta_0}[u, \delta]) \\ &= (Dg(\theta_0) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}})(E_{\theta_0}[(u - E_{\theta_0}[u]) \otimes (\delta - E_{\theta_0}[\delta])]) \\ &= (Dg(\theta_0) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}})(E_{\theta_0}[u \otimes \delta]) \\ &= (Dg(\theta_0)\varPhi^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{W}})(Dg(\theta_0)) \\ &= (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee) \end{aligned}$$

である（最後の等号は，両辺とも $I(\theta_0)^\vee \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ と二つの $Dg(\theta_0) \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}$ の縮約であることから成り立つ）．これらを $(****)$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}_{\theta_0}[\delta - Dg(\theta_0) \circ u] \\
&= \mathrm{Var}_{\theta_0}[\delta] - (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee) - (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee) + (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee) \\
&= \mathrm{Var}_{\theta_0}[\delta] - (Dg(\theta_0) \otimes Dg(\theta_0))(I(\theta_0)^\vee)
\end{aligned}
$$

となり，$\mathrm{Var}_{\theta_0}[\delta - Dg(\theta_0) \circ u] \geq 0$ であることと合わせて，主張の不等式を得る． □

注意 2.8 定理 2.7 の状況で，条件 (FI1) と (FI2) が成り立ち，さらに，μ-可積分関数 $h\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，$\mu$-無視可能な集合 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$，$\theta_0$ の近傍 $\Xi \subseteq \Theta$ が存在して次の条件を満たすとする．

(i) 任意の $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{N}$ に対して，関数 $\theta \mapsto f_\theta(x)$ は Ξ 上で微分可能である．
(ii) 任意の $\theta_1 \in \Xi$ に対して，μ-ほとんどすべての $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{N}$ に対して $\|(D_\theta f_\theta(x))|_{\theta=\theta_1}\|_{\mathcal{V}}$, $\|(D_\theta(f_\theta(x)\delta(x)))|_{\theta=\theta_1}\|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})} \leq h(x)$ が成り立つ．
(iii) δ は P_{θ_0}-2 乗可積分な $g(\theta)$ の不偏推定量である．

ここで，$\mathcal{V}$ 上のノルム $\|{-}\|_{\mathcal{V}}$ と $\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ 上のノルム $\|{-}\|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ を一つずつ固定した（有限次元実線型空間上のノルムはすべて同値だから，上記の条件を成否は，これらのノルムのとり方には依存しない）．このとき，条件 (FI4) が成り立つことを示そう．

δ が P_{θ_0}-2 乗可積分であることは条件 (iii) に含まれており，条件 (i) と (ii) より $E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0}] = 0$ が成り立つ（注意 2.6）．次に，$E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0} \otimes \delta]$ について考える．この期待値は，

$$
\begin{aligned}
E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0} \otimes \delta] &= \int_{\mathcal{X}} (D_\theta \log f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0} f_{\theta_0}(x) \otimes \delta(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} (D_\theta f_\theta(x))|_{\theta=\theta_0} \otimes \delta(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} (D_\theta(f_\theta(x)\delta(x)))|_{\theta=\theta_0}\, d\mu(x) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

と表せる．一方で，δ が $g(\theta)$ の不偏推定量であること（条件 (iii)）より

$$
g(\theta) = E_\theta[\delta] = \int_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\delta(x)\, d\mu(x)
$$

だから，条件 (i), (ii) と積分記号下の微分に関する定理より，g は θ_0 において微分可能であり，

$$
Dg(\theta_0) = \int_{\mathcal{X}} (D_\theta(f_\theta(x)\delta(x)))|_{\theta=\theta_0}\, d\mu(x) \qquad (**)
$$

が成り立つ．$(*)$ と $(**)$ を比較して，$E_{\theta_0}[(D_\theta \log f_\theta)|_{\theta=\theta_0} \otimes \delta] = Dg(\theta_0)$ を得る．これで，主張が示された．

2.3 最尤推定量

定義 2.9（最尤推定量） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いて $f_\theta \cdot \mu$ と表されているとする．写像 $\delta\colon \mathcal{X} \to \Theta$ が θ の**最尤推定量**（maximum likelihood estimator，MLE）であるとは，任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して，Θ 上の関数 $\theta \mapsto f_\theta(x)$ が $\theta = \delta(x)$ において最大値をとることをいう．

3 仮説検定

3.1 検定

定義 3.1（検定） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，(Θ_0, Θ_1) をパラメータ空間 Θ の分割とする．

(1) **検定**（test）とは，可測統計量 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ のことをいう．

(2) 検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ に対して，$\sup_{\theta\in\Theta_0} E_\theta[\phi]$ を，この検定の (Θ_0, Θ_1) に対する**大きさ**（size）という．$\alpha \in [0,1]$ とするとき，大きさ α 以下の検定を，(Θ_0, Θ_1) に対する**有意水準**（significance level）α の検定という．

(3) 検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ と $\theta \in \Theta_1$ に対して，$E_\theta[\phi]$ を，この検定の θ における**検出力**（power）という．

定義 3.2（一様最強力検定） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，(Θ_0, Θ_1) をパラメータ空間 Θ の分割とする．$\alpha \in [0,1]$ とするとき，(Θ_0, Θ_1) に対する有意水準 α の**一様最強力検定**（uniformly most powerful test, UMP test）とは，(Θ_0, Θ_1) に対する有意水準 α の検定 $\phi_0\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ であって，(Θ_0, Θ_1) に対する任意の有意水準 α の検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ と $\theta \in \Theta_1$ に対して

$$E_\theta[\phi_0] \geq E_\theta[\phi]$$

を満たすものをいう．

定義 3.3（不偏検定） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，(Θ_0, Θ_1) をパラメータ空間 Θ の分割とする．$\alpha \in [0,1]$ とするとき，(Θ_0, Θ_1) に対する有意水準 α の**不偏検定**（unbiased test）とは，(Θ_0, Θ_1) に対する有意水準 α の検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ であって，任意の $\theta \in \Theta_1$ に対して

$$E_\theta[\phi] \geq \alpha$$

を満たすものをいう．

定義 3.4（一様最強力不偏検定） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，(Θ_0, Θ_1) をパラメータ空間 Θ の分割とする．$\alpha \in [0,1]$ とするとき，(Θ_0, Θ_1) に対する有意水準 α の**一様最強力不偏検定**（uniformly most powerful unbiased test）とは，(Θ_0, Θ_1) に対する有意水準 α の不偏検定 $\phi_0\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ であって，(Θ_0, Θ_1) に対する任意の有意水準 α の不偏検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ と $\theta \in \Theta_1$ に対して

$$E_\theta[\phi_0] \geq E_\theta[\phi]$$

を満たすものをいう．

有意水準 α の一様最強力検定 $\phi_0\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ は，任意の $\theta \in \Theta_1$ に対して $E_\theta[\phi_0] \geq E_\theta[\alpha] = \alpha$ を満たすから（定数関数 α が有意水準 α の検定であることを用いた），有意水準 α の不偏検定であり，したがって，一様最強力不偏検定である．

3.2　一様最強力検定の存在

補題 3.5（一般化された Neyman–Pearson の補題） $(\mathcal{X}, \mu)$ を測度空間とし，$f_1, \ldots, f_n, g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ を μ-可積分関数とする．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ とし，

$$\varPhi_\alpha = \left\{\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1] \;\middle|\; \phi \text{ は可測，各 } i \in \{1,\ldots,n\} \text{ に対して } \int_{\mathcal{X}} \phi f_i \, d\mu = \alpha_i \right\},$$
$$\varPhi_{\leq\alpha} = \left\{\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1] \;\middle|\; \phi \text{ は可測，各 } i \in \{1,\ldots,n\} \text{ に対して } \int_{\mathcal{X}} \phi f_i \, d\mu \leq \alpha_i \right\}$$

と置く．

(1) $\phi_0 \in \varPhi_\alpha$ とし，ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0 & (g(x) < \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)) \\ 1 & (g(x) > \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

が満たされているとする．このとき，$\phi \in \varPhi_\alpha$ に対する値 $\int_{\mathcal{X}} \phi g \, d\mu$ は，$\phi = \phi_0$ のときに最大値をとる．

(2) (1) において，さらに，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ととれるとする．このとき，$\phi \in \varPhi_{\leq\alpha}$ に対する値 $\int_{\mathcal{X}} \phi g \, d\mu$ は，$\phi = \phi_0$ のときに最大値をとる．

証明　$\phi_0 \in \varPhi_\alpha$ が (1) または (2) の条件を満たすとすると，任意の $\phi \in \varPhi_\alpha$ または $\phi \in \varPhi_{\leq\alpha}$ に対して，

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \phi_0 g \, d\mu - \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i &= \int_{\mathcal{X}} \phi_0 \left(g - \sum_{i=1}^n c_i f_i \right) d\mu \\ &\geq \int_{\mathcal{X}} \phi \left(g - \sum_{i=1}^n c_i f_i \right) d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} \phi g \, d\mu - \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \end{aligned}$$

である．ここで，最後の不等号は，(1) の場合は $\phi \in \varPhi_\alpha$ から（より強く等号が）成り立ち，(2) の場合は $\phi \in \varPhi_{\leq\alpha}$ と $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ から成り立つ．よって，

$$\int_{\mathcal{X}} \phi_0 g \, d\mu \geq \int_{\mathcal{X}} \phi g \, d\mu$$

が成り立つ．　□

定理 3.6（Neyman–Pearson の補題） $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，パラメータ空間 Θ は 2 元集合 $\{\theta_0, \theta_1\}$ であるとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いて $f_\theta \cdot \mu$ と表されているとする．$\alpha \in [0,1]$ とする．

(1) 次の条件を満たす検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ は，$(\{\theta_0\}, \{\theta_1\})$ に対する有意水準 α の一様最強力検定である．
   (i) $E_{\theta_0}[\phi] = \alpha$ である．
   (ii) ある $c \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ が存在して，

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (f_{\theta_1}(x) < c f_{\theta_0}(x)) \\ 1 & (f_{\theta_1}(x) > c f_{\theta_0}(x)) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

が成り立つ．

(2) (1) の条件を満たす検定 ϕ は，必ず存在する．

証明 (1) $c < \infty$ ならば，主張は，一般化された Neyman–Pearson の補題（補題 3.5 (2)）で $n = 1$ とすれば従う．$c = \infty$ であるとして，ϕ を主張の条件を満たす検定とする．条件 (ii) は

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (f_{\theta_0}(x) > 0) \\ 1 & (f_{\theta_0}(x) = 0 \text{ かつ } f_{\theta_1}(x) > 0) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

となり，このことと条件 (i) より，$\alpha = E_{\theta_0}[\phi] = 0$ となる．$(\{\theta_0\}, \{\theta_1\})$ に対する有意水準 0 の検定とは，P_{θ_0}-ほとんど確実に（すなわち，$\{f_{\theta_0} \neq 0\}$ 上 μ-ほとんどいたるところ）で値 0 をとる検定にほかならず，ϕ がその中で一様最強力であることは，明らかである．

(2) 関数 $F\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, 1]$ を

$$F(c) = P_{\theta_0}(\{f_{\theta_1} \leq c f_{\theta_0}\})$$

と定めると，F は増加かつ右連続で，$\lim_{c \to \infty} F(c) = 1$ を満たす．したがって，$c \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ を $F(c-) \leq 1 - \alpha \leq F(c)$ を満たすようにとれ，これに対して，$\gamma \in [0, 1]$ を $F(c-) + \gamma(F(c) - F(c-)) = 1 - \alpha$ を満たすようにとれる（$F(0-) = 0$，$F(\infty) = F(\infty-) = 1$ とみなす）．これらを用いて，検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0, 1]$ を

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (f_{\theta_1}(x) < c f_{\theta_0}(x)) \\ \gamma & (f_{\theta_1}(x) = c f_{\theta_0}(x)) \\ 1 & (f_{\theta_1}(x) > c f_{\theta_0}(x)) \end{cases}$$

と定めれば，これは (1) の条件を満たす． □

注意 3.7 検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0, 1]$ が Neyman–Pearson の補題（定理 3.6 (1)）の条件を満たすとして，条件 (ii) における $c \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ をとる．Neyman–Pearson の補題（定理 3.6 (1)）の証明からわかるように，$c = \infty$ となりうるのは，$\alpha = 0$ の場合だけである．

命題 3.8 $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ を統計モデルとし，パラメータ空間 Θ は 2 元集合 $\{\theta_0, \theta_1\}$ であるとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いて $f_\theta \cdot \mu$ と表されているとする．$\alpha \in [0, 1]$ とし，$\phi\colon \mathcal{X} \to [0, 1]$ を $(\{\theta_0\}, \{\theta_1\})$ に対する有意水準 α の一様最強力検定とする．ある $c \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ が存在して，

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (f_{\theta_1}(x) < c f_{\theta_0}(x)) \\ 1 & (f_{\theta_1}(x) > c f_{\theta_0}(x)) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

が成り立つ．

証明 Neyman–Pearson の補題（定理 3.6 (1)）の条件を満たす検定 $\phi_0\colon \mathcal{X} \to [0, 1]$ をとり（定理 3.6 (2)），条件 (ii) における $c \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ をとる．ϕ と ϕ_0 はともに $(\{\theta_0\}, \{\theta_1\})$ に対する有意水準 α の一様最強力検定であり，条件 (i) より $E_{\theta_0}[\phi] = \alpha$ だから，

$$\int_{\mathcal{X}} (\phi_0 - \phi) f_{\theta_0}\, d\mu = E_{\theta_0}[\phi_0] - E_{\theta_0}[\phi] \geq 0, \tag{$*$}$$

$$\int_{\mathcal{X}} (\phi_0 - \phi) f_{\theta_1}\, d\mu = E_{\theta_1}[\phi_0] - E_{\theta_1}[\phi] = 0 \tag{$**$}$$

である．

$c<\infty$ であるとする．このとき，($*$) と ($**$) より，

$$\int_{\mathcal{X}}(\phi-\phi_0)(f_{\theta_1}-cf_{\theta_0})\le 0$$

である．一方で，ϕ_0 は条件 (ii) を満たすから，μ-ほとんどいたるところで $(\phi-\phi_0)(f_{\theta_1}-cf_{\theta_0})\ge 0$ である．このことと上式より，μ-ほとんどいたるところで $(\phi-\phi_0)(f_{\theta_1}-cf_{\theta_0})=0$ である．すなわち，

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & (f_{\theta_1}(x)<cf_{\theta_0}(x))\\ 1 & (f_{\theta_0}(x)>cf_{\theta_0}(x))\end{cases}\qquad (\mu\text{-a.e. } x\in\mathcal{X}) \tag{$***$}$$

が成り立つ．

$c=\infty$ であるとする．このとき，ϕ_0 は $\{f_{\theta_0}>0\}$ 上 μ-ほとんどいたるところで 0 だから，($*$) より，ϕ も $\{f_{\theta_0}>0\}$ 上 μ-ほとんどいたるところで 0 である．また，このことと ($**$) より

$$\int_{\{f_{\theta_0}=0\}}(\phi_0-\phi)f_{\theta_1}\,d\mu=0$$

であり，ϕ_0 は $\{f_{\theta_0}=0$ かつ $f_{\theta_1}>0\}$ 上 μ-ほとんどいたるところで 1 だから，ϕ も $\{f_{\theta_0}=0$ かつ $f_{\theta_1}>0\}$ 上 μ-ほとんどいたるところで 1 である．よって，$c=\infty$ の場合にも，($***$) が成り立つ． □

注意 3.9　命題 3.8 の状況で，$(\{\theta_0\},\{\theta_1\})$ に対する有意水準 α の一様最強力検定 $\phi\colon\mathcal{X}\to[0,1]$ が $E_{\theta_0}[\phi]=\alpha$ を満たすとは限らない．

定義 3.10（単調尤度比）　$(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，パラメータ空間 Θ は全順序集合であるとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ を用いて $f_\theta\cdot\mu$ と表されているとする．$\mathcal{Y}$ を全順序集合とし，$T\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ を統計量とする．統計モデル $(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ が μ と T に関して**単調尤度比**（monotone likelihood ratio）をもつとは，次の条件が満たされることをいう．

> $\xi<\eta$ を満たす任意の $\xi,\eta\in\Theta$ に対して，増加写像 $r_{\eta,\xi}\colon\mathcal{Y}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ が存在して，$\mathcal{X}$ 上 μ-ほとんどいたるところで $f_\eta=(r_{\eta,\xi}\circ T)f_\xi$ が成り立つ．

注意 3.11　定義 3.10 の状況で，単調尤度比をもつかどうかは，μ のとり方には依存するが，μ を固定した上での各 f_θ のとり方には依存しない．

定理 3.12　$(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ を統計モデルとし，パラメータ空間 Θ は全順序集合であるとする．μ を $\mathcal{X}$ 上の測度とし，各 P_θ は可測関数 $f_\theta\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ を用いて $f_\theta\cdot\mu$ と表されているとする．$\mathcal{Y}$ を全順序集合，$T\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ を統計量とし，統計モデル $(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ は μ と T に関して単調尤度比をもつとする．$\theta_0\in\Theta$ とし，$\Theta_0=\{\theta\in\Theta\mid\theta\le\theta_0\}$，$\Theta_1=\{\theta\in\Theta\mid\theta>\theta_0\}$ と置く．$\alpha\in[0,1]$ とする．

(1) 次の条件を満たす検定 $\phi\colon\mathcal{X}\to[0,1]$ は，(Θ_0,Θ_1) に対する有意水準 α の一様最強力検定である．
  (i) $E_{\theta_0}[\phi]=\alpha$ である．
  (ii) ある $t\in\mathcal{Y}$ が存在して，

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & (T(x)<t)\\ 1 & (T(x)>t)\end{cases}\qquad(\mu\text{-a.e. } x\in\mathcal{X})$$

  が成り立つ．

(2) T は $\mathcal{Y}=[-\infty,\infty)$ に値をとる可測統計量であり，$\alpha\in(0,1]$ であるとする．このとき，(1) の条件を満たす検定 ϕ は，必ず存在する．

証明　(1)　単調尤度比の仮定より，$\xi<\eta$ を満たす任意の $\xi,\eta\in\Theta$ に対して，増加写像 $r_{\eta,\xi}\colon\mathcal{Y}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して，$\mathcal{X}$ 上 μ-ほとんどいたるところで $f_\eta=(r_{\eta,\xi}\circ T)f_\xi$ が成り立つ．以下，この $r_{\eta,\xi}$ を用いる．検定 ϕ が主張の条件を満たすとして，条件 (ii) における $t\in\mathcal{Y}$ をとる．

まず，$\xi,\eta\in\Theta$ が $\xi<\eta$ を満たすとして，ϕ が $(\{\xi\},\{\eta\})$ に対する有意水準 $E_\xi[\phi]$ の一様最強力検定であることを示す．μ-ほとんどすべての $x\in\mathcal{X}$ に対して $f_\eta(x)=r_{\eta,\xi}(T(x))f_\xi(x)$ であり，このような x に対しては，$f_\eta(x)<r_{\eta,\xi}(t)f_\xi(x)$ ならば $T(x)<t$ であり，$f_\eta(x)>r_{\eta,\xi}(t)f_\xi(x)$ ならば $T(x)>t$ である．よって，条件 (ii) と合わせて

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & (f_\eta(x)<r_{\eta,\xi}(t)f_\xi(x))\\ 1 & (f_\eta(x)>r_{\eta,\xi}(t)f_\xi(x))\end{cases}\qquad(\mu\text{-a.e. }x\in\mathcal{X})$$

を得るから，Neyman–Pearson の補題（定理 3.6 (1)）より，ϕ は $(\{\xi\},\{\eta\})$ に対する有意水準 $E_\xi[\phi]$ の一様最強力検定である．

次に，定理の主張を示す．$\theta\in\Theta_0$ とすると，前段の結果より，ϕ は $(\{\theta\},\{\theta_0\})$ に対する有意水準 $E_\theta[\phi]$ の一様最強力検定であり，特に不偏検定だから，$E_\theta[\phi]\leq E_{\theta_0}[\phi]=\alpha$ である．また，$\theta\in\Theta_1$ とすると，ϕ は $(\{\theta_0\},\{\theta\})$ に対する有意水準 $E_{\theta_0}[\phi]=\alpha$ の一様最強力検定である．よって，ϕ は (Θ_0,Θ_1) に対する有意水準 α の一様最強力検定である．

(2)　関数 $F\colon[-\infty,\infty)\to[0,1]$ を

$$F(t)=P_{\theta_0}(\{T\leq t\})$$

と定めると，F は増加かつ右連続で，$\lim_{t\to\infty}F(t)=1$ を満たす．したがって，$t\in[-\infty,\infty)$ を $F(t-)\leq 1-\alpha\leq F(t)$ を満たすようにとれ（$\alpha\in(0,1]$ であることに注意する），これに対して，$\gamma\in[0,1]$ を $F(t-)+\gamma(F(t)-F(t-))=1-\alpha$ を満たすようにとれる（$F((-\infty)-)=0$ とみなす）．これらを用いて，検定 $\phi\colon\mathcal{X}\to[0,1]$ を

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & (T(x)<t)\\ \gamma & (T(x)=t)\\ 1 & (T(x)>t)\end{cases}$$

と定めれば，これは (1) の条件を満たす．　□

系 3.13　$\mathcal{X}$ を可測空間とする．Θ を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$\mathcal{X}$ 上の測度 μ, 可測関数 $g\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, 関数 $b\colon\Theta\to\mathbb{R}$ を用いて

$$P_\theta=f_\theta\cdot\mu,\qquad f_\theta(x)=g(x)\exp(\theta T(x)-b(\theta))$$

と表せる自然パラメータの指数型分布族 $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ を考える．$\theta_0\in\Theta$ とし，$\Theta_0=\{\theta\in\Theta\mid\theta\leq\theta_0\}$, $\Theta_1=\{\theta\in\Theta\mid\theta>\theta_0\}$ と置く．$\alpha\in[0,1]$ とする．

(1) 次の条件を満たす検定 $\phi\colon\mathcal{X}\to[0,1]$ は，(Θ_0,Θ_1) に対する有意水準 α の一様最強力検定である．
   - (i) $E_{\theta_0}[\phi]=\alpha$ である．
   - (ii) ある $t\in[-\infty,\infty)$ が存在して，

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & (T(x)<t)\\ 1 & (T(x)>t)\end{cases}\qquad(\mu\text{-a.e. }x\in\mathcal{X})$$

が成り立つ．

(2) $\alpha \in (0,1]$ であるとする．このとき，(1) の条件を満たす検定 ϕ は，必ず存在する．

証明 $\xi < \eta$ を満たす任意の $\xi, \eta \in \Theta$ に対して，

$$\frac{f_\eta(x)}{f_\xi(x)} = \exp((\eta - \xi)T(x) - (b(\eta) - b(\xi))) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

であり，これは $T(x)$ の増加関数として書ける．よって，統計モデル $(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ は μ と T に関して単調尤度比をもつから，主張は定理 3.12 から従う． □

3.3 一様最強力不偏検定の存在

補題 3.14 $\mathcal{X}$ を可測空間とする．Θ を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$\mathcal{X}$ 上の測度 μ，可測関数 $g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，関数 $b\colon \Theta \to \mathbb{R}$ を用いて

$$P_\theta = f_\theta \cdot \mu, \qquad f_\theta(x) = g(x)\exp(\theta T(x) - b(\theta))$$

と表せる自然パラメータの指数型分布族 $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ を考える．$\alpha \in [0,1]$ とする．

(1) $\theta_0 \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ とする．このとき，T と ϕT は P_{θ_0}-可積分であり，$(\{\theta_0\}, \Theta \setminus \{\theta_0\})$ に対する有意水準 α の不偏検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ は，

$$E_{\theta_0}[\phi] = \alpha, \qquad E_{\theta_0}[\phi T] = \alpha\, E_{\theta_0}[T]$$

を満たす．

(2) $\theta_0, \theta_1 \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$，$\theta_0 < \theta_1$ とする．このとき，$(\Theta \cap [\theta_0, \theta_1], \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1])$ に対する有意水準 α の不偏検定 $\phi\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ は，

$$E_{\theta_0}[\phi] = E_{\theta_1}[\phi] = \alpha$$

を満たす．

証明 命題 1.10 (1) より，任意の $\theta \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ に対して，T と ϕT は P_θ-可積分である．また，関数 $F\colon \Theta \to \mathbb{R}$ を $F(\theta) = E_\theta[\phi]$ と定めると，命題 1.10 (2) より，F は $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ 上で無限階微分可能であり，任意の $\theta \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ に対して

$$F'(\theta) = E_\theta[\phi T] - E_\theta[T]\, E_\theta[\phi]$$

である．

(1) 仮定より，$F(\theta_0) \leq \alpha$ であり，$\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ に対しては $F(\theta) \geq \alpha$ である．F は $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ 上で連続だから，このことから $F(\theta_0) = \alpha$ を得る．また，F は θ_0 において最小値をとるから，$F'(\theta_0) = 0$ である．上記の F' の表式と合わせて，$E_{\theta_0}[\phi] = \alpha$ かつ $E_{\theta_0}[\phi T] = \alpha\, E_{\theta_0}[T]$ を得る．

(2) 仮定より，$\theta \in \Theta \cap [\theta_0, \theta_1]$ に対しては $F(\theta) \leq \alpha$ であり，$\theta \in \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1]$ に対しては $F(\theta) \geq \alpha$ である．F は $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ 上で連続だから，このことから $F(\theta_0) = F(\theta_1) = \alpha$，すなわち $E_{\theta_0}[\phi] = E_{\theta_1}[\phi] = \alpha$ を得る． □

補題 3.15 P を $\mathbb{R}$ 上の確率 Borel 測度とし，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を P-可積分な狭義増加関数とする．$\alpha \in (0,1]$ とする．このとき，次の条件を満たす可測関数 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ が存在する．

(i) $E[\chi] = \alpha$ かつ $E[\chi f] = \alpha\, E[f]$ である．

(ii) ある $t_0,\, t_1 \in \mathbb{R}$，$t_0 \leq t_1$ と $\gamma_0,\, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & (t_0 < t < t_1) \\ \gamma_0 & (t = t_0) \\ \gamma_1 & (t = t_1) \\ 1 & (t < t_0 \text{ または } t > t_1) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明　関数 $F\colon \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ を

$$F(t) = P((-\infty, t])$$

と定めると，F は増加かつ右連続で，$F(-\infty) = 0$ かつ $F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ を満たす．これを用いて，各 $p \in [0,1]$ に対して，$t_*(p) \in \overline{\mathbb{R}}$ と $\gamma_*(p) \in [0,1]$ を

$$t_*(p) = \inf\{t \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(t) \geq p\},$$
$$\gamma_*(p) = \begin{cases} (p - F(t_*(p)-))/(F(t_*(p)) - F(t_*(p)-)) & (F(t_*(p)-) < F(t_*(p))) \\ 0 & (F(t_*(p)-) = F(t_*(p))) \end{cases}$$

と定めると（$F((-\infty)-) = 0$ とみなす），

$$E[1_{(-\infty, t_*(p))} + \gamma_*(p) 1_{\{t_*(p)\}}] = p$$

となる．そこで，各 $p \in [0,\alpha]$ に対して，可測関数 $\chi_p\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ を

$$\begin{aligned} \chi_p &= 1 + (1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}}) - (1_{(-\infty,t_*(p+1-\alpha))} + \gamma_*(p+1-\alpha)1_{\{t_*(p+1-\alpha)\}}) \\ &= 1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}} + (1 - \gamma_*(p+1-\alpha))1_{\{t_*(p+1-\alpha)\}} + 1_{(t_*(p+1-\alpha),\infty)} \end{aligned}$$

と定めると，これは $E[\chi_p] = \alpha$ を満たし，$p \in (0,\alpha)$ ならば $-\infty < t_*(p) \leq t_*(p+1-\alpha) < \infty$ だから条件 (ii) を満たす．あとは，$E[\chi_p f] = \alpha\, E[f]$ を満たす $p \in (0,\alpha)$ が存在することを示せばよい．

まず，$[0,\alpha]$ 上の関数 $p \mapsto E[\chi_p f]$ が連続であることを示す．そのためには，$[0,1]$ 上の関数 $p \mapsto E[(1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}})f]$ が連続であることを示せばよい．$p,\, p' \in [0,1]$ とすると，$(1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}}) - (1_{(-\infty,t_*(p'))} + \gamma_*(p')1_{\{t_*(p')\}})$ は常に 0 以上または常に 0 以下であり，$[t_*(p'), t_*(p)]$ または $[t_*(p), t_*(p')]$ の外では 0 であり，その期待値は $p - p'$ である．したがって，f が増加であること合わせて，

$$\begin{aligned} &|E[(1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}})f] - E[(1_{(-\infty,t_*(p'))} + \gamma_*(p')1_{\{t_*(p')\}})f]| \\ &\leq E[|(1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}}) - (1_{(-\infty,t_*(p'))} + \gamma_*(p')1_{\{t_*(p')\}})||f|] \\ &\leq E[|(1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}}) - (1_{(-\infty,t_*(p'))} + \gamma_*(p')1_{\{t_*(p')\}})|] \sup_{t \in [t_*(p'),\, t_*(p)] \text{ または } [t_*(p),\, t_*(p')]} |f(t)| \\ &= |p - p'| \max\{|f(t_*(p))|, |f(t_*(p'))|\} \end{aligned}$$

を得る．よって，p を固定して $p' \to p$ とするとき $E[(1_{(-\infty,t_*(p))} + \gamma_*(p)1_{\{t_*(p)\}})f] \to E[(1_{(-\infty,t_*(p'))} + \gamma_*(p')1_{\{t_*(p')\}})f]$ となる．これで，主張が示された．

次に，$E[\chi_p f] = \alpha\, E[f]$ を満たす $p \in (0,\alpha)$ が存在することを示す．P が 1 点 $t_0 \in \mathbb{R}$ に集中した Dirac 測度である場合，容易に確かめられるように，任意の $p \in (0,\alpha)$ に対して $\chi_p = \alpha 1_{\{t_0\}}$ であり，これは $E[\chi_p f] = \alpha\, E[f]$ を満たす．以下, P が Dirac 測度ではない場合を考える．$p = 0$ のとき, $t_*(p) = t_*(0) = -\infty$

だから，χ_0 は $(-\infty, t_*(1-\alpha))$ 上では 0，$(t_*(1-\alpha), \infty)$ 上では 1 である．したがって，f が狭義増加であることと P が Dirac 測度ではないことより

$$(\chi_p - \alpha)(f - f(t_*(1-\alpha))) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad P((\chi_p - \alpha)(f - f(t_*(1-\alpha))) > 0) > 0$$

だから，$E[\chi_p] = \alpha$ と合わせて

$$E[\chi_p f] - \alpha\, E[f] = E[(\chi_p - \alpha) f] = E[(\chi_p - \alpha)(f - f(t_*(1-\alpha)))] > 0 \tag{$*$}$$

を得る．また，$p = \alpha$ のとき，$t_*(p + 1 - \alpha) = t_*(1)$ かつ $P((t_*(1), \infty)) = 0$ だから，χ_p は $(-\infty, t_*(\alpha))$ 上では 1，$(t_*(\alpha), \infty)$ 上では P-ほとんど確実に 0 である．したがって，f が狭義増加であることと P が Dirac 測度ではないことより

$$(\chi_p - \alpha)(f - f(t_*(\alpha))) \leq 0 \quad P\text{-a.s.} \quad \text{かつ} \quad P((\chi_p - \alpha)(f - f(t_*(\alpha))) < 0) > 0$$

だから，$E[\chi_p] = \alpha$ と合わせて

$$E[\chi_p f] - \alpha\, E[f] = E[(\chi_p - \alpha) f] = E[(\chi_p - \alpha)(f - f(t_*(\alpha)))] < 0 \tag{$**$}$$

を得る．前段で示したように，$[0, \alpha]$ 上の関数 $p \mapsto E[\chi_p f]$ は連続だから，($*$), ($**$) と中間値の定理より，$E[\chi_p f] = \alpha\, E[f]$ を満たす $p \in (0, \alpha)$ が存在する．これで，主張が示された． □

定理 3.16 $\mathcal{X}$ を可測空間とする．Θ を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$\mathcal{X}$ 上の測度 μ，可測関数 $g \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，関数 $b \colon \Theta \to \mathbb{R}$ を用いて

$$P_\theta = f_\theta \cdot \mu, \qquad f_\theta(x) = g(x) \exp(\theta T(x) - b(\theta))$$

と表せる自然パラメータの指数型分布族 $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ を考える．$\theta_0 \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$ とし，$\alpha \in [0, 1]$ とする．

(1) 次の条件を満たす検定 $\phi \colon \mathcal{X} \to [0, 1]$ は，$(\{\theta_0\}, \Theta \setminus \{\theta_0\})$ に対する有意水準 α の一様最強力不偏検定である．

  (i) $E_{\theta_0}[\phi] = \alpha$ かつ $E_{\theta_0}[\phi T] = \alpha\, E_{\theta_0}[T]$ である（命題 1.10 (1) より ϕT と T が P_{θ_0}-可積分であることに注意する）．

  (ii) ある $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$，$t_0 \leq t_1$ が存在して，

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (t_0 < T(x) < t_1) \\ 1 & (T(x) < t_0 \text{ または } T(x) > t_1) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

  が成り立つ．

(2) $\alpha \in (0, 1]$ であるとする．このとき，(1) の条件を満たす検定 ϕ は，必ず存在する．

証明 (1) 検定 ϕ が主張の条件を満たすとして，条件 (ii) における $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ をとる．$\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ を任意にとる．これに対して，$c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ を適当にとれば，

$$\begin{cases} e^{(\theta - \theta_0)t} < c_0 + c_1 t & (t_0 < t < t_1) \\ e^{(\theta - \theta_0)t} > c_0 + c_1 t & (t < t_0 \text{ または } t > t_1) \end{cases}$$

となる．このとき，

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (e^{(\theta - \theta_0)T(x)} < c_0 + c_1 T(x)) \\ 1 & (e^{(\theta - \theta_0)T(x)} > c_0 + c_1 T(x)) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

だから，一般化された Neyman–Pearson の補題（補題 3.5 (1)）より，

$$\Phi_\alpha = \left\{ \phi' \colon \mathcal{X} \to [0,1] \;\middle|\; \phi' \text{ は可測，} E_{\theta_0}[\phi'] = \int_{\mathcal{X}} \phi' \, dP_{\theta_0} = \alpha, \; E_{\theta_0}[\phi' T] = \int_{\mathcal{X}} \phi' T \, dP_{\theta_0} = \alpha \, E_{\theta_0}[T] \right\}$$

と置けば，$\phi' \in \Phi_\alpha$ に対する値

$$E_\theta[\phi'] = \int_{\mathcal{X}} \phi' \, dP_\theta = e^{b(\theta_0) - b(\theta)} \int_{\mathcal{X}} \phi' \exp((\theta - \theta_0)T) \, dP_{\theta_0}$$

は $\phi' = \phi$ のときに最大値をとる．特に，$(\{\theta_0\}, \Theta \setminus \{\theta_0\})$ に対する任意の有意水準 α の不偏検定 ϕ' について，補題 3.14 (1) より $\phi' \in \Phi_\alpha$ だから，$E_\theta[\phi] \geq E_\theta[\phi']$ である．これが任意の $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ に対して成り立つから，ϕ は $(\{\theta_0\}, \Theta \setminus \{\theta_0\})$ に対する有意水準 α の一様最強力不偏検定である．

(2)　$P = T_* P_{\theta_0}$ と $f(t) = t$（$t \in \mathbb{R}$）に対して補題 3.15 を適用して条件を満たす可測関数 $\chi \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ をとり，$\phi = \chi \circ T$ と置けばよい．□

定理 3.17　$\mathcal{X}$ を可測空間とする．Θ を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$\mathcal{X}$ 上の測度 μ，可測関数 $g \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $T \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，関数 $b \colon \Theta \to \mathbb{R}$ を用いて

$$P_\theta = f_\theta \cdot \mu, \qquad f_\theta(x) = g(x) \exp(\theta T(x) - b(\theta))$$

と表せる自然パラメータの指数型分布族 $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ を考える．$\theta_0, \theta_1 \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}}(\Theta)$，$\theta_0 < \theta_1$ とし，$\alpha \in [0,1]$ とする．

(1) 次の条件を満たす検定 $\phi \colon \mathcal{X} \to [0,1]$ は，$(\Theta \cap [\theta_0, \theta_1], \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1])$ に対する有意水準 α の一様最強力不偏検定である．
  (i) $E_{\theta_0}[\phi] = E_{\theta_1}[\phi] = \alpha$ である．
  (ii) ある $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$，$t_0 \leq t_1$ が存在して，

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (t_0 < T(x) < t_1) \\ 1 & (T(x) < t_0 \text{ または } T(x) > t_1) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

  が成り立つ．
(2) $\alpha \in (0,1]$ であるとする．このとき，(1) の条件を満たす検定 ϕ は，必ず存在する．

証明　(1)　検定 ϕ が主張の条件を満たすとして，条件 (ii) における $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ をとる．$\theta \in \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1]$ を任意にとる．これに対して，$c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ を適当にとれば，

$$\begin{cases} e^{(\theta - \theta_0)t} < c_0 + c_1 e^{(\theta_1 - \theta_0)t} & (t_0 < t < t_1) \\ e^{(\theta - \theta_0)t} > c_0 + c_1 e^{(\theta_1 - \theta_0)t} & (t < t_0 \text{ または } t > t_1) \end{cases}$$

となる．このとき，

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (e^{(\theta - \theta_0)T(x)} < c_0 + c_1 e^{(\theta_1 - \theta_0)T(x)}) \\ 1 & (e^{(\theta - \theta_0)T(x)} > c_0 + c_1 e^{(\theta_1 - \theta_0)T(x)}) \end{cases} \qquad (\mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{X})$$

だから，一般化された Neyman–Pearson の補題（補題 3.5 (1)）より，

$$\Phi_\alpha = \left\{ \phi' \colon \mathcal{X} \to [0,1] \;\middle|\; \phi' \text{ は可測，} E_{\theta_0}[\phi'] = \int_{\mathcal{X}} \phi' \, dP_{\theta_0} = \alpha, \; E_{\theta_1}[\phi'] = e^{b(\theta_0) - b(\theta_1)} \int_{\mathcal{X}} \phi' \exp((\theta_1 - \theta_0)T) \, dP_{\theta_0} = \alpha \right\}$$

と置けば，$\phi' \in \Phi_\alpha$ に対する値

$$E_\theta[\phi'] = \int_{\mathcal{X}} \phi' \, dP_\theta = e^{b(\theta_0)-b(\theta)} \int_{\mathcal{X}} \phi' \exp((\theta - \theta_0)T) \, dP_{\theta_0}$$

は $\phi' = \phi$ のときに最大値をとる．特に，$(\Theta \cap [\theta_0, \theta_1], \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1])$ に対する任意の有意水準 α の不偏検定 ϕ' について，補題 3.14 (2) より $\phi' \in \Phi_\alpha$ だから，$E_\theta[\phi] \geq E_\theta[\phi']$ である．これが任意の $\theta \in \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1]$ に対して成り立つから，ϕ は $(\Theta \cap [\theta_0, \theta_1], \Theta \setminus [\theta_0, \theta_1])$ に対する有意水準 α の一様最強力不偏検定である．

(2)　$P = T_* P_{\theta_0}$ と $f(t) = e^{(\theta_1 - \theta_0)t}$（$t \in \mathbb{R}$）に対して補題 3.15 を適用して条件を満たす可測関数 $\chi \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ をとり，$\phi = \chi \circ T$ と置けばよい． □

注意 3.18　パラメータ空間の次元が 2 以上の指数型分布族についても，一様最強力不偏検定の存在に関して，定理 3.16 や定理 3.17 と同様な定理が成り立つ．詳しくは，吉田 [2, 定理 3.33] を参照のこと．

参考文献

[1] 野田一雄，宮岡悦良，『入門・演習 数理統計』，共立出版，1990.
[2] 吉田朋広，『数理統計学』，朝倉書店，2006.