確率過程

箱

2024 年 6 月 4 日

概要

確率過程，特にマルチンゲールの理論について解説する．条件付き確率について解説したあと，マルチンゲールを定義し，不等式評価，収束定理，任意停止定理などを示す．

目次

記号と用語

- 自然数, 有理数, 実数全体の集合を, それぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ と書く．0 は自然数に含める．また, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$，$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$，$\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, \infty]$ と書く．
- 集合 A の定義関数（特性関数）を，1_A と書く．
- 区間を表す記号 $[s, t]$, $[s, t)$, $(s, t]$, (s, t), $[s, \infty)$, (s, ∞), $(-\infty, t]$, $(-\infty, t)$ を，一般の全順序集合においても用いる．

- 全順序集合 I の部分集合 J が上に共終であるとは，任意の $s \in I$ に対して，ある $t \in J$ が存在し，$s \leq t$ となることをいう．「下に共終である」ことも，同様に定義する．
- I を全順序集合とする．$\{(s,t] \mid s,\, t \in I \sqcup \{-\infty\},\, s < t\}$ が生成する I 上の位相を，I の左順序位相という．$\{[s,t) \mid s,\, t \in I \sqcup \{\infty\},\, s < t\}$ が生成する I 上の位相を，I の右順序位相という．I から位相空間への写像は，左順序位相に関して連続であるとき左連続であるといい，右順序位相に関して連続であるとき右連続であるという．
- $\sup_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda$ を $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda$ とも書き, $\inf_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda$ を $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} t_\lambda$ とも書く．$\max\{s,t\}$ を $s \vee t$ とも書き, $\min\{s,t\}$ を $s \wedge t$ とも書く．
- 集合上の σ-代数の族 $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ の上界（すなわち，$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ が生成する σ-代数）を，$\bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ と書く．
- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間とし，$p \in [1, \infty]$ とするとき，Ω 上の p 乗可積分な実可測関数全体のなす空間を $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ と書く．その「ほとんどいたるところで一致する関数を同一視する」同値関係に関する同値類全体のなす空間を $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ と書く．Ω 上の実あるいは $\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数 f の L^p ノルムを，$\|f\|_p$ と書く（f が p 乗可積分でないときは，$\|f\|_p = \infty$ とする）．
- 可測関数の「ほとんどいたるところで一致する関数を同一視する」同値関係に関する同値類を，しばしば関数そのもののように扱う．

1　条件付き期待値

1.1　条件付き期待値

命題 1.1　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．任意の $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ に対して，$X' \in L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ であって，任意の $A \in \mathfrak{G}$ に対して

$$E[1_A X'] = E[1_A X]$$

を満たすものが，一意に存在する．

証明　$A \in \mathfrak{G}$ に $E[1_A X]$ を対応させる写像は，可測空間 $(\Omega, \mathfrak{G})$ 上の有限実測度である．よって，Radon–Nikodym の定理より，主張の条件を満たす $X' \in L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ が一意に存在する．　□

定義 1.2（条件付き期待値）　命題 1.1 の状況で，X' を，X（あるいはその任意の代表元）の $\mathfrak{G}$ に関する**条件付き期待値**（conditional expectation）といい，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ と書く．

条件付き期待値 $E[X \mid \mathfrak{G}]$ は，厳密には確率変数の同値類だが，しばしばこれを確率変数そのもののように扱う．条件付き期待値を含む等式や不等式はすべて，関数の同値類のなす空間においてその等式や不等式が成立する，という意味である．

$\mathfrak{G} = \{\emptyset, X\}$ に関する条件付き期待値 $E[X \mid \mathfrak{G}]$ は，定値 $E[X]$ をとる確率変数（の同値類）である．

1.2　条件付き期待値の基本的性質

命題 1.3　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}] \colon L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ は，線型，順序保存，かつノルム減少である．

証明　$E[- \mid \mathfrak{G}]$ が線型かつ順序保存であることは，定義から明らかである．$E[- \mid \mathfrak{G}]$ がノルム減少であるこ

とを示す．$X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ とすると，$-|X| \le X \le |X|$ だから，順序保存性より，$-E[|X| \mid \mathfrak{G}] \le E[X \mid \mathfrak{G}] \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$，すなわち $|E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$ である．よって，

$$\begin{aligned}\|E[X \mid \mathfrak{G}]\|_1 &= E[|E[X \mid \mathfrak{G}]|] \\ &\le E[E[|X| \mid \mathfrak{G}]] \\ &= E[|X|] \\ &= \|X\|_1\end{aligned}$$

である． □

系 1.4 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．任意の $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ に対して，$|E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X| \mid \mathfrak{G}]$ である．

証明 命題 1.3 の証明の中で示されている． □

命題 1.5（条件付き期待値の推移性） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数であって $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ を満たすものとする．$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数 X に対して，$E[E[X \mid \mathfrak{G}] \mid \mathfrak{H}] = E[X \mid \mathfrak{H}]$ である．

証明 条件付き確率の定義から明らかである． □

命題 1.6 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数とする．

(1) X が $\mathfrak{G}$-可測ならば，$E[X \mid \mathfrak{G}] = X$ である．
(2) X が $\mathfrak{G}$ と独立ならば，$E[X \mid \mathfrak{G}] = E[X]$ である．

証明 (1) 条件付き確率の定義から明らかである．
(2) X が $\mathfrak{G}$ と独立であるとすると，任意の $A \in \mathfrak{G}$ に対して $E[1_A X] = E[1_A]E[X] = E[1_A E[X]]$ が成り立つから，$E[X \mid \mathfrak{G}] = E[X]$ である． □

命題 1.7（条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X_n $(n \in \mathbb{N})$ と X は $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数であり，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は X に概収束し，かつある $Y \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してほとんど確実に $|X_n| \le Y$ を満たすとする．このとき，条件付き期待値の列 $(E[X_n \mid \mathfrak{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ は，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ に L^1 収束かつ概収束する．

証明 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$Z_n = \sup_{k\ge n}|X_k - X|$ と置くと，

$$|E[X_n \mid \mathfrak{G}] - E[X \mid \mathfrak{G}]| \le E[|X_n - X| \mid \mathfrak{G}] \le E[Z_n \mid \mathfrak{G}]$$

である（系 1.4）．そこで，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に L^1 収束かつ概収束することを示せばよい．

仮定より，$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に概収束し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してほとんど確実に $|Z_n| \le 2Y$ を満たす．このことと通常の Lebesgue の収束定理より，$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に L^1 収束するから，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に L^1 収束する（命題 1.3）．一方で，$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非負確率変数の減少列だから，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ も非負確率変数（の同値類）の減少列である（命題 1.3）．したがって，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ はある非負確率変数 Z に概収束する．ところが，一般に，測度空間上の実可測関数列が L^1 収束極限と概収束極限をもつとき，それらの極限はほとんどいたるところで一致する．よって，ほとんど確実に $Z = 0$ であり，$(E[Z_n \mid \mathfrak{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に概収束することもわかる． □

命題 1.8　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ 上の可積分な実確率変数，Y を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数とし，これらの積 XY も可積分であるとする．このとき，

$$E[XY \mid \mathfrak{G}] = XE[Y \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．

証明　まず，$X = 1_A$（$A \in \mathfrak{G}$）である場合を考える．このとき，$1_A E[Y \mid \mathfrak{G}] \in L^1(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ であり，任意の $B \in \mathfrak{G}$ に対して

$$E[1_B 1_A E[Y \mid \mathfrak{G}]] = E[1_{A\cap B} E[Y \mid \mathfrak{G}]] = E[1_{A\cap B} Y] = E[1_B 1_A Y]$$

（第二の等号は，条件付き期待値 $E[Y \mid \mathfrak{G}]$ の定義から従う）が成り立つから，$1_A E[Y \mid \mathfrak{G}]$ は条件付き期待値 $E[1_A Y \mid \mathfrak{G}]$ に等しい．

次に，一般の場合を考える．$(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ 上の可積分な実確率変数 X に対して，X に各点収束する $\mathfrak{G}$-可測単関数の列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|X_n| \leq |X|$ を満たすものをとる．前段の結果より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$E[X_n Y \mid \mathfrak{G}] = X_n E[Y \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすると，上式の右辺は $XE[Y \mid \mathfrak{G}]$ に概収束し，一方で，条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）より，上式の左辺は $E[XY \mid \mathfrak{G}]$ に概収束する．よって，$E[XY \mid \mathfrak{G}] = XE[Y \mid \mathfrak{G}]$ を得る．　□

次の命題は，本稿では用いないが，条件付き期待値を具体的に計算するためには有用である．

命題 1.9　X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上のそれぞれ可測空間 E, F に値をとる互いに独立な確率変数，$\phi\colon E \times F \to \mathbb{R}$ を可測写像とし，$\phi(X, Y)$ は可積分であるとする．このとき，次が成り立つ．

(1) 確率変数 $\phi(X(\omega), Y)$ が可積分であるような $\omega \in \Omega$ の全体は可測集合であり，その補集合は無視可能である．

(2) X が生成する σ-代数を $\sigma(X)$ と書くと，

$$E[\phi(X, Y) \mid \sigma(X)] = E[\phi(x, Y)]|_{x=X}$$

が成り立つ．ここで，上式の右辺は，$\omega \in \Omega$ に対して，確率変数 $\phi(X(\omega), Y)$ が可積分ならばその期待値を，そうでなければ 0 を対応させる確率変数とする．

証明　(1)　X と Y が独立であることより，X, Y の分布をそれぞれ μ, ν と書くと，(X, Y) の分布は $\mu \otimes \nu$ である．確率変数 $\phi(X, Y)$ が可積分であることより，$E \times F$ 上の可測関数 ϕ は $(\mu \otimes \nu)$-可積分である．したがって，Fubini の定理より，F 上の可測関数 $\phi(x, -)$ が ν-可積分であるような $x \in E$ の全体は可測集合であり，その補集合は μ-無視可能である．すなわち，確率変数 $\phi(X(\omega), Y)$ が可積分であるような $\omega \in \Omega$ の全体は可測集合であり，その補集合は無視可能である．

(2)　まず，$\phi = 1_{A\times B}$（A, B はそれぞれ E, F の可測集合）である場合を考える．このとき，任意の可測集合 $A' \subseteq E$ に対して

$$E[1_{X\in A'} 1_{A\times B}(X, Y)] = P(X \in A \cap A')P(Y \in B) = E[1_{X\in A'} 1_{A\in X} P(B)]$$

が成り立つから，

$$E[1_{A\times B}(X,Y)\mid\sigma(X)]=1_{A\in X}P(B)$$

である．上式の右辺は $E[1_{A\times B}(x,Y)]|_{x=X}$ に等しいから，主張が成り立つ．

$\phi=1_C$ に対して主張が成り立つような可測集合 $C\subseteq E\times F$ の全体を $\mathfrak{C}$ と置く．明らかに，$C,C'\in\mathfrak{C}$ かつ $C'\subseteq C$ ならば $C\setminus C'\in\mathfrak{C}$ である．また，$(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathfrak{C}$ の元の増加列として，$C=\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n$ と置くと，等式

$$E[1_{C_n}(X,Y)\mid\sigma(X)]=E[1_{C_n}(x,Y)]|_{x=X}$$

において $n\to\infty$ とすることで，

$$E[1_C(X,Y)\mid\sigma(X)]=E[1_C(x,Y)]|_{x=X}$$

を得る（左辺の収束は条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）から，右辺の収束は単調収束定理から従う）．すなわち，$C\in\mathfrak{C}$ である．以上より，$\mathfrak{C}$ は Dynkin 族である．前段の結果より，任意の可測集合 $A\subseteq E$ と $B\subseteq F$ に対して $A\times B\in\mathfrak{C}$ だから，Dynkin 族補題より，$\mathfrak{C}$ は $E\times F$ の可測集合の全体に一致する．すなわち，$\phi=1_C$（C は $E\times F$ の可測集合）である場合，主張は成り立つ．

次に，一般の場合を考える．可測写像 $\phi\colon E\times F\to\mathbb{R}$ であって $\phi(X,Y)$ が可積分であるものに対して，ϕ に各点収束する可測単関数の列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $|\phi_n|\le|\phi|$ を満たすものをとる．前段の結果より，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$E[\phi_n(X,Y)\mid\sigma(X)]=E[\phi_n(x,Y)]|_{x=X}$$

が成り立つ．$n\to\infty$ とすると，条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）より，上式の右辺は $E[\phi(X,Y)\mid\sigma(X)]$ に概収束する．また，Lebesgue の収束定理より，$\phi(X(\omega),Y)$ が可積分であるような $\omega\in\Omega$ に対しては，$E[\phi_n(X(\omega),Y)]\to E[\phi(X(\omega),Y)]$ となる．よって，

$$E[\phi(X,Y)\mid\sigma(X)]=E[\phi(x,Y)]|_{x=X}$$

が成り立つ． □

1.3 条件付き期待値に対する Jensen の不等式

命題 1.10（条件付き期待値に対する Jensen の不等式） $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上の可積分な実確率変数，$\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を凸関数とし，$\phi(X)$ も可積分であるとする．このとき，

$$\phi(E[X\mid\mathfrak{G}])\le E[\phi(X)\mid\mathfrak{G}]$$

が成り立つ．

証明 ϕ が凸であることより，各点 $x_0\in\mathbb{R}$ において右微分係数

$$D^+\phi(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}\in\mathbb{R}$$

が存在し，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\phi(x_0)+D^+\phi(x_0)(x-x_0)\le\phi(x)$$

が成り立つ．上式において，x_0 に $E[X \mid \mathfrak{G}]$ を，x に X を代入すると，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) + D^+\phi(E[X \mid \mathfrak{G}])(X - E[X \mid \mathfrak{G}]) \le \phi(X) \tag{$*$}$$

を得る．

まず，X が有界である場合を考える．このとき，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ も有界であり（命題 1.3），したがって，($*$) の両辺は可積分である．そこで，両辺の条件付き期待値をとれば，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) \le E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$$

を得る（命題 1.3）．

次に，一般の場合を考える．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n = \{|X| \le n\}$ と置くと，$1_{A_n}X$ は有界だから，前段の結果より，

$$\phi(E[1_{A_n}X \mid \mathfrak{G}]) \le E[\phi(1_{A_n}X) \mid \mathfrak{G}]$$

である．$n \to \infty$ とすると，条件付き期待値に対する Lebesgue の収束定理（命題 1.7）より，$E[1_{A_n}X \mid \mathfrak{G}]$ は $E[X \mid \mathfrak{G}]$ に概収束し，$E[\phi(1_{A_n}X) \mid \mathfrak{G}]$ は $E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$ に概収束する（後者については，$|\phi(1_{A_n}X)| \le |\phi(X)| \vee |\phi(0)|$ であり，$\phi(X)$ が可積分であることに注意する）．よって，

$$\phi(E[X \mid \mathfrak{G}]) \le E[\phi(X) \mid \mathfrak{G}]$$

を得る． □

系 1.11（条件付き期待値の L^p 連続性） $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．X を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の p 乗可積分な実確率変数（$p \in [1, \infty)$）とすると，

$$|E[X \mid \mathfrak{G}]|^p \le E[|X|^p \mid \mathfrak{G}]$$

が成り立つ．特に，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]$ は，$L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ から $L^p(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ へのノルム減少な線型写像を定める．

証明 前半の不等式は，条件付き期待値に対する Jensen の不等式（命題 1.10）で $\phi(x) = |x|^p$ としたものである．また，この不等式より

$$\begin{aligned}\|E[X \mid \mathfrak{G}]\|_p^p &= E[|E[X \mid \mathfrak{G}]|^p] \\ &\le E[E[|X|^p \mid \mathfrak{G}]] \\ &= E[|X|^p] \\ &= \|X\|_p^p\end{aligned}$$

だから，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]$ は，$L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ から $L^p(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ へのノルム減少な線型写像を定める． □

命題 1.12 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数とする．$L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ を $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ の閉部分空間とみなすと，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]\colon L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ は，直交射影である．

証明 $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ とすると，任意の $Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle X - E[X \mid \mathfrak{G}] | Y\rangle_2 &= E[(X - E[X \mid \mathfrak{G}])Y] \\ &= E[E[(X - E[X \mid \mathfrak{G}])Y \mid \mathfrak{G}]] \\ &= E[E[X - E[X \mid \mathfrak{G}] \mid \mathfrak{G}]Y] \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ（条件付き期待値の推移性（命題 1.5）と命題 1.8 を用いた）．よって，条件付き期待値をとる写像 $E[- \mid \mathfrak{G}]\colon L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \to L^2(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ は，直交射影である． □

1.4　条件付き期待値と一様可積分性

命題 1.13　確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可積分な実確率変数 X に対して，$\mathfrak{G}$ が $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数の全体を動くときの条件付き期待値 $E[X \mid \mathfrak{G}]$ の全体は，一様可積分である．

証明　$\mathfrak{F}$ の任意の部分 σ-代数 $\mathfrak{G}$ に対して，$|E[X \mid \mathfrak{G}]| \leq E[|X| \mid \mathfrak{G}]$ だから（系 1.4），必要ならば $|X|$ を改めて X と置くことで，はじめから $X \geq 0$ と仮定してよい．このとき，$E[X \mid \mathfrak{G}] \geq 0$ である（命題 1.3）．C_1，$C_2 > 0$ とすると，$\mathfrak{F}$ の任意の部分 σ-代数 $\mathfrak{G}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[X \mid \mathfrak{G}]] &= E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[1_{X>C_2} X \mid \mathfrak{G}]] + E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[1_{X \leq C_2} X \mid \mathfrak{G}]] \\
&\leq E[E[1_{X>C_2} X \mid \mathfrak{G}]] + E\left[\frac{1}{C_1} E[X \mid \mathfrak{G}] \cdot C_2\right] \\
&= E[1_{X>C_2} X] + \frac{C_2}{C_1} E[X]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．そこで，任意の $\epsilon > 0$ に対して，定数 $C_2 > 0$ を十分大きくとって $E[1_{X>C_2} X] \leq \epsilon$ となるようにし，これに対して定数 $C_1 > 0$ を十分大きくとって $(C_2/C_1)E[X] \leq \epsilon$ となるようにすれば，

$$
E[1_{E[X|\mathfrak{G}]>C_1} E[X \mid \mathfrak{G}]] \leq 2\epsilon
$$

が成り立つ．よって，$E[X \mid \mathfrak{G}]$ の全体は，一様可積分である． □

2　確率過程

2.1　確率過程とフィルトレーション

定義 2.1（確率過程）　確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可測空間 E に値をとる**確率過程**（stochastic process）とは，全順序集合 I で添字付けられた，$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の E 値確率変数の族 $X = (X_t)_{t \in I}$ をいう．

(P) を全順序集合 I から可測空間 E への写像に対する性質とする．$X = (X_t)_{t \in I}$ を E 値確率過程とするとき，任意の $\omega \in \Omega$ に対して写像 $t \mapsto X_t(\omega)$ が性質 (P) を満たすことを，単に X が性質 (P) を満たすという．また，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して写像 $t \mapsto X_t(\omega)$ が性質 (P) を満たすことを，単に X がほとんど確実に性質 (P) を満たすという．たとえば，この意味で，「実確率過程 X が（ほとんど確実に）増加である」，「位相空間 E に値をとる確率過程 X が I 上の位相 τ に関して（ほとんど確実に）連続である」などという．

定義 2.2（確率過程の同値性）　$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$X = (X_t)_{t \in I}$ と $Y = (X_t)_{t \in I}$ を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可測空間 E に値をとる確率過程とする．

(1) X と Y が互いに他の**修正**（modification）であるとは，任意の $t \in I$ に対して，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ であることをいう．
(2) X と Y が**識別不能**（indistinguishable）であるとは，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，任意の $t \in I$ に対して $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ であることをいう．

明らかに，確率過程 X と Y が識別不能ならば，X と Y は互いに他の修正である．

命題 2.3 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とする．I を全順序集合，τ をその上の可分な位相とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ と $Y = (X_t)_{t\in I}$ を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可測空間 E に値をとる τ-連続な確率過程とする．このとき，X と Y が互いに他の修正であることと，X と Y が識別不能であることとは同値である．

証明 τ-稠密な可算部分集合 $D \subseteq I$ をとる．X と Y が互いに他の修正であるとすると，$N = \bigcup_{t\in D}\{X_t \neq Y_t\}$ は無視可能である．X と Y の τ-連続性より，$\Omega \setminus N$ 上では任意の $t \in I$ に対して $X_t = Y_t$ だから，X と Y は識別不能である． □

定義 2.4（フィルトレーション） 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の**フィルトレーション**（filtration）とは，全順序集合 I で添字付けられた $\mathfrak{F}$ の部分 σ-代数の族 $\mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ であって，増加である（すなわち，$s \leq t$ ならば $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$ である）ものをいう．このとき，組 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F}, P)$ を，**フィルトレーション付き確率空間**（filtered probability space）という．

定義 2.5（適合，発展的可測な確率過程） $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の可測空間 E に値をとる確率過程とする．I を，$((-\infty, t])_{t\in I}$ が生成する σ-代数によって可測空間とみなし，これが誘導する $(-\infty, t]$ 上の σ-代数を $\mathfrak{B}_t$ と書く．

(1) X が $\mathscr{F}$ **に適合する**（be adapted to $\mathscr{F}$），あるいは $\mathscr{F}$**-適合**であるとは，任意の $t \in I$ に対して，X_t が $\mathfrak{F}_t$-可測であることをいう．
(2) X が $\mathscr{F}$ **に関して発展的可測**（progressively measurable with respect to $\mathscr{F}$）である，あるいは $\mathscr{F}$**-発展的可測**であるとは，任意の $t \in I$ に対して，$(-\infty, t] \times \Omega$ から E への写像 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ が $(\mathfrak{B}_t \otimes \mathfrak{F}_t)$-可測であることをいう．

明らかに，確率過程 X が $\mathscr{F}$-発展的可測ならば，$\mathscr{F}$-適合でもある．

命題 2.6 I を全順序集合，τ を I の左順序位相または右順序位相とし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の完全正規空間 E に値をとる τ-連続な確率過程とする．このとき，X が $\mathscr{F}$-適合であることと，$\mathscr{F}$-発展的可測であることとは同値である．

証明 I を，$((-\infty, t])_{t\in I}$ が生成する σ-代数によって可測空間とみなし，これが誘導する $(-\infty, t]$ 上の σ-代数を $\mathfrak{B}_t$ と書く．X が $\mathscr{F}$-適合であるとして，任意の $t \in I$ に対して，$(-\infty, t] \times \Omega$ から E への写像 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ が $(\mathfrak{B}_t \otimes \mathfrak{F}_t)$-可測であることを示す．

I の部分集合を，τ が誘導する相対位相によって位相空間とみなす．いずれの τ に関しても $(-\infty, t)$ は I の開集合だから，I が可分であることより $(-\infty, t)$ も可分であり，したがって，これに 1 点を付け加えた $(-\infty, t]$ も可分である．そこで，$(-\infty, t]$ の有限部分集合の増加列 $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ であって，各 D_k が t を含み，$D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ が $(-\infty, t]$ において稠密となるものをとる．各 D_k の元を昇順に列挙して，$t_{k,0}, \ldots, t_{k,p_k} = t$ とする．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，写像 f_k, $g_k \colon (-\infty, t] \times \Omega \to E$ を

$$f_n(s, \omega) = \sum_{i=0}^{p_k - 1} 1_{[t_{k,i}, t_{k,i+1})}(s) X_{t_{k,i}}(\omega) + 1_{\{t_{k,p_k}\}}(s) X_{t_{k,p_k}}(\omega),$$

$$g_n(s, \omega) = \sum_{i=0}^{p_k - 1} 1_{[t_{k,i}, t_{k,i+1})}(s) X_{t_{k,i+1}}(\omega) + 1_{\{t_{k,p_k}\}}(s) X_{t_{k,p_k}}(\omega)$$

と定めると，これらは $(\mathfrak{B}_t \otimes \mathfrak{F}_t)$-可測である．さらに，$D$ の稠密性と X の連続性より，τ が左順序位相ならば $k \to \infty$ のとき $f_k(s,\omega) \to X_s(\omega)$ であり，τ が右順序位相ならば $k \to \infty$ のとき $g_k(s,\omega) \to X_s(\omega)$ である．よって，$(-\infty, t] \times \Omega$ から E への写像 $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ は，$(\mathfrak{B}_t \otimes \mathfrak{F}_t)$-可測である． □

2.2 停止時刻

定義 2.7（停止時刻） $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathscr{F}$ **に関する停止時刻**（stopping time with respect to $\mathscr{F}$），あるいは $\mathscr{F}$**-停止時刻**とは，写像 $T\colon \Omega \to I$ であって，任意の $t \in I$ に対して $\{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ を満たすものをいう．

注意 2.8 I を全順序集合とし，これに新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．このとき，フィルトレーション $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$ に関する停止時刻の定義は，$\mathfrak{F}_\infty$ によらず，$(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ だけから定まる．したがって，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とするとき，「$\overline{I}$ 値 $\mathscr{F}$-停止時刻」が曖昧さなく定義される．

命題 2.9 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．

(1) Ω から I への定値写像は，$\mathscr{F}$-停止時刻である．
(2) I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻の空でない可算族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について，各 $\omega \in \Omega$ に対して $T_{\max}(\omega) = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda(\omega) \in I$ が存在するとき，$T_{\max}$ も $\mathscr{F}$-停止時刻である．
(3) I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻の空でない有限族 $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$T_{\min} = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ も $\mathscr{F}$-停止時刻である．

証明 (1) 定義から明らかである．
(2) 各 $t \in I$ に対して $\{T_{\max} \le t\} = \bigcap_{\lambda\in\lambda}\{T_\lambda \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから，$T_{\max}$ は $\mathscr{F}$-停止時刻である．
(3) 各 $t \in I$ に対して $\{T_{\min} \le t\} = \bigcup_{\lambda\in\lambda}\{T_\lambda \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから（Λ が有限であることを用いた），$T_{\min}$ は $\mathscr{F}$-停止時刻である． □

次の命題は，本稿では用いないが，停止時刻を構成するためには有用である．

命題 2.10 I を $\mathbb{R}_{\ge 0}$ の閉集合とし，I に新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ を位相空間 E に値をとる $\mathscr{F}$-適合かつ連続な確率過程とする．F を E の閉集合であって，E 上のある実連続関数の零点集合として書ける[*1] 写像 $T_F\colon \Omega \to \overline{I}$ を

$$T_F = \inf\{t \in I \mid X_t \in F\}$$

と定めると，T_F は $\mathscr{F}$-停止時刻である．

証明 連続関数 $f\colon E \to [0,1]$ であって，$F = f^{-1}(\{0\})$ を満たすものをとる．$t \in I$ とする．$\omega \in \Omega$ を固定するとき，$T_F(\omega) \le t$ であるための必要十分条件は，関数 $s \mapsto f(X_s(\omega))$ が $I \cap [0,t]$ 上で最小値 0 をとることである．ここで，関数 $s \mapsto f(X_s(\omega))$ は連続だから，コンパクト集合 $I \cap [0,t]$ 上で必ず最小値をとる．したがって，この条件は，$\inf_{s\in I\cap[0,t]} f(X_s(\omega)) = 0$ といいかえられる．さらに，ふたたび連続性より，$I \cap [0,t]$

[*1] E が完全正規空間（距離化可能空間はこれに含まれる）ならば，すべての閉集合がこの性質を満たす．

をその可算稠密部分集合 D_t で置き換えても，条件は変わらない．よって，

$$\{T_F \le t\} = \left\{\inf_{s \in D_t} f(X_s) = 0\right\} \in \mathfrak{F}_t$$

である．これが任意の $t \in I$ に対して成り立つから，T_F は $\mathscr{F}$-停止時刻である． □

定義 2.11（停止時刻に伴う σ-代数） $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．I **値 $\mathscr{F}$-停止時刻 T に伴う σ-代数** $\mathfrak{F}_T$ を，

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{F} \mid \text{任意の } t \in I \text{ に対して } A \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t\}$$

と定める．

注意 2.12 I を全順序集合とし，これに新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in \overline{I}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とするとき，$\overline{I}$ 値 $\mathscr{F}$-停止時刻（注意 2.8 で述べたように，この定義は，$\mathfrak{F}_\infty$ によらない）T に伴う σ-代数 $\mathfrak{F}_T$ の定義は，$(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ だけでなく，$\mathfrak{F}_\infty$ にもよる．

命題 2.13 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．

(1) I を，$((-\infty, t])_{t \in I}$ が生成する σ-代数によって可測空間とみなす．このとき，I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻 T は，$\mathfrak{F}_T$-可測である．

(2) I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻 S, T について，$S \le T$ ならば，$\mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$ である．

(3) I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻の空でない有限族 $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について，$T_{\min} = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ と置くと，$\mathfrak{F}_{T_{\min}} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ である．

(4) I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻 S, T について，$\{S \le T\}$, $\{S = T\}$, $\{S \ge T\}$ は $\mathfrak{F}_{S \wedge T}$ に属する（命題 2.9 (3) より，$S \wedge T$ も $\mathscr{F}$-停止時刻であることに注意する）．

証明 (1) $s \in I$ とすると，任意の $t \in I$ に対して $\{T \le s\} \cap \{T \le t\} = \{T \le s \wedge t\} \in \mathfrak{F}_{s \wedge t} \subseteq \mathfrak{F}_t$ だから，$\{T \le s\}$ は $\mathfrak{F}_T$-可測である．よって，T は $\mathfrak{F}_T$-可測である．

(2) 定義から明らかである．

(3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$T_{\min} \le T_\lambda$ だから，(1) より $\mathfrak{F}_{T_{\min}} \subseteq \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ である．よって，$\mathfrak{F}_{T_{\min}} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ である．一方で，$A \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ とすると，任意の $t \in I$ に対して

$$A \cap \{T_{\min} \le t\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap \{T_\lambda \le t\}) \in \mathfrak{F}_t$$

だから，$A \in \mathfrak{F}_{T_{\min}}$ である．よって，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda} \subseteq \mathfrak{F}_{T_{\min}}$ である．これで，$\mathfrak{F}_{T_{\min}} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_{T_\lambda}$ が示された．

(4) $t \in I$ とすると，容易に確かめられるように，$S \wedge t$ と $T \wedge t$ は $\mathfrak{F}_t$-可測である．したがって，

$$\begin{aligned}
\{S \le T\} \cap \{S \le t\} &= \{S \le t\} \cap \{S \wedge t \le T \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t, \\
\{S \le T\} \cap \{T \le t\} &= \{S \le t\} \cap \{T \le t\} \cap \{S \wedge t \le T \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t
\end{aligned}$$

である．これが任意の $t \in I$ に対して成り立つから，$\{S \le T\} \in \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_{S \wedge T}$ である（(2) を用いた）．

同様にして，$\{S \ge T\} \in \mathfrak{F}_{S \wedge T}$ がわかり，$\{S = T\} = \{S \le T\} \cap \{S \ge T\} \in \mathfrak{F}_{S \wedge T}$ を得る． □

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とするとき，可測空間 E に値をとる確率過程 $X = (X_t)_{t\in I}$ と写像 $T\colon \Omega \to I$ に対して，写像 $X_T\colon \Omega \to E$ を，

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

と定める．本稿の以下の部分では，この記号を断りなく用いる．

命題 2.14 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を可測空間 E に値をとる $\mathscr{F}$-発展的可測な確率過程とし，T を I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻とすると，写像 $X_T\colon \Omega \to E$ は $\mathfrak{F}_T$-可測である．

証明 $A \subseteq E$ を可測集合として，$\{X_T \in A\} \in \mathfrak{F}_T$ を示したい．$t \in I$ を任意にとり，$\Omega_t = \{T \le t\}$ を $\mathfrak{F}_t$ の制限によって可測空間とみなす．写像 $\Phi_t\colon \Omega_t \to \Omega_t \times (-\infty, t]$ を $\Phi_t(\omega) = (\omega, T(\omega))$ と定めると，停止時刻の定義より，Φ_t は可測である．また，写像 $\Psi_t\colon \{T \le t\} \times (-\infty, t] \to E$ を $\Psi_t(\omega, s) = X_s(\omega)$ と定めると，X が $\mathscr{F}$-発展的可測であることより，Ψ_t は可測である．よって，

$$\{X_T \in A\} \cap \{T \le t\} = \Phi_t^{-1}(\Psi_t^{-1}(A)) \in \mathfrak{F}_t$$

である．これが任意の $t \in T$ に対して成り立つから，X_T は $\mathfrak{F}_T$-可測である． □

3 マルチンゲール

3.1 マルチンゲールの定義と基本的性質

定義 3.1（マルチンゲール，劣・優マルチンゲール） $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合な実確率過程とする．

(1) X が $\mathscr{F}$ **に関するマルチンゲール**（martingale with respect to $\mathscr{F}$），あるいは $\mathscr{F}$**-マルチンゲール**であるとは，すべての X_t が可積分であり，$s \le t$ を満たす任意の $s, t \in I$ に対して

$$X_s = E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$$

が成り立つことをいう．

(2) X が $\mathscr{F}$ **に関する劣マルチンゲール**（submartingale with respect to $\mathscr{F}$），あるいは $\mathscr{F}$**-劣マルチンゲール**であるとは，すべての X_t が可積分であり，$s \le t$ を満たす任意の $s, t \in I$ に対して

$$X_s \le E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$$

が成り立つことをいう．

(3) X が $\mathscr{F}$ **に関する優マルチンゲール**（supermartingale with respect to $\mathscr{F}$），あるいは $\mathscr{F}$**-優マルチンゲール**であるとは，すべての X_t が可積分であり，$s \le t$ を満たす任意の $s, t \in I$ に対して

$$X_s \ge E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$$

が成り立つことをいう．

命題 3.2 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合な実確率過程，$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とし，実確率過程 $\phi(X) = (\phi(X_t))_{t\in I}$ を考える．

(1) X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールであり，すべての $\phi(X_t)$ が可積分ならば，$\phi(X)$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．

(2) ϕ が単調増加であるとする．このとき，X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであり，すべての $\phi(X_t)$ が可積分ならば，$\phi(X)$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．

証明 (1) または (2) の仮定の下で，$s \le t$ を満たす任意の $s,\, t \in I$ に対して，

$$\phi(X_s) \le \phi(E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]) \le E[\phi(X_t) \mid \mathfrak{F}_s]$$

である（条件付き期待値に対する Jensen の不等式（命題 1.10）を用いた）．よって，$\phi(X)$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである． □

系 3.3 $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合な実確率過程とする．

(1) X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$(X-a)^+ = ((X_t-a)^+)_{t\in I}$ も $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．

(2) X が $\mathscr{F}$-優マルチンゲールならば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-(X-a)^- = (-(X_t-a)^-)_{t\in I}$ も $\mathscr{F}$-優マルチンゲールである．

証明 (1) 命題 3.2 (2) で $\phi(x) = (x-a)^+$ としたものである．

(2) X が $\mathscr{F}$-優マルチンゲールならば，$-X$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから，(1) より $(-X+a)^+ = (X-a)^-$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．よって，$-(X-a)^-$ は $\mathscr{F}$-優マルチンゲールである． □

系 3.4 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ が $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであり，すべての X_t が p 乗可積分（$p \in [1,\infty)$）ならば，$|X|^p = (|X_t|^p)_{t\in I}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．

証明 命題 3.2 で $\phi(x) = |x|^p$ としたものである． □

命題 3.5 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ が $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，$p \in [1,\infty)$ に対して，$\|X_t\|_p$ は t に関して増加である．

証明 $s \le t$ を満たす $s,\, t \in I$ を任意にとる．X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば $X_s = E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$ であり，X 非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば $0 \le X_s \le E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]$ である．いずれにしても，

$$\|X_s\|_p \le \|E[X_t \mid \mathfrak{F}_s]\|_p \le \|X_t\|_p$$

が成り立つ（第二の不等号は，$\|X_t\|_p = \infty$ ならば明らかであり，$\|X_t\|_p < \infty$ ならば系 1.11 から従う）． □

命題 3.6 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールまたは $\mathscr{F}$-優マルチンゲールとすると，$t_0 \le t_1$ を満たす任意の $t_0,\, t_1 \in I$ に対して，$(X_t)_{t\in[t_0,t_1]}$ は L^1 有界である．

証明 優マルチンゲール X については，$-X$ を考えれば，劣マルチンゲールの場合に帰着する．そこで，以下では，X が劣マルチンゲールである場合を考える．

X と $X^+ = (X_t^+)_{t\in I}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから（系 3.3 (1)），$E[X_t]$ と $E[X_t^+]$ は t に関して増加であ

る．よって，任意の $t \in [t_0, t_1]$ に対して，

$$E[|X_t|] = 2E[X_t^+] - E[X_t] \leq 2E[X_{t_1}] - E[X_{t_0}] < \infty$$

である． □

命題 3.7 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとすると，任意の $t_0 \in I$ に対して，$(X_t)_{t\in(-\infty,t_0]}$ は一様可積分である．

証明 任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して，X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば $X_t = E[X_{t_0} \mid \mathfrak{F}_t]$ であり，X が非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば $0 \leq X_t \leq E[X_{t_0} \mid \mathfrak{F}_t]$ である．$(E[X_{t_0} \mid \mathfrak{F}_t])_{t\in(-\infty,t_0]}$ は一様可積分だから（命題 1.13），いずれにしても，$(X_t)_{t\in(-\infty,t_0]}$ は一様可積分である． □

定義 3.8（独立増分過程） $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathscr{F}$-適合な実確率過程 $X = (X_t)_{t\in I}$ が $\mathscr{F}$ **に関する独立増分過程**（independent increments process with respect to $\mathscr{F}$）である，あるいは **$\mathscr{F}$-独立増分過程**であるとは，$s \leq t$ を満たす任意の $s, t \in I$ に対して，$X_t - X_s$ が $\mathfrak{F}_s$ と独立であることをいう．

命題 3.9 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-独立増分過程とする．

(1) すべての X_t が可積分であり，$E[X_t]$ が $t \in I$ によらず一定ならば，X は $\mathscr{F}$-マルチンゲールである．
(2) すべての X_t が可積分であり，$E[X_t]$ が $t \in I$ に関して増加ならば，X は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．
(3) すべての X_t が可積分であり，$E[X_t]$ が $t \in I$ に関して減少ならば，X は $\mathscr{F}$-優マルチンゲールである．

証明 すべての X_t が可積分であるとする．このとき，独立増分性より，$s \leq t$ を満たす任意の $s, t \in I$ に対して，

$$E[X_t \mid \mathfrak{F}_s] - X_s = E[X_t - X_s \mid \mathfrak{F}_s] = E[X_t - X_s] = E[X_t] - E[X_s]$$

である（命題 1.6 (2)）．主張はここから従う． □

3.2 離散時間マルチンゲールの基本的性質

定義 3.10（予測可能な確率過程） I を $\{0, \ldots, n\}$（$n \in \mathbb{N}$）または $\mathbb{N}$ とし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．確率過程 $X = (X_t)_{t\in I}$ が $\mathscr{F}$ **に関して予測可能**（predictable with respect to $\mathscr{F}$）である，あるいは **$\mathscr{F}$-予測可能**であるとは，$X_0 = 0$ であり，かつ任意の $t \in I \setminus \{0\}$ に対して X_t が $\mathfrak{F}_{t-1}$-可測であることをいう．

定理 3.11（Doob 分解定理） I を $\{0, \ldots, n\}$（$n \in \mathbb{N}$）または $\mathbb{N}$ とし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathscr{F}$-適合かつ可積分な実確率過程 $X = (X_t)_{t\in I}$ に対して，$\mathscr{F}$-マルチンゲール $M = (M_t)_{t\in I}$ と $\mathscr{F}$-予測可能な実確率過程 $A = (A_t)_{t\in I}$ であって，任意の $t \in I$ に対して

$$X_t = M_t + A_t$$

を満たすものが，識別不能性を除いて一意に存在する．さらに，この M と A（の識別不能性に関する同値

類）は,

$$M_t = X_0 + \sum_{s=0}^{t-1}(X_{s+1} - E[X_{s+1} \mid \mathfrak{F}_s]), \qquad A_t = \sum_{s=0}^{t-1} E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s]$$

で与えられる．

定理 3.11 の分解 $X = M + A$ を，X の **Doob 分解**（Doob decomposition）という．

証明 M と A が主張の条件を満たす X の分解を与えるとすると，最大元を除く各 $s \in I$ に対して

$$E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s] = E[M_{s+1} - M_s \mid \mathfrak{F}_s] + E[A_{s+1} - A_s \mid \mathfrak{F}_s] = A_{s+1} - A_s$$

だから，任意の $t \in I$ に対して

$$A_t = \sum_{s=0}^{t-1} E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s]$$

および

$$\begin{aligned} M_t &= X_t - A_t \\ &= X_0 + \sum_{s=0}^{t-1}((X_{s+1} - X_s) - E[X_{s+1} - X_s \mid \mathfrak{F}_s]) \\ &= X_0 + \sum_{s=0}^{t-1}(X_{s+1} - E[X_{s+1} \mid \mathfrak{F}_s]) \end{aligned}$$

が成り立つ．逆に，M と A をこのように定めれば，主張の条件は明らかに満たされる． □

注意 3.12 Doob 分解定理（定理 3.11）の状況で，X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであるための必要十分条件は，A がほとんど確実に増加であることであり，$\mathscr{F}$-優マルチンゲールであるための必要十分条件は，A がほとんど確実に減少であることである．

命題 3.13 I を $\{0, \dots, n\}$（$n \in \mathbb{N}$）または $\mathbb{N}$ とし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t \in I}$ を $\mathscr{F}$-適合な実確率過程，各 $t \in I$ に対して H_t を $\mathfrak{F}_t$-可測な有界実確率変数，Y_0 を $\mathfrak{F}_0$-可測かつ可積分な実確率変数として，実確率過程 $Y = (Y_t)_{t \in I}$ を

$$Y_t = Y_0 + \sum_{s=0}^{t-1} H_s(X_{s+1} - X_s)$$

と定める．

(1) X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば，Y も $\mathscr{F}$-マルチンゲールである．
(2) X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであり，任意の $t \in I$ に対して $H_t \geq 0$ ならば，Y も $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．
(3) X が $\mathscr{F}$-優マルチンゲールであり，任意の $t \in I$ に対して $H_t \geq 0$ ならば，Y も $\mathscr{F}$-優マルチンゲールである．

証明 定義から明らかに，Y_t は $\mathfrak{F}_t$-可測である．また，最大元を除く各 $t \in I$ に対して

$$E[Y_{t+1} - Y_t \mid \mathfrak{F}_t] = E[H_t(X_{t+1} - X_t) \mid \mathfrak{F}_t] = H_t E[X_{t+1} - X_t \mid \mathfrak{F}_t]$$

であり，上式の最右辺は，(1) の場合 0，(2) の場合 0 以上，(3) の場合 0 以下となる．すなわち，それぞれの場合，Y は $\mathscr{F}$-マルチンゲール，$\mathscr{F}$-劣マルチンゲール，$\mathscr{F}$-優マルチンゲールである． □

系 3.14　I を $\{0,\dots,n\}$（$n\in\mathbb{N}$）または $\mathbb{N}$ とし，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X=(X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合な実確率過程，T を $\bar{I}=I\sqcup\{\infty\}$ 値 $\mathscr{F}$-停止時刻とし，実確率過程 $X^T=(X_{t\wedge T})_{t\in I}$ を考える．

(1) X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば，X^T も $\mathscr{F}$-マルチンゲールである．
(2) X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，X^T も $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．
(3) X が $\mathscr{F}$-優マルチンゲールならば，X^T も $\mathscr{F}$-優マルチンゲールである．

証明　命題 3.13 で $H_t=1_{t<T}$ としたものである． □

3.3　マルチンゲールに関する不等式

補題 3.15　$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,n\}},P)$（$n\in\mathbb{N}$）をフィルトレーション付き確率空間とする．$\mathscr{F}$-劣マルチンゲール $X=(X_t)_{t\in\{0,\dots,n\}}$ と $\{0,\dots,n\}$ 値 $\mathscr{F}$-停止時刻 T に対して，

$$E[X_0]\le E[X_T]\le E[X_n]$$

である．

証明　$X^T=(X_{t\wedge T})_{t\in\{0,\dots,n\}}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから（系 3.14 (2)），

$$E[X_0]=E[X_{0\wedge T}]\le E[X_{n\wedge T}]=E[X_T]$$

である．また，$X_T=\sum_{t=0}^{n}1_{T=t}X_t$ であり，$\{T=t\}\in\mathfrak{F}_t$ だから，

$$\begin{aligned}E[X_T]&=\sum_{t=0}^{n}E[1_{T=t}X_t]\\&\le\sum_{t=0}^{n}E[1_{T=t}E[X_n\mid\mathfrak{F}_t]]\\&\le\sum_{t=0}^{n}E[1_{T=t}X_n]\\&=E[X_n]\end{aligned}$$

である． □

注意 3.16　補題 3.15 は，後に示す任意停止定理（定理 3.32）の系としても得られる．ここでは，極大不等式（命題 3.17）の証明に必要な部分だけを示した．

I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相とし，$X=(X_t)_{t\in I}$ を τ-連続な実確率過程とする．$X^*=\sup_{t\in I}|X_t|$ と置く．τ-稠密な可算部分集合 $D\subseteq I$ をとると，X の X の τ-連続性より $X^*=\sup_{t\in D}|X_t|$ だから，X^* は $\overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ 値確率変数である．以下では，このことに注意する．

命題 3.17（極大不等式）　I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相とし，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X=(X_t)_{t\in I}$ を τ-連続な $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとし，$X^*=$

$\sup_{t\in I}|X_t|$ と置くと，任意の $\lambda > 0$ に対して，

$$P(X^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\left(2\lim_{t\to\infty} E[X_t^+] - \lim_{t\to-\infty} E[X_t]\right)$$

である[*2].

証明 (I) I が有限である場合に，主張を示す．一般性を失わず，$I = \{0, \ldots, n\}$ と仮定する．

まず，$A = \{\max_{t\in\{0,\ldots,n\}} X_t \geq \lambda\}$ と置き，$P(A)$ を評価する．写像 $S\colon \varOmega \to \{0, \ldots, n\}$ を

$$S = \begin{cases} \min\{t \in \{0, \ldots, n\} \mid X_t \geq \lambda\} & (\text{on } A) \\ n & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，S は $\mathscr{F}$-停止時刻だから，補題 3.15 より

$$\begin{aligned} E[X_n] &\geq E[X_S] \\ &= E[1_A X_S] + E[1_{\varOmega\setminus A} X_S] \\ &\geq \lambda P(A) + E[1_{\varOmega\setminus A} X_n] \end{aligned}$$

であり，これを移項すれば

$$P(A) \leq \frac{1}{\lambda}(E[X_n] - E[1_{\varOmega\setminus A} X_n]) = \frac{1}{\lambda}E[1_A X_n] \leq \frac{1}{\lambda}E[X_n^+] \tag{$*$}$$

を得る．

次に，$B = \{\min_{t\in\{0,\ldots,n\}} X_t \leq -\lambda\}$ と置き，$P(B)$ を評価する．写像 $T\colon \varOmega \to \{0, \ldots, n\}$ を

$$T = \begin{cases} \min\{t \in \{0, \ldots, n\} \mid X_t \leq -\lambda\} & (\text{on } B) \\ n & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，T は $\mathscr{F}$-停止時刻だから，補題 3.15 より

$$\begin{aligned} E[X_0] &\leq E[X_T] \\ &= E[1_B X_T] + E[1_{\varOmega\setminus B} X_T] \\ &\leq -\lambda P(B) + E[1_{\varOmega\setminus B} X_n] \end{aligned}$$

であり，これを移項すれば

$$P(B) \leq \frac{1}{\lambda}(E[1_{\varOmega\setminus B} X_n] - E[X_0]) \leq \frac{1}{\lambda}(E[X_n^+] - E[X_0]) \tag{$**$}$$

を得る．

($*$) と ($**$) より，

$$P(X^* \geq \lambda) \leq P(A) + P(B) \leq \frac{1}{\lambda}(2E[X_n^+] - E[X_0])$$

である．

(II) I が可算である場合に，主張を示す．

[*2] $X^+ = (X_t^+)_{t\in I}$ と $X = (X_t)_{t\in I}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから（系 3.3 (1)），$E[X_t^+]$ と $E[X_t]$ は t に関して増加であり，したがって，極限 $\lim_{t\to\infty} E[X_t^+] \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ と $\lim_{t\to-\infty} E[X_t] \in \overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}$ が存在する．なお，I が最大元をもつ場合には，$\lim_{t\to\infty} E[X_t^+]$ は $E[X_{\max I}^+]$ とみなし，I が最小元をもつ場合には，$\lim_{t\to-\infty} E[X_t]$ は $E[X_{\min I}]$ とみなす．

I を有限部分集合の増加列 $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の合併として表し，各 $k\in\mathbb{N}$ に対して $X^*_{J_k}=\max_{t\in J_k}|X_t|$ と置く．すると，$k\to\infty$ のとき $X^*_{J_k}$ は増加しながら X^* に各点収束するから，$\{X^*\geq\lambda\}\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{X^*_{J_k}\geq\lambda\}$ である．よって，(I) より，

$$\begin{aligned}
P(X^*\geq\lambda)&\leq\lim_{k\to\infty}P(X^*_{J_k}\leq\lambda)\\
&\leq\frac{1}{\lambda}\lim_{k\to\infty}\bigl(2E[X^+_{\max J_k}]-E[X_{\min J_k}]\bigr)\\
&=\frac{1}{\lambda}\left(2\lim_{b\to\infty}E[X^+_t]-\lim_{t\to-\infty}E[X_t]\right)
\end{aligned}$$

である．

(III)　一般の場合に，主張を示す．

τ-稠密な可算部分集合 $D\subseteq I$ をとると，X の τ-連続性より，$X^*=\sup_{t\in D}|X_t|$ である．よって，(II) と合わせて，

$$\begin{aligned}
P(X^*\geq\lambda)&=P\left(\sup_{t\in D}|X_t|\geq\lambda\right)\\
&\leq\frac{1}{\lambda}\left(2\lim_{t\in D,\,t\to\infty}E[X^+_t]-\lim_{t\in D,\,t\to-\infty}E[X_t]\right)\\
&=\frac{1}{\lambda}\left(2\lim_{t\to\infty}E[X^+_t]-\lim_{t\to-\infty}E[X_t]\right)
\end{aligned}$$

を得る．　□

補題 3.18　$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,n\}},P)$（$n\in\mathbb{N}$）をフィルトレーション付き確率空間とする．$X=(X_t)_{t\in\{0,\dots,n\}}$ を非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとし，$X^*_n=\max_{t\in\{0,\dots,n\}}X_t$ と置く．$f\colon\mathbb{R}_{\geq0}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ を初期値 0 の連続増加関数とする．このとき，

$$E\left[\int_0^{X^*_n}t\,df(t)\right]\leq E[X_nf(X^*_n)]$$

である．

証明　一般性を失わず，$X_0=0$ と仮定する．各 $t\in\{1,\dots,n\}$ に対して，$X^*_t=X_t$ ならば $\int_{X^*_{t-1}}^{X^*_t}t\,df(t)\leq X^*_t(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))=X_t(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))$ であり，そうでなければ $X^*_{t-1}=X^*_t$ より $\int_{X^*_{t-1}}^{X^*_t}t\,df(t)=0$ である．いずれにしても

$$\int_{X^*_{t-1}}^{X^*_t}t\,df(t)\leq X_t(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))$$

だから，

$$E\left[\int_{X^*_{t-1}}^{X^*_t}t\,df(t)\right]\leq E[X_t(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))]\tag{$*$}$$

である．一方で，X は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから，

$$\begin{aligned}
E[X_t(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))]&\leq E[E[X_n\mid\mathfrak{F}_t](f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))]\\
&=E[E[X_n(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))\mid\mathfrak{F}_t]]\\
&=E[X_n(f(X^*_t)-f(X^*_{t-1}))]
\end{aligned}\tag{$**$}$$

である．以上 ($*$) と ($**$) より，

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^{X_n^*} t\,df(t)\right] &= \sum_{t=1}^{n} E\left[\int_{X_{t-1}^*}^{X_t^*} t\,df(t)\right] \\ &\leq \sum_{t=1}^{n} E[X_n(f(X_t^*) - f(X_{t-1}^*))] \\ &= E[X_n f(X_t^*)] \end{aligned}$$

を得る． □

命題 3.19（Doob の不等式） I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相とし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を τ-連続な「$\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲール」とし，$X^* = \sup_{t\in I}|X_t|$ と置くと，$p \in (1, \infty)$ に対して，

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \lim_{t\to\infty} \|X_t\|_p$$

である[*3]．

証明 (I) I が有限である場合に，主張を示す．一般性を失わず，$I = \{0, \dots, n\}$ と仮定する．

X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールでも非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールでも，$|X| = (|X_t|)_{t\in I}$ は非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである（系 3.4）．そこで，$|X|$ に対して補題 3.18 を適用し，$f(x) = x^{p-1}$ とすれば，

$$\frac{p-1}{p}\|X^*\|_p^p \leq E[|X_n|(X^*)^{p-1}]$$

を得る．上式の左辺は，Hölder の不等式を用いて

$$E[|X_n|(X^*)^{p-1}] \leq \|X_n\|_p \|(X^*)^{p-1}\|_{p/(p-1)} = \|X_n\|_p \|X^*\|_p^{p-1}$$

と評価できるから，

$$\frac{p-1}{p}\|X^*\|_p^p \leq \|X_n\|_p \|X^*\|_p^{p-1}$$

である．上式の両辺を $\|X^*\|_p^{p-1}$ で割り，左辺の係数を右辺に移項すれば，主張の不等式を得る．

(II) I が可算である場合に，主張を示す．

I を有限部分集合の増加列 $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の合併として表し，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_{J_k}^* = \max_{t\in J_k}|X_t|$ と置く．すると，$k \to \infty$ のとき $X_{J_k}^*$ は増加しながら X^* に各点収束するから，単調収束定理と (I) より，

$$\begin{aligned} \|X^*\|_p &= \lim_{k\to\infty} \|X_{J_k}^*\|_p \\ &\leq \frac{p}{p-1} \limsup_{k\to\infty} \|X_{\max J_k}\|_p \\ &\leq \frac{p}{p-1} \limsup_{t\to\infty} \|X_t\|_p \end{aligned}$$

である．

(III) 一般の場合に，主張を示す．

[*3] $\|X_t\|_p$ は t に関して増加だから（命題 3.5），極限 $\lim_{t\to\infty}\|X_t\|_p \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ が存在する．なお，I が最大元をもつ場合には，$\limsup_{t\to\infty}\|X_t\|_p$ は $\|X_{\max I}\|_p$ とみなす．

τ-稠密な可算部分集合 $D \subseteq I$ をとると，X の τ-連続性より，$X^* = \sup_{t\in D}|X_t|$ である．よって，(II) と合わせて，

$$
\begin{aligned}
\|X^*\|_p &= \left\|\sup_{t\in D}|X_t|\right\|_p \\
&\leq \frac{p}{p-1}\lim_{t\in D,\, t\to\infty}\|X_t\|_p \\
&= \frac{p}{p-1}\lim_{t\to\infty}\|X_t\|_p
\end{aligned}
$$

を得る． □

3.4 マルチンゲール収束定理

$a, b \in \mathbb{R}$ かつ $a < b$ とするとき，全順序集合 I で添字付けられた実数列 $(x_t)_{t\in I}$ の a から b への**上渡回数**（upcrossing number）$U_{a,b}((x_t)_{t\in I}) \in \overline{\mathbb{N}}$ を，条件

> I の元の狭義増加列 $s_1 < t_1 < \cdots < s_k < t_k$ であって，任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して $x_{s_i} \leq a$ かつ $x_{t_i} \geq b$ を満たすものが存在する

を満たす $k \in \mathbb{N}$ の上限と定義する．

補題 3.20 I を空でない全順序集合とし，$(x_t)_{t\in I}$ を実数列とする．$\mathbb{R}$ のある稠密部分集合 D が存在して，$a < b$ を満たす任意の $a, b \in D$ に対して，$U_{a,b}((x_t)_{t\in I}) < \infty$ であるとする．すると，$t \to \infty$ のとき，x_t は $\overline{\mathbb{R}}$ において収束する．

証明 $t \to \infty$ のとき x_t が $\overline{\mathbb{R}}$ において収束しないとすると，$\liminf_{t\to\infty} x_t < \limsup_{t\to\infty} x_t$ である．そこで，$D \subseteq \mathbb{R}$ を稠密部分集合とすると，$\liminf_{t\to\infty} x_t < a < b < \limsup_{t\to\infty} x_t$ を満たす $a, b \in D$ がとれる．この a, b について，I の元の狭義増加列 $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots$ であって，任意の i に対して $x_{s_i} \leq a$ かつ $x_{t_i} \geq b$ を満たすものがとれるから，$U_{a,b}((x_i)_{i\in I}) = \infty$ となる．対偶をとれば，主張が従う． □

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし，$X = (X_t)_{t\in I}$ を空でない可算な全順序集合 I で添字付けられた実確率過程とすると，上渡回数を与える写像 $U_{a,b}((X_t)_{t\in I})\colon \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ が考えられる．I を有限部分集合の増加列 $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の合併として表すと，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $U_{a,b}((X_t)_{t\in J_k})$ は $\mathfrak{F}$-可測であり，$k \to \infty$ のとき $U_{a,b}((X_t)_{t\in J_k})$ は増加しながら $U_{a,b}((X_t)_{t\in I})$ に各点収束するから，$U_{a,b}((X_t)_{t\in I})$ も $\mathfrak{F}$-可測である．すなわち，$U_{a,b}((X_t)_{t\in I})$ は $\overline{\mathbb{N}}$ 値確率変数である．

補題 3.21（上渡回数不等式） I を空でない可算な全順序集合とし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとすると，$a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$E[U_{a,b}((X_t)_{t\in I})] \leq \frac{1}{b-a}\left(\lim_{t\to\infty} E[(X_t - a)^+] - \lim_{t\to-\infty} E[(X_t - a)^+]\right)$$

である[*4]．

---

*4 $(X - a)^+ = ((X_t - a)^+)_{t\in I}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから（系 3.3 (1)），$E[(X_t - a)^+]$ は t に関して増加であり，したがって，極限 $\lim_{t\to\infty} E[(X_t - a)^+] \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ と $\lim_{t\to-\infty} E[(X_t - a)^+] \in \overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}$ が存在する．なお，I が最大元をもつ場

証明 (I) I が有限である場合に，主張を示す．一般性を失わず，$I = \{0, \ldots, n\}$ と仮定する．

$Y_t = (X_t - a)^+/(b-a)$ と置くと，$Y = (Y_t)_{t \in \{0,\ldots,n\}}$ も $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである（系 3.3）．$U_{a,b}(X_0, \ldots, X_n) = U_{0,1}(Y_0, \ldots, Y_n)$ だから，示すべき不等式は，

$$E[U_{0,1}(Y_0, \ldots, Y_n)] \leq E[Y_n] - E[Y_0]$$

と書き換えられる．以下，これを示す．

写像 $S_i, T_i \colon \Omega \to \{0, \ldots, n\}$（$i \in \mathbb{N}$）を再帰的に

$$\begin{aligned} &S_i = \inf\{t \in \{0, \ldots, n\} \mid t > T_{i-1}\ \text{（}i = 0\text{ のときはこの条件は考えない）かつ } Y_t \leq 1\} \wedge n, \\ &T_i = \inf\{t \in \{0, \ldots, n\} \mid t > S_i \text{ かつ } Y_t \geq 0\} \wedge n \end{aligned}$$

と定めると，容易に確かめられるように，これらは $\mathscr{F}$-停止時刻である．また，各 $t \in \{0, \ldots, n\}$ に対して

$$H_t = \begin{cases} 1 & (t \in \bigcup_{i=0}^{\infty} [S_i, T_i)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると，これは $\bigcup_{i=0}^{\infty}(\{S_i \leq t\} \setminus \{T_i \leq t\}) \in \mathfrak{F}_t$ の定義関数だから，$\mathfrak{F}_t$-可測である．これらを用いて，上渡回数 $U_{0,1}(Y_0, \ldots, Y_n)$ は

$$\begin{aligned} U_{0,1}(Y_0, \ldots, Y_n) &\geq \sum_{i=0}^{\infty} (Y_{T_i} - Y_{S_i}) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} H_t (Y_{t+1} - Y_t) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (Y_{t+1} - Y_t) - \sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t) \\ &= Y_n - Y_0 - \sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t) \end{aligned}$$

と評価でき，この両辺の期待値をとれば，

$$E[U_{0,1}(Y_0, \ldots, Y_n)] \leq E[Y_n] - E[Y_0] - E\left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t)\right]$$

を得る．一方で，命題 3.13 より $(\sum_{t=0}^{m-1}(1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t))_{m \in \{0,\ldots,n\}}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから，

$$E\left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 - H_t)(Y_{t+1} - Y_t)\right] \geq 0$$

である．これら 2 式から，示すべき不等式を得る．

(II) 一般の場合に，主張を示す．

合には，$\lim_{t \to \infty} E[(X_t - a)^+]$ は $E[(X_{\max I} - a)^+]$ とみなし，I が最小元をもつ場合には，$\lim_{t \to -\infty} E[(X_t - a)^+]$ は $E[(X_{\min I} - a)^+]$ とみなす．

I を有限部分集合の増加列 $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の合併として表すと，$k\to\infty$ のとき $U_{a,b}((X_t)_{t\in J_k})$ は増加しながら $U_{a,b}((X_t)_{t\in I})$ に各点収束するから，単調収束定理と (I) より，

$$\begin{aligned}
E[U_{a,b}((X_t)_{t\in I})] &= \lim_{k\to\infty} E[U_{a,b}((X_t)_{t\in J_k})] \\
&\le \frac{1}{b-a}\lim_{k\to\infty}\left(E[(X_{\max J_k}-a)^+]-E[(X_{\min J_k}-a)^+]\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\lim_{t\to\infty}E[(X_t-a)^+]-\lim_{t\to-\infty}E[(X_t-a)^+]\right)
\end{aligned}$$

である．□

定理 3.22（マルチンゲール収束定理） I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相であって任意の $t\in I$ に対して (t,∞) を開集合とするもの，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty=\bigvee_{t\in I}\mathfrak{F}_t$ と置く．$X=(X_t)_{t\in I}$ を τ-連続な $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとし，$(X_t^+)_{t\in I}$ は L^1 有界であるとする．すると，$t\to\infty$ のとき，X_t はある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に概収束する．

証明 (I) I が可算である場合に，主張を示す．

$a<b$ を満たす任意の $a,\,b\in\mathbb{R}$ に対して，上渡回数不等式（補題 3.21 (2)）と $(X_t^+)_{t\in I}$ の L^1 有界性より

$$\begin{aligned}
E[U_{a,b}((X_t)_{t\in I})] &\le \frac{1}{b-a}\left(\lim_{t\to\infty}E[(X_t-a)^+]-\lim_{t\to-\infty}E[(X_t-a)^+]\right) \\
&\le \frac{1}{b-a}\left(\lim_{t\to\infty}E[X_t^+]+|a|\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

だから，$U_{a,b}((X_t)_{t\in I})$ はほとんど確実に有限である．したがって，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ が，$a<b$ を満たす任意の $a,\,b\in\mathbb{Q}$ に対して $U_{a,b}((X_t(\omega))_{t\in I})<\infty$ を満たす．このような ω については，補題 3.20 より，極限 $\lim_{t\to\infty}X_t(\omega)\in\overline{\mathbb{R}}$ が存在する．よって，$X_\infty=\liminf_{t\to\infty}X_t$ と置けば，X_∞ は $\mathfrak{F}_\infty$-可測であり，$t\to\infty$ のとき X_t は X_∞ に概収束する．

Fatou の補題と $(X_t^+)_{t\in I}$ の L^1 有界性より，

$$E[X_\infty^+]\le\liminf_{t\to\infty}E[X_t^+]<\infty$$

である．また，1 点 $t_0\in I$ を固定して，Fatou の補題，$E[X_t]$ の t に関する増加性，$(X_t^+)_{t\in I}$ の L^1 有界性を順に用いれば，

$$\begin{aligned}
E[X_\infty^-] &\le \liminf_{t\to\infty}E[X_t^-] \\
&= \liminf_{t\to\infty}(E[X_t^+]-E[X_t]) \\
&\le \liminf_{t\to\infty}E[X_t^+]-E[X_{t_0}] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

を得る．よって，$E[|X_\infty|]=E[X_\infty^+]+E[X_\infty^-]<\infty$ だから，X_∞ はほとんど確実に有限であり，X_∞ の値 ∞ を適当な有限値（たとえば 0）で置き換えれば，$X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ となる．

(II) 一般の場合に，主張を示す．

τ-稠密な可算部分集合 $D\subseteq I$ をとる．任意の $t\in I$ に対して，(t,∞) は τ に関する開集合だから，$D\cap(t,\infty)$ は τ が誘導する (t,∞) 上の相対位相に関して稠密である．(I) より，$t\in D$ かつ $t\to\infty$ のとき，X_t はある

$X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に概収束するが，上記の稠密性と X の τ-連続性より，$t \in D$ という制限がなくても同じ概収束がいえる．これで，主張が示された．$\square$

マルチンゲール収束定理（定理 3.22）の状況で，$t \to \infty$ のとき X_t が X に L^1 収束する，あるいは L^p 収束するための必要十分条件を考える．

定理 3.23（L^1 マルチンゲール収束定理） I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相であって任意の $t \in I$ に対して (t, ∞) を開集合とするもの，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t \in I} \mathfrak{F}_t$ と置く．$X = (X_t)_{t \in I}$ を τ-連続な $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとすると，次の 3 条件について，(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) が成り立つ．さらに，X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，3 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t \in I}$ は一様可積分である．
(b) $t \to \infty$ のとき，X_t はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．
(c) $t \to \infty$ のとき，X_t はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^1 収束する．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $(X_t)_{t \in I}$ が一様可積分であるとする．すると特に，$(X_t)_{t \in I}$ は L^1 有界だから，マルチンゲール収束定理（定理 3.22）より，$t \to \infty$ のとき X_t はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ に概収束する．一様可積分性の仮定から，$t \to \infty$ のとき X_t は X_∞ に L^1 収束もする[*5]．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a)（X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである場合） 主張の対偶を示す．$(X_t)_{t \in I}$ が一様可積分でないとすると，ある $\epsilon > 0$ が存在して，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $t_n \in I$ をとり，$E[1_{|X_{t_n}| > n} |X_{t_n}|] \geq \epsilon$ を満たすようにできる．このとき，$(X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ は一様可積分でない．一方で，任意の $s_0 \in I$ に対して $(X_t)_{t \in (-\infty, s_0]}$ は一様可積分だから（命題 3.7），$\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は I において上に非有界である．したがって，必要ならば適当な部分列に移ることで，$n \to \infty$ のとき $t_n \to \infty$ であるとしてよい．$(X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ は一様可積分でないから，$n \to \infty$ のとき X_{t_n} は L^1 収束しない（確率変数列の一様可積分性と収束に関する一般論）．よって，特に，$t \to \infty$ のとき X_t は L^1 収束しない．$\square$

定理 3.24（L^p マルチンゲール収束定理） I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相であって任意の $t \in I$ に対して (t, ∞) を開集合とするもの，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t \in I} \mathfrak{F}_t$ と置く．$X = (X_t)_{t \in I}$ を τ-連続な「$\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲール」とし，すべての X_t は p 乗可積分（$p \in (1, \infty)$）であるとする．このとき，次の 4 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t \in I}$ は L^p 有界である．
(b) $X^* = \sup_{t \in I} |X_t|$ は p 乗可積分である[*6]．
(c) $t \to \infty$ のとき，X_t はある $X_\infty \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^p 収束かつ概収束する．
(d) $t \to \infty$ のとき，X_t はある $X_\infty \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ に L^p 収束する．

[*5] 一般に，実確率変数の一様可積分な列 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が実確率変数 Y に確率収束する（特に，概収束していれば十分である）ならば，Y は可積分であり，$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は Y に L^1 収束もする．
　本文の状況では，添字集合 I は $\mathbb{N}$ に順序同型であるとは限らないが，次のように議論すればよい．仮定より，I は上に共終な可算部分集合をもち，また，L^1 収束は距離が定める（特に，第一可算な）位相に関する収束である．したがって，I において上に共終な任意の増加列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，$n \to \infty$ のとき X_{t_n} が X_∞ に L^1 収束することを示せばよい．このことは，$t \to \infty$ のとき X_t が X_∞ に概収束することと，上記の一般論から従う．
[*6] 3.3 節で注意したように，$X^* = \sup_{t \in I} |X_t|$ は $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 値確率変数である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) $(X_t)_{t\in I}$ が L^p 有界であるとすると，Doob の不等式（命題 3.19）より，

$$\|X^*\|_p \le \frac{p}{p-1}\lim_{t\to\infty}\|X_t\|_p < \infty$$

となる．

(b) $\Longrightarrow$ (c) X^* が p 乗可積分であるとする．このとき，$(X_t)_{t\in I}$ は L^p 有界であり，特に L^1 有界だから，マルチンゲール収束定理（定理 3.22）より，$t\to\infty$ のとき X_t はある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F},P)$ に概収束する．任意の $t\in I$ に対して $|X_t - X_\infty| \le 2X^*$ だから，Lebesgue の収束定理より，$(X_t)_{t\in I}$ は X_∞ に L^p 収束もする[*7]．

(c) $\Longrightarrow$ (d) 明らかである．

(d) $\Longrightarrow$ (a) $t\to\infty$ のとき X_t が L^p 収束するとすると，ある $t_0\in I$ が存在して，$(X_t)_{t\in[t_0,\infty)}$ は L^p 有界である．一方で，$\|X_t\|_p$ は t に関して増加だから（命題 3.5），$(X_t)_{t\in(-\infty,t_0]}$ も L^p 有界である．よって，$(X_t)_{t\in I}$ は L^p 有界である． □

3.5 マルチンゲールの可閉性

命題 3.25 I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相であって任意の $t\in I$ に対して (t,∞) を開集合とするもの，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in I}\mathfrak{F}_t$ と置く．$X=(X_t)_{t\in I}$ を τ-連続な $\mathscr{F}$-マルチンゲールとすると，次の 4 条件は同値である．

(a) $(X_t)_{t\in I}$ は一様可積分である．
(b) $t\to\infty$ のとき，X_t はある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束かつ概収束する．
(c) $t\to\infty$ のとき，X_t はある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束する．
(d) ある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ は $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-マルチンゲールとなる．ここで，$\overline{I}$ は，I に新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合である．

さらに，これらの条件の下で，(b), (c), (d) の X_∞ は共通であり，無視可能な集合上の違いを除いて一意に定まる．

命題 3.25 の同値な 4 条件が成り立つとき，$\mathscr{F}$-マルチンゲール $X=(X_t)_{t\in I}$ は**可閉**（closable）であるという．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) L^1 マルチンゲール収束定理（定理 3.23）ですでに示した．

(c) $\Longrightarrow$ (d) $t\to\infty$ のとき $(X_t)_{t\in I}$ が X_∞ に L^1 収束するとする．$s\in I$ とすると，任意の $t\in[s,\infty)$ に対して $E[X_t\mid\mathfrak{F}_s]=X_s$ だから，$t\to\infty$ とすることで $E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_s]=X_s$ を得る（命題 1.3）．よって，$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ は $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-マルチンゲールである．

(d) $\Longrightarrow$ (a) 命題 3.7 から従う．

最後の主張 (b), (c) の条件を満たす X_∞ が無視可能な集合上の違いを除いて一意に定まることは明らかである．また，(b) の条件を満たす X_∞ が (c) の条件も満たすことは明らかであり，(c) の条件を満たす X_∞ が (d) の条件も満たすことは，(c) $\Longrightarrow$ (d) の証明で示されている．あとは，(d) の条件を満たす X_∞ が (b) の条件も満たすことを示せばよい．

[*7] 添字集合 I は $\mathbb{N}$ に順序同型であるとは限らないが，脚注*5 と同様に議論すれば，Lebesgue の収束定理を適用できる．

$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ が $\mathscr{F}$-マルチンゲールであるとする．$s\in I$ と $A\in\mathfrak{F}_s$ を固定すると，$E[1_A X_\infty]=E[1_A X_s]$ である．一方で，すでに示した同値性より，$t\to\infty$ のとき X_t はある $X'_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束かつ概収束する．任意の $t\in[s,\infty)$ に対して $E[1_A X_t]=E[1_A X_s]$ だから，$t\to\infty$ とすることで，$E[1_A X'_\infty]=E[1_A X_s]$ を得る．以上より，

$$E[1_A X_\infty]=E[1_A X'_\infty]$$

である．上式は任意の $A\in\bigcup_{s\in I}\mathfrak{F}_s$ に対して成り立つが，Dynkin 族補題より，任意の $A\in\mathfrak{F}_\infty$ に対しても成り立つことがわかる．X_∞ と X'_∞ はともに $\mathfrak{F}_\infty$-可測だから，これより，$X_\infty=X'_\infty$ である．よって，$t\to\infty$ のとき X_t は X_∞ に L^1 収束かつ概収束する． □

系 3.26 I を空でない可算な全順序集合，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty=\bigvee_{t\in I}\mathfrak{F}_t$ と置く．X を $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上の可積分な実確率変数とすると，$t\to\infty$ のとき，$E[X\mid\mathfrak{F}_t]$ は $E[X\mid\mathfrak{F}_\infty]$ に L^1 収束かつ概収束する．

証明 I に新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I}=I\sqcup\{\infty\}$ を考えると，$(E[X\mid\mathfrak{F}_t])_{t\in\overline{I}}$ は $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-マルチンゲールだから，主張は命題 3.25 から従う． □

命題 3.27 I を空でない全順序集合，τ をその上の可分な位相であって任意の $t\in I$ に対して (t,∞) を開集合とするもの，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_\infty=\bigvee_{t\in I}\mathfrak{F}_t$ と置く．$X=(X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとすると，次の 4 条件は同値である．

(a) $(X_t^+)_{t\in I}$ は一様可積分である．
(b) $t\to\infty$ のとき，X_t^+ はある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束かつ概収束する．
(c) $t\to\infty$ のとき，X_t^+ はある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ に L^1 収束する．
(d) ある $X_\infty\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ は $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-劣マルチンゲールとなる．ここで，$\overline{I}$ は，I に新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合である．

命題 3.27 の同値な 4 条件が成り立つとき，$\mathscr{F}$-劣マルチンゲール $X=(X_t)_{t\in I}$ は**可閉**（closable）であるという．優マルチンゲールの可閉性も，同様に定義する．なお，マルチンゲールに対しては，マルチンゲールとしての可閉性，劣マルチンゲールとしての可閉性，優マルチンゲールとしての可閉性の三つが定義されることになるが，一般にはこれらは同値ではない．

証明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) L^1 マルチンゲール収束定理（定理 3.23）ですでに示した．

(c) $\Longrightarrow$ (d) $t\to\infty$ のとき X_t が X_∞ に L^1 収束するとする．$s\in I$ とすると，任意の $t\in[s,\infty)$ に対して $E[X_t^+\mid\mathfrak{F}_s]\geq E[X_t\mid\mathfrak{F}_s]\geq X_s$ だから，$E[X_\infty\mid\mathfrak{F}_s]\geq X_s$ である（命題 1.3）．よって，$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ は $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-劣マルチンゲールである．

(d) $\Longrightarrow$ (a) $(X_t)_{t\in\overline{I}}$ が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであるとすると，$(X_t^+)_{t\in\overline{I}}$ は非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである（系 3.3 (1)）．よって，命題 3.7 より，$(X_t^+)_{t\in I}$ は一様可積分である． □

3.6 逆向きマルチンゲール収束定理

定理 3.28（逆向きマルチンゲール収束定理） I を空でない全順序集合であって下に共終な可算部分集合をもつものとし，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_{-\infty}=\bigcap_{t\in I}\mathfrak{F}_t$ と置く．$\mathscr{F}$-

劣マルチンゲール $X = (X_t)_{t \in I}$ に対して，次の 5 条件は同値である．

(a) $\lim_{t \to -\infty} E[X_t] > -\infty$ である[*8]．

(b) ある $t_0 \in I$ が存在して，$(X_t)_{t \in (-\infty, t_0]}$ は L^1 有界である．

(c) ある $t_0 \in I$ が存在して，$(X_t)_{t \in (-\infty, t_0]}$ は一様可積分である．

(d) $t \to -\infty$ のとき，X_t はある $X_{-\infty} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_{-\infty}, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．

(e) $t \to -\infty$ のとき，X_t はある $X_{-\infty} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_{-\infty}, P)$ に L^1 収束する．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　X と $X^+ = (X_t^+)_{t \in I}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから（系 3.3 (1)），$E[X_t]$ と $E[X_t^+]$ はともに t に関して増加である．したがって，1 点 $t_0 \in I$ を固定すると，任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して，

$$
\begin{aligned}
E[|X_t|] &= 2E[X_t^+] - E[X_t] \\
&\leq 2E[X_{t_0}^+] - E[X_t] \\
&\leq 2E[X_{t_0}^+] - \lim_{s \to -\infty} E[X_s]
\end{aligned}
$$

である．よって，$\lim_{s \to -\infty} E[X_s] > -\infty$ ならば，$(X_t)_{t \in (-\infty, t_0]}$ は L^1 有界である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$t_0 \in I$ について，$(X_t)_{t \in (-\infty, t_0]}$ が L^1 有界であるとする．$\epsilon > 0$ を任意にとる．定数 $C > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
E[1_{|X_t|>C}|X_t|] &= E[1_{X_t>C}X_t] - E[1_{X_t<-C}X_t] \\
&= E[1_{X_t>C}X_t] + E[1_{X_t \geq -C}X_t] - E[X_t]
\end{aligned}
$$

である．この 3 項をそれぞれ評価する．仮定より，$\lim_{t \to -\infty} E[X_t] > -\infty$ だから，必要ならば t_0 を小さくとりなおすことで，任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して

$$
E[X_t] \geq E[X_{t_0}] - \epsilon
$$

が成り立つとしてよい．一方で，任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して，$X_t \leq E[X_{t_0} \mid \mathfrak{F}_t]$ だから

$$
\begin{aligned}
E[1_{X_t>C}X_t] &\leq E[1_{X_t>C}X_{t_0}], \\
E[1_{X_t \geq -C}X_t] &\leq E[1_{X_t \geq -C}X_{t_0}]
\end{aligned}
$$

である．これらの不等式から，任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して，$E[1_{|X_t|>C}|X_t|]$ は

$$
\begin{aligned}
E[1_{|X_t|>C}|X_t|] &= E[1_{X_t>C}X_t] + E[1_{X_t \geq -C}X_t] - E[X_t] \\
&\leq E[1_{X_t>C}X_{t_0}] + E[1_{X_t \geq -C}X_{t_0}] - E[X_{t_0}] + \epsilon \\
&= E[1_{X_t>C}X_{t_0}] - E[1_{X_t<-C}X_{t_0}] + \epsilon \\
&\leq E[1_{|X_t|>C}|X_{t_0}|] + \epsilon \qquad (*)
\end{aligned}
$$

と評価できる．一方で，

- L^1 関数の絶対連続性より，ある $\delta > 0$ が存在して，$P(A) \leq \delta$ を満たす任意の $A \in \mathfrak{F}$ に対して，$E[1_A|X_{t_0}|] \leq \epsilon$ が成り立ち，

[*8] $X = (X_t)_{t \in I}$ は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールだから，$E[X_t]$ は t に関して増加であり，したがって，極限 $\lim_{t \to -\infty} E[X_t] \in \overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}$ が存在する．なお，I が最小元をもつ場合には，$\lim_{t \to -\infty} E[X_t]$ は $E[X_{\min I}]$ とみなす．

- 仮定より，$\sup_{t\in(-\infty,t_0]} E[|X_t|] < \infty$ だから，Chebyshev の不等式より，

$$\sup_{t\in(-\infty,t_0]} P(|X_t| > C) \le \frac{1}{C} \sup_{t\in(-\infty,t_0]} E[|X_t|] \to 0 \qquad (C \to \infty)$$

 となる．

したがって，C が十分大きければ，任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して，

$$E[1_{|X_t|>C}|X_{t_0}|] \le \epsilon \tag{$**$}$$

である．以上 $(*)$ と $(**)$ より，C が十分大きければ，任意の $t \in (-\infty, t_0]$ に対して

$$E[1_{|X_t|>C}|X_t|] \le 2\epsilon$$

が成り立つ．よって，$(X_t)_{t\in(-\infty,t_0]}$ は一様可積分である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　$t_0 \in I$ について，$(X_t)_{t\in(-\infty,t_0]}$ が一様可積分であるとする．この状況で，$t \to -\infty$ のとき X_t がある $\mathfrak{F}_{-\infty}$-可測な $\overline{\mathbb{R}}$ 値確率変数 $X_{-\infty}$ に概収束することがわかれば，$X_{-\infty}$ が可積分（特に，ほとんど確実に有限）であり，$t \to -\infty$ のとき X_t が $X_{-\infty}$ に L^1 収束することが自動的に従う[*9]．そこで，以下では，この概収束を示す．

$a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，上渡回数不等式（補題 3.21）より

$$\begin{aligned}E[U_{a,b}((X_t)_{t\in(-\infty,t_0]})] &\le \frac{1}{b-a}\left(E[(X_{t_0}-a)^+] - \lim_{t\to-\infty} E[(X_t-a)^+]\right)\\ &\le \frac{1}{b-a}(E[X_{t_0}^+] + |a|)\\ &< \infty\end{aligned}$$

だから，$U_{a,b}((X_t)_{t\in(-\infty,t_0]})$ はほとんど確実に有限である．したがって，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ が，$a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して $U_{a,b}((X_t)_{t\in(-\infty,t_0]}) < \infty$ を満たす．このような ω については，補題 3.20 より，極限 $\lim_{t\to-\infty} X_t(\omega) \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する．よって，$X_{-\infty} = \liminf_{t\to-\infty} X_t$ と置けば，$X_{-\infty}$ は $\mathfrak{F}_{-\infty}$-可測であり，$t \to -\infty$ のとき X_t は $X_{-\infty}$ に概収束する．

(d) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである． □

系 3.29　I を空でない可算な全順序集合，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$\mathfrak{F}_{-\infty} = \bigcap_{t\in I} \mathfrak{F}_t$ と置く．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとすると，$t \to -\infty$ のとき，X_t はある $X_{-\infty} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_{-\infty}, P)$ に L^1 収束かつ概収束する．

証明　X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば $E[X_t]$ は t によらず一定であり，X が非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば $E[X_t] \ge 0$ である．よって，いずれにしても，主張は逆向きマルチンゲール収束定理（定理 3.28）の (a) $\Longleftrightarrow$ (d) から従う． □

[*9] 添字集合 I は $\mathbb{N}$ に反対順序同型であるとは限らないが，脚注[*5] と同様に議論すれば，確率変数列の一様可積分性と収束に関する一般論を適用できる．

3.7　任意停止定理

補題 3.30　$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in \{0,\dots,n\}}, P)$（$n \in \mathbb{N}$）をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t \in \{0,\dots,n\}}$ を $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールとし，T を $\{0,\dots,n\}$ 値 $\mathscr{F}$-停止時刻とすると，

$$X_T \leq E[X_n \mid \mathfrak{F}_T]$$

が成り立つ．

証明　各 $t \in \{0,\dots,n\}$ について，主張の不等式が $\{T = t\}$ 上で成り立つことを示せばよい．左辺については $1_{T=t} X_T = 1_{T=t} X_t$ であり，右辺については $1_{T=t} E[X_\infty \mid \mathfrak{F}_T] = E[1_{T=t} X_\infty \mid \mathfrak{F}_T]$（命題 2.13 (1) より，$\{T = t\} \in \mathfrak{F}_T$ であることを用いた）だから，示すべき不等式は

$$1_{T=t} X_t \leq E[1_{T=t} X_n \mid \mathfrak{F}_T] \tag{$*$}$$

となる．$A \in \mathfrak{F}_T$ とすると，$A \cap \{T = t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから，$X_t \leq E[X_n \mid \mathfrak{F}_t]$ より

$$\begin{aligned} E[1_A 1_{T=t} X_t] &= E[1_{A \cap \{T=t\}} X_t] \\ &\leq E[1_{A \cap \{T=t\}} X_n] \\ &= E[1_A 1_{T=t} X_n] \end{aligned}$$

である．($*$) の両辺はともに $\mathfrak{F}_T$-可測だから，これより，($*$) が成り立つ．□

補題 3.31　$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_I)_{t \in \{0,\dots,n\}}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．I を，$((-\infty, t])_{t \in I}$ が生成する σ-代数によって可測空間とみなす．T が I 値 $\mathscr{F}$-停止時刻であり，$\mathfrak{F}_T$-可測な写像 $\widetilde{T} \colon \Omega \to I$ が $\widetilde{T} \geq T$ を満たすならば，$\widetilde{T}$ も $\mathscr{F}$-停止時刻である．

証明　任意の $t \in I$ に対して，$\{\widetilde{T} \leq t\} \in \mathfrak{F}_T$ より $\{\widetilde{T} \leq t\} = \{\widetilde{T} \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ だから，$\widetilde{T}$ は $\mathscr{F}$-停止時刻である．□

定理 3.32（任意停止定理）　I を全順序集合であって右順序位相に関して可分であるものとし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t \in I}$ を $\mathscr{F}$-適合かつ右連続な実確率過程とし，S, T を I において有界な（すなわち，I において上界と下界をもつ）$\mathscr{F}$-停止時刻とする．

(1) X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば，X_T は可積分であり，$X_{S \wedge T} = E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つ．
(2) X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，X_T は可積分であり，$X_{S \wedge T} \leq E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つ．
(3) X が $\mathscr{F}$-優マルチンゲールならば，X_T は可積分であり，$X_{S \wedge T} \geq E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$ が成り立つ．

証明　(3) は X の代わりに $-X$ を考えれば (2) に帰着し，(1) は (2) と (3) から従うから，(2) だけを示せば十分である．

(I)　I が有限である場合に，主張を示す．一般性を失わず，$I = \{0,\dots,n\}$ と仮定する．

X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであるとすると，$X_T = (X_{t \wedge T})_{t \in \{0,\dots,n\}}$ も $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである（系 3.14）．そこで，$\mathscr{F}$-劣マルチンゲール X^T と $\mathscr{F}$-停止時刻 S に対して補題 3.30 を適用して，

$$X_{S \wedge T} \leq E[X_{n \wedge T} \mid \mathfrak{F}_S] = E[X_T \mid \mathfrak{F}_S]$$

を得る．

(II)　一般の場合に，主張を示す．S と T は I において有界だから，必要ならば I を小さくとりなおすことで，一般性を失わず，I は最大元と最小元をもつと仮定する．

I の有限部分集合の増加列 $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ であって，各 D_k が I の最大元と最小元を含み，$D=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}D_k$ が I の右順序位相に関して稠密であるものをとる．各 D_k の元を昇順に列挙して，$\min I=t_{k,0}$, $\dots$, $t_{k,p_k}=\max I$ とする．各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，写像 S_k, $T_k\colon \Omega\to I$ を

$$S_k=\sum_{i=0}^{p_k-1}1_{S\in[t_{k,i},t_{k,i+1})}t_{k,i+1}+1_{S=t_{k,p_k}}t_{k,p_k},$$
$$T_k=\sum_{i=0}^{p_k-1}1_{T\in[t_{k,i},t_{k,i+1})}t_{k,i+1}+1_{T=t_{k,p_k}}t_{k,p_k}$$

と定めると，これらは D_k 値 $\mathscr{F}$-停止時刻である（補題 3.31）．また，$k\to\infty$ のとき，S_k, T_k, $S_k\wedge T_k$ は減少しながらそれぞれ S, T, $S\wedge T$ に各点収束する．

X の右連続性より，$k\to\infty$ のとき，X_{T_k} は X_T に各点収束する．さらに，X_T が可積分であり，$k\to\infty$ のとき X_{T_k} が X_T に L^1 収束もすることを示そう．$k\le l$ を満たす k, $l\in\mathbb{N}$ について，$(\mathfrak{F}_t)_{t\in D_k}$-劣マルチンゲール $(X_t)_{t\in D_k}$ に対して (I) の結果を適用すれば，$X_{T_l}\le E[X_{T_k}\mid\mathfrak{F}_{T_l}]$ を得る．したがって，$(\dots,X_{T_1},X_{T_0})$ は $(\dots,\mathfrak{F}_{T_1},\mathfrak{F}_{T_0})$-劣マルチンゲールである．また，同様に (I) より，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $X_{\min I}\le E[X_{T_k}\mid\mathfrak{F}_{\min I}]$ であり，特に $E[X_{\min I}]\le E[X_{T_k}]$ だから，$\lim_{k\to\infty}E[X_{T_k}]>-\infty$ である．よって，逆向きマルチンゲール収束定理（定理 3.28）より，$k\to\infty$ のとき X_{T_k} は L^1 収束する．各点収束極限と比較すれば，X_T が可積分であり，$k\to\infty$ のとき X_{T_k} が X_T に L^1 収束することを得る．同様にして，$X_{S\wedge T}$ が可積分であり，$k\to\infty$ のとき $X_{S_k\wedge T_k}$ が $X_{S\wedge T}$ に L^1 収束することもわかる．

以上を踏まえて，主張の不等式 $X_{S\wedge T}\le E[X_T\mid\mathfrak{F}_S]$ を示そう．$A\in\mathfrak{F}_S$ を任意にとる．各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，$(\mathfrak{F}_t)_{t\in D_k}$-劣マルチンゲール $(X_t)_{t\in D_k}$ に対して (I) の結果を適用すれば，$X_{S_k\wedge T_k}\le E[X_{S_k}\mid\mathfrak{F}_{T_k}]$ を得る．$S\le S_k$ より $A\in\mathfrak{F}_S\subseteq\mathfrak{F}_{S_k}$ だから（命題 2.13 (2)），特に，

$$E[1_AX_{S_k\wedge T_k}]\le E[1_AX_{T_k}]$$

である．$k\to\infty$ とすると，前段で示したように $X_{S_k\wedge T_k}$, X_{T_k} はそれぞれ $X_{S\wedge T}$, X_T に L^1 収束するから，

$$E[1_AX_{S\wedge T}]\le E[X_T]$$

となる．これが任意の $A\in\mathfrak{F}_S$ に対して成り立つから，$X_{S\wedge T}\le E[X_T\mid\mathfrak{F}_S]$ である．　□

系 3.33　I を全順序集合であって右順序位相に関して可分であるものとし，$(\Omega,\mathfrak{F},\mathscr{F}=(\mathfrak{F}_t)_{t\in I},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X=(X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合かつ右連続な実確率過程，T を I において下に有界な（すなわち，I において下界をもつ）$\mathscr{F}$-停止時刻とし，実確率過程 $X^T=(X_{t\wedge T})_{t\in I}$ を考える．

(1) X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば，X^T も $\mathscr{F}$-マルチンゲールである．
(2) X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，X^T も $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．
(3) X が $\mathscr{F}$-優マルチンゲールならば，X^T も $\mathscr{F}$-優マルチンゲールである．

証明　(3) は X の代わりに $-X$ を考えれば (2) に帰着し，(1) は (2) と (3) から従うから，(2) だけを示せば十分である．

X が $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであるとすると，任意停止定理（定理 3.32 (2)）より，$s\le t$ を満たす任意の s,

$t \in I$ に対して，$X_{t\wedge T}$ は可積分で $X_{s\wedge T} \le E[X_{t\wedge T} \mid \mathfrak{F}_s]$ が成り立つ．すなわち，X^T は $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである． □

系 3.34 I を全順序集合であって右順序位相に関して可分であるものとし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合かつ右連続な実確率過程，T を I において下に有界な（すなわち，I において下界をもつ）$\mathscr{F}$-停止時刻とし，実確率過程 $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\in I}$ を考える．

(1) X が一様可積分な $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば，X^T も一様可積分な $\mathscr{F}$-マルチンゲールである．

(2) X が一様可積分な非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，X^T も一様可積分な非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．

証明 $\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_t$ と置き，I に新しく最大元 ∞ を付け加えて得られる全順序集合 $\overline{I} = I \sqcup \{\infty\}$ を考える．

(1) $\mathscr{F}$-マルチンゲール $X = (X_t)_{t\in I}$ が一様可積分であるための必要十分条件は，ある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ が $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-マルチンゲールとなることである（命題 3.25）．よって，主張は，系 3.33 から従う．

(2) 非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲール $X = (X_t)_{t\in I}$ が一様可積分であるための必要十分条件は，ある $X_\infty \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ が存在して，$(X_t)_{t\in\overline{I}}$ が $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\overline{I}}$-劣マルチンゲールとなることである（命題 3.27）．よって，主張は，系 3.33 から従う． □

系 3.35 I を全順序集合であって右順序位相に関して可分であるものとし，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}, P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$X = (X_t)_{t\in I}$ を $\mathscr{F}$-適合かつ右連続な実確率過程，T を I において下に有界な（すなわち，I において下界をもつ）$\mathscr{F}$-停止時刻とし，実確率過程 $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\in I}$ を考える．$p \in (1, \infty)$ とする．

(1) X が L^p 有界な $\mathscr{F}$-マルチンゲールならば，X^T も L^p 有界な $\mathscr{F}$-マルチンゲールである．

(2) X が L^p 有界な非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールならば，X^T も L^p 有界な非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールである．

証明 X が $\mathscr{F}$-マルチンゲールまたは非負の $\mathscr{F}$-劣マルチンゲールであるとすると，X^T も同様であることは，系 3.33 ですでに示した．また，$(X^T)^* = \sup_{t\in I}|X_{t\wedge T}|$ は $X^* = \sup_{t\in I}|X_t|$ で上から抑えられるから，L^p マルチンゲール収束定理（定理 3.24）より，X が L^p 有界ならば X^T も L^p 有界である． □

参考文献

[1] J.-F. Le Gall, *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, Springer, 2018.

[2] 風巻紀彦，『Martingale の理論』，確率論セミナー，1981.

[3] 佐々田槙子，「確率過程論」講義資料，2022.