付値体のノート

箱（@o_ccah）

2020 年 5 月 9 日

概要

付値体の定義からはじめ，$\mathbb{Q}$ 上の絶対値の分類や，複素係数と実係数それぞれの場合の Gelfand–Mazur の定理の経由して，Ostrowski の定理を証明する．Ostrowski の定理は，Archimedes 的な完備付値体が $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかに同値であることを主張する．

目次

記号と用語

- 自然数，整数，有理数，実数，複素数，四元数全体の集合を，それぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ と書く．0 は自然数に含める．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す．また，0 より真に大きい自然数全体の集合を $\mathbb{N}_{>0}$ と書き，0 以上の実数全体の集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と書く．
- 体とは，可換とは限らない単位的環であって，零環ではなく，0 以外の元がすべて乗法に関する逆元をもつものをいう．

- 可換とは限らない単位的環 R に対して，R の元であって R のすべての元と可換であるもの全体の集合を，R の中心という．

1　付値体

1.1　絶対値と付値体

定義 1.1（絶対値，付値体）　体 K 上の**絶対値**とは，写像 $|{-}|\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって，次の 3 条件を満たすものをいう．

(V1) 任意の $x \in K$ に対して，$x = 0$ と $|x| = 0$ とは同値である（非退化性）．
(V2) 任意の $x, y \in K$ に対して，$|xy| = |x||y|$ である（乗法性）．
(V3) 任意の $x, y \in K$ に対して，$|x + y| \leq |x| + |y|$ である（三角不等式）．

体とその上の絶対値との組を，**付値体**という．

K を体とする．$|0| = 0$ かつ任意の $x \in K \setminus \{0\}$ に対して $|x| = 1$ と定めると，これは K 上の絶対値である．これを，K 上の**自明な絶対値**という．

K を体，K' を K の部分体とする．K 上の絶対値を K' に制限したものは，K' 上の絶対値となる．これにより，付値体の部分体は自然に付値体とみなせる．

K を体，$|{-}|$ を K 上の絶対値とする．$|1| = |1^2| = |1|^2$ であり，非退化性より $|1| \neq 0$ だから，$|1| = 1$ である．また，$|-1|^2 = |(-1)^2| = |1| = 1$ だから，$|-1| = 1$ である．したがって，$x \in K$ に対して $|-x| = |-1||x| = |x|$ であり，$|x||x^{-1}| = |xx^{-1}||1| = 1$ より $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ である．

命題 1.2　K を体，$|{-}|$ を K 上の絶対値とする．このとき，$(x, y) \mapsto |x - y|$ は K 上の距離であり，この距離が定める位相によって K は位相体となる（すなわち，K 上の加法，加法逆元をとる演算，乗法および乗法逆元をとる演算は，この距離が定める位相に関して連続である）．

証明　$(x, y) \mapsto |x - y|$ が K 上の距離であることは，絶対値の非退化性と三角不等式，および上で見たように $x \in K$ に対して $|-x| = |x|$ であることからわかる．以下，K にはこの距離が定める位相を考える．

加法の連続性は，$x_0, y_0, x, y \in K$ に対して

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0|$$

であることからわかる．加法逆元をとる演算の連続性は，$x_0, x \in K$ に対して

$$|(-x) - (-x_0)| = |x - x_0|$$

であることからわかる．乗法の連続性は，$x_0, y_0, x, y \in K$ に対して

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)(y - y_0) + (x - x_0)y_0 + x_0(y - y_0),$$

したがって

$$|xy - x_0y_0| \leq |x - x_0||y - y_0| + |x - x_0||y_0| + |x_0||y - y_0|$$

であることからわかる．乗法逆元をとる演算の連続性は，$x_0, x \in K^{\times}$ に対して

$$x^{-1} - x_0^{-1} = -x^{-1}(x - x_0)x_0^{-1},$$

したがって

$$|x^{-1} - x_0^{-1}| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}$$

であることからわかる. □

体上の絶対値から命題 1.2 のようにして定まる位相を，その**絶対値が定める位相**という．以下，付値体は常に，その絶対値が定める位相を備えているものと考える．

命題 1.3 体 K 上の絶対値 $|-|$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(1) $|-|$ は自明な絶対値である．
(2) $|-|$ が定める位相は離散である．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 対偶を示す．$|-|$ が自明でなければ，$|x| \neq 1$ なる $x \in K \setminus \{0\}$ がとれ，$|x| < 1$ であるか $|x| > 1$ であるかに応じて $y = x$ あるいは $y = x^{-1}$ と置くことで，$|y| < 1$ なる $y \in K \setminus \{0\}$ がとれる．このとき，点列 $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 を含まないが，$|-|$ が定める位相に関して 0 に収束する．よって，$|-|$ が定める位相は離散ではない． □

定義 1.4（同値な絶対値） 体 K 上の 2 つの絶対値 $|-|_0, |-|_1$ は，それらが K 上に同じ位相を定めるとき，**同値**であるという．

命題 1.5 体 K 上の自明でない絶対値 $|-|_0, |-|_1$ に対して，次の 4 条件は同値である．

(a) 2 つの絶対値 $|-|_0$ と $|-|_1$ は同値である．
(b) 任意の $x \in K$ に対して，$|x|_0 < 1$ と $|x|_1 < 1$ とは同値である．
(c) 任意の $x \in K$ に対して，$|x|_0 < 1$ ならば $|x|_1 < 1$ である．
(d) ある $s > 0$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $|x|_1 = |x|_0^s$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) K 上の絶対値 $|-|$ について，$x \in K$ が $|x| < 1$ を満たすことは，点列 $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $|-|$ の定める位相に関して 0 に収束することと同値である．よって，$|-|_0$ と $|-|_1$ が同値ならば，$x \in K$ に対して $|x|_0 < 1$ と $|x|_1 < 1$ とは同値となる．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (d) 任意の $x \in K$ に対して，$|x|_0 < 1$ ならば $|x|_1 < 1$ であるとする．このとき，任意の $x \in K$ に対して，$|x|_0 > 1$ ならば $|x|_1 > 1$ である．実際，$|x|_0 > 1$ ならば $|x^{-1}|_0 = |x|_0^{-1} < 1$ だから仮定より $|x^{-1}|_1 < 1$ であり，したがって $|x|_1 = |x^{-1}|_1^{-1} > 1$ である．

$|-|_0$ は自明な絶対値ではないから，$|x_0|_0 > 1$ なる $x_0 \in K$ がとれる．このとき $|x_0|_0 > 1$ でもある．そこで，$s = \log|x_0|_1 / \log|x_0|_0 > 0$ と置く．この s について，任意の $x \in K$ に対して $|x|_1 = |x|_0^s$ が成り立つことを示そう．

$x \in K$ を任意にとる．$x = 0$ ならば $|x|_1 = 0 = |x|_0^s$ だから，$x \neq 0$ とする．$\gamma \in \mathbb{R}$ を $|x|_0 = |x_0|_0^\gamma$ となるようにとる．任意の有理数 $m/n > \gamma$（$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$）に対して，$|x|_0 < |x_0|_0^{m/n}$，したがって $|x^n x_0^{-m}|_0 < 1$ だから，仮定より $|x^n x_0^{-m}|_1 < 1$，したがって $|x|_1 < |x_0|_1^{m/n}$ を得る．同様に，任意の有理数 $m/n < \gamma$（$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$）に対して $|x|_1 > |x_0|_1^{m/n}$ が成り立つ．よって，m/n を γ に近づけることによ

り，$|x|_1 = |x_0|_1^\gamma$ を得る．よって，

$$|x|_1 = |x_0|_1^\gamma = (|x_0|_0^s)^\gamma = (|x_0|_0^\gamma)^s = |x|_0^s$$

が成り立つ．これで，(d) が示された．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　明らかである．□

命題 1.6　K を体，$|{-}|$ を K 上の絶対値とする．任意の $0 < s \leq 1$ に対して，$|{-}|^s$ は $|{-}|$ と同値な K 上の絶対値である．

証明　$0 < s \leq 1$ とする．$|{-}|^s$ が非退化かつ乗法的であることは明らかである．$|{-}|^s$ が三角不等式を満たすことを示す．$x, y \in K$ を任意にとる．$x = y = 0$ ならば明らかに $|x + y|^s = 0 = |x|^s + |y|^s$ だから，そうではないとする．このとき，$0 < s \leq 1$ より

$$\left(\frac{|x|}{|x| + |y|}\right)^s + \left(\frac{|y|}{|x| + |y|}\right)^s \geq \frac{|x|}{|x| + |y|} + \frac{|y|}{|x| + |y|} = 1$$

だから，両辺に $(|x| + |y|)^s$ を掛け，$|{-}|$ に対する三角不等式を使うことで

$$|x|^s + |y|^s \geq (|x| + |y|)^s \geq |x + y|^s$$

を得る．よって，$|{-}|^s$ は K 上の絶対値である．$|{-}|^s$ が $|{-}|$ と同値であることは，（命題 1.5 の証明にも書いたとおり）明らかである．□

1.2　擬絶対値

定義 1.7（擬絶対値）　体 K 上の擬絶対値[*1] とは，写像 $f\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって，次の 3 条件を満たすものをいう．

(PV1) 任意の $x \in K$ に対して，$x = 0$ と $f(x) = 0$ とは同値である．
(PV2) 任意の $x, y \in K$ に対して，$f(xy) = f(x)f(y)$ である．
(PV3) ある定数 $A \geq 0$ が存在して，任意の $x, y \in K$ に対して $f(x + y) \leq A \max\{f(x), f(y)\}$ である．

命題 1.8　体 K 上の絶対値 $|{-}|$ と任意の $s > 0$ に対して，$|{-}|^s$ は K 上の擬絶対値である．

証明　$|{-}|$ が非退化かつ乗法的であることから，$|{-}|^s$ が (PV1), (PV2) を満たすことは明らかである．(PV3) については，任意の $x, y \in K$ に対して

$$|x + y|^s \leq (|x| + |y|)^s \leq (2 \max\{|x|, |y|\})^s = 2^s \max\{|x|^s, |y|^s\}$$

だから，$A = 2^s$ と置けばよい．□

命題 1.9　体 K 上の擬絶対値 f に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) f は K 上の絶対値である．
(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f(n) \leq n$ が成り立つ．

---

*1 この概念は，たとえば Bourbaki [3, p. 108] で定義されている．ただし，Bourbaki [3, p. 108] では特に名前は付けられていない．「擬絶対値」は，本稿だけの用語である．

(c) ある定数 $C \geq 0$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) \leq Cn$ が成り立つ．

証明 (a) $\Longrightarrow$ (b) f が K 上の絶対値であるとする．すると，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$ である．また，$n \in \mathbb{N}$ に対して，$|n| \leq n$ ならば三角不等式より $f(n+1) \leq f(n) + f(1) \leq n+1$ となる．よって，帰納法より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n| \leq n$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (c) 明らかである．

(c) $\Longrightarrow$ (a) f は擬絶対値だから，定数 $A \geq 0$ であって，任意の $x, y \in K$ に対して

$$f(x+y) \leq A \max\{f(x), f(y)\}$$

が成り立つようなものがとれる．ここから帰納法により，任意の $r \in \mathbb{N}$ と $x_0, \ldots, x_{2^r-1} \in K$ に対して

$$f(x_0 + \cdots + x_{2^r-1}) \leq A^r \max\{f(x_0), \ldots, f(x_{2^r-1})\} \tag{$*$}$$

が成り立つことがわかる．

(c) が成り立つとする．$x, y \in K$ を任意にとる．$r \in \mathbb{N}$，$n = 2^r - 1$ とする．($*$) と (c) より，

$$\begin{aligned}
f(x+y)^n &= f((x+y)^n) \\
&= f\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&\leq A^r \max_{0 \leq k \leq n} f\left(\binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) \\
&\leq A^r \max_{0 \leq k \leq n} C\binom{n}{k} f(x)^{n-k} f(y)^k \\
&\leq A^r \sum_{k=0}^{n} C\binom{n}{k} f(x)^{n-k} f(y)^k \\
&= A^r C(f(x) + f(y))^n,
\end{aligned}$$

したがって

$$f(x+y) \leq A^{r/n} C^{1/n} (f(x) + f(y))$$

が成り立つ．$r \to \infty$ とすることで，三角不等式

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

を得る．よって，f は K 上の絶対値である． □

系 1.10 K を体，$|-|$ を K 上の絶対値とし，$s > 0$ とする．ある定数 $C \geq 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n|^s \leq Cn$ が成り立てば，$|-|^s$ は $|-|$ と同値な K 上の絶対値である．

証明 命題 1.8 と命題 1.9 より，与えられた仮定の下で，$|-|^s$ は K 上の絶対値である．$|-|^s$ が $|-|$ と同値であることは，（命題 1.5 の証明にも書いたとおり）明らかである． □

1.3 Archimedes 性

定義 1.11（Archimedes 性） 体 K 上の絶対値 $|-|$ は，条件

(U) 任意の $x, y \in K$ に対して，$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ である（超距離不等式）．

を満たすとき，**非 Archimedes 的**あるいは**超距離的**であるという．非 Archimedes 的でない絶対値は，**Archimedes 的**であるという．付値体は，その絶対値が非 Archimedes 的・Archimedes 的であるに応じて，**非 Archimedes 的・Archimedes 的**であるという．

明らかに，自明な絶対値は非 Archimedes 的である．また，命題 1.5 の条件 (d) より，Archimedes 性は同値な絶対値の間では変わらないことがわかる．すなわち，Archimedes 的な絶対値と同値な絶対値は Archimedes 的であり，非 Archimedes 的な絶対値と同値な絶対値は非 Archimedes 的である．

命題 1.12　体 K 上の絶対値 $|{-}|$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $|{-}|$ は非 Archimedes 的である．
(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$|n| \leq 1$ である．
(c) 任意の $s > 0$ に対して，$|{-}|^s$ は K 上の絶対値である．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$|{-}|$ が非 Archimedes 的であるとする．$|0| = 0$，$|1| = 1$ は一般に成り立つのだった．また，$n \in \mathbb{N}$ に対して，$|n| \leq 1$ ならば超距離不等式より $|n+1| \leq \max\{|n|, |1|\} \leq 1$ となる．よって，帰納法より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n| \leq 1$ が成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　(b) が成り立つとすると，任意の $s > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n|^s \leq 1$ である．よって，系 1.10 より，任意の $s > 0$ に対して $|{-}|^s$ は K 上の絶対値である．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　(c) が成り立つとする．任意の $s > 0$ に対して，$|{-}|^s$ が絶対値であることより，任意の x，$y \in K$ に対して

$$|x+y|^s \leq |x|^s + |y|^s \leq 2\max\{|x|^s, |y|^s\},$$

したがって

$$|x+y| \leq 2^{1/s}\max\{|x|, |y|\}$$

である．$s \to \infty$ とすることで，$|{-}|$ が超距離不等式を満たすことがわかる．□

系 1.13　K を体，K' を K の部分体，$|{-}|$ を K 上の絶対値とする．$|{-}|$ が（K 上の絶対値として）非 Archimedes 的であることと，$|{-}|$ の K' への制限が（K' 上の絶対値として）非 Archimedes 的であることとは同値である．

証明　命題 1.12 の条件 (b) からわかる．□

系 1.14　正標数の体上の絶対値は，すべて非 Archimedes 的である．

証明　K を標数 $p > 0$ の体，$|{-}|$ を K 上の絶対値とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，K の元としての n は素部分体 $\mathbb{F}_p$ に属する．したがって，K の元として $n \neq 0$ ならば $n^{p-1} = 1$ であり，したがって $|n| = 1$ となる．よって，命題 1.12 より，$|{-}|$ は非 Archimedes 的である．□

2　$\mathbb{Q}$ 上の絶対値の分類

定義 2.1（実絶対値・p 進絶対値）　(1) $\mathbb{Q}$ 上の実絶対値 $|{-}|_\infty$ を，$x \in \mathbb{Q}$ に対して

$$|x|_\infty = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

と定める．

(2) 素数 p に対して，$\mathbb{Q}$ 上の p **進絶対値** $|{-}|_p$ を，次のように定める．$x = 0$ に対しては，$|x|_p = 0$ とする．$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対しては，$n \in \mathbb{Z}$ および p と互いに素な $a \in \mathbb{Z}$，$b \in \mathbb{N}_{>0}$ を用いて $x = p^n \cdot a/b$ と表し，この n を用いて

$$|x|_p = p^{-n}$$

と定める．

実絶対値および素数 p に対する p 進絶対値が実際に $\mathbb{Q}$ 上の絶対値であることは，簡単に確かめられる．実絶対値は Archimedes 的であり，p 進絶対値は非 Archimedes 的である．

定理 2.2（$\mathbb{Q}$ 上の絶対値の分類定理）　$\mathbb{Q}$ 上の絶対値 $|{-}|$ に対して，次の 3 条件のうちただ 1 つが成り立つ．

(i) $|{-}|$ は自明な絶対値である．
(ii) $0 < s \leq 1$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $|x| = |x|_\infty^s$ が成り立つ．
(iii) 素数 p および $s > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $|x| = |x|_p^s$ が成り立つ．

さらに，(ii) の場合，$0 < s \leq 1$ の選び方は $|{-}|$ に対して一意的であり，(iii) の場合，素数 p および $s > 0$ の選び方は $|{-}|$ に対して一意的である．逆に，(i), (ii), (iii) それぞれによって定まる $|{-}|$ はいずれも $\mathbb{Q}$ 上の絶対値である．[*2]

証明　(i), (ii), (iii) によって定まる $|{-}|$ が $\mathbb{Q}$ 上の絶対値であることは，$|{-}|_\infty$ が $\mathbb{Q}$ 上の絶対値であることと命題 1.6，$|{-}|_p$（p は素数）が $\mathbb{Q}$ 上の非 Archimedes 的な絶対値であることと命題 1.12 の条件 (d) からわかる．また，容易にわかるように，(i), (ii), (iii)（および s や p の選択）によって定まる絶対値はすべて異なる．あとは，$\mathbb{Q}$ 上の任意の絶対値が (i), (ii), (iii) のいずれかの形であることを示せばよい．証明を 2 つの場合にわける．

(I)　まず，$\mathbb{Q}$ 上の非 Archimedes 的な絶対値 $|{-}|$ について考える．このとき命題 1.12 より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して（したがって $n \in \mathbb{Z}$ に対しても）$|n| \leq 1$ である．もし任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $|n| = 1$ ならば，絶対値の乗法性から $|{-}|$ が自明な絶対値であることがわかる．それ以外の場合を考えよう．このとき，$|n| < 1$ なる $n \in \mathbb{N}_{>0}$ の中で最小のもの n_0 がとれる．この n_0 は素数でなければならない．実際，n_0 が約数 $1 < d < n_0$ をもったとすると，$|d||n_0/d| = |n_0| < 1$ より $|d| < 1$ または $|n_0/d| < 1$ だが，これは n_0 の最小性に反する．そこで，改めて $p = n_0$ と置く．

p と互いに素な $a \in \mathbb{Z}$ に対して $|a| = 1$ であることを示そう．$a = kp + l$（$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \{1, \ldots, p-1\}$）と表す．$|p| < 1$ であり，また p の最小性より $|l| = 1$ だから，

$$|a - l| = |kp| = |k||p| < 1 = |l|$$

[*2] 定理 2.2 を Ostrowski の定理と呼ぶこともある．

である．一方で，超距離不等式より
$$|l| \leq \max\{|a|, |a-l|\}$$
である．これら 2 式より，$1 = |l| \leq |a|$，したがって $|a| = 1$ を得る．これで示された．

さて，$p^{-s} = |p| < 1$ なる $s > 0$ をとる．$|{-}|$ が $|{-}|_p^s$ に等しいことを示そう．$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ を任意にとり，$n \in \mathbb{Z}$ および p と互いに素な $a \in \mathbb{Z}$，$b \in \mathbb{N}_{>0}$ を用いて $x = p^n \cdot a/b$ と表す．すると，
$$|x| = |p|^n \cdot \frac{|a|}{|b|} = |p|^n = (p^{-s})^n = |x|_p^s$$
である．よって，絶対値 $|{-}|$ は $|{-}|_p^s$ に等しい．これで，$\mathbb{Q}$ 上の任意の非 Archimedes 的な絶対値が (i) または (iii) の形であることが示された．

(II)　次に，$\mathbb{Q}$ 上の Archimedes 的な絶対値 $|{-}|$ について考える．このとき命題 1.12 より，ある整数 $h \geq 2$ が存在して $|h| > 1$ である．

$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0, \pm 1\}$ に対して
$$f(x) = \frac{\log|x|}{\log|x|_\infty}$$
と置く．整数 $a, b \geq 2$ を任意にとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して，a^n の b 進法展開を
$$a^n = c_0 + c_1 b + \cdots + c_{q(n)} b^{q(n)}$$
とする．ここで $q(n)$ は，a^n の b 進法展開の b^m の位が 0 でないような最大の自然数であり，$\lfloor n \cdot \log a / \log b \rfloor$ に等しい．また，$c_0, \ldots, c_{q(n)} \in \{0, \ldots, b-1\}$ である．a^n の b 進法展開の表式より，
$$\begin{aligned} |a|^n &\leq |c_0| + |c_1||b| + \cdots + |c_{q(n)}||b|^{q(n)} \\ &\leq c_0 + c_1|b| + \cdots + c_{q(n)}|b|^{q(n)} \\ &\leq b(1 + |b| + \cdots + |b|^{q(n)}) \\ &\leq b(q(n)+1)\max\{1, |b|\}^{q(n)} \end{aligned}$$
である．上式の両辺の対数をとって
$$n\log|a| \leq \log b + \log(q(n)+1) + q(n)\max\{0, \log|b|\},$$
さらに両辺を $n \log a$ で割って
$$f(a) \leq \frac{\log b}{n\log a} + \frac{\log(q(n)+1)}{n\log a} + \frac{\max\{0, \log|b|\}}{\log a} \cdot \frac{q(n)}{n}$$
を得る．$n \to \infty$ のとき $q(n)/n \to \log a / \log b$ だから，上式で $n \to \infty$ として
$$f(a) \leq \frac{\max\{0, \log|b|\}}{\log b} = \max\{0, f(b)\} \tag{$*$}$$
を得る．ところで，$|h| > 1$ なる整数 $h \geq 2$ がとれるのだった．このような h をとる．$|h| > 1$ より $f(h) > 0$ だから，($*$) において a を h に置き換えることで $f(b) > 0$ を得る．したがって，($*$) は $f(a) \leq f(b)$ となる．a と b の役割を交換することで $f(b) \leq f(a)$ もわかるから，$f(a) = f(b)$ である．結局，f は 2 以上の整数に対して一定の値 $s > 0$ をとる．すなわち，任意の整数 $a \geq 2$ に対して
$$|a| = |a|_\infty^s$$
が成り立つ．絶対値の乗法性より，この式が任意の有理数に対しても成り立つことがわかる．よって，絶対値 $|{-}|$ は $|{-}|_\infty^s$ に等しい．さらに，三角不等式より $|2| \leq |1| + |1|$，すなわち $2^s \leq 2$ だから，$s \leq 1$ でなければならない．これで，$\mathbb{Q}$ 上の任意の Archimedes 的な絶対値が (ii) の形であることが示された．$\square$

3 四元数体に関する準備

定理 3.1 D は標数が 2 でない非可換体であって，D の中心 Z を含む D の可換な部分体はすべて Z 上 2 次元以下であるとする．このとき，$u, v, w \in D$ と $\alpha, \beta \in Z$ であって，$(1, u, v, w)$ が D の Z 上の基底をなし，かつ

$$\begin{aligned} &u^2 = \alpha, && v^2 = \beta, && w^2 = -\alpha\beta \\ &uv = -vu = w, && vw = -wv = -\beta u, && wu = -uw = -\alpha v \end{aligned}$$

を満たすものが存在する．

証明 D は非可換だから，$a \in D \setminus Z$ がとれる．$Z(a)$ は Z を含む D の可換な部分体だから 2 次元以下であり，したがって $(1, a)$ が $Z(a)$ の Z 上の基底となるから，$a^2 = \lambda a + \mu$（$\lambda, \mu \in Z$）と書ける．$u = a - 2^{-1}\lambda$ と置くと，$u \in D \setminus Z$ であって

$$u^2 = (a - 2^{-1}\lambda)^2 = a^2 - \lambda a + 2^{-2}\lambda^2 = \mu + 2^{-2}\lambda^2 \in Z$$

を満たす．

単位的 Z-代数の自己同型 $\sigma\colon D \to D;\ x \mapsto uxu^{-1}$ を考え，

$$\begin{aligned} D_+ &= \{x \in D \mid \sigma(x) = x\}, \\ D_- &= \{x \in D \mid \sigma(x) = -x\} \end{aligned}$$

と置く．

まず，D が Z-線型空間として D_+ と D_- に直和分解されることを示す．D_+ と D_- が D の部分 Z-線型空間であることはよい．また，$x \in D_+ \cap D_-$ とすると $x = \sigma(x) = -x$ であり，D の標数は 2 でないから $x = 0$ である．よって，$D_+ \cap D_- = \{0\}$ である．さらに，$\sigma^2 = \mathrm{id}_D$ に注意すると，任意の $x \in D$ に対して

$$x = 2^{-1}(x + \sigma(x)) + 2^{-1}(x - \sigma(x)) \in D_+ + D_-$$

であることがわかる．よって，D は Z-線型空間として D_+ と D_- に直和分解される．

次に，$D_+ = Z(u)$ であることを示す．容易にわかるように，D_+ は Z と u を含む D の部分体だから，$Z(u) \subseteq D_+$ である．あとは，$D_+ \subseteq Z(u)$ を示せばよい．$x \in D_+$ を任意にとると，D_+ の定義より u と x は可換だから，$Z(u, x)$ は D の可換な部分体となる．したがって仮定より，$Z(u, x)$ は Z 上 2 次元以下であり，$(1, u)$ が $Z(u, x)$ の Z 上の基底となる．よって，$x \in Z(u)$ である．これで，$D_+ \subseteq Z(u)$ が示された．

次に，D_- が自然に 1 次元左 D_+-線型空間とみなせることを見る．容易にわかるように，$x \in D_+$ と $y \in D_-$ に対して $xy \in D_-$ だから，これをスカラー乗法として D_- は左 D_+-線型空間とみなせる．D_- が左 D_+-線型空間として 1 次元であることを示そう．$y, z \in D_-$ に対して，$y \neq 0$ とすると，$y = (zy^{-1})y$ であり，

$$\sigma(zy^{-1}) = \sigma(z)\sigma(y)^{-1} = (-z)(-y)^{-1} = zy^{-1}$$

より $zy^{-1} \in D_+$ だから，D_- は左 D_+-線型空間としてたかだか 1 次元である．また，D は Z-線型空間として D_+ と D_- に直和分解されるのだったから，もし $D_- = \{0\}$ だとすると $D = D_+$ となるが，これは $a \in D \setminus Z$ に反するから，ありえない．よって，D_- は左 D_+-線型空間として 1 次元である．

さて，$v \in D_- \setminus \{0\}$ を 1 つ固定し，$w = uv$ と置く．$(1, u)$ は D_+ の Z 上の基底であり，D_- は 1 次元左 D_+-線型空間だったから，(v, w) は D_- の Z 上の基底である．さらに，D は Z-線型空間として D_+ と D_- に直和分解されるのだったから，$(1, u, v, w)$ は D の Z 上の基底である．v, $w \in D_-$ だから，D_- の定義より，

$$uv = -vu, \qquad vw = vuv = -uvv = -wv, \qquad wu = -uw$$

である．$u^2 = \alpha$，$v^2 = \beta$ と置こう．すると，

$$w^2 = uvuv = -uuvv = -\alpha\beta$$

となる．u のとり方より，$\alpha \in Z$ である．また，容易にわかるように D_- の 2 つの元の積は D_+ に属するから $\beta = v^2 \in D_+$ であり，一方で $\beta = v^2 \in Z(v)$ だから，$\beta = D_+ \cap Z(v)$ である．$v \notin D_+$ より $D_+ \cap Z(v)$ は Z を含む D_+ の真部分体だが，D_+ は Z 上 2 次元だから，これは Z しかありえない．よって，$\beta \in Z$ である．さらに，以上のことより

$$wv = uvv = u\beta = \beta u, \qquad uw = uuv = \alpha v$$

もわかる．これで，u, v, w および α, β が主張の性質を満たすことが確かめられた． □

系 3.2　D は非可換な単位的 $\mathbb{R}$-代数であって，D の中心は（D の部分体とみなした）$\mathbb{R}$ に等しく，$\mathbb{R}$ を含む D の可換な部分体はすべて $\mathbb{R}$ 上 2 次元以下であるとする．このとき，D は単位的 $\mathbb{R}$-代数として四元数体 $\mathbb{H}$ に同型である．

証明　D の標数は 0 だから，定理 3.1 より，u, v, $w \in D$ と α, $\beta \in \mathbb{R}$ であって，$(1, u, v, w)$ が D の $\mathbb{R}$ 上の基底をなし，かつ

$$\begin{aligned} &u^2 = \alpha, && v^2 = \beta, && w^2 = -\alpha\beta \\ &uv = -vu = w, && vw = -wv = -\beta u, && wu = -uw = -\alpha v \end{aligned} \tag{$*$}$$

を満たすものが存在する．

$u \neq 0$ だから $\alpha \neq 0$ である．また，$\alpha > 0$ とすると，可換体 $Z(\alpha)$ において 2 次の多項式 $T^2 - \alpha$ が 3 つの根 $\pm\sqrt{\alpha}$, u をもつことになり矛盾する．したがって $\alpha < 0$ だから，u を $1/\sqrt{-\alpha}$ 倍することにより，はじめから $\alpha = -1$ であるとしてよい．同様に，$\beta = -1$ であるとしてよい．このとき，($*$) は

$$\begin{aligned} &u^2 = -1, && v^2 = -1, && w^2 = -1 \\ &uv = -vu = w, && vw = -wv = u, && wu = -uw = v \end{aligned}$$

となる．よって，D は単位的 $\mathbb{R}$-代数として四元数体 $\mathbb{H}$ に同型である． □

4　Gelfand–Mazur の定理

4.1　単位的代数の元のスペクトル

定義 4.1（単位的代数の元のスペクトル）　K を可換体，A を単位的 K-代数とする．$x \in A$ の（A における）スペクトルを，

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in K \mid \lambda - x \text{ は } A \text{ において可逆でない}\}$$

と定める．$\mathrm{Sp}_A(x)$ を単に $\mathrm{Sp}(x)$ とも書く．

B が A の部分単位的 K-代数であるとき，$x \in B$ に対して $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathrm{Sp}_B(x)$ が成り立つ．

命題 4.2 K を可換体，A を単位的 K-代数，$x \in A$ とする．$\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_A(x)$ に対して，

$$(\mu - x)^{-1} - (\lambda - x)^{-1} = -(\mu - \lambda)(\mu - x)^{-1}(\lambda - x)^{-1}$$

が成り立つ．

証明 $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_A(x)$ に対して，

$$\begin{aligned}(\mu - x)^{-1} - (\lambda - x)^{-1} &= (\mu - x)^{-1}(\lambda - x)(\lambda - x)^{-1} - (\mu - x)^{-1}(\mu - x)(\lambda - x)^{-1} \\ &= (\mu - x)^{-1}(\lambda - \mu)(\lambda - x)^{-1} \\ &= -(\mu - \lambda)(\mu - x)^{-1}(\lambda - x)^{-1}\end{aligned}$$

である． □

4.2 ノルム代数，Banach 代数

定義 4.3（ノルム代数，Banach 代数） K を可換付値体とする．K-代数 A にその K-線型空間の構造と整合するノルム $\|{-}\|$ が定まっており，かつそのノルムが

(NA) 任意の $x, y \in A$ に対して，$\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ である．

を満たすとき，このノルム $\|{-}\|$ は A の K-代数の構造と**整合する**といい，A と $\|{-}\|$ との組を **K-ノルム代数**という．完備な K-ノルム代数を，**K-Banach 代数**という．

K-ノルム代数 A が単位的であるとする．条件 (NA) より $\|1\| = \|1 \cdot 1\| \le \|1\|^2$ だから，$A \neq \{0\}$ ならば $\|1\| \ge 1$ である．本稿では，$\{0\}$ でない単位的 K-代数が $\|1\| = 1$ を満たすことは仮定しない．なお，（本稿の意味での）$\{0\}$ でない単位的 K-ノルム代数 A に対し，そのノルムを適切にとりかえれば，A の位相を変えずに A を $\|1\| = 1$ なる単位的 K-ノルム代数に修正することができる．これについては，たとえば Arveson [1, pp. 12–13] を参照のこと．

A を K-ノルム代数とすると，条件 (NA) より，A の乗法 $(x, y) \mapsto xy$ は連続である．逆に，K-代数 A 上に（K-線型空間の構造と整合する）ノルム $\|{-}\|$ が与えられていて，そのノルムが定める位相に関して A の乗法が連続であれば，ある定数 $C \ge 0$ が存在して任意の $x, y \in A$ に対して $\|xy\| \le C\|x\|\|y\|$ が成り立つから，ノルム $\|{-}\|$ を適当に定数倍することによって，A を K-ノルム代数にすることができる．

命題 4.4 K を可換付値体，A を単位的 K-Banach 代数とする．任意の $x \in A$，$\|x\| < 1$ に対して，$1 - x$ は可逆かつ $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は絶対総和可能であり，

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$$

が成り立つ．さらにこのとき，

$$\|(1 - x)^{-1}\| \le \|1\| + \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}, \qquad \|(1 - x)^{-1} - 1\| \le \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$$

が成り立つ[*3]．

[*3] $\|1\| = 1$ ならば，第一の式は $\|(1 - x)^{-1}\| \le 1/(1 - \|x\|)$ となる．

証明　$x \in A$, $\|x\| < 1$ を任意にとる．$n \geq 1$ に対して $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ だから，$\|x\| < 1$ より $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対総和可能である．また，$N \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^{N-1}) = (1+x+\cdots+x^{N-1})(1-x) = 1-x^N$$

だから，$N \to \infty$ として

$$(1-x)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)(1-x) = 1$$

を得る．よって，$1-x$ は可逆であり，その逆元は $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ で与えられる．さらに，

$$\|(1-x)^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{n\geq 1} x^n\right\| \leq \sum_{n\geq 1} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

が成り立ち，したがって

$$\|(1-x)^{-1}\| \leq \|1\| + \|(1-x)^{-1} - 1\| \leq \|1\| + \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

が成り立つ．　□

系 4.5　K を可換付値体，A を単位的 K-ノルム代数とし，A の可逆元全体を $A^\times$ と書く．乗法逆元をとる写像 $A^\times \to A^\times; x \mapsto x^{-1}$ は連続である．

証明　A の完備化 $\widehat{A}$ を考えると，$A^\times \subseteq (\widehat{A})^\times$ であり，A における乗法逆元をとる写像 $A^\times \to A^\times$ は $\widehat{A}$ における乗法逆元をとる写像 $(\widehat{A})^\times \to (\widehat{A})^\times$ の制限だから，$\widehat{A}$ に対する主張を示せば，A に対する主張も示される．そこで，はじめから A は単位的 K-Banach 代数であるとしてよい．以下，そのように仮定する．

$x \in A^\times$，$h \in A$ であって $x+h \in A^\times$ なるものに対して

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} = (1+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} = ((1+x^{-1}h)^{-1} - 1)x^{-1}$$

だから，h が十分 0 に近く $\|hx^{-1}\| < 1$ であるとき，命題 4.4 より

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \|((1+x^{-1}h)^{-1} - 1)\|\|x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}h\|}{1-\|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\|$$

が成り立つ．上式の最右辺は，$h \to 0$ のとき 0 に収束する．これで，乗法逆元をとる写像の連続性が示された．　□

系 4.6　A を単位的 $\mathbb{K}$-ノルム代数とする．任意の $x \in A$ に対して，$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ が無限遠に近づくとき，$(\lambda - x)^{-1}$ は $0 \in A$ に収束する[*4]．

証明　A の完備化 $\widehat{A}$ を考えると，$x \in A$ に対して $\mathrm{Sp}_{\widehat{A}}(x) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$，したがって $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_{\widehat{A}}(x)$ だから，$\widehat{A}$ に対する主張を示せば，A に対する主張も示される．そこで，はじめから A は単位的 $\mathbb{K}$-Banach 代数であるとしてよい．以下，そのように仮定する．

[*4] ある $R \geq 0$ が存在して $\mathrm{Sp}_A(x)$ が $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \geq R\}$ を含む場合，$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ は無限遠には近づけないが，このとき主張は自明に成立するとみなす．

$x \in A$ を任意にとる．$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$ が無限遠点に十分近く $\|\lambda^{-1}x\| < 1$ であるとき，命題 4.4 より，$\lambda - x = \lambda(1 - \lambda^{-1}x)$ は可逆であって

$$\|(\lambda - x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(1 - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}\left(\|1\| + \frac{\|\lambda^{-1}x\|}{1 - \|\lambda^{-1}x\|}\right)$$

が成り立つ．上式の最右辺は，$\lambda \to \infty$ のとき 0 に収束する．これで，$\lambda \to \infty$ のとき $(\lambda - x)^{-1} \to 0$ となることが示された． □

4.3 Gelfand–Mazur の定理（複素係数の場合）

複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理の証明の鍵となるのは，次の定理である．

定理 4.7 A を $\{0\}$ でない単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数とする．任意の $x \in A$ に対して，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は空でない．

証明 $\mathrm{Sp}_A(x)$ が空であると仮定する．すると，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda - x$ は可逆だから，写像 $\mathbb{C} \to A$; $\lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ が考えられる．$\mathbb{C}$-ノルム空間 A 上の連続線型形式 ϕ ごとに，関数 $f_\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f_\phi(\lambda) = \langle (\lambda - x)^{-1}, \phi \rangle$$

によって定める．すると，f_ϕ は正則関数である．実際，$\lambda_0, \lambda \in \mathbb{C}$，$\lambda \neq \lambda_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{\langle (\lambda - x)^{-1}, \phi \rangle - \langle (\lambda_0 - x)^{-1}, \phi \rangle}{\lambda - \lambda_0} \\
&= \left\langle \frac{(\lambda - x)^{-1} - (\lambda_0 - x)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}, \phi \right\rangle \\
&= \langle -(\lambda - x)^{-1}(\lambda_0 - x)^{-1}, \phi \rangle
\end{aligned}$$

だから（命題 4.2 を用いた），$\lambda \to \lambda_0$ として，乗法逆元をとる写像の連続性（系 4.5）より

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \langle -(\lambda_0 - x)^{-2}, \phi \rangle$$

を得る．また，系 4.6 より，f_ϕ は無限遠方において 0 に収束する．よって，f_ϕ は $\mathbb{C}$ 全体で定義された無限遠方において 0 に収束する正則関数だから，Liouville の定理より，$f_\phi = 0$ である．

以上より，$\lambda \in \mathbb{C}$ を 1 つ固定すると，A 上の任意の連続線型形式 ϕ に対して $\langle (\lambda - x)^{-1}, \phi \rangle = 0$ だから，Hahn–Banach の定理より $(\lambda - x)^{-1} = 0$ となる．これは，A が $\{0\}$ でないことに矛盾する．よって，背理法より，$\mathrm{Sp}_A(x)$ は空でない． □

定理 4.8（複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理） （可換とは限らない）体をなす単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数は，単位的 $\mathbb{C}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．

証明 A が体をなす単位的 $\mathbb{C}$-ノルム代数であるとする．写像 $\mathbb{C} \to A$; $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ が全単射であることを示せばよい．$A \neq \{0\}$ だから，この写像は単射である．全射性を示す．$x \in A$ を任意にとる．定理 4.7 より，$\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$ がとれる．スペクトルの定義より $\lambda 1_A - x$ は A において可逆でないが，いま A は体をなすから，そのためには $x = \lambda 1_A$ でなければならない．これで，全射性が示された． □

次小節で実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.12）を証明するときに必要になるので，複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.8）を少し拡張しておく．

補題 4.9　E を $\mathbb{C}$-線型空間，$\|{-}\|$ を E の $\mathbb{R}$-線型空間の構造と整合するノルムとし，$\|{-}\|$ が定める位相は E の $\mathbb{C}$-線型空間の構造と整合する（すなわち，複素数によるスカラー倍 $\mathbb{C}\times E\to E$; $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ はこの位相に関して連続である）とする．このとき，E の $\mathbb{C}$-線型空間の構造と整合するノルム $\|{-}\|'$ であって，$\|{-}\|$ と同じ位相を定めるものが存在する．

証明　複素数によるスカラー倍は $\|{-}\|$ が定める位相に関して連続だから，各 $x\in E$ に対して関数 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$; $\theta\mapsto\|e^{i\theta}x\|$ は連続である．そこで，$\|{-}\|'\colon E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\|x\|'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|e^{i\theta}x\|\,d\theta$$

と定める．すると，$\|{-}\|'$ は三角不等式を満たし，任意の複素数 $\lambda=re^{i\phi}$（$r\geq 0$，$\phi\in\mathbb{R}$）と $x\in E$ に対して

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|'&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|e^{i\theta}\cdot\lambda x\|\,d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|re^{i(\theta+\phi)}x\|\,d\theta\\&=r\|x\|'\\&=|\lambda|\|x\|'\end{aligned}$$

だから，$\|{-}\|'$ は E の $\mathbb{C}$-線型空間の構造と整合するノルムである．

$\|{-}\|'$ が $\|{-}\|$ と同じ位相を定めることを示そう．E を $\|{-}\|$ によって $\mathbb{R}$-ノルム空間とみなすと，複素数によるスカラー倍 $\mathbb{C}\times E\to E$; $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ は連続双線型写像だから，ノルム空間の一般論より，ある定数 $C>0$ が存在して任意の $\lambda\in\mathbb{C}$，$x\in E$ に対して $\|\lambda x\|\leq C|\lambda|\|x\|$ が成り立つ．特に，$\lambda=e^{i\theta}$（$\theta\in\mathbb{R}$）と置いて

$$\|e^{i\theta}x\|\leq C\|x\|$$

を得る．また，上式で x を $e^{-i\theta}x$ に置き換えてから θ を $-\theta$ に置き換えることで，

$$\|x\|\leq C\|e^{i\theta}x\|$$

を得る．よって，

$$C^{-1}\|x\|\leq\|x\|'\leq C\|x\|$$

が成り立ち，$\|{-}\|'$ が $\|{-}\|$ と同じ位相を定めることがわかる．　□

系 4.10　E を単位的 $\mathbb{C}$-代数とする．E の $\mathbb{R}$-代数の構造と整合するノルムが存在するならば，E の $\mathbb{C}$-代数の構造と整合するノルムも存在する．

証明　E の $\mathbb{R}$-代数の構造と整合するノルム $\|{-}\|$ が存在するとする．E の乗法はこのノルム $\|{-}\|$ が定める位相に関して連続だから，特に複素数によるスカラー倍 $\mathbb{C}\times E\to E$; $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ も連続である．よって補題 4.9 より，E の $\mathbb{C}$-線型空間の構造と整合するノルム $\|{-}\|'$ であって，$\|{-}\|$ と同じ位相を定めるものが存在する．E の乗法はノルム $\|{-}\|'$ が定める位相に関して連続だから，定義 4.3 の直後に注意したように，ノルム $\|{-}\|'$ を適当に定数倍することによって，E の $\mathbb{C}$-代数の構造と整合するノルムが得られる．これで示された．　□

定理 4.11（複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理・拡張版）　A は（可換とは限らない）体をなす単位的 $\mathbb{C}$-代数であって，その $\mathbb{R}$-代数の構造と整合するノルムが存在するとする．このとき，A は単位的 $\mathbb{C}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．

証明　複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.8）と系 4.10 からただちに従う．　□

4.4　Gelfand–Mazur の定理（実係数の場合）

定理 4.12（実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理）　（可換とは限らない）体をなす単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数は，単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ のいずれかに同型である．

証明　A が体をなす単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数であるとする．証明を 3 つの場合に分ける．

(I)　まず，A が可換であり，$j^2=-1$ を満たす $j\in A$ が存在する場合を考える．このとき，$\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$（$a, b\in\mathbb{R}$）と $x\in A$ に対して

$$(\alpha+\beta i)x=\alpha x+\beta jx$$

と定めると，A の可換性と $j^2=-1$ より，これをスカラー乗法として（A 上にもともと定まっていた加法・乗法とともに）A が単位的 $\mathbb{C}$-代数をなし，この単位的 $\mathbb{C}$-代数の構造を忘却して得られる単位的 $\mathbb{R}$-代数の構造が A のもとの単位的 $\mathbb{R}$-代数の構造と一致することが容易に確かめられる．よって，複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理・拡張版（定理 4.11）より，A は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．

(II)　次に，A が可換であり，$j^2=-1$ を満たす $j\in A$ が存在しない場合を考える．このとき，T^2+1 は A 上の既約多項式だから，$B=A[T]/(T^2+1)$ は可換体をなす．$j=T+(T^2+1)$ と置くと，$(1,j)$ は B の A 上の基底である．$x+yj\in B$（$x, y\in A$）に対して，

$$\|x+yj\|_B=\|x\|_A+\|y\|_A$$

と定めよう．すると，$\|{-}\|_A$ が A の $\mathbb{R}$-線型空間の構造と整合するノルムであることからただちに，$\|{-}\|_B$ が B の $\mathbb{R}$-線型空間の構造と整合するノルムであることがわかる．さらに，B の元 $z=x+yj$，$z'=x'+y'j$（$x, y, x', y'\in A$）に対して

$$\begin{aligned}
\|zz'\|_B &= \|xx'-yy'\|_A+\|xy'+x'y\|_A\\
&\leq \|xx'\|_A+\|yy'\|_A+\|xy'\|_A+\|x'y\|_A\\
&\leq \|x\|_A\|x'\|_A+\|y\|_A\|y'\|_A+\|x\|_A\|y'\|_A+\|x'\|_A\|y\|_A\\
&\leq (\|x\|_A+\|y\|_A)(\|x'\|_A+\|y'\|_A)\\
&= \|z\|_B\|z'\|_B
\end{aligned}$$

である．したがって，このノルム $\|{-}\|_B$ によって B は単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数をなす．B は可換体であり，$j\in B$ は $j^2=-1$ を満たすのだったから，(I) より，B は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．A は B の真部分単位的 $\mathbb{R}$-代数だが，$\mathbb{C}$ の真部分単位的 $\mathbb{R}$-代数は $\mathbb{R}$ しかないので，A は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{R}$ に同型である．

(III)　最後に，A が非可換である場合を考える．Z を A の中心とすると，Z は A の可換な部分体であり，さらに A の部分単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数でもある．また，A は非可換だから $a\in A\setminus Z$ を 1 つ固定できるが，このとき $Z(a)$ も A の可換な部分体であり，A の部分単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数である．よって，(I), (II) より，Z と $Z(a)$ はそれぞれ単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に同型だが，Z は $Z(a)$ の真部分単位的 $\mathbb{R}$-代数だから，Z は $\mathbb{R}$ に，$Z(a)$ は $\mathbb{C}$ にそれぞれ同型でなければならない．よって，系 3.2 より，A は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{H}$ に同型である．　□

5 Ostrowski の定理

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ を，その標準的な絶対値 $|{-}|$ によって付値体とみなす．

定理 5.1（Ostrowski の定理） $(K, |{-}|_K)$ を（可換とは限らない）Archimedes 的な完備付値体とする．このとき，次の 3 条件のうちただ 1 つが成り立つ．

(i) 体の同型 $\phi\colon K \to \mathbb{R}$ と $0 < s \leq 1$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つ．
(ii) 体の同型 $\phi\colon K \to \mathbb{C}$ と $0 < s \leq 1$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つ．
(iii) 体の同型 $\phi\colon K \to \mathbb{H}$ と $0 < s \leq 1$ が存在して，任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つ．

さらに，(i), (ii), (iii) のそれぞれの場合，$0 < s \leq 1$ の選び方は K に対して（ϕ のとり方によらず）一意的である．逆に，体 K と K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの体の同型 ϕ があるとき，(i), (ii), (iii) にある式によって $|{-}|_K$ を定めると，$(K, |{-}|_K)$ は Archimedes 的な完備付値体となる．

証明 体 K と K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの体の同型 ϕ があるとして，(i), (ii), (iii) にある式によって定まる $|{-}|_K$ を考える．すると，命題 1.6 と命題 1.12 より $|{-}|_K$ は K 上の Archimedes 的な絶対値であり，命題 1.5 より $|{-}|_K$ と $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の標準的な絶対値の ϕ による引き戻しとは同値だから，$(K, |{-}|_K)$ は Archimedes 的な完備付値体となる．

$(K, |{-}|_K)$ を Archimedes 的な完備付値体とする．$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ はどの 2 つも体として同型ではないから，(i), (ii), (iii) のどの 2 つも同時には成り立たない．また，K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの体の同型 ϕ と $0 < s \leq 1$ について，任意の $x \in K$ に対して $|x|_K = |\phi(x)|^s$ が成り立つとすると，$|2|_K = |2|^s = 2^s$ でなければならないから，$0 < s \leq 1$ の選び方は K に対してたかだか一意に定まる．あとは，このような ϕ と s の存在を示せばよい．

$|{-}|_K$ は Archimedes 的だから，K は標数 0 であり（系 1.14），したがって K は素部分体 $\mathbb{Q}$ を含む．$|{-}|_K$ の $\mathbb{Q}$ への制限は $\mathbb{Q}$ 上の Archimedes 的な絶対値だから（系 1.13），$\mathbb{Q}$ 上の絶対値の分類定理（定理 2.2）より，ある $0 < s \leq 1$ が存在して，任意の $\lambda \in \mathbb{Q}$ に対して $|\lambda|_K = |\lambda|_\infty^s$ が成り立つ．特に，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n|_K^{1/s} = n$ だから，系 1.10 より，$|{-}|_K^{1/s}$ は $|{-}|_K$ と同値な K 上の絶対値である．付値体 $(K, |{-}|_K)$ は完備だから，付値体 $(K, |{-}|_K^{1/s})$ も完備である．さらに，任意の $\lambda \in \mathbb{Q}$ と $x \in K$ に対して

$$|\lambda x|_K^{1/s} = |\lambda|_K^{1/s} |x|_K^{1/s} = |\lambda|_\infty |x|_K^{1/s}$$

だから，絶対値 $|{-}|_K^{1/s}$ の乗法性や三角不等式と合わせて，$|{-}|_K^{1/s}$ が K の単位的 $\mathbb{Q}$-代数の構造と整合する K 上の完備なノルムであることがわかる（ここで，$\mathbb{Q}$ は実絶対値 $|{-}|_\infty$ を備えた付値体とみなす）．すなわち，$(K, |{-}|_K^{1/s})$ は単位的 $\mathbb{Q}$-Banach 代数である．完備化によって，$(K, |{-}|_K^{1/s})$ は単位的 $\mathbb{R}$-Banach 代数となる．すると，実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.12）より，K から $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかへの単位的 $\mathbb{R}$-代数の同型 ϕ がとれる．

$|{-}|_K^{1/s}$ と $|\phi(-)|$ はともに K 上の絶対値であり，K の $\mathbb{R}$-線型空間の構造と整合するノルムでもある．K は $\mathbb{R}$ 上有限次元だから，ノルム空間の一般論より，これら 2 つのノルム $|{-}|_K^{1/s}$ と $|\phi(-)|$ は K 上に同じ位相を定める．すなわち，絶対値 $|{-}|_K^{1/s}$ と $|\phi(-)|$ は同値である．したがって命題 1.5 より，ある $t > 0$ が存在して $|{-}|_K^{t/s} = |\phi(-)|$ となるが，一方で $|{-}|_K^{1/s}$ と $|\phi(-)|$ は K の部分体 $\mathbb{R}$ 上で一致するので，$t = 1$ でなければならない．よって，$|{-}|_K^{1/s} = |\phi(-)|$，すなわち $|{-}|_K = |\phi(-)|^s$ である．これで示された． $\square$

付録 A　Frobenius の定理

系 3.2 から，有限次元単位的 $\mathbb{R}$-代数を決定する Frobenius の定理が証明できる．証明は，実係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.12）のそれと並行している．

定理 A.1（Frobenius の定理）　（可換とは限らない）体をなす有限次元単位的 $\mathbb{R}$-代数は，単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ のいずれかに同型である．

証明　A が体をなす有限次元単位的 $\mathbb{R}$-ノルム代数であるとする．証明を 3 つの場合に分ける．

(I)　まず，A が可換であり，$j^2 = -1$ を満たす $j \in A$ が存在する場合を考える．このとき，

$$A' = \{\alpha + \beta j \mid \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\}$$

は A の部分体であって，$\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．A は A' の（可換な）有限次拡大と考えられるが，$A' \cong \mathbb{C}$ は代数閉体だから，$A = A'$ でなければならない．よって，A は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．

(II)　次に，A が可換であり，$j^2 = -1$ を満たす $j \in A$ が存在しない場合を考える．このとき，$T^2 + 1$ は A 上の既約多項式だから，$B = A[T]/(T^2 + 1)$ は可換体をなす．また，B は A 上 2 次元だから，B も有限次元単位的 $\mathbb{R}$-代数である．さらに，$j = T + (T^2 + 1) \in B$ は $j^2 = -1$ を満たす．したがって，(I) より，B は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{C}$ に同型である．A は B の真部分単位的 $\mathbb{R}$-代数だが，$\mathbb{C}$ の真部分単位的 $\mathbb{R}$-代数は $\mathbb{R}$ しかないので，A は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{R}$ に同型である．

(III)　最後に，A が非可換である場合を考える．Z を A の中心とすると，Z は A の可換な部分体であり，さらに A の有限次元単位的 $\mathbb{R}$-代数でもある．また，A は非可換だから $a \in A \setminus Z$ を 1 つ固定できるが，このとき $Z(a)$ も A の可換な部分体であり，A の有限次元単位的 $\mathbb{R}$-代数である．よって，(I), (II) より，Z と $Z(a)$ はそれぞれ単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に同型だが，Z は $Z(a)$ の真部分単位的 $\mathbb{R}$-代数だから，Z は $\mathbb{R}$ に，$Z(a)$ は $\mathbb{C}$ にそれぞれ同型でなければならない．よって，系 3.2 より，A は単位的 $\mathbb{R}$-代数として $\mathbb{H}$ に同型である．□

参考文献

本稿の内容は，主に Bourbaki [3] の第 6 章 6 節による．定理 3.1 については，Palais [6] および Bourbaki [3] の第 6 章 6 節の演習問題 2 を参考にした．複素係数の場合の Gelfand–Mazur の定理（定理 4.8）については，Arveson [1] の 1.6 節を参考にした．Ostrowski [5] は，Ostrowski の定理の原論文である．

[1] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[2] N. Bourbaki（著），山崎 泰郎，清水 達雄（訳），『ブルバキ数学原論 位相 4』，東京図書，1969.

[3] N. Bourbaki（著），中沢 英昭（訳），『ブルバキ数学原論 可換代数 3』，東京図書，1971.

[4] S. Katok, *p-adic Analysis Compared with Real*, American Mathematical Society, 2007.

[5] A. Ostrowski, “Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\psi(x).\psi(y) = \psi(xy)$”, *Acta Mathematica* **41** (1916): 271–284.

[6] R. S. Palais, “The classification of real division algebras”, *The American Mathematical Monthly*, **75**.4 (1968): 366–368.