# von Neumann 代数

箱

2025 年 6 月 28 日

**概要**

Hilbert 空間上の作用素の空間上の基本的な位相について解説した後，von Neumann 代数を定義し，その基本的な性質を見る．後半では，von Neumann 代数の抽象的な同型物である W* 代数を定義し，包絡 W* 代数，W* 代数の特徴付け，前双対における極分解などを扱う．

## 目次

## 記号と用語

- 本稿を通して，特に断らなければ，線型空間などの係数体は $\mathbb{C}$ とし，関数空間は複素数値関数からなるものとする．
- 線型空間 $V$ の代数的双対を $V^\vee$ と書き，位相線型空間 $V$ の位相的双対を $V^*$ と書く．
- ノルム空間 $V$ のノルムを，$\|-\|_V$ あるいは単に $\|-\|$ と書く．内積空間 $V$ の内積を，$\langle -|-\rangle_V$ あるいは単に $\langle -|-\rangle$ と書く．内積は，左の引数に関して共役線型，右の引数に関して線型とする．
- ノルム空間 $V$ における単位閉球を $\mathrm{Ball}(V)$ と書き，単位開球を $\mathrm{Ball}^\circ(V)$ と書く．
- Hilbert 空間に関する記号と用語は，「Hilbert 空間」[10] による．特に，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素全体のなす空間を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$，コンパクト作用素全体のなす空間を $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$，トレースクラス作用素全体のなす空間を $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ と書く．
- Hilbert 空間上の直交射影を，単に射影という．
- $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$e$ をその上の射影とするとき，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，包含写像 $e\mathcal{H} \to \mathcal{H}$，$x\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，射影 $\mathcal{H} \to e\mathcal{H}$ をこの順に合成して得られる $e\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素を，$[x]_e \in \mathscr{L}(e\mathcal{H})$ と書く．
- C* 代数に関する記号と用語は，「C* 代数」[11] による．
- 対合代数 $A$ の Hermite 元全体のなす空間を $A_{\mathrm{h}}$ と書き，正元全体のなす集合を $A_+$ と書く．

# 1 von Neumann 代数

## 1.1 作用素の集合の非退化性

**命題 1.1** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$S$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の随伴で閉じた部分集合とする．$\mathcal{H}$ 上の射影 $e$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $e\mathcal{H}$ は $S$-安定である．
(b) $e$ は $S$ のすべての元と可換である．

特に，$e\mathcal{H}$ が $S$-安定であることとその直交補空間 $(1-e)\mathcal{H}$ が $S$-安定であることとは同値である．

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b) $e\mathcal{H}$ が $S$-安定であるとすると，任意の $x \in S$ に対して $exe = xe$ である．また，この等式の両辺の随伴をとって $x$ を $x^*$ に置き換えれば，$exe = ex$ を得る．よって，$xe = exe = ex$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $e$ が $S$ のすべての元と可換ならば，任意の $x \in S$ に対して $xe\mathcal{H} = ex\mathcal{H} \subseteq e\mathcal{H}$ だから，$e\mathcal{H}$ は $S$-安定である． □

**命題 1.2**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$S$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の随伴で閉じた部分集合とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\overline{S\mathcal{H}}$ と $\bigcap_{x\in S}\operatorname{Ker} x$ は，互いに他の直交補空間である．

**証明**　$\eta\in\mathcal{H}$ と $x\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，

$$\begin{aligned}\eta\perp x\mathcal{H} &\iff \text{任意の } \xi\in\mathcal{H} \text{ に対して } \langle x\xi|\eta\rangle = 0\\ &\iff \text{任意の } \xi\in\mathcal{H} \text{ に対して } \langle \xi|x^*\eta\rangle = 0\\ &\iff x^*\eta = 0\end{aligned}$$

である．よって，$S$ が随伴で閉じていることに注意すれば，

$$(\overline{S\mathcal{H}})^{\perp} = \bigcap_{x\in S}\operatorname{Ker} x^* = \bigcap_{x\in S}\operatorname{Ker} x$$

を得る． □

**定義 1.3（非退化性）**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$S$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の随伴で閉じた部分集合とする．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\overline{S\mathcal{H}}$ を，$S$ の**非退化部分空間**（non-degenerate subspace）という．$\mathcal{H}$ の閉部分線型空間 $\bigcap_{x\in S}\operatorname{Ker} x$ を，$S$ の**純退化部分空間**（purely degenerate subspace）という．$S$ の非退化部分空間が $\mathcal{H}$ 全体である（命題 1.2 より，これは，$S$ の純退化部分空間が $0$ であることと同値である）とき，$S$ は**非退化**（non-degenerate）であるという．

**命題 1.4**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$S$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の随伴で閉じた部分集合とする．$S$ の非退化部分空間の上への射影を $e$ と置くと，$S\subseteq e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ であり，$[S]_e = \{[x]_e \mid x\in S\}\subseteq \mathscr{L}(e\mathcal{H})$ は非退化である．

**証明**　$x\in S$ とすると，$e\mathcal{H} = \overline{S\mathcal{H}}$ は $x\mathcal{H}$ を含むから $ex = x$ であり，$\operatorname{Ker} e = \bigcap_{y\in S}\operatorname{Ker} y$ は $\operatorname{Ker} x$ に含まれるから $xe = x$ である．よって，$S\subseteq e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ である．また，$[S]_e$ の純退化部分空間は

$$\bigcap_{x\in S}\operatorname{Ker}[x]_e = \bigcap_{x\in S}(\operatorname{Ker} x\cap e\mathcal{H}) = \left(\bigcap_{x\in S}\operatorname{Ker} x\right)\cap e\mathcal{H} = 0$$

だから，$[S]_e$ は非退化である． □

## 1.2　二重交換団定理

一般に，代数 $A$ の部分集合 $S$ に対して，$S' = \{y\in A \mid \text{任意の } x\in S \text{ に対して } xy = yx\}$ を，$S$ の（$A$ における）**交換団**（commutant）という．本稿の以下の部分では，特に断らなくても，$S$ の交換団を $S'$ と書く．

$S$ を代数の部分集合とすると，$S\subseteq S''$ であり，また，交換団をとる操作は包含関係を逆転させる．このことより

$$S'\subseteq (S')'' = (S'')'\subseteq S'$$

だから $S' = S'''$ であり，したがって，

$$S' = S''' = S''''' = \cdots, \qquad S'' = S'''' = S'''''' = \cdots$$

が成り立つ．

本稿で主に扱うのは，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とするときの，部分集合 $S\subseteq\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の（$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ における）交換団 $S'$ である．$S'$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の弱閉な部分単位的代数である（弱閉であることは，合成の弱分離連続性（事実 A.1 (1-1)）から従う）．さらに，$S$ が随伴で閉じていれば，$S'$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分単位的対合代数となる．

**補題 1.5** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$I$ を集合とする．写像 $\iota\colon \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I})$ を，$\iota(x) = x^{\widehat{\oplus} I}$ と定める．このとき，部分集合 $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$\iota(S)'' = \iota(S'')$ が成り立つ．

**証明** $y \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I})$ とし，その $(i,j)$-成分を $y_{ij} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ と書く．$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ とすると，$x^{\widehat{\oplus} I} y$ の $(i,j)$-成分は $xy_{ij}$ であり，$yx^{\widehat{\oplus} I}$ の $(i,j)$-成分は $y_{ij}x$ だから，

$$\iota(S)' = \{y \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I}) \mid \text{任意の } i,\, j \in I \text{ に対して，} (i,j)\text{-成分 } y_{ij} \text{ が } S' \text{ に属する}\}$$

となる．特に，すべての行列単位 $e_{ij}$（$(i,j)$-成分が $1_{\mathcal{H}}$ であり，その他の成分がすべて $0$ である $\mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus} I})$ の元）は $\iota(S)'$ に属するから，$\iota(S)''$ の任意の元は $z \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を用いて $z^{\widehat{\oplus} I}$ と書ける．また，$y \in \iota(S)'$ の $(i,j)$-成分を $y_{ij} \in S'$ と書くと，$z^{\widehat{\oplus} I} y$ の $(i,j)$-成分は $zy_{ij}$ であり，$yz^{\widehat{\oplus} I}$ の $(i,j)$-成分は $y_{ij}z$ だから，

$$z^{\widehat{\oplus} I} \in \iota(S)'' \iff z \in S''$$

である．よって，$\iota(S)'' = \iota(S'')$ である． □

**補題 1.6** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$A$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の非退化な部分対合代数とする．任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{H}$ の部分線型空間 $A\xi$ は，$A''\xi$ において稠密である．

**証明** まず，$A$ が非退化であることより $\xi \in \overline{A\xi}$ だから，$A''\xi \subseteq A''(\overline{A\xi})$ である．次に，$\overline{A\xi}$ の上への射影を $e \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ と置くと，$\overline{A\xi}$ は $A$-安定だから $e \in A' = A'''$ であり，したがって，$\overline{A\xi}$ は $A''$-安定である．よって，$A''\xi \subseteq A''(\overline{A\xi}) \subseteq \overline{A\xi}$ である． □

**定理 1.7（二重交換団定理）** $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．非退化な部分対合代数 $A \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，次の集合は一致する．

(a) $A$ の弱閉包.
(b) $A$ の強閉包.
(c) $A$ の強対合閉包.
(d) $A$ の超弱閉包.
(e) $A$ の超強閉包.
(f) $A$ の超強対合閉包.
(g) $A$ の二重交換団 $A''$.

**証明** (a) = (b) = (c)，(d) = (e) = (f) 一般に，任意の部分集合 $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$S$ の弱凸閉包，強凸閉包，強対合凸閉包は一致し，$S$ の超弱凸閉包，超強凸閉包，超強対合凸閉包は一致する（事実 A.4，事実 A.8）．

(a) ⊇ (d) 作用素位相の強弱関係から明らかである．

(e) ⊇ (g) 写像 $\iota\colon \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}})$ を，$\iota(x) = x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と定める．$A$ が非退化であることより $\iota(A)$ も非退化だから，$\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ とすると，$\iota(A)\boldsymbol{\xi}$ は $\iota(A)''\boldsymbol{\xi} = \iota(A'')\boldsymbol{\xi}$ において稠密である．よって，任意の $x \in A''$ と $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ および $\epsilon > 0$ に対して，ある $y \in A$ が存在して，

$$\|(y^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}} - x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}})\boldsymbol{\xi}\| \le \epsilon$$

を満たす．これは，$A$ が $A''$ において超強稠密であることを意味する．

(g) ⊇ (a) 二重交換団 $A''$ は，$A$ を含む弱閉集合だから，$A$ の弱閉包を含む． □

**系 1.8**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分対合代数 $A$ に対して，その弱閉包，強閉包，強対合閉包，超弱閉包，超強閉包，超強対合閉包は一致する．

**証明**　$A$ の非退化部分空間の上への射影を $e$ と置くと，$A \subseteq e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ であり，$[A]_e$ は $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ の非退化な部分対合代数である（命題 1.4）．二重交換団定理（定理 1.7）より，$[A]_e$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉包は一致する．$e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ において弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉であり，写像 $[-]_e\colon e\mathscr{L}(\mathcal{H})e \to \mathscr{L}(e\mathcal{H})$ は弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合同相だから（事実 A.14），$A$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉包は一致する．□

## 1.3　von Neumann 代数

**定義 1.9（von Neumann 代数）**　Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）とは，部分単位的対合代数 $M \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ であって $M'' = M$ を満たすものをいう．

**注意 1.10**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 二重交換団定理（定理 1.7）より，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の非退化な部分対合代数 $M$ が von Neumann 代数であるための必要十分条件は，$M$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ において弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉である（これらはすべて同値である）ことである．

(2) $S$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の随伴で閉じた部分集合とすると，$S'$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分単位的対合代数であり，$S''' = S'$ を満たすから，$S'$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．特に，写像 $M \mapsto M'$ は，$\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数全体のなす集合上の反自己順序同型である．

(3) $M$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉な（系 1.8 より，これらは同値である）部分対合代数とする．このとき，$M + \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉な部分単位的対合代数だから（一般に，位相線型空間において，閉部分線型空間と有限次元部分線型空間の和は閉部分線型空間となる．Bourbaki [1, §I.2.3, Corollaire 4 du Théorème 2] を参照のこと），(1) より，$\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．

(4) 引き続き，(3) の状況を考える．$M$ の非退化部分空間の上への射影を $e$ と置くと，$M \subseteq e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ であり，$[M]_e$ は $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ の非退化な部分対合代数であり（命題 1.4），写像 $x \mapsto [x]_e$ は $e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ への弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合同相な単位的対合同型を与える（事実 A.14 (2)）．したがって，(1) より，$[M]_e$ は $e\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であり，$M$ はこの von Neumann 代数と対合同型である．特に，$M$ は $e$ を乗法単位元にもつ．

**例 1.11**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とすると，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．

**例 1.12**　$(\Omega, \mu)$ を測度空間とする．本質的有界な可測関数（の同値類）全体のなす単位的 C* 代数 $L^\infty(\Omega, \mu)$（通常の積を乗法とし，複素共役を対合とする）を考え，掛け算による $L^2$ 空間上の表現を $\pi\colon L^\infty(\Omega, \mu) \to \mathscr{L}(L^2(\Omega, \mu))$ と書く．すなわち，$\pi(x)f = xf$（$\omega \in \Omega$）と定める．容易に確かめられるように，$(\Omega, \mu)$ が半有限[*1] ならば，$\pi$ は等長である．

---

[*1] 測度空間 $(\Omega, \mu)$ が**半有限**（semifinite）であるとは，可測集合 $A \subseteq \Omega$ であって $\mu(A) > 0$ を満たす任意のものに対して，可測集合 $B \subseteq A$ であって $0 < \mu(B) < \infty$ を満たすものが存在することをいう．

以下では，測度空間 $(\Omega,\mu)$ が分解可能[*2] であるとして，$\pi(L^\infty(\Omega,\mu))' = \pi(L^\infty(\Omega,\mu))$ であることを示す．これは，$\pi(L^\infty(\Omega,\mu))$ が $L^\infty(\Omega,\mu)$ 上の極大可換 von Neumann 代数である（すなわち，$L^\infty(\Omega,\mu)$ 上の可換 von Neumann 代数の中で，包含関係に関して極大である）ことを意味する．$\pi(L^\infty(\Omega,\mu))$ は可換だから，$\pi(L^\infty(\Omega,\mu)) \subseteq \pi(L^\infty(\Omega,\mu))'$ である．あとは，逆向きの包含を示せばよい．

まず，$(\Omega,\mu)$ が有限測度空間である場合を考える．$T \in \pi(L^\infty(\Omega,\mu))'$ として，$t = T1 \in L^2(\Omega,\mu)$ と置くと，任意の $x \in L^\infty(\Omega,\mu)$ に対して，

$$Tx = T\pi(x)1 = \pi(x)T1 = tx$$

である．$f \in L^2(\Omega,\mu)$ として，$L^\infty(\Omega,\mu)$ の点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって $f$ に $L^2$ 収束かつ概収束するものをとる．すると，$n \to \infty$ のとき $Tf_n$ は，$L^2$ 収束する一方で，$Tf_n = tf_n$ より $tf$ に概収束もする．したがって，$Tf = tf$ である．この等式から容易に確かめられるように，$|t|$ の本質的上限は，作用素ノルム $\|T\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))}$ で上から抑えられる．よって，$t \in L^\infty(\Omega,\mu)$ かつ $T = \pi(t)$ である．これで，主張が示された．

次に，$(\Omega,\mu)$ が分解可能な測度空間であり，有限測度空間の族 $((\Omega_i,\mu_i))_{i\in I}$ の直和に分解されるとする．このとき，各 $L^2(\Omega_i,\mu_i)$ を $L^2(\Omega,\mu)$ の部分線型空間とみなすと，Hilbert 直和分解 $L^2(\Omega,\mu) = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} L^2(\Omega_i,\mu_i)$ が成立し，$L^2(\Omega_i,\mu_i)$ の上への直交射影は $\pi(\chi_{\Omega_i})$（$\chi_{\Omega_i}$ は $\Omega_i$ の特性関数を表す）と書ける．$T \in \pi(L^\infty(\Omega,\mu))'$ とすると，$T$ は各 $\pi(\chi_{\Omega_i})$ と可換だから，$T = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} T_i$（$T_i \in \mathscr{L}(L^2(\Omega_i,\mu_i))$）と書ける．各 $i \in I$ に対して，$T \in \pi(L^\infty(\Omega,\mu))'$ より $T_i \in \pi(L^\infty(\Omega_i,\mu_i))'$ だから，前段の結果より，ある $t_i \in L^\infty(\Omega_i,\mu_i)$ が存在して，$T_i = \pi(t_i)$ と書ける．さらに，$\pi$ の等長性より，この $t_i$ は

$$\|t_i\|_\infty = \|T_i\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega_i,\mu_i))} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))}$$

を満たす．そこで，関数 $t\colon \Omega \to \mathbb{C}$ を各 $i \in I$ に対して $t|_{\Omega_i} = t_i$ として定めると，$t \in L^\infty(\Omega,\mu)$ であり，

$$T = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} T_i = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} \pi(t_i) = \pi(t)$$

が成り立つ．これで，主張が示された．

**定義 1.13（部分 von Neumann 代数）** $M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．

(1) 部分集合 $N \subseteq M$ であって $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数となるものを，$M$ の**部分 von Neumann 代数**（von Neumann subalgebra）という．
(2) 部分集合 $S \subseteq M$ に対して，$S$ を含む $M$ の部分 von Neumann 代数の中で最小のものが存在する（$S$ を含む $M$ の部分 von Neumann 代数すべての交叉がそれにあたる）．これを，**$S$ が生成する $M$ の部分 von Neumann 代数**という．$S$ が生成する $M$ の部分 von Neumann 代数が $M$ 自身であるとき，$S$ は $M$ を（von Neumann 代数として）**生成する**（generate）という．

$N$ が $M$ の部分 von Neumann 代数であるための必要十分条件は，$N$ が $M$ の部分単位的対合代数であり，かつ $N$ が $M$ において弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉である（二重交換団定理（定理 1.7）より，これらは同値である）ことである．たとえば，von Neumann 代数 $M$ の中心 $\mathbf{Z}(M) = M \cap M'$ は，$M$ の部分 von Neumann 代数である．

[*2] 測度空間 $(\Omega,\mu)$ が**分解可能**（decomposable）であるとは，それが有限測度空間の族の直和に（可測構造や測度も込めて）分解されることをいう．

**命題 1.14**　$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が $M$ に属するための必要十分条件は，任意の $u \in \mathscr{U}(M')$ に対して $uxu^{-1} = x$ であることである．

**証明**　C* 代数の一般論（事実 B.2）より $M' = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \mathscr{U}(M')$ だから，

$$x \in M \iff x \in M'' \iff x \text{ が } \mathscr{U}(M') \text{ の任意の元と可換}$$

である． □

## 1.4　von Neumann 代数の射影束

一般に，対合代数 $A$ の冪等な Hermite 元（すなわち，$x^2 = x = x^*$ を満たす元 $x$）を，$A$ の**射影**（projection）といい，その全体のなす集合を $\mathbf{P}(A)$ と書く．また，中心 $\mathbf{Z}(A)$ の射影を，$A$ の**中心射影**（central projection）といい，その全体のなす集合を $\mathbf{PZ}(A)$ と書く．

$(e_i)_{i \in I}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の射影（すなわち，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の射影）の族とする．$\overline{\sum_{i \in I} e_i \mathcal{H}}$ の上への射影を，$(e_i)_{i \in I}$ の**上限**といい，$\bigvee_{i \in I} e_i$ と書く．$\bigcap_{i \in I} e_i \mathcal{H}$ の上への射影を，$(e_i)_{i \in I}$ の**下限**といい，$\bigwedge_{i \in I} e_i$ と書く．射影 $e, f \in \mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ に対しては

$$e \leq f \iff e\mathcal{H} \subseteq f\mathcal{H}$$

だから，射影の上限・下限は，$\mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ における順序 $\leq$ に関する上限・下限にほかならない．したがって，$\mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ は完備束をなす．

$(e_i)_{i \in I}$ が Hilbert 空間上の射影の直交族である場合には，その上限 $\bigvee_{i \in I} e_i$ を，$\sum_{i \in I} e_i$ とも書く．これは，$(e_i)_{i \in I}$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合位相に関する総和でもある（一般には，ノルム位相に関する総和ではない）．

**命題 1.15**　von Neumann 代数 $M$ の射影の族 $(e_i)_{i \in I}$ に対して，その上限 $\bigvee_{i \in I} e_i$ と下限 $\bigwedge_{i \in I} e_i$ は $M$ に属する．

**証明**　射影 $e$ が $M = M''$ に属するための必要十分条件は，$e\mathcal{H}$ が $M'$-安定であることである（命題 1.1）．任意の $i \in I$ に対して $e_i \mathcal{H}$ が $M'$-安定ならば，$\overline{\sum_{i \in I} e_i \mathcal{H}}$ と $\bigcap_{i \in I} e_i \mathcal{H}$ も $M'$-安定だから，主張が成り立つ． □

命題 1.15 より，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数 $M$ に対して，$\mathbf{P}(M)$ は $\mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ の部分完備束である．そのため，von Neumann 代数 $M$ に対しては，$\mathbf{P}(M)$ を $M$ の**射影束**（projection lattice）という．

## 1.5　von Neumann 代数と有界 Borel 可測関数算

**命題 1.16**　$M$ を von Neumann 代数とする．正規元 $x \in M$ と有界 Borel 可測関数 $f \colon \operatorname{Sp}_M(x) \to \mathbb{C}$ に対して，有界 Borel 可測関数算の結果 $f(x)$ はふたたび $M$ に属する．

**証明**　一般に，連続正規作用素 $x$ と可換な連続線型作用素は，その任意の有界 Borel 可測関数算の結果 $f(x)$ とも可換である（「スペクトル分解」[9, 定理 3.21] を参照のこと）．よって，$x \in M$ ならば，$f(x) \in M'' = M$ である． □

**系 1.17**　von Neumann 代数 $M$ は，その射影束が張る線型空間 $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \mathbf{P}(M)$ のノルム閉包に一致する．

**証明**　$x \in M_{\mathrm{h}}$ とし，$\mathrm{Sp}_M(x)$ 上の関数 $t \mapsto t$ に一様収束する Borel 可測単関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．すると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathbf{P}(M)$ であり（命題 1.16），$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は $x$ にノルム収束する．よって，$M$ は $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathbf{P}(M)$ のノルム閉包に一致する．□

**系 1.18**　von Neumann 代数 $M$ の元 $x$ がユニタリであるための必要十分条件は，ある自己随伴元 $h \in M$ が存在して，$x = e^{ih}$ と書けることである．

**証明**　<u>十分性</u>　一般の単位的 C* 代数において，$h$ が Hermite ならば，$e^{ih}$ はユニタリである．

<u>必要性</u>　$x \in M$ がユニタリであるとする．多価関数 $-i\log$ の $\mathbb{U} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ 上での有界 Borel 可測な分岐を一つとって $f$ とすれば，命題 1.16 より $f(x) \in M$ であり，$f$ が実数値であることより $f(x)$ は自己随伴であり，$e^{if(\lambda)} = \lambda$（$\lambda \in \mathbb{U}$）であることより $e^{if(x)} = x$ である．□

**命題 1.19**　$M$ を von Neumann 代数とする．$x \in M$ の極分解を $(u, |x|)$ とすると，$|x|$, $u$, $\mathrm{s_R}(x)$, $\mathrm{s_L}(x)$ はすべて $M$ に属する．

**証明**　$v$ を $M'$ に属するユニタリ作用素とすると，$x = vxv^{-1}$ だから，$(vuv^{-1}, v|x|v^{-1})$ も $x$ の極分解である．したがって，極分解の一意性より，$v|x|v^{-1} = |x|$ かつ $vuv^{-1} = u$ である．よって，$|x|$, $u \in M'' = M$ である（命題 1.14）．また，$\mathrm{s_R}(x) = \mathrm{s_R}(u) = u^*u$ と $\mathrm{s_L}(x) = \mathrm{s_L}(u) = uu^*$ も $M$ に属する．□

## 1.6　von Neumann 代数のイデアル

von Neumann 代数の左イデアルの性質を見る（右イデアルについても，対応する主張が成り立つ）．

**命題 1.20**　$M$ を von Neumann 代数とし，$I$ をその左イデアルとする．$x \in I_{\mathrm{h}}$ に対して，その正の部分 $x^+$ と負の部分 $x^-$ も $I$ に属する．

**証明**　$x \in I_{\mathrm{h}}$ とすると，$\chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x) \in M$ だから（命題 1.16），$x^+ = \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)x \in I$ である．□

**定理 1.21**　von Neumann 代数 $M$ の左イデアル $I$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $I$ は $M$ において弱閉である．
(b) $I$ は $M$ において強閉である．
(c) $I$ は $M$ において強対合閉である．
(d) $I$ は $M$ において超弱閉である．
(e) $I$ は $M$ において超強閉である．
(f) $I$ は $M$ において超強対合閉である．
(g) ある射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ を用いて $I = Me$ と書ける．

さらに，射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ に対して $Me$ を対応させる写像は，射影束 $\mathbf{P}(M)$ から，上記の同値な条件を満たす左イデアル $I$ 全体が包含関係に関してなす順序集合への，順序同型である．

**証明**　(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (f)，(a) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (f)　作用素位相の強弱関係から明らかである．

(f) $\Longrightarrow$ (g)　$I$ が $M$ において超強対合閉であるとする．すると，$I$ は $M$ においてノルム閉でもあるから，$I$ に属するノルム 1 以下の正元からなる増加ネット $(u_j)_{j\in J}$ であって，任意の $x \in I$ に対して $(xu_j)_{j\in J}$ が $x$

にノルム収束するものが存在する（事実 B.3）．この $(u_j)_{j\in J}$ は有界増加ネットだから，その上限 $e \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_+$ に超強対合収束するが（事実 A.12），$I$ は（$M$ において，したがって $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ において）超強対合閉だから，$e \in I_+$ となる．ノルム有界集合上では合成は超強対合連続だから（事実 A.5 (1-2)），任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して，$(xu_j)_{j\in J}$ は $xe$ に超強対合収束する．以上の二つの極限を比較して，任意の $x \in I$ に対して $xe = x$ であることを得る．特に，$e^2 = e$ だから，$e$ は $M$ の射影である．また，$Me \subseteq I = Ie \subseteq Me$ だから，$I = Me$ である．

(g) $\Longrightarrow$ (a)　$e \in M$ を射影とすると，$Me = \{x \in M \mid xe = x\}$ だから，合成の弱分離連続性（事実 A.1 (1-1)）より，$Me$ は $M$ において弱閉である．

<u>最後の主張</u>　射影 $e, f \in M$ に対して

$$Mf \subseteq Me \iff f \in Me \iff fe = f \iff f \leq e$$

だから，写像 $e \mapsto Me$ は主張の意味で順序同型である．□

**系 1.22**　von Neumann 代数 $M$ の左イデアル $I$ に対して，その弱閉包，強閉包，強対合閉包，超弱閉包，超強閉包，超強対合閉包は一致し，これらはふたたび $M$ の左イデアルである．

**証明**　$I$ の弱閉包，強閉包，強対合閉包は一致する（事実 A.4）．この共通の閉包を $J_1$ と置くと，固定した連続線型作用素 $x$ を左から合成する写像 $y \mapsto xy$ が弱連続であることより（事実 A.1 (1-1)），$J_1$ は $M$ の左イデアルである．同様に，$I$ の超弱閉包，超強閉包，超強対合閉包は一致する（事実 A.8）．この共通の閉包を $J_2$ と置くと，固定した連続線型作用素 $x$ を左から合成する写像 $y \mapsto xy$ が超弱連続であることより（事実 A.5 (1-1)），$J_2$ は $I$ の左イデアルである．さらに，定理 1.21 より，$J_2$ は弱閉でもあるから，$J_2 = J_1$ である．これで，主張が示された．□

**系 1.23**　$M$ を von Neumann 代数とする．$(e_i)_{i\in I}$ を $M$ の射影の族とし，その上限を $\overline{e}$，下限を $\underline{e}$ と置く．

(1) $M\overline{e}$ は，$\sum_{i\in I} Me_i$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合位相に関する共通の閉包（系 1.22）に等しい．
(2) $M\underline{e} = \bigcap_{i\in I} Me_i$ である．

**証明**　写像 $e \mapsto Me$ は $M$ の射影束から $M$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合位相に関する閉左イデアル全体がなす順序集合への順序同型だから（定理 1.21），この写像を通して二つの順序集合における上限・下限が対応する．主張は，このことを述べたものである．□

von Neumann 代数の両側イデアルの性質を見る．

**補題 1.24**　$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．正元 $x, y \in M_+$ が $y \leq x$ を満たすならば，ある $a \in M$ が存在して，$ax^{1/2} = y^{1/2}$ が成り立つ．

**証明**　$0 \leq y \leq x$ だから，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\|y^{1/2}\xi\|^2 = \langle \xi | y\xi \rangle \leq \langle \xi | x\xi \rangle = \|x^{1/2}\xi\|^2$$

である．したがって，$\overline{x^{1/2}\mathcal{H}}$ から $\mathcal{H}$ への連続線型作用素 $a_0$ であって，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して $a_0 x^{1/2}\xi = y^{1/2}\xi$ を満たすものが一意に存在する．この $a_0$ を，直交補空間 $(\overline{x^{1/2}\mathcal{H}})^\perp$ 上では $0$ として $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素に拡張したものを，$a$ と書く．$a$ は，$\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素であって，$ax^{1/2} = y^{1/2}$ かつ $(\overline{x^{1/2}\mathcal{H}})^\perp \subseteq \operatorname{Ker} a$ を

満たす唯一のものである．ここで，$u \in \mathscr{U}(M')$ とすると，$uau^{-1}$ もこれらの条件を満たすから，一意性より $uau^{-1} = a$ が成り立つ．よって，$a \in M$ である（命題 1.14）． □

**命題 1.25**　$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とし，$I$ をその両側イデアルとする．

(1) $I$ は随伴で閉じている．
(2) $I_{\mathrm{h}} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} I_+$ かつ $I = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} I_+$ である．
(3) $x, y \in M_+$ について，$x \in I$ かつ $y \le x$ ならば，$y \in I$ である．

**証明**　(1)　$x \in I$ の極分解を $(u, |x|)$ とすると，$u \in M$ だから（命題 1.19），$x^* = |x|u^* = u^*xu^* \in I$ である．

(2)　命題 1.20 より，$I_{\mathrm{h}}$ の元の正の部分・負の部分は $I_+$ に属するから，$I_{\mathrm{h}} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} I_+$ である．また，(1) より，$I$ の元の実部・虚部は $I_{\mathrm{h}}$ に属するから，$I = I_{\mathrm{h}} + iI_{\mathrm{h}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} I_+$ である．

(3)　$x, y \in M_+$ が $x \in I$ かつ $y \le x$ を満たすとすると，補題 1.24 よりある $a \in M$ が存在して $ax^{1/2} = y^{1/2}$ を満たすから，$y = y^{1/2}(y^{1/2})^* = axa^* \in I$ となる． □

**命題 1.26**　von Neumann 代数 $M$ の射影 $e$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $e$ は $M$ の中心射影である．
(b) $Me$ は $M$ の両側イデアルである．

**証明**　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$e$ が $M$ の中心射影ならば，$Me = eM$ だから，$Me$ は両側イデアルである．

(b) $\Longrightarrow$ (a)　$Me$ が $M$ の両側イデアルであるとすると，$Me = (Me)^* = eM$ だから（命題 1.25 (1)），任意の $y \in Me$ に対して $ye = ey = y$ である．$x \in M$ として，$y = xe, ex$ とすれば，$xe = exe = ex$ を得る．よって，$e$ は $M$ の中心射影である． □

## 1.7　von Neumann 代数の直和と簡約

**命題 1.27**　各 $i \in I$ に対して，$M_i$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}_i$ 上の von Neumann 代数とする．$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{H}_i$ と置き，

$$M = \left\{ \widehat{\bigoplus_{i\in I}} x_i \;\middle|\; \text{各 } i \in I \text{ に対して } x_i \in M_i,\ \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty \right\} \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$$

と定めると，$M$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．

**証明**　$M$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分単位的対合代数であることは，容易に確かめられる．また，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ の $(i, j)$-成分を $x_{ij}$ と書くと，$x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が $M$ に属するための必要十分条件は，任意の $i \in I$ に対して $x_{ii} \in M$ であり，かつ任意の異なる 2 元 $i, j \in I$ に対して $x_{ij} = 0$ であることである．したがって，$M$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ において弱閉である（事実 A.1 (1-1)）．よって，$M$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である． □

**定義 1.28（von Neumann 代数の直和）**　命題 1.27 の状況で，$M$ を，von Neumann 代数の族 $(M_i)_{i\in I}$ の**直和**（direct sum）という．

**事実 1.29（Krein–Šmulian の定理）**　$V$ を Banach 空間とする．$V^*$ の部分線型空間 $M$ に対して，次の 3 条件は同値である．

(a) $M$ は $V^*$ において汎弱閉である．

(b) $\mathrm{Ball}(M)$ は $V^*$ において汎弱閉である．

(c) $\mathrm{Ball}(M)$ は $V^*$ において汎弱コンパクトである．

同値性 (a) $\iff$ (b) の証明は，Bourbaki [1, §IV.3.5, Corollaire 3 du Théorème 1] や宮島 [7, 定理 5.3] を参照のこと．同値性 (b) $\iff$ (c) は，Banach–Alaoglu の定理から従う．

**命題 1.30**　$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とし，$e$ を $M$ または $M'$ の射影とする．このとき，$[M]_e = \{[x]_e \mid x \in M\}$ は $e\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であり，$[M]'_e = [M']_e$ が成り立つ．

**証明**　<u>$e$ が $M'$ の射影である場合</u>　このとき，写像 $x \mapsto [x]_e$ は，$M$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ への超弱連続な単位的対合準同型である（事実 A.5 (1-1)）．閉球 $2\,\mathrm{Ball}(M) = M \cap 2\,\mathrm{Ball}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ は超弱コンパクトだから（事実 A.10），その像 $[2\,\mathrm{Ball}(M)]_e$ も超弱コンパクトである．$\mathrm{Ball}([M]_e) \subseteq [2\,\mathrm{Ball}(M)]_e$ だから（事実 B.4），$\mathrm{Ball}([M]_e) = [2\,\mathrm{Ball}(M)]_e \cap \mathrm{Ball}(\mathscr{L}(e\mathcal{H}))$ であり，閉球 $\mathrm{Ball}(\mathscr{L}(e\mathcal{H}))$ は超弱コンパクトだから（事実 A.10），$\mathrm{Ball}([M]_e)$ も超弱コンパクトである．ここで，$\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ を $\mathscr{L}^1(e\mathcal{H})$ の双対空間と同一視して [10, 定理 4.41]，Krein–Šmulian の定理（事実 1.29）を適用すれば，$[M]_e$ が $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ において超弱閉であることがわかる．よって，$[M]_e$ は $e\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．

$[M]'_e = [M']_e$ を示す．$e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ への単位的対合同型 $x \mapsto [x]_e$ を通して（事実 A.14 (2)），$eMe$ と $eM'e$ がそれぞれ $[M]_e$ と $[M']_e$ に対応するから，$eMe$ の $e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ における交換団が $eM'e$ であることを示せばよい．$x \in M$，$x' \in M'$ とすると

$$(exe)(ex'e) = exx'e = ex'xe = (ex'e)(exe)$$

だから，$eMe$ の元と $eM'e$ の元は可換である．逆に，$y \in e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ が $eMe$ のすべての元と可換であるとすると，任意の $x \in M$ に対して

$$xy = exey = yexe = yx$$

だから，$y \in M' \cap e\mathscr{L}(\mathcal{H})e = eM'e$ である．これで，主張が示された．

<u>$e$ が $M$ の射影である場合</u>　$M'$ に対して前項の結果を適用すれば，$[M']'_e = [M'']_e = [M]_e$ を得る．したがって，$[M]_e$ は von Neumann 代数である．また，等式 $[M']'_e = [M]_e$ の両辺の交換団をとれば，$[M']_e = [M']''_e = [M]'_e$ を得る． □

**定義 1.31（von Neumann 代数の簡約）**　命題 1.30 の状況で，$[M]_e$ を，$M$ の $e$ による（あるいは，$e\mathcal{H}$ への）**簡約**（reduction）という．

## 1.8　稠密性定理

**補題 1.32**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．任意の有界連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して，連続関数算が定める写像 $f\colon \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ は，強連続である．

**証明**　連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ であって連続関数算が定める写像 $f\colon \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ が強連続であるもの全体のなす線型空間を，$\mathscr{F}$ と置く．すべての有界連続関数が $\mathscr{F}$ に含まれることを示したい．まず，次の主張を示す．

**主張 1.33**　$\mathscr{F}$ について，次が成り立つ．

(1) $f, g \in \mathscr{F}$ であり，これらのいずれかが有界ならば，$fg \in \mathscr{F}$ である．

(2) $f \in \mathscr{F}$ ならば，$\overline{f} \in \mathscr{F}$ である．

(3) $1/(1+t^2), t/(1+t^2) \in \mathscr{F}$ である（ここで，$\mathbb{R}$ 上の関数 $t \mapsto t$ を，単に $t$ と書いた）．

**主張 1.33 の証明**　(1)　$S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ をノルム有界集合とすると，合成は $S \times \mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上で強連続である（事実 A.1 (1-2)）．主張は，ここから従う．

(2)　随伴をとる写像 $x \mapsto x^*$ が連続正規作用素全体のなす集合上で強連続であること（事実 A.1 (2-2)）から従う．

(3)　$x, y \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ とすると，

$$\begin{aligned}
&y(1+y^2)^{-1} - x(1+x^2)^{-1} \\
&= (1+y^2)^{-1}(y(1+x^2) - (1+y^2)x)(1+x^2)^{-1} \\
&= (1+y^2)^{-1}(y-x)(1+x^2)^{-1} - (1+y^2)^{-1}y(y-x)x(1+x^2)^{-1}
\end{aligned}$$

だから，任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|(y(1+y^2)^{-1} - x(1+x^2)^{-1})\xi\| \\
&\le \|(1+y^2)^{-1}(y-x)(1+x^2)^{-1}\xi\| + \|(1+y^2)^{-1}y(y-x)x(1+x^2)^{-1}\xi\| \\
&\le \|(y-x)(1+x^2)^{-1}\xi\| + \|(y-x)x(1+x^2)^{-1}\xi\|
\end{aligned}$$

である．$x$ を固定して，$y$ が $x$ に強収束するとすると，上式の最右辺は 0 に収束する．よって，$t/(1+t^2) \in \mathscr{F}$ である．また，明らかに $1, t \in \mathscr{F}$ だから，(1) より，$1/(1+t^2) = 1 - t \cdot t/(1+t^2) \in \mathscr{F}$ である．　//

以上を踏まえて，補題を証明する．まず，無限遠で消える連続関数全体のなす空間 $C_0(\mathbb{R})$ が $\mathscr{F}$ に含まれることを示す．$\mathscr{F}_0 = \mathscr{F} \cap C_0(\mathbb{R})$ と置くと，主張 1.33 より，$\mathscr{F}_0$ は $C_0(\mathbb{R})$ の部分対合代数であり，$\mathscr{F}_0$ は $\mathbb{R}$ の各点で消えず，かつ $\mathbb{R}$ の異なる 2 点を分離する．よって，Stone–Weierstrass の定理より，$\mathscr{F}_0 = C_0(\mathbb{R})$ である．すなわち，$C_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{F}$ である．

次に，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を有界連続関数とする．前段の結果より，$f \cdot 1/(1+t^2), f \cdot t/(1+t^2) \in C_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{F}$ である．また，$f \cdot t/(1+t^2), t \in A$ であり，$f \cdot t/(1+t^2)$ は有界だから，これらの積 $f \cdot t^2/(1+t^2)$ も $A$ に属する（主張 1.33 (1)）．よって，$f = f \cdot 1/(1+t^2) + f \cdot t^2/(1+t^2) \in \mathscr{F}$ である．これで，主張が示された．　□

**定理 1.34（稠密性定理）**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$A$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分対合代数，$M$ をその弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉包（系 1.8 より，これらは一致する）とする．

(1) $A_{\mathrm{h}}$ は $M_{\mathrm{h}}$ において超強対合稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強稠密でもある）．

(2) $\mathrm{Ball}(A_{\mathrm{h}})$ は $\mathrm{Ball}(M_{\mathrm{h}})$ において超強対合稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強稠密でもある）．

(3) $\mathrm{Ball}(A)$ は $\mathrm{Ball}(M)$ において超強対合稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強稠密でもある）．

(4) $A$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分単位的 C* 代数であるとする．このとき，$\mathscr{U}(A)$ は $\mathscr{U}(M)$ において超強対合稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強稠密でもある）．

**証明**　$A$ のノルム閉包 $\overline{A}$ を考えると，$A_{\mathrm{h}}, \mathrm{Ball}(A_{\mathrm{h}}), \mathrm{Ball}(A)$ はそれぞれ $(\overline{A})_{\mathrm{h}}, \mathrm{Ball}((\overline{A})_{\mathrm{h}}), \mathrm{Ball}(\overline{A})$ においてノルム稠密であり，したがって超強対合稠密でもある．そこで，$\overline{A}$ を改めて $A$ と置き直すことで，一般性を失わず，(1), (2), (3) においても $A$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分 C* 代数であると仮定する．

(1)　$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto (x+x^*)/2$ は，超強対合連続であり（事実 A.5 (2-1)），$A$ と $M$ をそれぞれちょうど $A_{\mathrm{h}}$ と $M_{\mathrm{h}}$ に移す．$A$ は $M$ において超強対合稠密だから，$A_{\mathrm{h}}$ は $M_{\mathrm{h}}$ において超強対合稠密である．

(2)　関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq -1) \\ t & (-1 \leq t \leq 1) \\ 1 & (t \geq 1) \end{cases}$$

と定め，連続関数算が定める写像 $f\colon \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を考える．任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ に対して $f(x) \in \mathrm{Ball}(\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}})$ であり，$x \in \mathrm{Ball}(\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}})$ に対しては $f(x) = x$ だから，$f(A_{\mathrm{h}}) = \mathrm{Ball}(A_{\mathrm{h}})$ かつ $f(M_{\mathrm{h}}) = \mathrm{Ball}(M_{\mathrm{h}})$ である．補題 1.32 よりこの写像 $f\colon \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ は強連続であり，(1) より $A_{\mathrm{h}}$ は $M_{\mathrm{h}}$ において強稠密だから，$\mathrm{Ball}(A_{\mathrm{h}})$ は $\mathrm{Ball}(M_{\mathrm{h}})$ において強稠密である．$\mathrm{Ball}(\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}})$ 上では強位相と超強対合位相は一致するから（事実 A.11，超強対合位相の定義），$\mathrm{Ball}(A_{\mathrm{h}})$ は $\mathrm{Ball}(M_{\mathrm{h}})$ において超強対合稠密でもある．

(3)　写像

$$c_{12}\colon \mathscr{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}), \quad x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto x_{12}$$

は，超強対合連続である（事実 A.14 (2)）．また，$x \in \mathrm{Ball}(\mathscr{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}))$ ならば $c_{12}(x) \in \mathrm{Ball}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ であり，$y \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して

$$x = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})_{\mathrm{h}}$$

と定めれば $c_{12}(x) = y$ となる．したがって，

$$c_{12}(\mathrm{Ball}(\mathrm{Mat}(2, A)_{\mathrm{h}})) = \mathrm{Ball}(A) \quad かつ \quad c_{12}(\mathrm{Ball}(\mathrm{Mat}(2, M)_{\mathrm{h}})) = \mathrm{Ball}(M)$$

である．容易に確かめられるように，$\mathrm{Mat}(2, A)$ の超強対合閉包は $\mathrm{Mat}(2, M)$ だから，(2) より，$\mathrm{Ball}(\mathrm{Mat}(2, A)_{\mathrm{h}})$ は $\mathrm{Ball}(\mathrm{Mat}(2, M)_{\mathrm{h}})$ において超強対合稠密である．これらの $c_{12}$ による像をとれば，$\mathrm{Ball}(A)$ が $\mathrm{Ball}(M)$ において超強対合稠密であることがわかる．

(4)　$A$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分単位的 C* 代数だから，その超強対合閉包 $M$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数である．$\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ から $\mathscr{U}(\mathcal{H})$ への写像 $h \mapsto e^{ih}$ は，補題 1.32 より強連続であり，$A_{\mathrm{h}}$ を $\mathscr{U}(A)$ の中に，$M_{\mathrm{h}}$ をちょうど $\mathscr{U}(M)$ に移す（系 1.18）．(1) より $A_{\mathrm{h}}$ は $M_{\mathrm{h}}$ において強稠密だから，$\mathscr{U}(A)$ は $\mathscr{U}(M)$ において強稠密である．$\mathscr{U}(\mathcal{H})$ 上では強位相と超強対合位相は一致するから（事実 A.11，事実 A.6），$\mathscr{U}(A)$ は $\mathscr{U}(M)$ において超強対合稠密でもある．　□

**系 1.35**　$\mathcal{H}$ を可分 Hilbert 空間とし，$A$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分対合代数，$M$ をその弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合閉包（系 1.8 より，これらは一致する）とする．

(1) $\mathrm{Ball}(A_{\mathrm{h}})$ は $\mathrm{Ball}(M_{\mathrm{h}})$ において超強対合点列稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強点列稠密でもある）．
(2) $\mathrm{Ball}(A)$ は $\mathrm{Ball}(M)$ において超強対合点列稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強稠密でもある）．
(3) $A$ が $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分単位的 C* 代数であるとする．このとき，$\mathscr{U}(A)$ は $\mathscr{U}(M)$ において超強対合点列稠密である（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強点列稠密でもある）．

**証明**　稠密性定理（定理 1.34 (2), (3), (4)）と，単位閉球 $\mathrm{Ball}(M)$ が超強対合位相に関して距離化可能であること（事実 A.13 (1)）から従う．□

# 2　von Neumann 代数の前双対

## 2.1　von Neumann 代数の前双対

**定義 2.1（正規な線型形式）**　von Neumann 代数 $M$ 上の線型形式 $\omega$ は，それが超弱・超強・超強対合連続であるとき（事実 A.7 より，これらは同値である），**正規**（normal）であるという．

**命題 2.2**　von Neumann 代数 $M$ 上の線型形式 $\omega$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\omega$ は正規である．
(b) ある $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して，$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\eta_n|x\xi_n\rangle$（$x \in M$）と書ける．
(c) ある $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ が存在して，$\omega(x) = \mathrm{tr}(tx)$（$x \in M$）と書ける．

**証明**　事実 A.7 から従う．□

**定義 2.3（前双対）**　von Neumann 代数 $M$ 上の正規な線型形式全体のなす線型空間を，$M$ の**前双対**（predual）といい，$M_*$ と書く．前双対 $M_*$ は，Banach 空間 $M^*$ の部分ノルム空間としてノルム空間とみなす．また，$M$ 上の正規な Hermite 線型形式全体のなす集合を $M_{*\mathrm{h}}$ と書き，$M$ 上の正規な正値線型形式全体のなす集合を $M_{*+}$ と書く．

**例 2.4**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．von Neumann 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の前双対 $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ を求めよう．$\Phi\colon \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}^1(\mathcal{H})^*$ を $\Phi(x)(t) = \mathrm{tr}(tx)$ によって定まる等長線型同型写像とし [10, 定理 4.41]，その双対作用素 $\Phi^*\colon \mathscr{L}^1(\mathcal{H})^{**} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})^*$ を考える．自然な埋め込みによって $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ を $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})^{**}$ の部分ノルム空間とみなすと，$\Phi^*$ は $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上の線型形式 $x \mapsto \mathrm{tr}(tx)$ に移す．命題 2.2 より，前双対 $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ は，この形の線型形式全体のなす空間にほかならない．よって，写像

$$\Psi\colon \mathscr{L}^1(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})_*, \quad \Psi(t)(x) = \mathrm{tr}(tx)$$

は，等長線型同型である．

なお，容易に確かめられるように，この等長線型同型写像 $\Psi$ を通して，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ における随伴は $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ における対合に対応する．特に，$\Psi(\mathscr{L}^1(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}) = \mathscr{L}(\mathcal{H})_{*\mathrm{h}}$ である．さらに，後に示す定理 2.16 から，$\Psi(\mathscr{L}^1(\mathcal{H})_+) = \mathscr{L}(\mathcal{H})_{*+}$ であることもわかる．

**例 2.5**　$(\Omega, \mu)$ を分解可能な測度空間とし，$\pi\colon L^\infty(\Omega,\mu) \to \mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))$ を掛け算による表現とする．$L^2(\Omega,\mu)$ 上の極大可換 von Neumann 代数 $\pi(L^\infty(\Omega,\mu))$（例 1.12）の前双対 $\pi(L^\infty(\Omega,\mu))_*$ を求めよう．$\pi(L^\infty(\Omega,\mu))$ 上の線型形式 $\omega$ が正規であるための必要十分条件は，ある $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega,\mu)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して

$$\omega(\pi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle g_n|\pi(x)f_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega \overline{g_n(\omega)}f_n(\omega)x(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad (x \in L^\infty(\Omega,\mu)) \tag{$*$}$$

と書けることである（命題 2.2）．Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\overline{g_n}f_n\|_1 \le \sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|_2\|f_n\|_2 \le \left(\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|_2^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|_2^2\right)^{1/2} < \infty$$

だから，$t = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{g_n}f_n \in L^1(\Omega,\mu)$ が定まり，($*$) は

$$\omega(\pi(x)) = \int_\Omega t(\omega)x(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad (x \in L^\infty(\Omega,\mu))$$

と書き直せる．$\pi$ は等長だから, $\|\omega\| = \|t\|_1$ が成り立つ．逆に, 任意の $t \in L^1(\Omega,\mu)$ に対して, $f, g \in L^2(\Omega,\mu)$ を適当に定めれば $t = \overline{g}f$ となるから，$\pi(L^\infty(\Omega,\mu))$ 上の線型形式 $\pi(x) \mapsto \int_\Omega t(\omega)x(\omega)\,d\mu = \langle g|\pi(x)f\rangle$ は正規である．以上より，写像

$$\Psi\colon L^1(\Omega,\mu) \to \pi(L^\infty(\Omega,\mu))_*,\quad \Psi(t)(\pi(x)) = \int_\Omega t(\omega)x(\omega)\,d\mu(\omega)$$

は，等長線型同型である．

なお，容易に確かめられるように，この等長線型同型写像 $\Psi$ を通して，$L^1(\Omega,\mu)$ における複素共役は $\pi(L^\infty(\Omega,\mu))_*$ における対合に対応する．特に，$\Psi(L^1(\Omega,\mu;\mathbb{R})) = \pi(L^\infty(\Omega,\mu))_{*\mathrm{h}}$ である．また，$\Psi(L^1(\Omega,\mu;\mathbb{R}_{\ge 0})) = \pi(L^\infty(\Omega,\mu))_{*+}$ である．

**定理 2.6**　$M$ を von Neumann 代数とする．

(1) $M_*$ は Banach 空間であり，したがって，$M^*$ の（作用素ノルムに関する）閉部分線型空間である．
(2) $x \in M$ に対して $M_*$ 上の連続線型形式 $\mathrm{ev}_x$ を $\mathrm{ev}_x(\omega) = \omega(x)$ と定めると，写像 $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ は，$M$ から $(M_*)^*$ への等長線型同型である．
(3) (2) の等長線型同型によって $M$ を $(M_*)^*$ と同一視するときの汎弱位相 $\sigma(M, M_*)$ は，$M$ の超弱位相に一致する．

**証明**　(1)　$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の前双対 $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ は，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ に等長線型同型だから（例 2.4），Banach 空間である．$M \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})$ の極集合

$$M^\circ = \{\omega \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_* \mid \omega|_M = 0\}$$

を考えると，これは Banach 空間 $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ の閉集合であり，商 Banach 空間 $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*/M^\circ$ から $M_*$ への線型写像

$$\Psi\colon \mathscr{L}(\mathcal{H})_*/M^\circ \to M_*,\quad \omega + M^\circ \mapsto \omega|_M$$

が定まる．明らかに，$\Psi$ は単射かつノルム減少である．さらに，Hahn–Banach の拡張定理より，任意の $\omega' \in M_*$ に対してその拡張 $\omega \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ であって $\|\omega\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})_*} = \|\omega'\|_{M_*}$ を満たすものが存在するから，$\Psi$ は等長線型同型である．よって，前双対 $M_*$ は，商 Banach 空間 $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*/M^\circ$ に等長線型同型である．

(2)　(1) の証明で用いた等長線型同型 $\Psi\colon \mathscr{L}(\mathcal{H})_*/M^\circ \to M_*$ は，双対空間の間の等長線型同型 $\Psi^*\colon (M_*)^* \to (\mathscr{L}(\mathcal{H})_*/M^\circ)^*$ を誘導する．一方で，$(\mathscr{L}(\mathcal{H})_*/M^\circ)^*$ は，$M^\circ \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ の極集合

$$M^{\circ\circ} = \{x \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \mid \text{任意の } \omega \in M^\circ \text{ に対して } \omega(x) = 0\}$$

と自然に等長線型同型である．汎弱位相 $\sigma(\mathscr{L}(\mathcal{H}), \mathscr{L}(\mathcal{H})_*)$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の超弱位相であり（事実 A.9），$M$ はこの位相に関して閉だから（定理 1.7），双極定理より $M^{\circ\circ} = M$ である．以上より，$(M_*)^*$ から $M$ への等長線型同型が得られるが，これは $\mathrm{ev}_x$ を $x$ に移す．これで，主張が示された．

(3)　$M_*$ は，$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ に対する $M$ 上の線型形式 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\langle \eta_n | x\xi_n\rangle$ の全体であり（命題 2.2），汎弱位相 $\sigma(M, M_*)$ は，これらが誘導する始位相である．この汎弱位相は，$M$ の超弱位相にほかならない．□

## 2.2　von Neumann 代数の前双対への作用

一般に，$A$ を代数とするとき，$a \in A$ と $\omega \in A^\vee$ に対して，$a \cdot \omega$, $\omega \cdot a \in A^\vee$ を

$$(a \cdot \omega)(x) = \omega(xa), \qquad (\omega \cdot a)(x) = \omega(ax) \qquad (x \in A)$$

と定める．これは，代数 $A$ の線型空間 $A^\vee$ への左および右からの作用を定める．

$A$ が対合代数ならば，$(a \cdot \omega)^* = \omega^* \cdot a^*$ かつ $(\omega \cdot a)^* = a^* \cdot \omega^*$ である．$A$ がノルム代数ならば，$a \in A$ と $\omega \in A^*$ に対して，$a \cdot \omega$, $\omega \cdot a \in A^*$ であり，$\|a \cdot \omega\|$, $\|\omega \cdot a\| \leq \|a\|\|\omega\|$ である．$M$ が von Neumann 代数ならば，$a \in M$ と $\omega \in M_*$ に対して，$a \cdot \omega$, $\omega \cdot a \in M_*$ である（合成の超弱分離連続性（事実 A.5 (1-1)）から従う）．

**補題 2.7**　$M$ を von Neumann 代数とし，$\omega$ をその上の正規な線型形式とする．$(e_i)_{i\in I}$ を $M$ の射影の族とし，$\underline{e} = \bigwedge_{i\in I} e_i$ と置く．

(1) 任意の $i \in I$ に対して $\omega \cdot e_i = \omega$ ならば，$\omega \cdot \underline{e} = \omega$ である．
(2) 任意の $i \in I$ に対して $e_i \cdot \omega = \omega$ ならば，$\underline{e} \cdot \omega = \omega$ である．

**証明**　どちらも同様だから，(1) のみを示す．容易に確かめられるように，$M$ の射影 $e$ に対して，$\omega \cdot e = \omega$ であることは，$\omega$ が右イデアル $(1-e)M$ 上で $0$ であることと同値である．したがって，任意の $i \in I$ に対して $\omega$ が $(1-e_i)M$ 上で $0$ であるとして，$\omega$ が $(1-\underline{e})M$ 上で $0$ であることを示せばよい．これは，$(1-\underline{e})M$ が $\sum_{i\in I}(1-e_i)M$ の弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合位相に関する共通の閉包であること（系 1.23 (1)）から従う．□

補題 2.7 より，次のように定義できる．

**定義 2.8（正規な線型形式の始射影・終射影）**　$M$ を von Neumann 代数とし，$\omega$ をその上の正規な線型形式とする．

(1) $M$ の射影 $e$ であって $\omega \cdot e = \omega$ を満たす最小のものを，$\omega$ の**始射影**（initial projection）あるいは**右台射影**（right support projection）といい，$\mathrm{s_R}(\omega)$ と書く．
(2) $M$ の射影 $e$ であって $e \cdot \omega = \omega$ を満たす最小のものを，$\omega$ の**終射影**（final projection）あるいは**左台射影**（left support projection）といい，$\mathrm{s_L}(\omega)$ と書く．
(3) $\omega$ が Hermite ならば，$M$ の射影 $e$ に対して $\omega \cdot e = \omega \iff e \cdot \omega = \omega$ だから，$M$ の始射影と終射影は一致する．そこで，この共通の射影を，$M$ の**台射影**（support projection）といい，$\mathrm{s}(\omega)$ と書く．

**例 2.9**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，von Neumann 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の前双対を $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ と同一視する（例 2.4）．すると，$a \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ と $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ に対して $a \cdot t$, $t \cdot a \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ が定まるが，任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して

$$\mathrm{tr}((a \cdot t)x) = \mathrm{tr}(t(xa)) = \mathrm{tr}((at)x),$$
$$\mathrm{tr}((t \cdot a)x) = \mathrm{tr}(t(ax)) = \mathrm{tr}((ta)x)$$

だから，$a \cdot t = at$ かつ $t \cdot a = ta$（右辺は作用素の合成を表す）である．特に，$t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ の前双対の元としての始射影・終射影は，それぞれ，$t$ の作用素としての始射影・終射影に一致する．

**例 2.10** $(\Omega, \mu)$ を分解可能な測度空間，$\pi\colon L^\infty(\Omega,\mu) \to \mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))$ を掛け算による表現とし，$L^\infty(\Omega,\mu)$ を von Neumann 代数 $\pi(L^\infty(\Omega,\mu))$ と同一視し，その前双対を $L^1(\Omega,\mu)$ と同一視する（例 2.5）．すると，$a \in L^\infty(\Omega,\mu)$ と $t \in L^1(\Omega,\mu)$ に対して $a \cdot t,\ t \cdot a \in L^1(\Omega,\mu)$ が定まるが，$L^\infty(\Omega,\mu)$ は可換だからこれらは等しく，任意の $x \in L^\infty(\Omega,\mu)$ に対して

$$\int_\Omega (a \cdot t)(\omega)x(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Omega t(\omega)(xa)(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Omega (at)(\omega)x(\omega)\,d\mu(\omega)$$

だから，$a \cdot t = t \cdot a = at$（右辺は関数の積を表す）である．特に，$t \in L^1(\Omega,\mu)$ の前双対の元としての始射影と終射影は，ともに特性関数 $\chi_{t^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})}$（による掛け算作用素）に等しい．

**命題 2.11** $M$ を von Neumann 代数とし，$\omega$ をその上の正規な正値線型形式とする．$M$ の射影 $e$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\mathrm{s}(\omega) \le e$.
(b) $(1-e)\cdot\omega\cdot(1-e) = 0$.
(c) $\omega(1-e) = 0$.

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b) $\mathrm{s}(\omega) \le e$ ならば，$\omega \cdot e = \omega$ だから，特に，$(1-e)\cdot\omega\cdot(1-e) = (1-e)\cdot 0 = 0$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a) 正値線型形式に対する Cauchy–Schwarz の不等式（事実 B.5 (2)）より，$x \in M_+$ に対して，

$$\begin{aligned}
|(\omega\cdot(1-e))(x)|^2 &= |\omega((x^{1/2}(1-e))^* x^{1/2})|^2 \\
&\le \omega((1-e)x(1-e))\omega(x) \\
&= ((1-e)\cdot\omega\cdot(1-e))(x)\omega(x)
\end{aligned}$$

である．よって，$(1-e)\cdot\omega\cdot(1-e) = 0$ ならば，$(1-e)\cdot\omega = 0$ であり，したがって，$\mathrm{s}(\omega) \le e$ である．

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) $(1-e)\cdot\omega\cdot(1-e)$ は正値線型形式だから，$\|(1-e)\cdot\omega\cdot(1-e)\| = ((1-e)\cdot\omega\cdot(1-e))(1) = \omega(1-e)$ である（事実 B.6）．よって，条件 (b) と (c) は同値である． □

**系 2.12** von Neumann 代数 $M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega_1, \omega_2$ について，$\omega_1 \le \omega_2$ ならば，$\mathrm{s}(\omega_1) \le \mathrm{s}(\omega_2)$ である．

**証明** 命題 2.11 より，台射影 $\mathrm{s}(\omega_i)$ は，$M$ の射影 $e$ であって $\omega_i(1-e) = 0$ を満たす最小のものである．$\omega_1 \le \omega_2$ であるとすると，$M$ の射影 $e$ に対して $0 \le \omega_1(1-e) \le \omega_2(1-e)$ だから，$\mathrm{s}(\omega_1) \le \mathrm{s}(\omega_2)$ である． □

**系 2.13** $M$ を von Neumann 代数とする．$(\omega_i)_{i\in I}$ を $M$ 上の正規な正値線型形式の族，$\omega$ を $M$ 上の正規な正値線型形式とし，任意の $x \in M_+$ に対して $\omega(x) = \sum_{i\in I}\omega_i(x)$ であるとする．このとき，$\mathrm{s}(\omega) = \bigvee_{i\in I}\mathrm{s}(\omega_i)$ である．

**証明** 命題 2.11 より，$M$ の射影 $e$ に対して，

$$\begin{aligned}
e \ge \mathrm{s}(\omega) &\iff \omega(1-e) = 0 \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ に対して } \omega_i(1-e) = 0 \\
&\iff \text{任意の } i \in I \text{ に対して } e \ge \mathrm{s}(\omega_i)
\end{aligned}$$

である．よって，$\mathrm{s}(\omega)=\bigvee_{i\in I}\mathrm{s}(\omega_i)$ である． □

対合代数 $A$ 上の正値線型形式 $\omega$ が**忠実**（faithful）であるとは，任意の $x\in A$ に対して，$\omega(x^*x)=0$ ならば $x=0$ であることをいう．

**命題 2.14**　von Neumann 代数 $M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega$ について，その $\mathrm{s}(\omega)M\,\mathrm{s}(\omega)$ への制限は忠実である．

**証明**　$N=\{x\in M\mid \omega(x^*x)=0\}$ と置く．正値線型形式に対する Cauchy–Schwarz の不等式（事実 B.5 (2)）より，$N=\{x\in M\mid$ 任意の $a\in M$ に対して $\omega(ax)=0\}$ とも書け，作用素の合成は超弱分離連続だから（事実 A.5 (1-1)），$N$ は $M$ の超弱閉左イデアルである．したがって，ある射影 $e\in\mathbf{P}(M)$ を用いて $N=Me$ と書ける（定理 1.21）．$e\in Me=N$ より $\omega(e)=0$ だから，命題 2.11 より $1-e\geq\mathrm{s}(\omega)$，すなわち $e\perp\mathrm{s}(\omega)$ である．任意の $x\in N$ に対して，$xe=e$ だから，$x\,\mathrm{s}(\omega)=0$ である．よって，$\omega$ の $\mathrm{s}(\omega)M\,\mathrm{s}(\omega)$ への制限は，忠実である． □

## 2.3　正規な正値線型形式

**補題 2.15**　$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．$\omega$ は $M$ 上の正値線型形式であり，条件「$M$ の射影の直交族 $(e_i)_{i\in I}$ に対して，$e=\sum_{i\in I}e_i$ と置くと，$\omega(e)=\sum_{i\in I}\omega(e_i)$ である」を満たすとする．このとき，任意の $e\in\mathbf{P}(M)\setminus\{0\}$ に対して，$f\in\mathbf{P}(M)\setminus\{0\}$ であって，$f\leq e$ かつ $f\cdot\omega\in M_*$ を満たすものが存在する．

**証明**　$e\neq 0$ だから，$\omega(e)<\|e\xi\|^2=\langle\xi|e\xi\rangle$ を満たす $\xi\in\mathcal{H}$ がとれる．Zorn の補題を用いて，$M$ の 0 でない射影の直交族 $(e_i)_{i\in I}$ であって，各 $e_i$ が $e_i\leq e$ かつ $\omega(e_i)\geq\langle\xi|e_i\xi\rangle$ を満たすもののうち，極大なものをとる．$f=e-\sum_{i\in I}e_i$ と置くと，$\omega$ に対する仮定より

$$\omega(e)=\sum_{i\in I}\omega(e_i)+\omega(f)\geq\sum_{i\in I}\langle\xi|e_i\xi\rangle=\langle\xi|e\xi\rangle-\langle\xi|f\xi\rangle$$

だから，$\langle\xi|f\xi\rangle\geq\langle\xi|e\xi\rangle-\omega(e)>0$ である．特に，$f\neq 0$ である．また，$(e_i)_{i\in I}$ の極大性より，$M$ の任意の射影 $p\leq f$ に対して，$\omega(p)\leq\langle\xi|p\xi\rangle$ である．ここから，$x\in M_+$ であって $\mathrm{s}(x)\leq f$ を満たすものに対して $\omega(x)\leq\langle\xi|x\xi\rangle$ であることが，次のようにして示される．各 $n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して，関数 $g_n\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を，$g_n(t)=\lfloor nx\rfloor/n$ と定める．$\mathrm{s}(x)\leq f$ より，$x$ のスペクトル測度が 0 を含まない Borel 集合に対して与える射影は $f$ で上から抑えられるから，各 $g_n(x)$ は，$M$ の射影であって $f$ で上から抑えられるものの $\mathbb{R}_{\geq 0}$-線型結合として書ける（命題 1.16）．したがって，$\omega(g_n(x))\leq\langle\xi|g_n(x)\xi\rangle$ であり，極限をとれば，$\omega(x)\leq\langle\xi|x\xi\rangle$ を得る．特に，$y\in M$ に対して $x=fy^*yf$ と置けば，正値線型形式に対する Cauchy–Schwarz の不等式（事実 B.5 (2)）と合わせて，

$$\begin{aligned}|(f\cdot\omega)(y)|^2&=|\omega(yf)|^2\\&\leq\omega(1)\omega(fy^*yf)\\&\leq\omega(1)\langle\xi|fy^*yf\xi\rangle\\&=\omega(1)\|yf\xi\|^2\end{aligned}$$

を得る．これより，$f\cdot\omega$ は強連続だから，特に正規である． □

**定理 2.16**　$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．$M$ 上の正値線型形式 $\omega$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\omega$ は正規である．

(b) ある $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して，$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\zeta_n|x\zeta_n\rangle$（$x \in M$）と書ける．

(c) ある $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})_+$ が存在して，$\omega(x) = \mathrm{tr}(tx)$（$x \in M$）と書ける．

(d) $M_{\mathrm{h}}$ 上の上に有界な増加ネット $(x_i)_{i\in I}$ に対して，$x = \sup_{i\in I} x_i$ と置くと，$\omega(x) = \sup_{i\in I}\omega(x_i)$ である．（これが成り立つとき，$\omega$ は**順序連続**であるという．）

(e) $M$ の射影の直交族 $(e_i)_{i\in I}$ に対して，$e = \sum_{i\in I} e_i$ と置くと，$\omega(e) = \sum_{i\in I}\omega(e_i)$ である．（これが成り立つとき，$\omega$ は**完全加法的**であるという．）

さらに，これらの条件の下で，条件 (b) における $t$ は，$\|t\|_1 = \|\omega\|$ を満たす．

**証明**　(a) $\Longrightarrow$ (b)　$\omega$ が正規であるとすると，$\omega$ はある $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ を用いて

$$\omega(x) = \langle\boldsymbol{\eta}|x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}\boldsymbol{\xi}\rangle \qquad (x \in M)$$

と書ける（命題 2.2）．任意の $x \in M_+$ に対して，分極公式より

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \frac{1}{4}(\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}|x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})\rangle - \langle\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}|x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})\rangle) \\ &\leq \frac{1}{4}\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}|x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})\rangle\end{aligned}$$

だから，ある $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_+$ を用いて

$$\omega(x) = \langle T^{1/2}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})|x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}T^{1/2}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})\rangle \qquad (x \in M)$$

と書ける（事実 B.13）．$T^{1/2}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}) = (\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と表せば，$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\zeta_n|x\zeta_n\rangle$（$x \in M$）となる．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ に対して，$t = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\zeta_n,\zeta_n} \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})_+$ と置けば（ここで，$u_{\zeta_n,\zeta_n}(\xi) = \langle\zeta_n|\xi\rangle\zeta_n$（$\xi \in \mathcal{H}$）である），任意の $x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ に対して $\mathrm{tr}(tx) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\zeta_n|x\zeta_n\rangle$ である．

(c) $\Longrightarrow$ (a)　命題 2.2 から従う．

(a) $\Longrightarrow$ (d)　条件 (d) の状況で，$(x_i)_{i\in I}$ は $x$ に超弱収束する（事実 A.12）．よって，$\omega$ が正規ならば，$\omega(x) = \lim_{i\in I}\omega(x_i) = \sup_{i\in I}\omega(x_i)$ である．

(d) $\Longrightarrow$ (e)　$(e_i)_{i\in I}$ を $M$ の射影の直交族とし，$e = \sum_{i\in I} e_i$ と置く．有限部分集合 $F \subseteq I$ に対して $e_F = \sum_{i\in F} e_i$ と置くと，$(e_F)_F$ は $M_{\mathrm{h}}$ 上の上に有界な増加ネットであり，その上限は $e$ である．よって，$\omega$ が順序連続ならば，$\omega(e) = \sup_F \omega(e_F) = \sum_{i\in I}\omega(e_i)$ である．

(e) $\Longrightarrow$ (a)　$\omega$ が完全加法的であるとする．Zorn の補題を用いて，$M$ の $0$ でない射影の直交族 $(e_i)_{i\in I}$ であって，各 $i \in I$ に対して $e_i \cdot \omega \in M_*$ であるもののうち，極大なものをとる．もし $\sum_{i\in I} e_i < 1$ であるとすると，$f \in \mathbf{P}(M) \setminus \{0\}$ であって $f \leq 1 - \sum_{i\in I} e_i$ かつ $f \cdot \omega \in M_*$ を満たすものがとれるが（補題 2.15），これは $(e_i)_{i\in I}$ の極大性に反する．したがって，$\sum_{i\in I} e_i = 1$ である．

$F$ を $I$ の有限部分集合とすると，正値線型形式に対する Cauchy–Schwarz の不等式（事実 B.5 (2)）より，

任意の $x \in M$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\left(\omega-\left(\sum_{i \in F} e_i\right) \cdot \omega\right)(x)\right|^2 &= \left|\omega\left(x\left(1-\sum_{i \in F} e_i\right)\right)\right|^2 \\ &\leq \omega(x^*x)\omega\left(1-\sum_{i \in F} e_i\right) \\ &\leq \|\omega\|\|x\|^2\omega\left(1-\sum_{i \in F} e_i\right)\end{aligned}$$

だから，

$$\left\|\omega-\left(\sum_{i \in F} e_i\right) \cdot \omega\right\|^2 \leq \|\omega\|\omega\left(1-\sum_{i \in F} e_i\right)$$

である．$F \to I$ のとき，$\omega$ の完全加法性より $\omega(1-\sum_{i \in F} e_i) \to 0$ だから，$\left(\sum_{i \in F} e_i\right) \cdot \omega$ は $\omega$ にノルム収束する．各 $e_i \cdot \omega$ は正規であり，$M_*$ は $M^*$ においてノルム閉だから（定理 2.6 (1)），$\omega$ も正規である．

最後の主張　条件 (b) の状況で，$\|t\|_1 = \operatorname{tr} t = \omega(1) = \|\omega\|$ である（事実 B.6）． □

**系 2.17**　von Neumann 代数 $M$ について，$M_{*\mathrm{h}} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} M_{*+}$ かつ $M_* = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} M_{*+}$ である．

**証明**　$\omega \in M_*$ とすると，ある $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ が存在して，$\omega(x) = \operatorname{tr}(tx)$（$x \in M$）と書ける（命題 2.2）．さらに，$\omega$ が Hermite ならば，$(t+t^*)/2$ を $t$ と置きなおすことで，$t$ は自己随伴であるとしてよい．よって，主張は，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \mathscr{L}^1(\mathcal{H})_+$ かつ $\mathscr{L}^1(\mathcal{H}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \mathscr{L}^1(\mathcal{H})_+$ であることと定理 2.16 から従う． □

**系 2.18**　von Neumann 代数 $M$ 上の正値線型形式 $\omega_1, \omega_2$ について，$\omega_1 \leq \omega_2$ であり，$\omega_2$ が正規ならば，$\omega_1$ も正規である．

**証明**　$\omega_1 \leq \omega_2$ であるとする．$(x_i)_{i \in I}$ を $M_{\mathrm{h}}$ 上の上に有界な増加ネットとし，$x = \sup_{i \in I} x_i$ と置くと，$0 \leq \omega_1(x-x_i) \leq \omega_2(x-x_i)$ である．したがって，$\omega_2$ が順序連続ならば，$\omega_1$ も順序連続である．よって，主張は定理 2.16 から従う． □

## 2.4　正規な対合準同型

**補題 2.19**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上のネット $(x_i)_{i \in I}$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $(x_i^* x_i)_{i \in I}$ は 0 に超弱収束する．
(b) $(x_i)_{i \in I}$ は 0 に超強収束する．

**証明**　$(x_i^* x_i)_{i \in I}$ が 0 に超弱収束するとは，任意の $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ に対して $(\langle \boldsymbol{\eta} | (x_i^* x_i)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}} \boldsymbol{\xi} \rangle)_{i \in I}$ が 0 に収束するということだが，分極公式より，$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$ の場合だけを考えても条件は変わらない．$\langle \boldsymbol{\xi} | (x_i^* x_i)^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}} \boldsymbol{\xi} \rangle = \|x_i^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}} \boldsymbol{\xi}\|^2$ だから，条件 (a) と (b) は同値である． □

**定理 2.20**　von Neumann 代数の間の対合準同型 $\phi\colon M \to N$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\phi$ は超弱連続である．
(b) $\phi$ は超強連続である．

(c) $\phi$ は超強対合連続である．

(d) $M_{\mathrm{h}}$ 上の任意の上に有界な増加ネット $(x_i)_{i\in I}$ に対して，$x=\sup_{i\in I} x_i$ と置くと，$\phi(x)=\sup_{i\in I}\phi(x_i)$ である．（これが成り立つとき，$\phi$ は**順序連続**であるという．）

さらに，これらの条件の下で，$\phi(M)$ は $N$ において弱閉である（したがって，強・超強・超弱・超強・超強対合閉でもある）．

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b)　$\phi$ が超弱連続であるとする．$M$ 上のネット $(x_i)_{i\in I}$ について，$(x_i^*x_i)_{i\in I}$ が 0 に超弱収束するならば，仮定より，$(\phi(x_i)^*\phi(x_i))_{i\in I}$ は 0 に超弱収束する．すなわち，$(x_i)_{i\in I}$ が 0 に超強収束するならば，$(\phi(x_i))_{i\in I}$ は 0 に超強収束する（補題 2.19）．よって，$\phi$ は超強連続である．

(b) $\Longrightarrow$ (c)　$\phi$ が超強連続であるとする．$M$ 上のネット $(x_i)_{i\in I}$ が 0 に超強対合収束するならば，$(x_i)_{i\in I}$ と $(x_i^*)_{i\in I}$ は 0 に超強収束するから，仮定より $(\phi(x_i))_{i\in I}$ と $(\phi(x_i)^*)_{i\in I}$ は 0 に超強収束し，したがって，$(\phi(x_i))_{i\in I}$ は 0 に超強対合収束する．よって，$\phi$ は超強対合連続である．

(c) $\Longrightarrow$ (d)　事実 A.12 から従う．

(d) $\Longrightarrow$ (a)　$\phi$ が順序連続であるとする．このとき，$N$ 上の正値線型形式 $\omega$ が正規ならば，$M$ 上の正値線型形式 $\omega\circ\phi$ も正規である（定理 2.16）．すなわち，$\phi^*(N_{*+})\subseteq M_{*+}$ である．$N_*=\operatorname{span}_{\mathbb{C}} N_{*+}$ だから（系 2.17），これより，$\phi^*(N_*)\subseteq M_*$ を得る．これは，$\phi$ が超弱連続であることを意味する．

最後の主張　$M$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であるとする．部分集合 $S\subseteq\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の超弱閉包を，$\overline{S}^{\mathrm{uw}}$ と書くことにする．

$\phi$ が超弱連続であるとすると，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の閉球が超弱コンパクトであることより（事実 A.10），その $\phi$ による像も超弱コンパクトとなる．稠密性定理（定理 1.34 (3)），事実 B.4，いま述べたコンパクト性を順に用いて，

$$\operatorname{Ball}(\overline{\phi(M)}^{\mathrm{uw}})\subseteq\overline{\operatorname{Ball}(\phi(M))}^{\mathrm{uw}}\subseteq\overline{2\operatorname{Ball}(\phi(M))}^{\mathrm{uw}}=2\operatorname{Ball}(\phi(M))$$

を得る．これより，$\overline{\phi(M)}^{\mathrm{uw}}\subseteq\phi(M)$ だから，$\phi(M)$ は $N$ において超弱閉であり，したがって，弱閉でもある（系 1.8）．□

**系 2.21**　von Neumann 代数の間の対合同型は，超弱・超強・超強対合同相である．

**証明**　$\phi\colon M\to N$ を von Neumann 代数の間の対合同型とする．すると，$\phi$ は $M_{\mathrm{h}}$ から $N_{\mathrm{h}}$ への順序同型を与えるから，定理 2.20 より $\phi$ は超強・超弱・超強・超強対合連続である．$\phi^{-1}$ についても同じことがいえるから，$\phi$ は超弱・超強・超強対合同相である．□

**注意 2.22**　von Neumann 代数の間の対合同型は，弱同相であるとも，強同相であるとも，強対合であるとも限らない．たとえば，$\mathcal{H}$ を無限次元 Hilbert 空間とすると，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上の弱位相と超弱位相，強位相と超強位相，強対合位相と超強対合位相は，それぞれ異なる．すなわち，写像 $\iota\colon\mathscr{L}(\mathcal{H})\to\mathscr{L}(\mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}})$ を $\iota(x)=x^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と定めると，$\iota$ が与える von Neumann 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ から $\iota(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ への対合同型は，弱同相でも，強同相でも，強対合でもない．

**定義 2.23（正規な対合準同型）**　von Neumann 代数の間の対合準同型 $\phi\colon M\to N$ は，定理 2.20 の同値な条件を満たすとき，**正規**（normal）であるという．

# 3　W* 代数

## 3.1　W* 代数

**定義 3.1（W* 代数）**　C* 代数であって，ある von Neumann 代数に対合同型であるものを，**W* 代数**（W*-algebra）という．

**定義 3.2（超弱・超強・超強対合位相）**　$M$ を W* 代数とする．$M$ からある von Neumann 代数 $N$ への対合同型を一つ固定するとき，この対合同型を通して $N$ の超弱位相，超強位相，超強対合位相に対応する $M$ 上の位相（系 2.21 より，これらは対合同型のとり方によらない）を，それぞれ $M$ の**超弱位相**，**超強位相**，**超強対合位相**という．

von Neumann 代数の対合代数としての構造，およびそこから一意に定まる構造（超弱位相，超強位相，超強対合位相など）に関する性質は，W* 代数に対しても同様に成り立つ．このような性質は改めて述べず，このような性質を用いる際には，von Neumann 代数に対して述べた定理などを引用する．

**命題 3.3**　$M$ を W* 代数とする．

(1) 乗法 $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto xy$ は，
  (1-1) 超弱分離連続，超強分離連続，超強対合分離連続であり，
  (1-2) $S \subseteq M$ をノルム有界集合とすると，$M \times S$ 上で超強連続，$S \times S$ 上で超強対合連続であり，
  (1-3) 超強点列連続かつ超強対合点列連続である．
(2) 対合 $M \to M$, $x \mapsto x^*$ は，
  (2-1) 超弱連続かつ超強対合連続であり，
  (2-2) 正規元全体のなす集合上で超強連続である．

**証明**　事実 A.5 から従う．　□

**命題 3.4**　$M$ を W* 代数とし，$A$ をその部分線型空間とする．$A$ 上の線型形式に対して，それが超弱連続であること，超強連続であること，超強対合連続であることはすべて同値である．

**証明**　事実 A.7 から従う．　□

**命題 3.5**　$M$ を W* 代数とする．部分集合 $S \subseteq M$ に対して，その超弱凸閉包，超強凸閉包，超強対合凸閉包は一致する．

**証明**　事実 A.4 から従う．　□

**命題 3.6**　W* 代数の閉球は，超弱コンパクトである．

**証明**　事実 A.10 から従う．　□

**命題 3.7**　$M$ を W* 代数とし，$N$ をその超弱・超強・超強対合閉な（命題 3.5 より，これらは同値である）部分対合代数とする．このとき，$N$ は W* 代数であり，$N$ の超弱・超強・超強対合位相は，それぞれ，$M$ の超弱・超強・超強対合位相が誘導する相対位相に一致する．

**証明**　一般性を失わず，$M$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であるとする．$N$ の非退化部分空間の上への射影を $e$ と置くと，$N \subseteq e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ であり，$[N]_e = \{[x]_e \mid x \in N\}$ は $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ の非退化な部分対合代数であり（命題 1.4），写像 $[-]_e\colon e\mathscr{L}(\mathcal{H})e \to \mathscr{L}(e\mathcal{H})$ は超弱・超強・超強対合同相な単位的対合同型である（事実 A.14 (2)）．したがって，$[N]_e$ は $e\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であり，これと対合同型な $N$ は W* 代数である．位相に関する主張は，写像 $[-]_e\colon e\mathscr{L}(\mathcal{H})e \to \mathscr{L}(e\mathcal{H})$ が超弱・超強・超強対合同相であることから従う．□

**注意 3.8**　$M$ が W* 代数であり，その部分対合代数 $N$ が W* 代数であっても，$N$ が $M$ において超弱・超強・超強対合閉であるとは限らない．

**命題 3.9**　$M$ を W* 代数とする．

(1) $M$ の射影全体のなす集合 $\mathbf{P}(M)$ は，順序 $\leq$ に関して完備束をなす．
(2) $N$ を $M$ の超弱・超強・超強対合閉な（命題 3.5 より，これらは同値である）部分対合代数とする．このとき，$N$ の射影の族 $(e_i)_{i \in I}$ に対して，その $\mathbf{P}(M)$ における上限 $\overline{e}$ は $\mathbf{P}(N)$ に属し，$I \neq \emptyset$ ならば，その $\mathbf{P}(M)$ における下限 $\underline{e}$ は $\mathbf{P}(N)$ に属する．特に，$N$ が $M$ の部分単位的代数ならば，$\mathbf{P}(N)$ は $\mathbf{P}(M)$ の部分完備束である．

**証明**　一般性を失わず，$M$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする．

(1)　命題 1.15 より，$\mathbf{P}(M)$ は完備束 $\mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ の部分完備束である．

(2)　$M$ は $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であり，$N + \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ はその部分 von Neumann 代数だから（注意 1.10 (3)），$\mathbf{P}(M)$ と $\mathbf{P}(N + \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}) = \mathbf{P}(N) \cup \{1_{\mathcal{H}}\}$ はともに $\mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathcal{H}))$ の部分完備束である（命題 1.15）．したがって，$N$ の射影の族 $(e_i)_{i \in I}$ の $\mathbf{P}(M)$ における上限 $\overline{e}$ と下限 $\underline{e}$ は，ともに $\mathbf{P}(N) \cup \{1_{\mathcal{H}}\}$ に属する．もし $\overline{e} = 1_{\mathcal{H}}$ ならば，$(e_i)_{i \in I}$ の $\mathbf{P}(N)$ における上限（命題 3.7 より $N$ は W* 代数だから，(1) より存在する）も $1_{\mathcal{H}}$ でなければならないから，$\overline{e} = 1_{\mathcal{H}} \in \mathbf{P}(N)$ である．また，$\underline{e} = 1_{\mathcal{H}}$ となるのは，$I = \emptyset$ のときだけである．よって，いずれにしても，前半の主張が成り立つ．$N$ が $M$ の部分単位的代数ならば，$I = \emptyset$ のときにも $\underline{e} = 1_{\mathcal{H}} \in \mathbf{P}(N)$ となるから，$\mathbf{P}(N)$ は $\mathbf{P}(M)$ の部分完備束である．□

命題 3.9 を踏まえて，W* 代数 $M$ に対しても，$\mathbf{P}(M)$ を $M$ の**射影束**といい，$M$ の射影の族 $(e_i)_{i \in I}$ に対して，その $\mathbf{P}(M)$ における上限を $\bigvee_{i \in I} e_i$，下限を $\bigwedge_{i \in I} e_i$ と書く．

von Neumann 代数の場合と同様に，W* 代数 $M$ 上の線型形式は，それが超弱・超強・超強対合連続であるとき（命題 3.4 より，これらは同値である），**正規**であるという．$M$ 上の正規な線型形式全体のなす線型空間を，$M$ の**前双対**といい，$M_*$ と書く．$M_{*\mathrm{h}}$ や $M_{*+}$ といった記号も，von Neumann 代数の場合と同様とする．

命題 1.19 より，W* 代数 $M$ の元 $x$ に対して，その**極分解** $(u, |x|)$ や，その**始射影**（あるいは**右台射影**）$\mathrm{s_R}(x) \in M$ および**終射影**（あるいは**左台射影**）$\mathrm{s_L}(x) \in M$ が定まる．$u$ は，$x = u|x|$ かつ $\mathrm{s_R}(u) = \mathrm{s_R}(x)$ を満たす $M$ の元として特徴付けられ，さらに，部分等長であり，$\mathrm{s_L}(u) = \mathrm{s_L}(x)$ を満たす．また，始射影 $\mathrm{s_R}(x)$ は $xe = x$ を満たす最小の射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ として，終射影 $\mathrm{s_L}(x)$ は $ex = x$ を満たす最小の射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ として特徴付けられる．Hilbert 空間上の連続線型作用素の場合と同様に，$x$ が正規ならばその始射影と終射影は一致するから，この共通の射影を，$x$ の**台射影**といい，$\mathrm{s}(x)$ と書く．

von Neumann 代数の場合と同様に，W* 代数 $M$ 上の正規な線型形式 $\omega$ に対して，その**始射影**（あるいは**右台射影**）$\mathrm{s_R}(\omega) \in M$ および**終射影**（あるいは**左台射影**）$\mathrm{s_L}(\omega) \in M$ が定まる．始射影 $\mathrm{s_R}(\omega)$ は $\omega \cdot e = \omega$ を満たす最小の射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ として，終射影 $\mathrm{s_L}(\omega)$ は $e \cdot \omega = \omega$ を満たす最小の射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ として特徴付

けられる．$\omega$ が Hermite ならばその始射影と終射影は一致するから，この共通の射影を，$\omega$ の**台射影**といい，$\mathrm{s}(\omega)$ と書く．

## 3.2 包絡 W* 代数

**補題 3.10** $V$ をノルム空間とする．自然な埋め込み $\iota\colon V \to V^{**}$ の像は，$V^{**}$ の汎弱位相 $\sigma(V^{**}, V^*)$ に関して稠密である．

**証明** 双極定理より，$\iota(V)$ の $V^{**}$ における汎弱閉包は，$\iota(V)\ \circ\circ = \{0\}^\circ = V^{**}$ である． □

**補題 3.11** $A$ を C* 代数，$M$ を W* 代数とし，$\phi\colon A \to M$ を対合準同型とする．$\phi' = \phi^*|_{M_*}\colon M_* \to A^*$ と置く．このとき，次の条件は同値である．

(a) $\phi(A)$ は $M$ において超弱稠密である．
(b) $\phi'\colon M_* \to A^*$ は等長である．
(c) $\phi'\colon M_* \to A^*$ は単射である．
(d) $\phi'^*\colon A^{**} \to M$ は全射である（ここで，定理 2.6 (2) の等長線型同型によって，$M$ と $(M_*)^*$ を同一視している）．

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b) $\phi(\mathrm{Ball}^\circ(A)) = \mathrm{Ball}^\circ(\phi(A))$ であり（事実 B.4），これは $\mathrm{Ball}(\phi(A))$ においてノルム稠密である．さらに，$\phi(A)$ が $M$ において超弱稠密であるとすると，稠密性定理（定理 1.34）より，$\mathrm{Ball}(\phi(A))$ は $\mathrm{Ball}(M)$ において超弱稠密である．よって，$\omega \in M_*$ に対して

$$\|\omega\| = \sup_{y \in \mathrm{Ball}(M)} |\omega(y)| = \sup_{x \in \mathrm{Ball}^\circ(A)} |\omega(\phi(x))| = \|\phi'(\omega)\|$$

だから，$\phi'$ は等長である．

(b) $\Longrightarrow$ (d) 一般に，ノルム空間の間の等長作用素 $T\colon V \to W$ に対して，その双対作用素 $T^*\colon W^* \to V^*$ は全射である（Hahn–Banach の拡張定理の結果）．主張は，ここから従う．

(d) $\Longrightarrow$ (c) 一般に，ノルム空間の間の連続線型作用素 $T\colon V \to W$ について，$T$ が単射でなければ，その双対作用素 $T^*\colon W^* \to V^*$ は全射でない．すなわち，$T^*$ が全射ならば，$T$ は単射である．主張は，ここから従う．

(c) $\Longrightarrow$ (a) $\phi(A)$ が $M$ において超弱稠密でないとすると，$\omega \in M_* \setminus \{0\}$ であって，$\omega|_{\phi(A)} = 0$ を満たすものが存在する（Hahn–Banach の拡張定理の結果）．この $\omega$ は，$\omega \neq 0$ かつ $\phi'(\omega) = 0$ を満たすから，$\phi'$ は単射でない．対偶をとれば，主張が従う． □

**定理 3.12** $A$ を C* 代数とする．

(1) 汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ に関して分離連続な双線型写像 $A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$ であって $A$ の乗法の拡張であるものが一意に存在し，汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ に関して連続な共役線型写像 $A^{**} \to A^{**}$ であって $A$ の対合の拡張であるものが一意に存在する．さらに，これらをそれぞれ乗法と対合として，$A^{**}$ は W* 代数をなす．

以下，$A^{**}$ を (1) の方法で W* 代数とみなしたものを，$\mathbf{W}^*(A)$ と書く．

(2) 自然な埋め込み $A^* \to A^{***} = \mathbf{W}^*(A)^*$ の像は，前双対 $\mathbf{W}^*(A)_*$ である．W* 代数 $\mathbf{W}^*(A)$ の超弱位

相は，汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ に等しい．

(3) $A$ は，$\mathbf{W}^*(A)$ において超弱・超強・超強対合稠密である（命題 3.5 より，これらは同値である）．

(4) $\iota\colon A \to A^{**} = \mathbf{W}^*(A)$ を自然な埋め込みとする．任意の W* 代数 $N$ と対合準同型 $\phi\colon A \to N$ に対して，正規な対合準同型 $\widetilde{\phi}\colon \mathbf{W}^*(A) \to N$ であって $\phi = \widetilde{\phi} \circ \iota$ を満たすものが，一意に存在する．

**証明**　自然な埋め込み $\iota\colon A \to A^{**}$ によって，$A$ を $A^{**}$ の部分線型空間とみなす．

(1)　<u>一意性</u>　$A$ が $A^{**}$ において汎弱稠密であること（補題 3.10）の結果である．

<u>存在</u>　$A$ 上の状態が定める表現 [11, 定義 4.36] すべての Hilbert 直和を $(\pi, \mathcal{H})$ と書き，$\pi(A)$ が生成する $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数を $M$ と置く．$\pi' = \pi^*|_{M_*}\colon M_* \to A^*$ と置く．$\pi$ は非退化だから，$\pi(A)$ は $M$ において超弱稠密であり，したがって，$\pi'$ は等長である（補題 3.11）．一方で，$\pi$ の定義より，$A$ 上の任意の状態は $\pi'(M_*)$ に含まれる．$A$ 上の任意の連続線型形式は $A$ 上の状態の線型結合として書けるから（事実 B.14），$\pi'$ は全射である．よって，$\pi'\colon M_* \to A^*$ は等長線型同型である．

前段の結果より，$\pi'$ の双対作用素 $\pi'^*\colon A^{**} \to M$（ここで，定理 2.6 (2) の等長線型同型によって，$M$ と $(M_*)^*$ を同一視している）は，等長線型同型であり，かつ汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ と $M$ の超弱位相に関して同相である（定理 2.6 (3)）．$M$ の乗法（合成）・対合（随伴）はそれぞれ超弱分離連続・超弱連続だから（事実 A.5 (1-1), (2-1)），これらの $\pi'^*$ による引き戻しは，それぞれ汎弱分離連続・汎弱連続である．$\pi'^*$ は $\pi$ の拡張だから，これらの引き戻しは，それぞれ $A$ の乗法・対合の拡張である．$M$ は von Neumann 代数で，$\pi'^*\colon A^{**} \to M$ は等長線型同型だから，これらの引き戻しを乗法・対合として，$A$ は W* 代数をなす．

(2)　(1) の証明の記号をそのまま用いる．(1) ですでに見たように，対合同型 $\pi'^*\colon \mathbf{W}^*(A) = A^{**} \to M$ は汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ と $M$ の超弱位相に関して同相だから，$\mathbf{W}^*(A)$ の超弱位相は汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ に等しい．また，自然な埋め込みによって $A^*$ を $\mathbf{W}^*(A)^* = A^{***}$ の部分線型空間とみなすと，等長線型同型 $\pi'^{**}\colon M^* \to \mathbf{W}^*(A)^*$ は，等長線型同型 $\pi'\colon M_* \to A^*$ の拡張である．よって，自然な埋め込みは，$A^*$ から前双対 $\mathbf{W}^*(A)_*$ への等長線型同型を与える．

(3)　補題 3.10 と (2) より，自然な埋め込み $\iota\colon A \to A^{**} = \mathbf{W}^*(A)$ の像は，$\mathbf{W}^*(A)$ において超弱稠密である．

(4)　$N$ を W* 代数とし，$\phi\colon A \to N$ を対合準同型とする．

<u>一意性</u>　(3) から従う．

<u>存在</u>　$\phi' = \phi^*|_{N_*}\colon N_* \to A^*$ と置き，$\widetilde{\phi} = \phi'^*\colon \mathbf{W}^*(A) = A^{**} \to N$（ここで，定理 2.6 (2) の等長線型同型によって，$N$ を $(N_*)^*$ と同一視している）と定めると，この $\widetilde{\phi}$ が主張の条件を満たすことを示す．(2) ですでに示したように $\mathbf{W}^*(A)$ の超弱位相は汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ に等しく，$N$ の超弱位相は汎弱位相 $\sigma(N, N_*)$ に等しいから（定理 2.6 (3)），$\widetilde{\phi}$ は超弱連続である．$\widetilde{\phi}$ は対合準同型 $\phi$ の拡張であり，W* 代数の乗法・対合はそれぞれ超弱分離連続・超弱連続であり（命題 3.3 (1-1), (1-2)），(3) ですでに示したように $A$ は $\mathbf{W}^*(A)$ において超弱稠密だから，$\widetilde{\phi}$ も対合準同型である．よって，$\widetilde{\phi}$ は主張の条件を満たす．　□

**定義 3.13（包絡 W* 代数）**　定理 3.12 によって定まる W* 代数 $\mathbf{W}^*(A)$ を，C* 代数 $A$ の**包絡 W* 代数**（enveloping W*-algebra）という．

**注意 3.14**　C* 代数 $A$ は，自然な埋め込み $\iota\colon A \to A^{**} = \mathbf{W}^*(A)$ を経由して，$\mathbf{W}^*(A)$ の部分 C* 代数とみなされる．$A$ は $\mathbf{W}^*(A)$ において超弱稠密であり（定理 3.12 (3)），W* 代数の乗法は超弱分離連続だから（命題 3.3 (1-1)），$A$ が乗法単位元をもてば，それが $\mathbf{W}^*(A)$ の乗法単位元にもなる．すなわち，$A$ が単位的ならば，$A$ は $\mathbf{W}^*(A)$ の部分単位的 C* 代数である．

**注意 3.15**　$A$ が W* 代数であっても，自然な埋め込み $\iota\colon A \to A^{**} = \mathbf{W}^*(A)$ が同型であるとは限らない．たとえば，ある W* 代数 $N$ への正規でない対合準同型 $\phi\colon A \to N$ が存在する場合，定理 3.12 (4) より，$\iota$ は同型でない．

**例 3.16**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ の双対空間は $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ と自然に等長線型同型であり，$\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ の双対空間は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ と自然に等長線型同型である [10, 定理 4.41, 4.42]．これらから得られる等長線型同型写像 $\varPhi\colon \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})^{**} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ を通して，$\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})^{**}$ への自然な埋め込みは $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への包含写像に対応し，汎弱位相 $\sigma(\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})^*, \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})^{**})$ は超弱位相 $\sigma(\mathscr{L}(\mathcal{H}), \mathscr{L}^1(\mathcal{H}))$（事実 A.9）に対応する．$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ 上で，合成をとる写像 $(x,y) \mapsto xy$ は超弱分離連続であり，随伴をとる写像 $x \mapsto x^*$ は超弱連続である（事実 A.5 (1-1), (2-1)）．よって，$\varPhi$ は，包絡 W* 代数 $\mathbf{W}^*(\mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})) = \mathscr{L}^{\mathrm{c}}(\mathcal{H})^{**}$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ への対合同型である（定理 3.12 (1)）．

**命題 3.17**　$\phi\colon A \to B$ を C* 代数の間の対合準同型とし，$\mathbf{W}^*(\phi) = \phi^{**}\colon \mathbf{W}^*(A) \to \mathbf{W}^*(B)$ と置く．

(1) $\mathbf{W}^*(\phi)$ は正規な対合準同型であり，$\phi$ の拡張である．
(2) $\phi$ が単射であることと $\mathbf{W}^*(\phi)$ が単射であることとは同値である．
(3) $\phi$ が全射ならば，$\mathbf{W}^*(\phi)$ も全射である．
(4) $A$ と $B$ が単位的で $\phi$ が単位的対合準同型ならば，$\mathbf{W}^*(\phi)$ も単位的対合準同型である．

**証明**　(1)　$\mathbf{W}^*(\phi)$ が $\phi$ の拡張であり，汎弱位相 $\sigma(A^{**}, A^*)$ と $\sigma(B^{**}, B^*)$ に関して連続であることは明らかである．包絡 W* 代数 $\mathbf{W}^*(A)$ と $\mathbf{W}^*(B)$ の乗法・対合はこれらの汎弱位相に関して分離連続・連続であり（定理 3.12 (1)），$A$ は $\mathbf{W}^*(A)$ において汎弱稠密（補題 3.10）だから，$\phi$ が対合準同型であることより，$\mathbf{W}^*(\phi)$ も対合準同型である．また，これらの汎弱位相は W* 代数の超弱位相に等しいから（定理 3.12 (2)），$\mathbf{W}^*(\phi)$ は正規である．

(2)　$\mathbf{W}^*(\phi)$ は $\phi$ の拡張だから，$\mathbf{W}^*(\phi)$ が単射ならば，$\phi$ も単射である．逆に，$\phi$ が単射であるとすると，$\phi$ は等長である（事実 B.1）．これより，$\phi^*$ は全射だから（Hahn–Banach の拡張定理の結果），$\mathbf{W}^*(\phi) = \phi^{**}$ は単射である．

(3)　(1) で示したように，$\mathbf{W}^*(\phi)$ は正規な対合準同型だから，その像 $\mathbf{W}^*(\phi)(\mathbf{W}^*(A))$ は $\mathbf{W}^*(B)$ において超弱閉である（定理 2.20）．$B$ は $\mathbf{W}^*(B)$ において超弱稠密だから（補題 3.10，定理 3.12 (2)），$\phi$ が全射ならば，$\mathbf{W}^*(\phi)$ も全射である．

(4)　$\mathbf{W}^*(\phi)$ が $\phi$ の拡張であることから明らかである．□

**注意 3.18**　命題 3.17 (1), (2) より，$A$ が C* 代数で $B$ がその部分 C* 代数であるとき，包含対合準同型 $\iota\colon B \to A$ は単射かつ正規な対合準同型 $\mathbf{W}^*(\iota)\colon \mathbf{W}^*(B) \to \mathbf{W}^*(A)$ を誘導し，これによって，$\mathbf{W}^*(B)$ は $\mathbf{W}^*(A)$ の超弱閉な部分 C* 代数とみなせる（定理 2.20）．$\mathbf{W}^*(A)$ と $\mathbf{W}^*(B)$ は W* 代数だから常に単位的だが，$\mathbf{W}^*(B)$ が $\mathbf{W}^*(A)$ の部分単位的 C* 代数である（すなわち，$\mathbf{W}^*(\iota)$ が $\mathbf{W}^*(B)$ の乗法単位元を $\mathbf{W}^*(A)$ の乗法単位元に移す）とは限らない．ただし，$A$ が単位的 C* 代数で $B$ がその部分単位的 C* 代数ならば，$\mathbf{W}^*(B)$ は $\mathbf{W}^*(A)$ の部分単位的 C* 代数である．

## 3.3　W* 代数の特徴付け

**補題 3.19**　$A$ を C* 代数とし，$B$ をその部分 C* 代数とする．$\epsilon\colon A \to B$ をノルム減少な線型写像であって $\epsilon|_B = \mathrm{id}_B$ を満たすものとすると，次が成り立つ．

(1) $\epsilon$ は正値である（すなわち，$\epsilon(A_+) \subseteq B_+$ である）．
(2) 任意の $x \in A$ と $y \in B$ に対して，$\epsilon(yx) = y\epsilon(x)$ かつ $\epsilon(xy) = \epsilon(x)y$ である．
(3) 任意の $x \in A$ に対して，$\epsilon(x)^*\epsilon(x) \le \epsilon(x^*x)$ である．

**証明**　$A$, $B$ それぞれの包絡 W* 代数 $\mathbf{W}^*(A)$, $\mathbf{W}^*(B)$ を考えると，$\mathbf{W}^*(B)$ は $\mathbf{W}^*(A)$ の超弱閉な部分 C* 代数とみなすことができ，$\epsilon^{**}\colon \mathbf{W}^*(A) \to \mathbf{W}^*(B)$ はノルム減少な線型写像であって $\epsilon^{**}|_{\mathbf{W}^*(B)} = \mathrm{id}_{\mathbf{W}^*(B)}$ を満たす．$\epsilon^{**}$ は $\epsilon$ の拡張だから，$\epsilon^{**}$ に対して主張が成り立てば，$\epsilon$ に対しても主張が成り立つ．そこで，一般性を失わず，$A$ と $B$ は W* 代数であると仮定し，それぞれの乗法単位元を $1_A$ と $1_B$ と書く．

(1)　$\omega \in B_+^*$ に対して，$\epsilon^*(\omega) \in A^*$ は

$$\epsilon^*(\omega)(1_B) = \omega(\epsilon(1_B)) = \omega(1_B) = \|\omega\| \ge \|\epsilon^*(\omega)\|$$

を満たすから，$\epsilon^*(\omega) \in A_+^*$ である（事実 B.11）．したがって，$x \in A_+$ とすると，任意の $\omega \in B_+^*$ に対して $\omega(\epsilon(x)) = \epsilon^*(\omega)(x) \ge 0$ だから，$\epsilon(x) \in B_+$ である．よって，$\epsilon$ は正値である．

(2)　どちらも同様だから，任意の $x \in A$ と $y \in B$ に対して $\epsilon(xy) = \epsilon(x)y$ であることだけを示す．$x \in A$ を固定すると，示すべき等式の両辺は $y \in B$ に関して連続かつ線型だから，射影 $e \in \mathbf{P}(B)$ に対して $\epsilon(xe) = \epsilon(x)e$ を示せば十分である（系 1.17）．$y = \epsilon(x(1_A - e)) \in B$ と置くと，任意の $t \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}
(t+1)^2\|ye\|^2 &= \|(y + tye)e\|^2 \\
&\le \|y + tye\|^2 \\
&= \|\epsilon(x(1_A - e) + tye)\|^2 \\
&\le \|x(1_A - e) + tye\|^2 \\
&= \|(x(1_A - e) + tye)(x(1_A - e) + tye)^*\| \\
&= \|x(1_A - e)x^* + t^2 yey^*\| \\
&\le \|x\|^2 + t^2\|ye\|^2
\end{aligned}$$

だから，$\epsilon(x(1_A - e))e = ye = 0$，すなわち

$$\epsilon(x)e = \epsilon(xe)e$$

である．また，$\epsilon(x(1_A - e))e = 0$ において $x$ と $e$ をそれぞれ $x1_B$ と $1_B - e$ に置き換えれば，$\epsilon(xe)(1_B - e) = 0$，すなわち

$$\epsilon(xe)e = \epsilon(xe)$$

を得る．これら二つの等式より，$\epsilon(xe) = \epsilon(x)e$ である．

(3)　$x \in A$ とすると，(1), (2) より

$$\begin{aligned}
0 &\le \epsilon((x - \epsilon(x))^*(x - \epsilon(x))) \\
&= \epsilon(x^*x - \epsilon(x)^*x - x^*\epsilon(x) + \epsilon(x)^*\epsilon(x)) \\
&= \epsilon(x^*x) - \epsilon(x)^*\epsilon(x) - \epsilon(x^*)\epsilon(x) + \epsilon(x)^*\epsilon(x) \\
&= \epsilon(x^*x) - \epsilon(x)^*\epsilon(x)
\end{aligned}$$

だから，$\epsilon(x)^*\epsilon(x) \le \epsilon(x^*x)$ である． □

**定理 3.20（境の定理）** C* 代数 $A$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $A$ は W* 代数である．
(b) ある Banach 空間 $V$ と等長線型同型 $\Phi\colon A \to V^*$ が存在する．

さらに，これらの条件の下で，条件 (b) の $V$ と $\Phi$ をとると，等長線型同型 $\Phi^*\colon V^{**} \to A^*$ は，$V$（自然な埋め込みによって $V^{**}$ の閉部分線型空間とみなす）を前双対 $A_*$ に移す．

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b) $A$ が W* 代数ならば，$A$ はその前双対 $A_*$ の双対に等長線型同型である（定理 2.6 (2)）．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $V$ を Banach 空間とし，$\Phi\colon A \to V^*$ を等長線型同型とする．$\Phi$ が誘導する等長線型同型 $\Phi^*\colon V^{**} \to A^*$ の $V$ への制限を $\Phi'\colon V \to A^*$ と置き，その双対作用素 $\Phi'^*\colon \mathbf{W}^*(A) = A^{**} \to V^*$ と $\Phi^{-1}\colon V^* \to A$ との合成を

$$\epsilon = \Phi^{-1} \circ \Phi'^*\colon \mathbf{W}^*(A) \to A$$

と定める．すると，$\epsilon$ はノルム減少であって $\epsilon|_A = \mathrm{id}_A$ を満たすから，補題 3.19 を適用できる．まず，補題 3.19 (1) より，$\epsilon$ は対合を保つ．次に，$\operatorname{Ker}\epsilon$ について考える．$\operatorname{Ker}\epsilon = \{x \in \mathbf{W}^*(A) \mid \langle \Phi^*(V), x\rangle = 0\}$ であり，これは $\mathbf{W}^*(A)$ において汎弱閉，すなわち超弱閉である（定理 3.12 (2)）．また，$x \in \operatorname{Ker}\epsilon$，$y \in A$ とすると，補題 3.19 (2) より $xy, yx \in \operatorname{Ker}\epsilon$ である．W* 代数の乗法は超弱分離連続であり（命題 3.3 (1-1)），$A$ は $\mathbf{W}^*(A)$ において超弱稠密だから（定理 3.12 (3)），これは $y \in \mathbf{W}^*(A)$ としても成り立つ．すなわち，$\operatorname{Ker}\epsilon$ は $\mathbf{W}^*(A)$ の両側イデアルである．特に，$x, y \in \mathbf{W}^*(A)$ に対して，$x - \epsilon(x) \in \operatorname{Ker}\epsilon$ より $(x - \epsilon(x))y \in \operatorname{Ker}\epsilon$ だから，補題 3.19 (2) より

$$0 = \epsilon((x - \epsilon(x))y) = \epsilon(xy) - \epsilon(x)\epsilon(y)$$

である．すなわち，$\epsilon$ は乗法を保つ．以上より，$\epsilon\colon \mathbf{W}^*(A) \to A$ は対合準同型である．

さて，$\operatorname{Ker}\epsilon$ は $\mathbf{W}^*(A)$ の超弱閉な両側イデアルだったから，中心射影 $z \in \mathbf{PZ}(\mathbf{W}^*(A))$ を用いて $\operatorname{Ker}\epsilon = \mathbf{W}^*(A)(1-z)$ と書ける（定理 1.21, 命題 1.26）．$\mathbf{W}^*(A)$ は対合代数として $\mathbf{W}^*(A) = \mathbf{W}^*(A)z \oplus \mathbf{W}^*(A)(1-z)$ と直和分解されるから，包含対合準同型 $\mathbf{W}^*(A)z \to \mathbf{W}^*(A)$ と対合準同型 $\epsilon\colon \mathbf{W}^*(A) \to A$ の合成を $\phi\colon \mathbf{W}^*(A)z \to A$ と置くと，$\phi$ は対合同型である．$\mathbf{W}^*(A)z$ は W* 代数だから，$A$ も W* 代数である．

<u>最後の主張</u> 前項の記号をそのまま用いる．対合同型 $\phi\colon \mathbf{W}^*(A)z \to A$ による引き戻しによって，$\Phi^*(V) \subseteq A^*$ が $(\mathbf{W}^*(A)z)_* \subseteq (\mathbf{W}^*(A)z)^*$ に移されることを示せばよい．$V$ は $V^{**}$ のノルム閉部分線型空間だから，$\Phi^*(V)$ は $A^*$ のノルム閉部分線型空間である．$V^*$ と $V^{**}$ の間の自然なペアリングに関する $\Phi^*(V)$ の極集合は $\operatorname{Ker}\epsilon = \mathbf{W}^*(A)(1-z)$ だから，双極定理より，

$$\begin{aligned}
\Phi^*(V) &= \{\omega \in A^* \mid \langle \omega, \mathbf{W}^*(A)(1-z)\rangle = 0\} \\
&= \{\omega \in A^* \mid \langle \omega \cdot (1-z), \mathbf{W}^*(A)\rangle = 0\} \\
&= \{\omega \in A^* \mid \omega \cdot (1-z) = 0\} \\
&= A^* \cdot z
\end{aligned}$$

である．$\omega \in A^*$ に対して，$\omega z$ の $\phi$ による引き戻しを計算すると

$$\langle \phi^*(\omega z), x\rangle = \langle \omega, z\epsilon(x)\rangle = \langle \omega, zx\rangle = \langle \omega, x\rangle \qquad (x \in \mathbf{W}^*(A)z)$$

となる（第二の等号は，$x - \epsilon(x) \in \operatorname{Ker}\epsilon = \mathbf{W}^*(A)(1-z)$ より $z(x - \epsilon(x)) = 0$ であることから従う）．以上

より，$\phi$ による引き戻しによって，$\varPhi^*(V)$ は

$$\phi^*(\varPhi^*(V)) = \phi^*(A^* \cdot z) = \{\omega|_{\mathbf{W}^*(A)z} \mid \omega \in A^*\} = (\mathbf{W}^*(A)z)_*$$

に移される．これで，主張が示された． □

## 3.4 前双対における極分解

**補題 3.21** W* 代数 $M$ 上の正規な線型形式 $\omega$ に対して，$x \in \mathrm{Ball}(M)$ であって $\omega(x) = \|\omega\|$ を満たすものが存在する．

**証明** 単位閉球 $\mathrm{Ball}(M)$ は超弱コンパクトだから（命題 3.6），超弱連続な関数 $x \mapsto |\omega(x)|$ は $\mathrm{Ball}(M)$ 上で最大値をとる．すなわち，$|\omega(x)| = \|\omega\|$ を満たす $x \in \mathrm{Ball}(M)$ が存在する．$x$ に絶対値 1 のスカラーを掛けて調節すれば，$\omega(x) = \|\omega\|$ となる． □

**補題 3.22** W* 代数 $M$ 上の正規な線型形式 $\omega$ と射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ について，次の条件は同値である．

(a) $\mathrm{s_L}(\omega) \le e$.
(b) $\|e \cdot \omega\| = \|\omega\|$.

**証明** (a) $\Longrightarrow$ (b) 明らかである．

(b) $\Longrightarrow$ (a) $M$ 上の正規な線型形式 $\omega$ と射影 $e \in \mathbf{P}(M)$ について，$\|e \cdot \omega\|^2 + \|(1-e)\cdot\omega\|^2 \le \|\omega\|^2$ であることを示せば十分である．$s,\, t \ge 0$，$\epsilon > 0$ として，これに対して $x,\, y \in \mathrm{Ball}(A)$ を，

$$s\|e\cdot\omega\| + t\|(1-e)\cdot\omega\| \le s(e\cdot\omega)(x) + t((1-e)\cdot\omega)(y) + \epsilon$$

を満たすようにとる．すると，

$$\begin{aligned}
s\|e\cdot\omega\| + t\|(1-e)\cdot\omega\| &\le s(e\cdot\omega)(x) + t((1-e)\cdot\omega)(y) + \epsilon \\
&= \omega(sxe + ty(1-e)) + \epsilon \\
&\le \|\omega\|\|sxe + ty(1-e)\| + \epsilon \\
&= \|\omega\|\|(sxe + ty(1-e))(sxe + ty(1-e))^*\|^{1/2} + \epsilon \\
&= \|\omega\|\|s^2xex^* + t^2y(1-e)y^*\|^{1/2} + \epsilon \\
&\le (s^2+t^2)^{1/2}\|\omega\| + \epsilon
\end{aligned}$$

であり，$\epsilon \to 0+$ とすれば，

$$s\|e\cdot\omega\| + t\|(1-e)\cdot\omega\| \le (s^2+t^2)^{1/2}\|\omega\|$$

となる．$s = \|e\cdot\omega\|$，$t = \|(1-e)\cdot\omega\|$ と置いて，上式の両辺を $(s^2+t^2)^{1/2}$ で割れば，

$$(\|e\cdot\omega\|^2 + \|(1-e)\cdot\omega\|^2)^{1/2} \le \|\omega\|$$

を得る． □

**補題 3.23** W* 代数 $M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega$ と $a \in \mathrm{Ball}(M)$ について，$a\cdot\omega$ が正値であり，かつ $\|a\cdot\omega\| = \|\omega\|$ ならば，$a\cdot\omega = \omega$ である．

**証明**　一般性を失わず，$\|a\cdot\omega\| = \|\omega\| = 1$ であると仮定する．$\omega$ が定める巡回ベクトル付き表現 [11, 定義 4.36] を $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ とすると，

$$\langle\xi|\pi(a)\xi\rangle = \omega(a) = (a\cdot\omega)(1) = \|a\cdot\omega\| = 1$$

である（事実 B.6）．一方で，$\|a\| \leq 1$ かつ $\|\xi\| = \|\omega\|^{1/2} = 1$ だから，Cauchy–Schwarz の不等式の等号成立条件より，$\pi(a)\xi = \xi$ が成り立つ．よって，任意の $x \in M$ に対して，

$$(a\cdot\omega)(x) = \omega(xa) = \langle\xi|\pi(xa)\xi\rangle = \langle\xi|\pi(x)\xi\rangle = \omega(x)$$

である．□

**定理 3.24**　$M$ を W* 代数とし，$\phi$ をその上の正規な線型形式とする．

(1) $M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega$ と部分等長元 $u \in M$ であって，

$$\phi = u\cdot\omega, \qquad \omega = u^*\cdot\phi, \qquad \|\omega\| = \|\phi\|,$$
$$\mathrm{s_R}(u) = \mathrm{s_R}(\phi) = \mathrm{s}(\omega), \qquad \mathrm{s_L}(u) = \mathrm{s_L}(\phi)$$

を満たすものが存在する．

(2) $M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega'$ と部分等長元 $u' \in M$ が，$\phi = u'\cdot\omega'$ かつ $\mathrm{s_R}(u') = \mathrm{s}(\omega')$ を満たすならば，これらはそれぞれ (1) の $\omega$ と $u$ に一致する．

**証明**　(1)　補題 3.21 より，$\phi(x) = \|\phi\|$ を満たす $x \in \mathrm{Ball}(M)$ がとれる．必要ならば $\mathrm{s_R}(\phi)x\,\mathrm{s_L}(\phi)$ を改めて $x$ と置き直すことで，$\mathrm{s_R}(x) \leq \mathrm{s_L}(\phi)$ かつ $\mathrm{s_L}(x) \leq \mathrm{s_R}(\phi)$ であるとする．$x^*$ の極分解を $(u, |x^*|)$ として，$\omega = u^*\cdot\phi \in M_*$ と置く．極分解の性質より

$$\omega(|x^*|) = \phi(|x^*|u^*) = \phi(x) = \|\phi\| \geq \|u^*\|\|\phi\| \geq \|\omega\|$$

だから，事実 B.12 より，$\omega$ は正値である．

前段で定めた $M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega$ と部分等長元 $u \in M$ が，主張の性質を満たすことを示す．極分解 $(u, |x^*|)$ の性質と $x$ のとり方より，

$$\mathrm{s_R}(u) = \mathrm{s_R}(x^*) = \mathrm{s_L}(x) \leq \mathrm{s_R}(\phi), \tag{$*$}$$
$$\mathrm{s_L}(u) = \mathrm{s_L}(x^*) = \mathrm{s_R}(x) \leq \mathrm{s_L}(\phi) \tag{$**$}$$

である．また，$x$ のとり方と極分解の性質より

$$\|\phi\| = \phi(x) = \phi(x\,\mathrm{s_R}(x)) = \phi(x\,\mathrm{s_L}(x^*)) = \phi(x\,\mathrm{s_L}(u)) = (\mathrm{s_L}(u)\cdot\phi)(x)$$

だから，$\|\mathrm{s_L}(u)\cdot\phi\| = \|\phi\|$ である．したがって，補題 3.22 より

$$\mathrm{s_L}(\phi) \leq \mathrm{s_L}(u) \tag{$***$}$$

であり，これより

$$\phi = \mathrm{s_L}(u)\cdot\phi = uu^*\cdot\phi = u\cdot\omega \tag{$****$}$$

を得る．($**$) と ($***$) より，$\mathrm{s_L}(u) = \mathrm{s_L}(\phi)$ である．また，($****$) より，$\mathrm{s_R}(\phi) \leq \mathrm{s}(\omega)$ であり，$\mathrm{s_R}(u)\cdot\omega = uu^*\cdot\omega = u\cdot\phi = \omega$ だから $\mathrm{s}(\omega) \leq \mathrm{s_R}(u)$ であることもわかる．これらの比較と ($*$) を合わせて，

$s_R(u) = s_R(\phi) = s(\omega)$ を得る．最後に，前段ですでに述べたように $\|\omega\| \le \|\phi\|$ であり，(****) より $\|\phi\| \le \|u\|\|\omega\| \le \|\omega\|$ だから，$\|\omega\| = \|\phi\|$ である．これで，すべての性質が示された．

(2)　$M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega'$ と部分等長元 $u' \in M$ が，$\phi = u' \cdot \omega'$ かつ $s_R(u') = s(\omega')$ を満たすとする．すると，

$$\omega' = s_R(u') \cdot \omega' = (u')^* u' \cdot \omega' = (u')^* \cdot \phi$$

である．また，$\phi = u' \cdot \omega'$ より $\|\phi\| \le \|u'\|\|\omega'\| \le \|\omega'\|$ であり，$\omega' = (u')^* \cdot \phi$ より $\|\omega'\| \le \|(u')^*\|\|\phi\| \le \|\phi\|$ だから，$\|\omega'\| = \|\phi\|$ である．

まず，$\omega' = \omega$ を示す．$\omega = u^* \cdot \phi = u^* u' \cdot \omega'$ であり，前段で述べたことより $\|\omega'\| = \|\phi\| = \|\omega\|$ である．よって，補題 3.23 より，$\omega' = \omega$ である．

前段の結果より，$s_R(u) = s(\omega) = s(\omega') = s_R(u')$ である．この共通の射影を $e$ と置いて，$u^* u' = e$ を示す．$u^* u' \cdot \omega = u^* u' \cdot \omega' = u^* \cdot \phi = \omega$ より $\omega(u^* u') = \omega(1) = \|\omega\|$（事実 B.6）だから，事実 B.7 (2) より

$$\|\omega\|^2 = |\omega(u^* u')|^2 \le \|\omega\| \omega((u^* u')^* (u^* u')) \le \|\omega\|^2$$

であり，$\omega((u^* u')^* (u^* u')) = \|\omega\|$ を得る．したがって，

$$\begin{aligned}
\omega((e - u^* u')^* (e - u^* u')) &= \omega(e) + \omega((u^* u')^* (u^* u')) - 2 \operatorname{Re} \omega(e u^* u') \\
&= \omega(1) + \omega((u^* u')^* (u^* u')) - 2 \operatorname{Re} \omega(u^* u') \\
&= \|\omega\| + \|\omega\| - 2\|\omega\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

である．$s_R(u)$ と $s_R(u')$ がともに $e$ であることより $u^* u' = e u^* u' e \in eMe$ であり，$\omega$ は $eMe = s(\omega) M s(\omega)$ 上で忠実だから（命題 2.14），上式より $u^* u' = e$ である．

以上を踏まえて，$u' = u$ を示す．一般性を失わず，$M$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であると仮定する．$u$ と $u'$ はともに $e\mathcal{H}$ を始空間とする部分等長作用素だから，任意の $\xi \in e\mathcal{H}$ に対して $u'\xi = u\xi$ であることを示せばよい．前段で示したように $u^* u' = e$ だから，

$$u^* u' \xi = e\xi = \xi = u^* u \xi$$

である．$u\xi$ は $u^*$ の始空間に属する．また，上式より $\|u^* u' \xi\| = \|\xi\| \ge \|u'\xi\|$ だから，$u'\xi$ も $u^*$ の始空間に属する．よって，上式から，$u'\xi = u\xi$ を得る．これで，主張が示された．□

**定義 3.25（前双対における極分解）**　W* 代数 $M$ 上の正規な線型形式 $\phi$ に対して，$M$ 上の正規な正値線型形式 $\omega$ と部分等長元 $u \in M$ を定理 3.24 で定まるものとするとき，$(u, \omega)$ を $\phi$ の**極分解**（polar decomposition）という．この $\omega$ を，$\phi$ の**絶対値**（absolute value）といい，$|\phi|$ と書く．

**例 3.26**　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，von Neumann 代数 $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の前双対を $\mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ と同一視する（例 2.4）．$t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ に対して，その作用素としての極分解を $(u, |t|)$ とする．すると，$|t| \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})_+$ であり，$u$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の部分等長元であり，例 2.9 より

$$t = u|t| = u \cdot |t|, \qquad s_R(u) = s_R(t) = s(|t|)$$

が成り立つ．よって，$t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ の前双対の元としての極分解は，$(u, |t|)$ である．

**例 3.27** $(\Omega,\mu)$ を分解可能な測度空間とし，W* 代数 $L^\infty(\Omega,\mu)$ の前双対を $L^1(\Omega,\mu)$ と同一視する（例 2.5）．$t\in L^1(\Omega,\mu)$ に対して，その関数としての絶対値 $|t|$ を考え，$u\in L^\infty(\Omega,\mu)$ を

$$u(\omega)=\begin{cases} t(\omega)/|t(\omega)| & (t(\omega)\neq 0) \\ 0 & (t(\omega)=0) \end{cases}$$

と定める．すると，$|t|\in L^1(\Omega,\mu;\mathbb{R}_{\geq 0})$ であり，$u$ は $L^\infty(\Omega,\mu)$ の部分等長元であり，例 2.10 より

$$t=u|t|=u\cdot|t|,\qquad \mathrm{s}_{\mathrm{R}}(u)=\chi_{t^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})}=\mathrm{s}(|t|)$$

（$\chi_{t^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})}$ は，$t^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ の特性関数を表す）が成り立つ．よって，$t\in L^1(\Omega,\mu)$ の前双対の元としての極分解は，$(u,|t|)$ である．

**定義 3.28（C* 代数上の連続線型形式の絶対値）** $A$ を C* 代数とし，その包絡 W* 代数 $\mathbf{W}^*(A)$ を考え，$\iota\colon A^*\to\mathbf{W}^*(A)_*$ を自然な等長線型同型（定理 3.12 (2)）とする．$A$ 上の連続線型形式 $\phi$ の**絶対値**を，$|\phi|=\iota^{-1}(|\iota(\phi)|)$ と定める．ここで，右辺の $|{-}|$ は，定義 3.25 で定めた絶対値を表す．

**注意 3.29** 上記のとおり，W* 代数 $M$ 上の正規な線型形式 $\phi$ に対して，その極分解 $(u,|\phi|)$（$u$ は $M$ の部分等長元）が定まる．一方で，$M$ の包絡 W* 代数 $\mathbf{W}^*(M)$ を考え，$\iota\colon M^*\to\mathbf{W}^*(M)_*$ を自然な等長線型同型（定理 3.12 (2)）とすると，$\iota(\phi)$ の極分解 $\iota(\phi)=v\cdot|\iota(\phi)|$（$v$ は $\mathbf{W}^*(M)$ の部分等長元）も定まる．これら二つの極分解について，$u$ と $v$ は $\mathbf{W}^*(M)$ において一致するとは限らないが（Dixmier [3, §12.5.7] を参照のこと），$\iota(|\phi|)=|\iota(\phi)|$ は成り立つ．すなわち，定義 3.25 で定まる絶対値 $|\phi|$ と，定義 3.28 で $A=M$ として定まる絶対値 $|\phi|$ とは一致する．このことを示そう．

$\iota(|\phi|)$ と $u^*\cdot\iota(\phi)$ はともに $\mathbf{W}^*(M)$ 上の正規な線型形式であり，$x\in M$ に対しては

$$\iota(|\phi|)(x)=|\phi|(x)=(u^*\cdot\phi)(x)=(u^*\cdot\iota(\phi))(x)$$

である．$M$ は $\mathbf{W}^*(M)$ において超弱稠密だから（定理 3.12 (3)），上式より，$\iota(|\phi|)=u^*\cdot\iota(\phi)$ が成り立つ．よって，

$$\iota(|\phi|)=u^*\cdot\iota(\phi)=u^*v\cdot|\iota(\phi)|$$

である．$\iota(|\phi|)$ と $|\iota(\phi)|$ はともに $\mathbf{W}^*(M)$ 上の正規な正値線型形式であり，そのノルムはともに $\|\phi\|$ に等しいから，上式と補題 3.23 を合わせて，$\iota(|\phi|)=|\iota(\phi)|$ を得る．

## 3.5 Hermite 線型形式の Jordan 分解

**命題 3.30** $M$ を W* 代数とし，$\phi_1,\phi_2$ をその上の正規な正値線型形式とする．

(1) $\|\phi_1-\phi_2\|=\|\phi_1\|+\|\phi_2\|$ であることと，$\mathrm{s}(\phi_1)\perp\mathrm{s}(\phi_2)$ であることとは同値である．

(2) (1) の同値な条件の下で，$\phi_1-\phi_2$ の極分解は，$(\mathrm{s}(\phi_1)-\mathrm{s}(\phi_2),\phi_1+\phi_2)$（特に，$|\phi_1-\phi_2|=\phi_1+\phi_2$）である．

**証明** まず，$\mathrm{s}(\phi_1)\perp\mathrm{s}(\phi_2)$ であるとして，(2) の主張が成り立ち，かつ $\|\phi_1-\phi_2\|=\|\phi_1\|+\|\phi_2\|$ であることを示す．仮定より $\mathrm{s}(\phi_2)\cdot\phi_1=\mathrm{s}(\phi_1)\cdot\phi_2=0$ だから，$(\mathrm{s}(\phi_1)-\mathrm{s}(\phi_2))\cdot(\phi_1+\phi_2)=\phi_1-\phi_2$ である．また，仮定より，$\mathrm{s}(\phi_1)-\mathrm{s}(\phi_2)$ は部分等長であり，その始射影および終射影は $\mathrm{s}(\phi_1)+\mathrm{s}(\phi_2)=\mathrm{s}(\phi_1+\phi_2)$（系 2.13）

に等しい．よって，$\phi_1 - \phi_2$ の極分解は，$(\mathrm{s}(\phi_1) - \mathrm{s}(\phi_2), \phi_1 + \phi_2)$ である．特に，$|\phi_1 - \phi_2| = \phi_1 + \phi_2$ だから，絶対値の性質（定理 3.24）と事実 B.9 より，

$$\|\phi_1 - \phi_2\| = \|\phi_1 + \phi_2\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$$

である．

次に，$\|\phi_1 - \phi_2\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$ であるとして，$\mathrm{s}(\phi_1) \perp \mathrm{s}(\phi_2)$ であることを示す．補題 3.21 より，$x \in \mathrm{Ball}(M)$ であって $(\phi_1 - \phi_2)(x) = \|\phi_1 - \phi_2\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$ を満たすものが存在する．必要ならば $x$ の実部を $x$ と置き直すことで，一般性を失わず，$x$ は Hermite であるとする．$x$ を正の部分 $x^+$ と負の部分 $x^-$ に分解すると，

$$\phi_1(x^+) + \phi_2(x^-) - \phi_1(x^-) - \phi_2(x^+) = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|$$

となるが，この等式の左辺の各項は 0 以上であり，$\phi_1(x^+) \leq \|\phi_1\|$ かつ $\phi_2(x^-) \leq \|\phi_2\|$ だから，$\phi_1(x^+) = \|\phi_1\|$ かつ $\phi_2(x^-) = \|\phi_2\|$ でなければならない．$x^+$ の台射影 $\mathrm{s}(x^+)$ を考えると，$x^+ \leq \mathrm{s}(x^+)$（$\|x\| \leq 1$ だから，$x$ のスペクトル測度を $E$ と書くと，$\mathrm{s}(x^+) = E(\mathbb{R}_{>0}) = E((0,1])$ である．このことから従う）より

$$\|\phi_1\| = \phi_1(x^+) \leq \phi_1(\mathrm{s}(x^+)) \leq \|\phi_1\|$$

だから，$\phi_1(\mathrm{s}(x^+)) = \|\phi_1\| = \phi_1(1)$ である（事実 B.6）．これは，$\mathrm{s}(\phi_1) \leq \mathrm{s}(x^+)$ を意味する（命題 2.11）．同様に，$\mathrm{s}(\phi_2) \leq \mathrm{s}(x^-)$ である．$\mathrm{s}(x^+) \perp \mathrm{s}(x^-)$ だから（$x$ のスペクトル測度を $E$ と書くと，$\mathrm{s}(x^+) = E(\mathbb{R}_{>0})$ かつ $\mathrm{s}(x^-) = E(\mathbb{R}_{<0})$ である．このことから従う），これで，$\mathrm{s}(\phi_1) \perp \mathrm{s}(\phi_2)$ が示された． □

**定理 3.31**　W* 代数 $M$ 上の正規な Hermite 線型形式 $\phi$ に対して，$M$ 上の正規な正値線型形式 $\phi^+$, $\phi^-$ であって，$\phi = \phi^+ - \phi^-$ かつ $\|\phi\| = \|\phi^+\| + \|\phi^-\|$（命題 3.30 より，これは，$\mathrm{s}(\phi^+) \perp \mathrm{s}(\phi^-)$ と同値である）を満たすものが一意に存在し，これらは

$$\phi^+ = \frac{1}{2}(|\phi| + \phi), \qquad \phi^+ = \frac{1}{2}(|\phi| - \phi)$$

で与えられる．

**証明**　<u>存在</u>　一般性を失わず，$M$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数であると仮定する．Hahn–Banach の拡張定理より，$\phi$ を拡張する $\mathscr{L}(\mathcal{H})_*$ の元であって，そのノルムが $\|\phi\|$ と等しいものが存在する．すなわち，ある $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{H})$ であって，$\phi(x) = \mathrm{tr}(tx)$（$x \in M$）かつ $\|t\|_1 = \|\phi\|$ を満たすものが存在する（例 2.4）．必要ならば $(t + t^*)/2$ を改めて $t$ と置き直すことで，$t$ は自己随伴であるとする．Hilbert 空間の一般論より，$t$ の正の部分 $t^+$ と負の部分 $t^-$ はともにトレースクラス作用素であり，$\|t\|_1 = \|t^+\|_1 + \|t^-\|_1$ を満たす．そこで，

$$\phi^+(x) = \mathrm{tr}(t^+ x), \qquad \phi^-(x) = \mathrm{tr}(t^- x) \qquad (x \in M)$$

と定めると，$\phi^+$ と $\phi^-$ は $M$ 上の正規な正値線型形式であり，$\phi = \phi^+ - \phi^-$ かつ

$$\|\phi\| = \|t\|_1 = \|t^+\|_1 + \|t^-\|_1 = \|\phi^+\| + \|\phi^-\|$$

を満たす（定理 2.16）．

<u>一意性および最後の主張</u>　$\phi^+$ と $\phi^-$ が条件を満たすとすると，$\phi = \phi^+ - \phi^-$ であり，また，命題 3.30 より $|\phi| = \phi^+ + \phi^-$ である．よって，$\phi^+ = (|\phi| + \phi)/2$ かつ $\phi^- = (|\phi| - \phi)/2$ であり，$\phi^+$ と $\phi^-$ は一意に定まる． □

**系 3.32**　C* 代数 $A$ 上の連続な Hermite 線型形式 $\phi$ に対して，$A$ 上の正値線型形式 $\phi^+$, $\phi^-$ であって，$\|\phi\| = \|\phi^+\| + \|\phi^-\|$ かつ $\phi = \phi^+ - \phi^-$ を満たすものが一意に存在し，これらは

$$\phi^+ = \frac{1}{2}(|\phi| + \phi), \qquad \phi^+ = \frac{1}{2}(|\phi| - \phi)$$

で与えられる．

**証明**　$A$ の双対 $A^*$ は，$A$ の包絡 W* 代数の前双対 $\mathbf{W}^*(A)_*$ に自然に等長線型同型である（定理 3.12 (2)）．よって，$\mathbf{W}^*(A)_*$ に定理 3.31 を適用すればよい．□

**注意 3.33**　一意性からわかるように，W* 代数 $M$ 上の正規な Hermite 線型形式 $\phi$ に対して，定理 3.31 で定まる $\phi^+$, $\phi^-$ と，系 3.32 で $A = M$ として定まる $\phi^+$, $\phi^-$ とは一致する．

**定義 3.34（連続な Hermite 線型形式の正の部分・負の部分）**　C* 代数 $A$ 上の連続な Hermite 線型形式 $\phi$ に対して，系 3.32 で定まる $A$ 上の正値線型形式 $\phi^+$, $\phi^-$ を，それぞれ $\phi$ の**正の部分**（positive part），**負の部分**（negative part）という．

# 付録 A　作用素位相に関する事実

本付録では，本稿で用いられる作用素位相に関する事実をまとめる．証明は，「Hilbert 空間」[10, 5 節] を参照のこと．

## A.1　弱位相，強位相，強対合位相

**事実 A.1（[10, 命題 5.3]）**　$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 合成をとる $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L}) \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ への写像 $(y,x) \mapsto yx$ は，
  - (1-1) 弱分離連続，強分離連続，強対合分離連続であり，
  - (1-2) $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $T \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ をノルム有界集合とすると，$T \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上で強連続，$T \times S$ 上で強対合連続であり，
  - (1-3) 強点列連続かつ強対合点列連続である．

(2) 随伴をとる $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto x^*$ は，
  - (2-1) 弱連続かつ強対合連続であり，
  - (2-2) $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ である場合，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素全体のなす集合上で強連続である．

**事実 A.2（[10, 系 5.4]）**　Hilbert 空間上の連続正規作用素全体のなす集合上では，超強位相と超強対合位相は一致する．

**事実 A.3（[10, 命題 5.5]）**　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，$A$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間とする．$A$ 上の線型形式 $\omega$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\omega$ は弱連続である．
(b) $\omega$ は強連続である．
(c) $\omega$ は強対合連続である．

(d) $\omega$ は，$\xi \in \mathcal{H}$ と $\eta \in \mathcal{K}$ に対する $A$ 上の線型形式 $x \mapsto \langle \eta | x\xi \rangle$ の有限線型結合として書ける．

**事実 A.4**（[10, 系 5.6]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．部分集合 $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，その弱凸閉包，強凸閉包，強対合凸閉包は一致する．

## A.2　超弱位相，超強位相，超強対合位相

**事実 A.5**（[10, 命題 5.10]）　$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ を Hilbert 空間とする．

(1) 合成をとる $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L}) \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{L})$ への写像 $(y, x) \mapsto yx$ は，
  (1-1) 超弱分離連続であり，
  (1-2) $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ と $T \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{L})$ をノルム有界集合とすると，$T \times \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ 上で超強連続，$T \times S$ 上で超強対合連続であり，
  (1-3) 超強点列連続かつ超強対合点列連続である．
(2) 随伴をとる $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ から $\mathscr{L}(\mathcal{K};\mathcal{H})$ への写像 $x \mapsto x^*$ は，
  (2-1) 超弱連続かつ超強対合連続であり，
  (2-2) $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ である場合，$\mathcal{H}$ 上の連続正規作用素全体のなす集合上で超強連続である．

**事実 A.6**（[10, 系 5.11]）　Hilbert 空間上の連続正規作用素全体のなす集合上では，超強位相と超強対合位相は一致する．

**事実 A.7**（[10, 命題 5.12]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，$A$ を $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の部分線型空間とする．$A$ 上の線型形式 $\omega$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $\omega$ は超弱連続である．
(b) $\omega$ は超強連続である．
(c) $\omega$ は超強対合連続である．
(d) ある $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ と $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\widehat{\oplus}\mathbb{N}}$ が存在して，$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \eta_n | x\xi_n \rangle$（$x \in A$）と書ける．
(e) ある $t \in \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})$ が存在して，$\omega(x) = \mathrm{tr}(tx)$（$x \in A$）と書ける．

**事実 A.8**（[10, 系 5.13]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．部分集合 $S \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ に対して，その超弱凸閉包，超強凸閉包，超強対合凸閉包は一致する．

**事実 A.9**（[10, 命題 5.14]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\varPhi(x)(t) = \mathrm{tr}(tx) = \mathrm{tr}(xt)$ によって定まる等長線型同型作用素 $\varPhi\colon \mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K}) \to \mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})^*$ [10, 定理 4.41] を通して，$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の超弱位相は $\mathscr{L}^1(\mathcal{K};\mathcal{H})^*$ の汎弱位相に対応する．

**事実 A.10**（[10, 系 5.15]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の（作用素ノルムに関する）閉球は，弱コンパクトかつ超弱コンパクトである．

**事実 A.11**（[10, 命題 5.16]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とする．$\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ のノルム有界集合上では，弱位相と超弱位相，強位相と超強位相，強対合位相と超強対合位相は，それぞれ一致する．

**事実 A.12**（[10, 命題 5.17]）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$(x_i)_{i\in I}$ は $\mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ 上のネットであり，順序 $\leq$ に関

して増加（すなわち，$i \le j$ ならば $x_i \le x_j$）かつ上に有界（すなわち，ある $b \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して $x_i \le b$）であるとする．このとき，$(x_i)_{i\in I}$ は，順序 $\le$ に関する上限 $x$ をもつ．さらに，$(x_i)_{i\in I}$ は，$x$ に超強対合収束する（したがって，弱・強・強対合・超弱・超強収束もする）．

### A.3　可分 Hilbert 空間の場合の作用素位相の性質

**事実 A.13**（[10, 命題 5.18]）　$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ を可分 Hilbert 空間とする．

(1) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ のノルム有界な部分集合は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関して可分かつ距離化可能である．
(2) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の（作用素ノルムに関する）閉球は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関してポーランド空間をなす（すなわち，可分かつ完備距離化可能である）．
(3) $\mathscr{L}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ の任意の部分集合は，弱位相，強位相，強対合位相，超弱位相，超強位相，超強対合位相に関して可分である．

### A.4　閉部分線型空間への制限と作用素位相

**事実 A.14**（[10, 系 5.21]）　$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$e$ を $\mathcal{H}$ 上の直交射影とする．

(1) $e\mathscr{L}(\mathcal{H})e = \{exe \mid x \in \mathscr{L}(\mathcal{H})\}$ は，$\mathscr{L}(\mathcal{H})$ の弱閉な（したがって，強・強対合・超弱・超強・超強対合閉でもある）部分対合代数であり，$e$ を乗法単位元にもつ．
(2) 写像 $x \mapsto [x]_e$ は，$e\mathscr{L}(\mathcal{H})e$ から $\mathscr{L}(e\mathcal{H})$ への弱・強・強対合・超弱・超強・超強対合同相な単位的対合同型を与える．

## 付録 B　C* 代数と正値線型形式に関する事実

本付録では，本稿で用いられる C* 代数と正値線型形式に関する事実をまとめる．証明は，「C* 代数」 [11, 3–4 節] を参照のこと．

### B.1　C* 代数

**事実 B.1**（[11, 定理 3.34]）　C* 代数の間の単射な対合準同型は，等長である．

**事実 B.2**（[11, 命題 3.57]）　$A$ を C* 代数とする．

(1) $A$ の任意の Hermite 元は，$A$ の正元二つの差として書ける．また，$A$ の任意の元は，$A$ の正元たかだか四つの線型結合として書ける．
(2) $A$ が単位的であるとする．このとき，$A$ の任意の Hermite 元は，$A$ のユニタリ元たかだか二つの実線型結合として書ける．また，$A$ の任意の元は，$A$ のユニタリ元たかだか四つの線型結合として書ける．

**事実 B.3**（[11, 系 3.72]）　$A$ を C* 代数とし，$L$ をその閉左イデアルとする．このとき，$L$ に属するノルム 1

以下の正元からなる増加ネット $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であって，任意の $x \in L$ に対して

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} xu_\lambda = x$$

を満たすものが存在する．

**事実 B.4**（[11, 系 3.78]）　$\phi\colon A \to B$ を C* 代数の間の対合準同型とする．$y \in \phi(A)$ とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$x \in A$ であって $\phi(x) = y$ かつ $\|x\| \le \|y\| + \epsilon$ を満たすものが存在する．さらに，$y$ が Hermite ならば $x$ も Hermite にとれ，$y$ が正ならば $x$ も正にとれる．

## B.2　正値線型形式

**事実 B.5**（[11, 命題 4.5]）　$A$ を対合代数とし，$f$ を $A$ 上の正値線型形式とする．

(1) $A \times A$ から $\mathbb{C}$ への写像 $(x, y) \mapsto f(x^*y)$ は，$A$ 上の正値 Hermite 形式である．
(2) 任意の $x,\, y \in A$ に対して，$|f(x^*y)|^2 \le f(x^*x)f(y^*y)$ である．

**事実 B.6**（[11, 命題 4.7]）　単位的対合 Banach 代数 $A$ 上の正値線型形式 $f$ は，連続である．さらに，$A$ のノルムが $\|1\| = 1$ を満たすならば，$\|f\| = f(1)$ である．

**事実 B.7**（[11, 命題 4.9]）　$A$ を近似単位元をもつ対合ノルム代数とし，$f$ を $A$ 上の連続な正値線型形式とする．

(1) $f$ は Hermite である．すなわち，任意の $x \in A$ に対して，$f(x^*) = \overline{f(x)}$ である．
(2) 任意の $x \in A$ に対して，$|f(x)|^2 \le \|f\| f(x^*x)$ である．
(3) $\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} f(x^*x)$ である．

**事実 B.8**（[11, 命題 4.14]）　$A$ を近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をもつ対合 Banach 代数とすると，$A$ 上の連続な正値線型形式 $f$ に対して，$\lim_{\lambda\in\Lambda} f(u_\lambda) = \|f\|$ である．

**事実 B.9**（[11, 系 4.15]）　近似単位元をもつ対合 Banach 代数 $A$ 上の連続な正値線型形式 $f,\, g$ に対して，$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ である．

**事実 B.10**（[11, 命題 4.18]）　C* 代数 $A$ 上の連続線型形式 $f$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $f$ は正値である．
(b) $A$ の任意の近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\lim_\lambda f(u_\lambda) = \|f\|$ である．
(c) $A$ のある近似単位元 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して，$\lim_\lambda f(u_\lambda) = \|f\|$ を満たす．

**事実 B.11**（[11, 系 4.19]）　単位的 C* 代数 $A$ 上の連続線型形式 $f$ に対して，次の条件は同値である．

(a) $f$ は正値である．
(b) $f(1) = \|f\|$ である．

**事実 B.12**（[11, 命題 4.20]）　$A$ を C* 代数とし，$f$ をその上の連続線型形式とする．ノルム 1 以下の正元 $x \in A_+$ であって $f(x) = \|f\|$ を満たすものが存在するならば，$f$ は正値である．

**事実 B.13**（[11, 補題 4.40]）　$A$ を近似単位元をもつ対合 Banach 代数とし，$(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を $A$ の巡回ベクトル付き対合表現，$f$ をそれが定める正値線型形式とする．また，

$$\mathscr{T}_\pi = \{T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}} \mid 0 \leq T \leq 1_{\mathcal{H}},\ T \text{ は } \pi(A) \text{ のすべての元と可換}\}$$

と置き，$T \in \mathscr{T}_\pi$ に対して，$A$ 上の正値線型形式 $f_T$ を

$$f_T(x) = \langle T^{1/2}\xi | \pi(x) T^{1/2}\xi \rangle \qquad (x \in A)$$

と定める．このとき，写像 $T \mapsto f_T$ は，$\mathscr{T}_\pi$ から $\{g \in A^*_+ \mid g \leq f\}$ への全単射を与える．

**事実 B.14**（[11, 定理 4.49]）　C* 代数 $A$ 上の任意の連続な Hermite 線型形式 $f$ に対して，$A$ 上の正値線型形式 $f^+$, $f^-$ であって，$f = f^+ - f^-$ かつ $\|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|$ を満たすものが存在する．

# 参考文献

全体を通して，Bratteli–Robinson [2], Dixmier [3], Dixmier [4], Murphy [5], Takesaki [6], 山上 [8] を参考にした．


[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 à 5*, Springer, 2007.

[2] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Springer, 1987.

[3] J. Dixmier, *C*-Algebras*, North-Holland, 2011.

[4] J. Dixmier, *Von Neuamnn Algebras*, North-Holland, 2011.

[5] G. J. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[6] M. Takesaki (竹崎正道), *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979.

[7] 宮島静雄,『関数解析』, 横浜図書，2005.

[8] 山上滋,『量子解析のための作用素環入門』, 共立出版，2019.

[9] 箱,「スペクトル分解」, 2024 年 9 月 21 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/spectral-decomposition.html

[10] 箱,「Hilbert 空間」, 2025 年 6 月 19 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/hilbert-space.html

[11] 箱,「C* 代数」, 2025 年 6 月 28 日版.
https://o-ccah.github.io/docs/cs-algebra.html